Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Konstrukce křivek u Descarta

The Construction of Curves by Descartes

Autor: Tomáš Fabián

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

Studijní program: Specializace v pedagogice (M – PG)

Praha 2013

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Konstrukce křivek u Descarta vypracoval pod vedením vedoucího bakalářské práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Datum

....

podpis

Děkuji prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, Dr. za jeho cenné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce. Rovněž děkuji těm, kteří mi ulehčením v mých pracovních povinnostech umožnili tuto práci sepsat.

NÁZEV:

Konstrukce křivek u Descarta

AUTOR:

Tomáš Fabián

KATEDRA:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

VEDOUCÍ PRÁCE:

prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

ABSTRAKT:

Tato práce se zabývá studiem konstrukcí algebraických křivek pomocí mechanických nástrojů navržených René Descartem. V práci je obsažen stručný Descartův životopis, je nastíněna Descartova vědecká metoda a je ukázán Descartův pohled na křivky, jejich konstrukci a využití. Prostředky dynamické geometrie jsou zde konstruovány křivky zavedené Descartem pomocí pravítkového přístroje, pravítkového přístroje pro hyperbolu a jeho různými variantami, kde vykreslující přímka je nahrazena některou z kuželoseček ve speciální poloze. V závěrečné části práce jsou ukázány konstrukce čtyř oválů využitelných v katoptrice a dioptrice, které Descartes konstruoval bodově. Všechny konstrukce jsou provedeny v programu Cabri Geometry II a jsou doplněny odvozením příslušných rovnic výsledných křivek. Při odvozování rovnic jsou použity jen elementární algebraické postupy, jichž by ve své době mohl využít i sám Descartes a které jsou srozumitelné i studentům středních škol.

KLÍČOVÁ SLOVA

Descartes, pravítkový přístroj, křivka, konchoida, trident, ovál

TITLE:

The Construction of Curves by Descartes

AUTHOR:

Tomáš Fabián

DEPARTMENT:

The Department of mathematics and teaching of mathematics

SUPERVISOR:

prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

ABSTRACT:

This work studies the construction of algebraic curves by means of mechanical plotting tools designed by René Descartes. The work includes a brief biography of Descartes, an outline of his scientific method and a description of Descartes' views on curves, their construction and use. By means of dynamic geometry several curves established by Descartes are constructed. These include curves constructed by means of a drawing instrument composed of several rulers; a drawing instrument designed for the hyperbola and its different variations, in which the guiding line is replaced by one of conics in a special position. In the final part we present the construction of four ovals, which are usable in catoptric and dioptric that Descartes constructed by a point wise construction. All drawings are made in Cabri Geometry II and are accompanied by a derivation of the equations of the resulting curves. In deriving these equations we used only elementary algebraic methods, which could be used by Descartes himself and which are comprehensible by secondary school students.

KEYWORDS:

Descartes, ruler device, curve, conchoid, trident, oval

Obsah

Úvod

Na myšlenku zpracovat v bakalářské práci Descartovské téma jsem připadl při čtení knihy Maria Livia *Je Bůh matematik*? Descart je pozoruhodnou osobností, která zasáhla do historického vývoje matematiky a filozofie, a jako takový si zaslouží více pozornosti. Zároveň je podle mého názoru škoda, že matematika je na našich školách žákům víceméně předkládána jako věda bez vlastního historického vývoje.

Tato práce si klade za cíl nastínit téma dnes již pozapomenuté dynamické geometrie na konkrétním příkladu konstrukce křivek v Descartově *Geometrii*. Pokud poslouží jako inspirace pro možnost propojení konstrukční a analytické geometrie s historií při výuce matematiky, bude cíle dosaženo.

S výjimkou rovnic oválů, jejichž odvození je převzato od doc. J. Fialy, jsou veškerá odvození rovnic křivek v této práci původní. Při odvozování jsem se snažil dodržet postup, který by mohl použít i sám Descart.

Oproti hojně rozšířené tradici v Descartově geometrii nenalezneme tzv. kartézskou soustavu souřadnic, tak jak ji známe dnes. Je sice pravdou, že Descartes při řešení úloh často využívá vztah dvou na sebe kolmých úseček x a y a že tento vztah vyjadřuje rovnicí, hodnoty x, y a jiné však pro něho vždy představují velikosti neznámých úseček, nenabívají záporných hodnot a nejsou souřadnicemi. Tímto způsobem budeme proměnným v rovnicích rozumět i my. Rovněž oproti dnešnímu značení velikosti úsečky $|AB|$ se přidržíme spolu s Descartem značení AB. Vzhledem k tomu, pak samozřejmě AB značí to samé jako BA apod.

Zlomky budeme v textu stejně jako Descartes uvádět ve formě $\frac{a}{b}$. V citacích Descartova textu se někdy stane, že je jeden vzorec rozdělen mezi dva řádky jednoduše v místě, kde sazba došla na konec řádku. To odpovídá způsobu jakým byl sázen i původní text v 17. století. Na rozdíl od Descartova zápisu naopak budeme zapisovat druhou mocninu formou x^2 a nikoliv xx. Rovněž se přidržíme dnes již zažitého znaménka = a nikoliv Descartem užívaného symbolu $\propto$.

Výkresy použité v této práci jsou rovněž původní. Narýsovány byly v programu Cabri Geometry II, verze 1.1.2. Výjimku tvoří Descartovy výkresy převzaté z jeho spisu *Geometrie*.

1. Stručný Descartův životopis

Ilustrace 1: Descartova socha v jeho rodišti (snímek pořízen v maps.google.com)

René Descartes, potomek šlechtického katolického rodu, se narodil 31.března 1596 ve francouzském městečku La Haye, jež dnes nese Descartovo jméno. Roku 1606 začal studovat na první francouzské jezuitské koleji v La Flèche. Zde se zabýval latinou, matematikou, klasickými studii, přírodními vědami a scholastickou filosofií. Kvůli svému chatrnému zdraví a díky známosti Descartovy rodiny s rektorem koleje, byl zproštěn povinnosti vstávat o brzké páté hodině ranní. Descart toho hojně využíval, trávil dopoledne obvykle na lůžku, kde se zaobíral, studiem, rozjímáním a přemýšlením. Tento zvyk mu pak vydržel po takřka celý zbytek života. Během studia se seznámil s Marinem Mersennem, s nímž ho pojilo celoživotní přátelství.

O tomto svém studiu Descartes říká: „Ve svých mladších letech studoval jsem trochu z věd filosofických logiku a z věd matematických geometrickou analysu a algebru, tři umění či vědy, jež, jak se zdálo mohly prospěti poněkud mému cíli. Avšak rozbíraje je, zpozoroval jsem, že v logice její sylogismy a většina jejích ostatních nauk spíše se hodí k tomu, vykládati druhému věci známé, anebo, jako nauka Lullova, mluviti bez soudnousti o věcech neznámých, než jim naučiti. A ačkoli logika obsahuje vskutku mnoho pravidel velmi pravdivých a velmi dobrých, je mezi nimi přimíšeno tolik jiných buď škodlivých nebo zbytečných … To bylo příčinou, že jsem pokládal za potřebné hledati nějakou metodu jinou, jež, majíc přednosti těchto tří, byla by prosta jejich chyb.“ (DESCARTES 1637a, str. 23)

Po ukončení studia v La Flèche absolvoval Descartes práva na univerzitě v Poitiers, praxi však nikdy neprovozoval. V roce 1618 vstoupil do holandského vojska prince Mořice Oranžského, od roku 1619 pak působil v armádě Maxmiliána I. Bavorského, vůdce katolické ligy. Traduje se, že se zúčastnil, jakožto důstojník této armády, na katolické straně bitvy na Bílé hoře. Konkrétní důkazy pro toto tvrzení však chybí. Po odchodu z armády roku 1621 Descartes střídavě pobývá ve Francii a Itálii. Roku 1628 se stěhuje do Holandska, kde setrvá dalších dvacet let. V letech 1629 – 1633 zde pracuje na spise *Svět* (*Le Mond*), který se však v reakci na proces s Galileo Galileim rozhodl nezveřejnit.

V Holandsku také roku 1637 vydává ve francouzštině svůj spis *Rozprava o metodě, jak správně vést svůj rozum a hledat pravdu ve vědách (Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, & chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Météores, et La Géometrie)*. Tento spis se obsahově nepřekrývá s *Rozpravou o metodě*, tak jak je vydávána v dnešní době. Původně vydaný spis obsahoval tři dodatky – o optice, meteorologii a geometrii. Dnešní „Rozprava" byla původně jen úvodní statí celého spisu. Hned již druhé vydání Rozpravy, první latinské, z roku 1644 již vychází, zřejmě s Descartovým souhlasem, bez třetího z dodatků – *Geometrie*. Ta vychází latinsky s komentáři samostatně až roku 1649. V roce 1641 vychází v Paříži Descartův spis *Úvahy o první filozofii, v nichž se dokazuje Boží existence a nesmrtelnost duše*.

Pro nás není bez zajímavosti, že v červenci 1642 v zámečku Endegeest u Leidenu se René Descartes setkal s J. A. Komenským. Jejich názory se podstatně odlišovaly a tak jejich setkání nepřekročilo rámec formální zdvořilosti.

Roku 1644 vyšlo v Amsterodamu největší Descartovo dílo *Základy filozofie*.

Tento spis byl dedikován princezně Alžbětě, se kterou si Descartes dopisoval. Princezna Alžběta byla dcerou Fridricha Falckého, který je u nás též známý jako Zimní král.

V únoru 1649 obdržel Descartes pozvání do Stockholmu od mladé královny Kristiny, tam se v září téhož roku vypravil. Švédské podnebí mu však nesvědčilo a již 11. února 1650, tedy přibližně po půl roce pobytu, umírá na zápal plic. Pochován byl nejprve ve Švédsku a roku 1667 byly jeho ostatky převezeny do Francie. Dnes je jeho tělo pochováno v kapli katedrály Saint-Germain-des-Prés v Paříži. Lebka je rovněž v Paříži, avšak je vystavena v Muzeu člověka.

2. Descartova metoda

Descartova metoda spočívala ve své podstatě na čtyřech jednoduchých pravidlech:

„První bylo, nepřijímati nikdy žádnou věc za pravdivou, již bych s evidencí jako pravdivou nebyl poznal: t. j. vyhnouti se pečlivě ukvapenosti a zaujatosti; a nezahrnovati nic víc do svých soudů než to, co by se objevilo tak jasně a zřetelně mému duchu, abych neměl žádnou možnost pochypovati o tom.

Druhé, rozděliti každou z otázek, jež bych prozkoumával, na tolik částí, jak je jen možno a žádoucno, aby byly lépe rozřešeny.

Třetí, vyvozovati v náležitém pořadí své myšlenky, počínaje předměty nejjednoduššími a nejsnáze poznatelnými, stoupaje povlovně jakoby se stupně na stupeň až k znalosti nejsložitějších, a předpokládaje dokonce řád i mezi těmi, jež přirozeně po sobě nenásledují.

A poslední, činiti všude tak úplné výčty a tak obecné přehledy, abych byl bezpečen, že jsem nic neopominul.“ (DESCARTES 1637a, str. 24)

Právě z prvního pravidla metody vychází notoricky známé moto Cogito ergo sum. Konkrétně Descartes říká: „Avšak ihned potom jsem si uvědomil, že, i když jsem chtěl myslit, že vše je klamné, je nezbytně nutno, abych já, který tak myslím, existoval; a pozoruje, že tato pravda: myslím tedy jsem, je tak pevná a jistá, že ani nejvýstřednější předpoklady skeptiků nejsou schopny jí otřásti, soudil jsem, že ji mohu přijmouti bez obavy za první zásadu filosofie, již jsem hledal.“ (DESCARTES 1637a, str. 40)

Geometrie, jak již bylo řečeno výše, byla v prvním vydání „*Rozpravy*“ jejím třetím dodatkem. V těchto dodatcích Descartes demonstruje aplikaci své metody při řešení konkrétních problémů. A právě použitím této své metody přináší do geometrie systematičnost, která v ní do té doby chyběla. „Nevěřím, že by si toho byli staří všimli, neboť jinak by nebyli napsali tolik tlustých knih, kde jen pouhé pořadí jejich vět nás poučuje o tom, že neměli správnou metodu pro nacházení všech vět, nýbrž že jen shromažďovali ty, na něž narazili.“ (DESCARTES 1637b, str. 7)

Prvním krokem bylo překonání překážky součinu dvou úseček, jehož výsledkem již od dob starého Řecka byl obsah plochy obdélníku. Descartes tento problém řeší geniálním, ale zároveň i velice jednoduchým způsobem. Hned ve druhém odstavci první části knihy *Geometrie* říká:

„Tak jako sestává celá aritmetika pouze ze čtyř nebo pěti operací, jimiž jsou sečítání, odečítání, násobení, dělení a odmocňování, jež lze pokládat za zvláštního druhu dělení, tak podobně v geometrii, která při nacházení hledaných úseček nemůže postupovat jinak, než že k nim přidává, nebo od nich odebírá úsečky jiné; nebo také tak, že vezme jednu úsečku, kterou budu nazývat jednotkou, aby se lépe ukázalo na souvislost s čísly, a kterou lze obvykle vybrat libovolně a k tomu ještě další dvě, aby se nalezla čtvrtá, která se má k jedné z těchto dvou tak jako jednotka k druhé z nich, což vede k dělení.“ (DESCARTES 1637b, str. 1)

Zavedení této jednotkové úsečky umožňuje kromě násobení a dělení definovat i mocninu a odmocninu úsečky, kde výsledkem je vždy opět úsečka. To dovoluje vzájemné propojení geometrie s aritmetikou a tedy i aplikaci aritmetických postupů v geometrii. Další je pak již jen čistě logickým vrstvením důsledků použitím Descartovy metody.

Zajímavým a důležitým přínosem pro novodobou matematiku je také Descartova symbolika, kterou zavádí hned vzápětí. Do dnešních dnů se zachovalo jeho značení neznámých veličin písmeny z konce abecedy – x, y, z, známých veličin z jejího počátku – a, b, c nebo značení mocnin – x^3. Tím jeho zápis získává na srozumitelnosti a je pochopitelný pro čtenáře i po více jak třech stoletích.

Následně se již Descart pouští do řešení rovnic a Pappovy úlohy. Vzhledem k tématu této práce se jimi nebudeme zabývat podrobněji. Všimneme si však závěru první části knihy, neboť nám vysvětluje důvod, proč Descartes, zdánlivě náhle, odbočuje od řešeného problému a nadále se věnuje křivkám: „ ... v důsledku čehož ji lze vyřešit pomocí křivky, která je nejvýše o jeden stupeň složitější než kuželosečky, a to způsobem, který zde vysvětlím později. A toto je první část toho, co jsem chtěl dokázat; ale dříve než přejdu k části druhé, je nezbytné, abych řekl něco obecně o povaze křivek.“ (DESCARTES 1637b, str. 16) Při řešení Pappovy úlohy se Descartes dostal až na samé hranice tehdejších znalostí o křivkách. Nebylo tedy možné v jejím řešení pokračovat, aniž by tyto hranice posunul dále. V důsledku toho je odbočka ke křivkám, typicky pro Descarta, logická a účelová.

3. Křivky v La Geometrie

Descartovi se jeví jako nevyhovující klasifikace geometrických úloh podle starých Řeků. „Staří si dobře všimli, že úlohy geometrie jsou zčásti rovinné, zčásti tělesné a zčásti křivkové, to znamená jedny, které lze konstruovat pouze pomocí přímek a kružnic, druhé, v nichž se použije aspoň jedna kuželosečka, zatímco třetí konečně vyžadují použití nějaké složitější křivky.“ (DESCARTES 1637b, str. 17) Descartes naproti tomu vyslovuje myšlenku, že není třeba v geometrii diskriminovat křivky, které lze narýsovat pomocí přístrojů jediným pohybem. Vždyť i přímku a kružnici „kreslíme na papír pomocí pravítka a kružítka, které lze právě tak označit za přístroje.“ (DESCARTES 1637b, str. 17) Důležitou podmínkou pro přijetí křivek do geometrie, a jejich další využívání při řešení úloh, je právě jejich nárýsovatelnost jedním pohybem. Proti nim stojí křivky jako spirála nebo kvadratrix, které lze narýsovat pouze dvěma souběžnými rovnoměrnými pohyby, z nichž jeden probíhá po přímce a druhý po kružnici, a které nelze vyjádřit algebraickými rovnicemi.

Podle Descarta: „Nelze ani odmítnout ty způsoby, kde se používá niti nebo provázku ke stanovení rovnosti nebo rozdílnosti dvou nebo více úseček, které lze vést z každého bodu hledané křivky k jiným bodům, nebo na jiné přímky pod určitými úhly.“ (DESCARTES 1637b, str. 39)

Při konstrukci oválů, které Descartes využívá v dioptrice, ale připouští a používá i konstrukci bodovou. Důvodem však jsou čistě technická omezení, na která narazil – jak si ukážeme později, je při jejich konstrukci jedním pohybem zapotřebí využít kružnic, které v závislosti na pohybu mění plynule svůj poloměr.

Křivky, které lze narýsovat jedním pohybem, Descartes nazývá geometrické, ostatní pak jsou mechanické. V dnešní terminologii, kterou zavedl roku 1684

G. W. Leibniz, se jedná o křivky algebraické, respektive transcendentní.[1] (LEIBNIZ 1684)

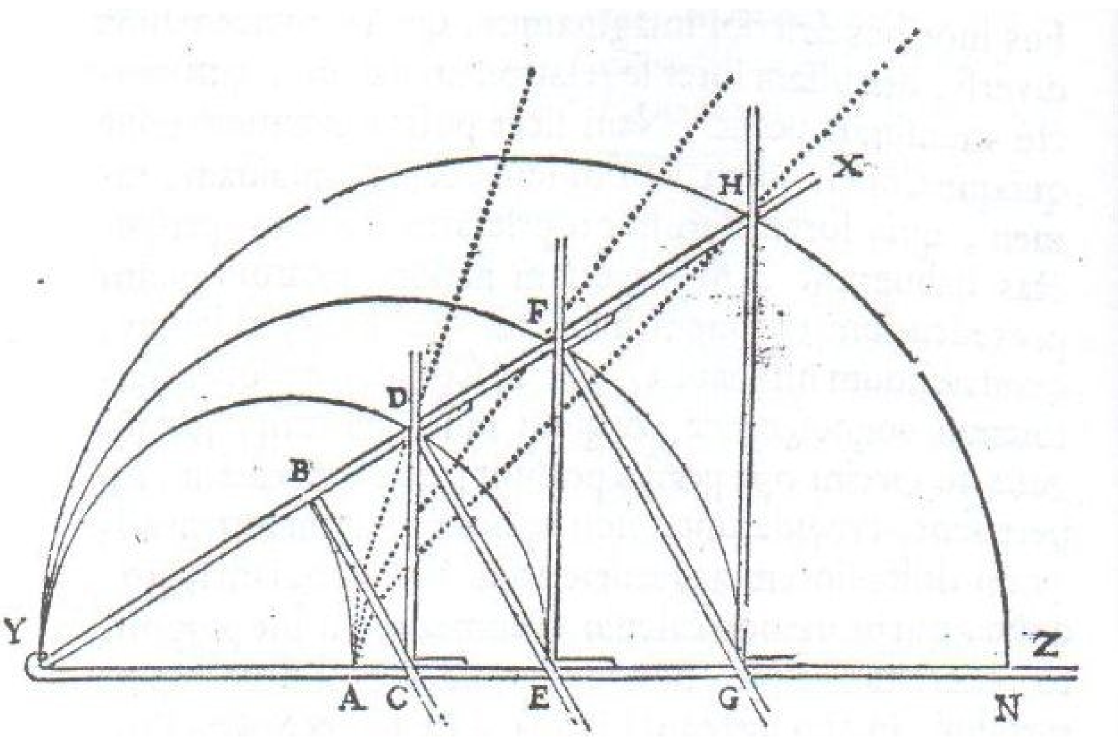
Souvislost mezi „narýsovatelnými" křivkami a křivkami, které lze definovat rovnicí, viděl již Descartes. „Abychom pochopili souhrn všech křivek, které se nacházejí v přírodě, a rozlišovali je podle pořadí do určitých rodů, neznám nic lepšího než říci, že všechny body těch křivek, které lze nazvat geometrickými, to jest těch, které spadají pod nějakou přesnou a exaktní míru, měly nutně nějaký vztah ke všem bodům nějaké přímky, který může být vyjádřen nějakou rovnicí, jednou a touž pro všechny body křivky." (DESCARTES 1637b, str. 21) To, že se jedná skutečně o množiny ekvivalentí, však byla dokázáno až mnohem později A. B. Kempem. (KEMPE 1877)

Rody křivek Descartes zavádí tak, že do prvního rodu řadí všechny kuželosečky, do druhého rodu křivky jejichž rovnice je třetího nebo čtvrtého stupně, do třetího rodu křivky s rovnicemi pátého a šestého stupně: a tak dále do nekonečna. Všimněme si, že přímka žádný přiřazený rod nemá.

1 V komentářích k českému vydání *Geometrie* (DESCARTES 1637b) doc. Fiala nesprávně používá termín transcendentální.

4. Pravítkový přístroj

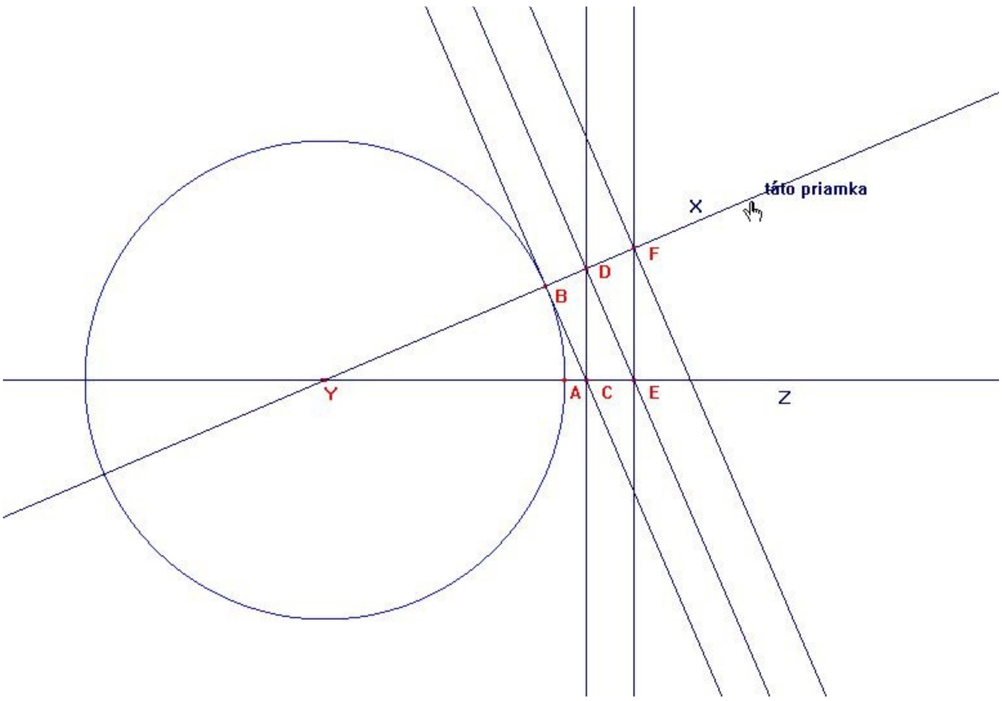
Pravítkový přístroj je prvním ze zařízení, jež Descartes navrhuje pro konstrukci křivek. „Tento přístroj sestává z několika pravítek spojených tak, že zůstává-li pravítko *YZ* na přímce *AN*, lze úhel *XYZ* rozevírat a svírat a jestliže je tento úhel úplně sevřený, pak body *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* splývají



Ilustrace 2: Descartova ilustrace pravítkového přístroje (DESCARTES 1637b, str. 20)

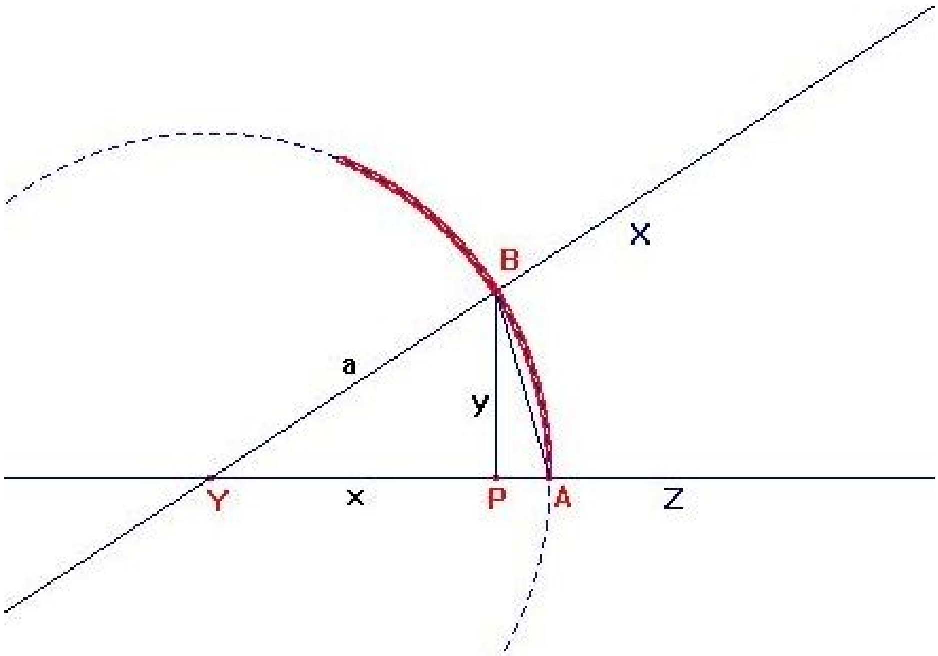
s bodem *A*. Avšak s tím, jak se tento úhel rozevírá, posouvá pravítko *BC*, které je kolmo připevněno k *XY* v bodě *B*, směrem k *Z* pravítko *CD*, klouzající po *YZ* tak, že je k této úsečce stále kolmé; a *CD* posune *DE*, které klouže po *YX*, přičemž zůstává rovnoběžné s *BC*, *DE* posune *EF*; *EF* posune *FG*; a to zase *GH*, a lze si představit nekonečně mnoho dalších pravítek, která se posouvají postupně jedno za druhým týmž způsobem, a z nichž jedny svírají stále tytéž úhly s *YX* a jiné s *YZ*.“ (DESCARTES 1637b, str. 19)

Při konstrukci pravítkového přístroje v Cabri Geometry II si nejprve vytvoříme bod *Y* jímž proložíme dvě libovolné přímky *X* a *Z*. V dalším kroku vytvoříme kružnici o libovolném poloměru a se středem v bodě *Y*. Průsečík kružnice s přímkou *Z*, resp. *X*, nazveme *A*, resp. *B*. V bodě *B* vztyčíme kolmici k přímce X. Vzniklý průsečík této kolmice a přímky *Z* nazveme *C*. V bodě *C* vztyčíme kolmici, jejíž průsečík s přímkou *X* nazveme *D*. A takto můžeme pokračovat do nekonečna.



Ilustrace 3: Postup konstrukce pravítkového přístroje v Cabri Geometry II

Uchopíme-li přímku *X*, dá se s ní nyní otáčet kolem bodu *Y*. Při oddalování bodů *A* a *B* od sebe, vidíme jak se jednotlivé kolmice a průsečíky vzdalují od bodu *Y* a jak se při opačném pohybu vrací zpět. Funkce „Stopu zapni/vypni“ nám umožní sledovat dráhy, které opisují průsečíky kolmic s přímkou *X*. Tyto dráhy jsou křivkami, které hledáme.



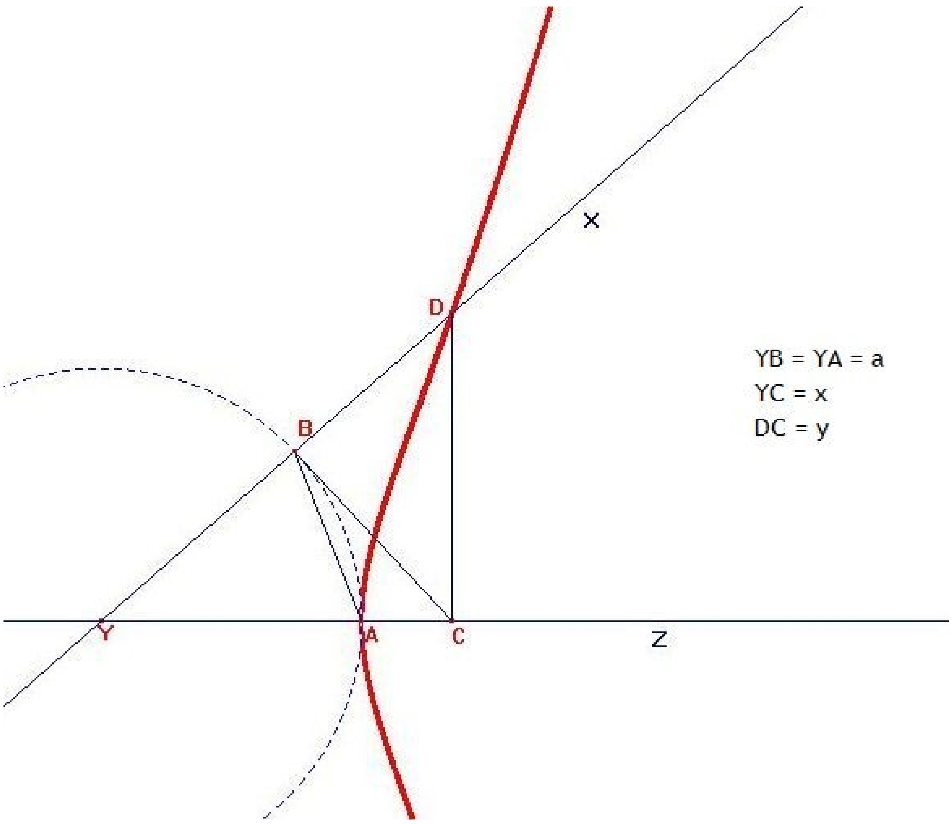
Ilustrace 4: Kružnice opisovaná bodem B pravítkového přístroje

Rovnici nulté křivky (první křivkou dle Descartova číslování je až křivka opisovaná bodem *D*, druhá křivka je opisovaná bodem *F* atd.), kterou opisuje bod *B*, vyjádříme celkem snadno. Neznámé úsečky si označíme *x* a *y*. Úsečka *YA* = *YB*, kterou označíme *a*, je volitelným parametrem přístroje. Pomocí pythagorovy věty dostáváme: $x^2 + y^2 = a^2$, což je rovnice kružnice.

Pro odvození první křivky, která je jak říká Descartes sama složitější než kružnice, využijeme nejprve vztahu vyplývajících z poměru stran v podobných trojúhelnících *YCB* a *DYC*:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{YD}$$

$$YD = \frac{x^2}{a}.$$



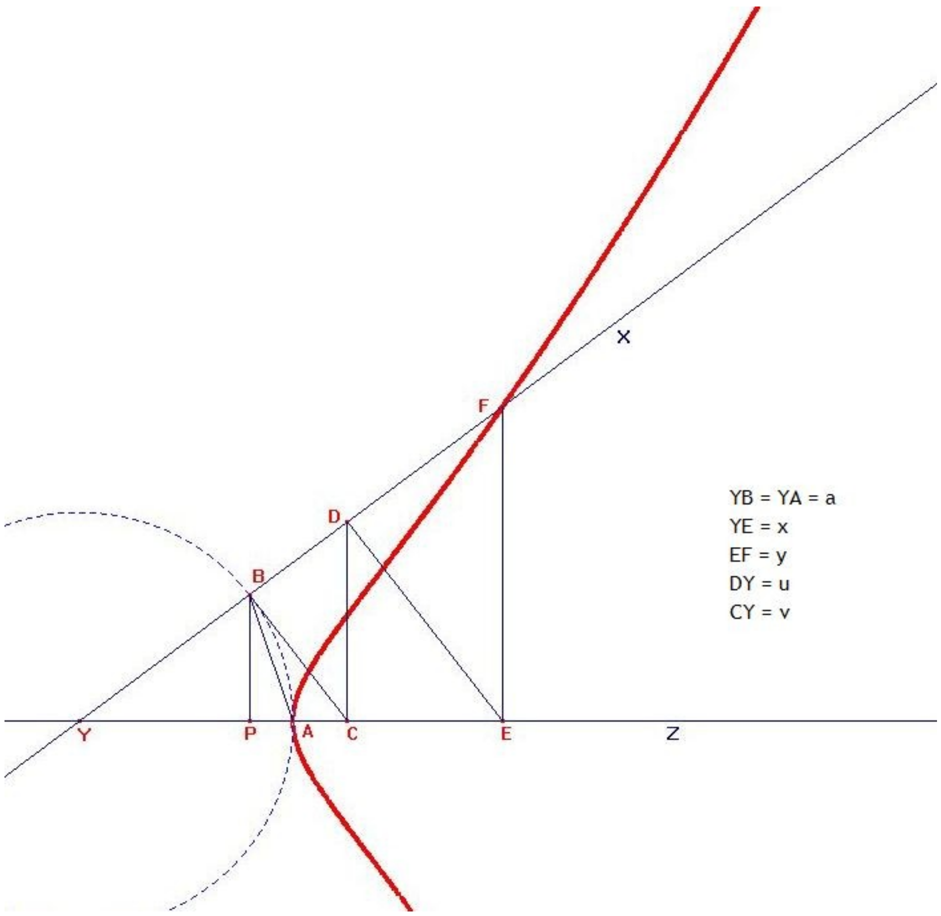
Ilustrace 5: Křivka opisovaná bodem D pravítkového přístroje

Druhou potřebnou rovnici dostaneme obdobným způsobem z trojúhelníků *YCD* a *DBC*:

$$\begin{aligned} \frac{YD-a}{y} &= \frac{y}{YD} \\ YD^2-a\ YD &= y^2 . \end{aligned}$$

Dosazením a úpravou dostáváme rovnici křivky opisovanou bodem *D*:

$$x^4=a^2(x^2+y^2) .$$



Ilustrace 6: Křivka opisovaná bodem F pravítkového přístroje

Pro odvození rovnice druhé křivky, kterou opisuje bod *F*, využijeme znalosti rovnice první křivky. Stejně jako se měla v předchozím případě k bodu *B* úsečka *a*, má se nyní k bodu *F* úsečka *u*. Můžeme tedy psát:

$$x^4 = u^2(x^2 + y^2) \ .$$

Z poměrů v podobných trojúhelnících dostáváme rovnice:

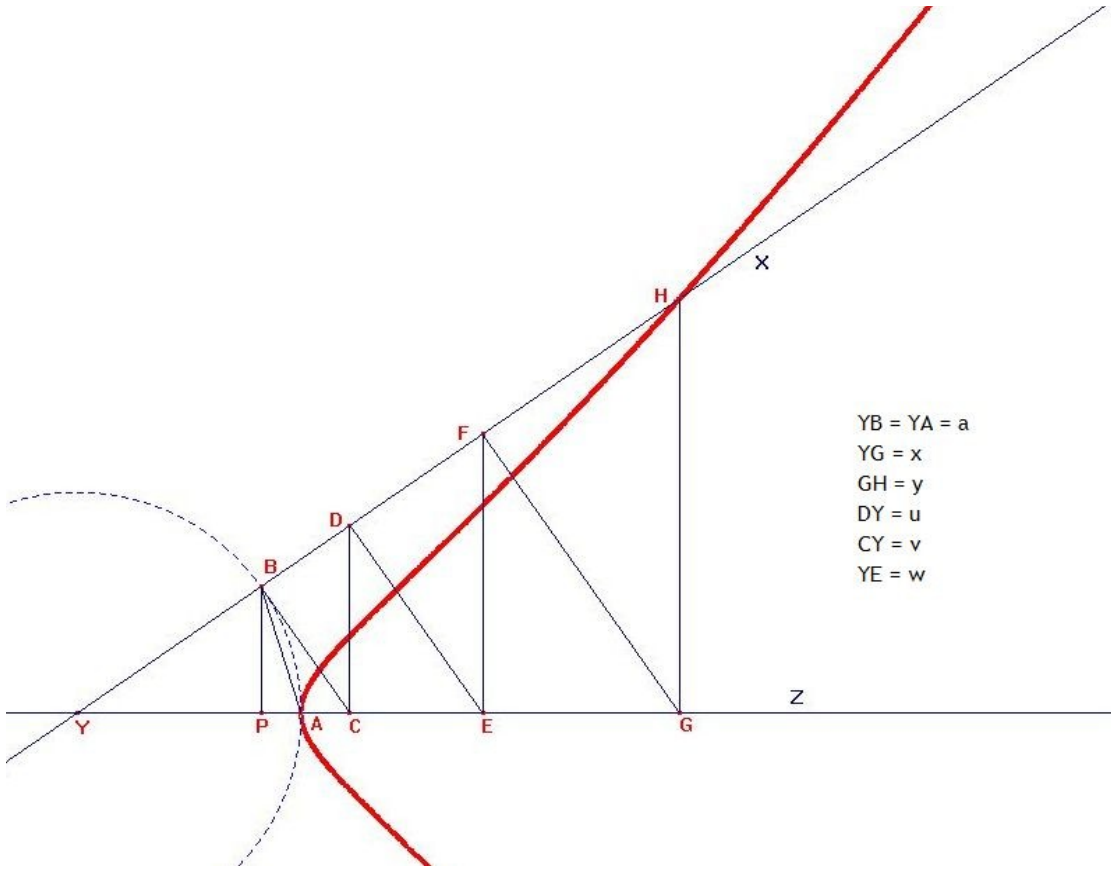
$$\frac{a}{v} = \frac{v}{u}$$
$$\frac{u}{a} = \frac{x}{v} \ .$$

Dosazením a úpravou dostáváme vztah pro úsečku *u*:

$$u^2 = \sqrt[3]{a^2 x^4} \ .$$

Po dosazení a úpravě již dostáváme rovnici hledané křivky:

$$x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3 \ .$$



Ilustrace 7: Křivka opisovaná bodem H pravítkového přístroje

U třetí křivky opisované bodem *H* budeme postupovat obdobně jako v předchozím případě. Posouváme se o jeden bod na pravítku *X* dále od bodu *Y*. Bod *H* se má k úsečce *u* stejně jako se měl v předchozím případě bod *F* k úsečce *a*. Rovnice křivky s neznámým parametrem *u* tedy bude:

$$x^8 = u^2 (x^2 + y^2)^3 \ .$$

Pro vyjádření neznámé úsečky *u* použijeme opět poměry stran podobných trojúhelníků:

$$\frac{a}{v} = \frac{v}{u}$$
$$\frac{w}{v} = \frac{u}{a}$$
$$\frac{u}{a} = \frac{x}{w} \ .$$

Po dosazení a úpravách dostáváme:

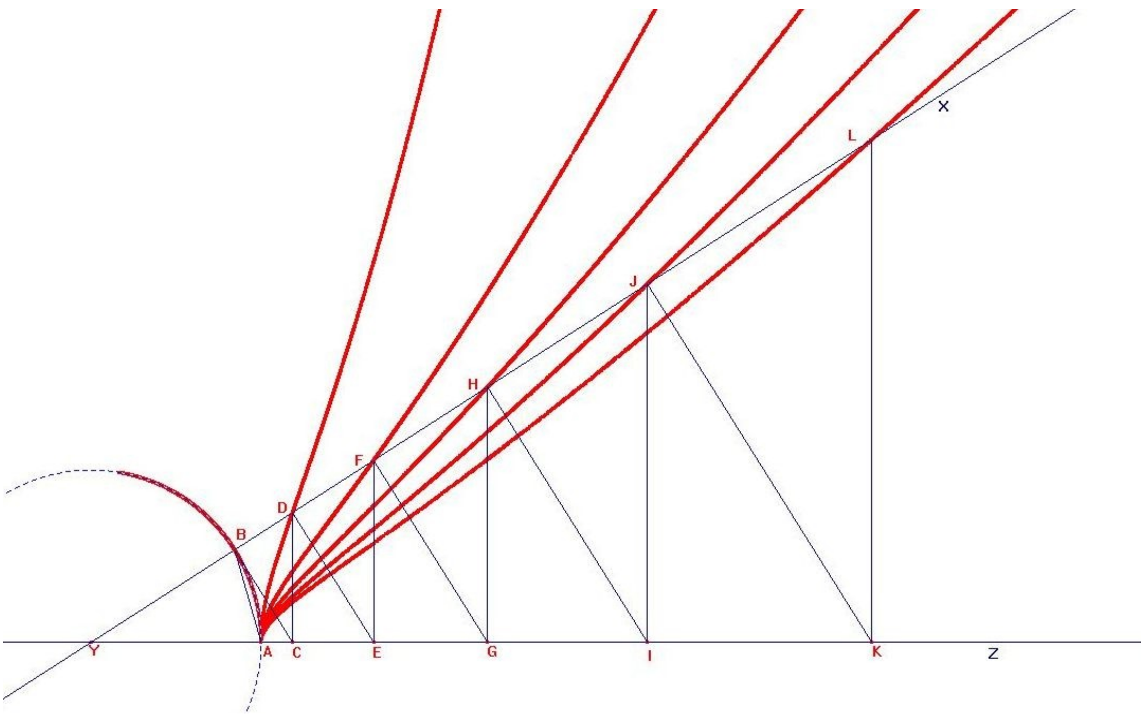
$$u^2 = \sqrt[5]{a^6 x^4} \ .$$

Dosadíme do rovnice křivky:

$$x^8 = \sqrt[5]{a^6 x^4} \left(x^2 + y^2\right)^3 \ .$$

Po úpravě dostáváme výslednou rovnici hledané křivky:

$$x^{12} = a^2 \left(x^2 + y^2\right)^5 \ .$$



Ilustrace 8: Pravítkový přístroj a jím narýsované křivky

Obecný vztah pro *n*-tou křivku pravítkového přístroje pak je:

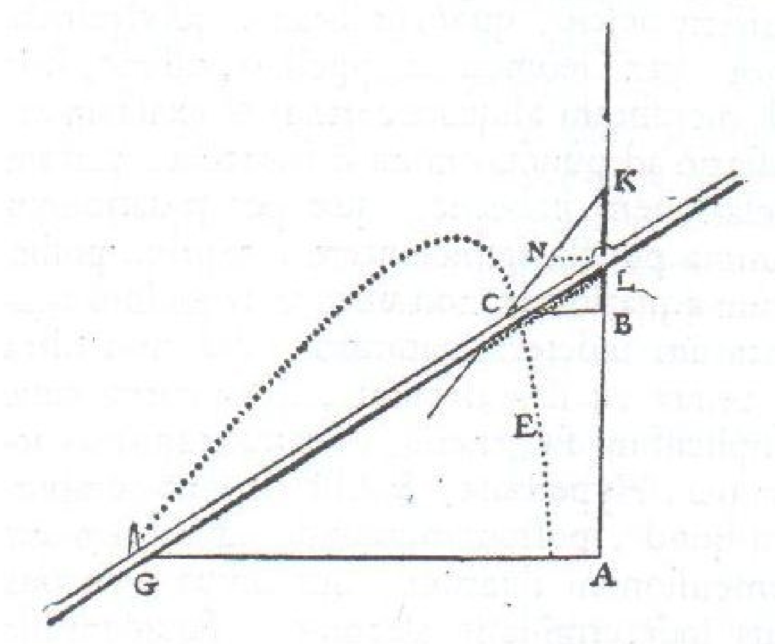
$$x^{4n} = a^2 \left(x^2 + y^2\right)^{2n-1} \ .$$

Na závěr této kapitoly si uveďme Descartův výrok na adresu právě popsaných křivek:

„Nevidím však nic, co by bránilo pojímat stejně jasně a zřetelně popis této první křivky jako popis kružnice nebo aspoň kuželoseček; ani nic, co by bránilo chápat druhou, třetí a všechny další stejně dobře jako první; a v důsledku ani proč by se nemohly používat stejným způsobem v geometrických úvahách.“ (DESCARTES 1637b, str. 20)

5. Pravítkový přístroj pro hyperbolu

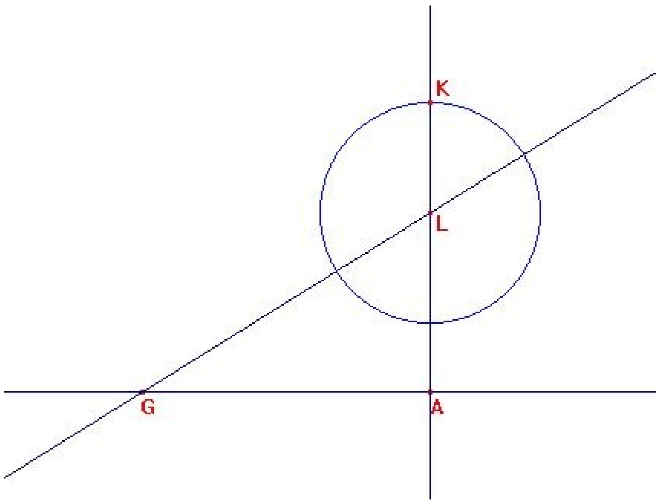
Tento přístroj je soustavou několika nekonečných pravítek. Pravítka *GA* a *LA* jsou pevná a v bodě *A* svírají pravý úhel. Bod *L* se však může volně pohybovat po pravítku směrem nahoru a dolů. Velikost úsečky *GA* je



Ilustrace 9: Descartova ilustrace pravítkového přístroje pro hyperbolu (DESCARTES 1637b, str. 22)

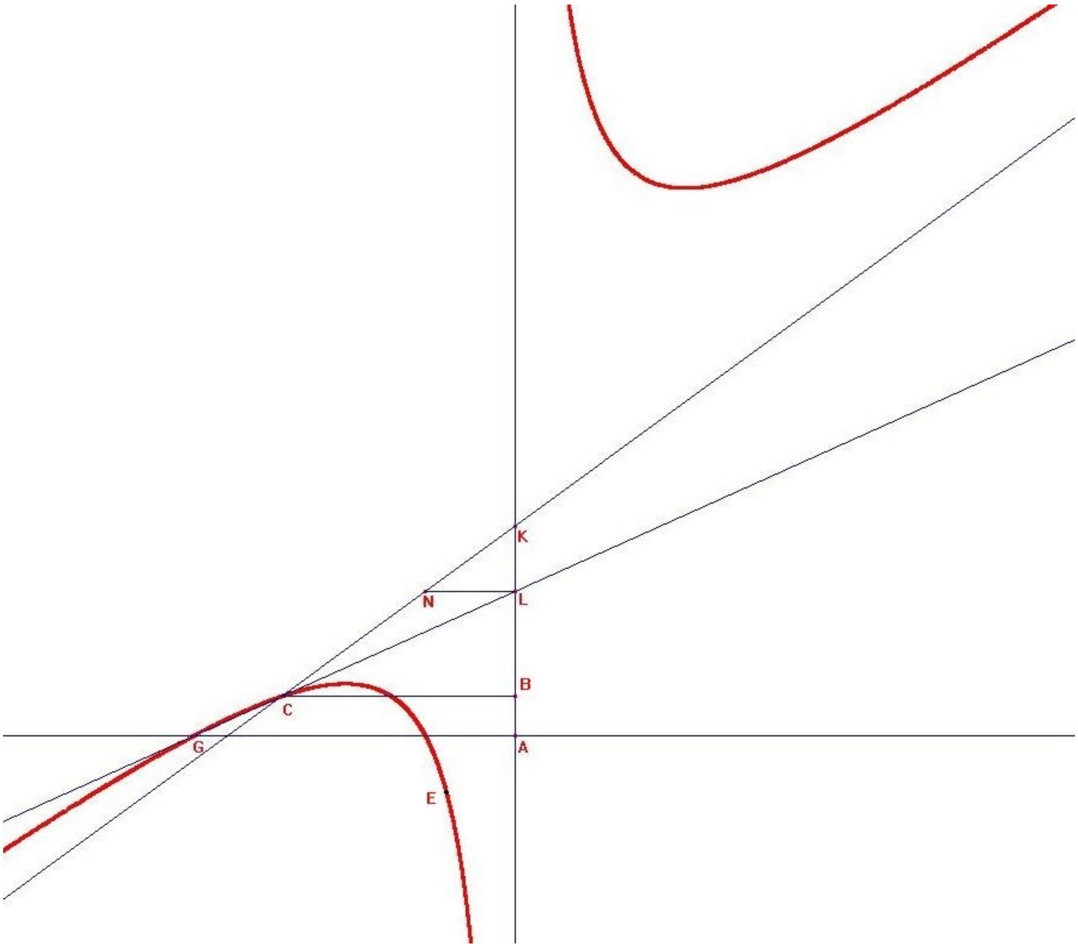
volitelným parametrem přístroje. Pravítko *GL* je upevněno v bodě *G* a kolem tohoto bodu v závislosti na pohybu bodu *L* provádí kruhový pohyb. Pravítko *NK* setrvává v konstantní předem nastavené vzdálenosti od bodu *L* a pohybuje se tedy zároveň s tímto bodem. Úhel pravítek *LA* a *NK* je předem vymezen velikostí úsečky *NL* a během vykreslování křivky zůstává neměnný. Bod *C* je průsečíkem pravítek *NK* a *GL* a právě jeho pohyb opisuje výslednou křivku.

Při konstrukci pravítkového přístroje pro hyperbolu v Cabri Geometry II nejprve narýsujeme přímku *GA*. Pro naši potřebu je nejlepší přímku narýsovat vodorovně a bod *G* umístit nalevo od bodu *A*, ale obecně je poloha obou bodů libovolná. Vzdálenost mezi body *A* a *G* si zvolíme a značit ji budeme *a*. V bodě *A* vztyčíme kolmci k přímce *GA*. Na této kolmici umístíme bod *L*. Body *G* a *L* proložíme přímku. Nyní narýsujeme bod *K*. Bod *K* bude ležet na přímce *LA* nad bodem *L*. Aby pravítkový přístroj správně fungoval, potřebujeme udržovat při pohybu přístroje konstantní vzdálenost mezi body *K* a *L*. Toho dosáhneme nejlépe tak, že z bodu *L* opíšeme kružnici se zvoleným poloměrem *b*, který je druhým volitelným parametrem přístroje. Bod *K* bude průsečíkem této kružnice s přímkou *LA*. Kružnici nyní můžeme skrýt pomocí funkce „Skryj/ukaž“.



Ilustrace 10: Postup konstrukce pravítkového přístroje pro hyperbolu v Cabri Geometry II

Na kolmici k přímce *LA* procházející bodem *L* umístíme nalevo od bodu *L* bod *N*. Velikost úsečky *LN* je třetím volitelným parametrem přístroje a budeme ji značit *c*. Body *K* a *N* proložíme přímku. Průsečík této přímky s přímkou *GL* nazveme *C*. V patě kolmice k přímce *LA* procházející bodem *C* leží bod *B*. Pravítkový přístroj pro hyperbolu je hotov. Při pohybování bodem *L* po přímce *LA* bod *C* opisuje hledanou křivku. O tom se můžeme přesvědčit zapnutím funkce „Stopu zapni/vypni“ pro bod *C*.



Ilustrace 11: Pravítkový přístroj pro hyperbolu, CB = y, BA = x, GA = a, KL = b, NL = c

Jak už název přístroje napovídá, narýsovaná křivka je hyperbola. Důkaz a odvození vzorce necháme tentokrát na Descartovi:

„Vyberu nějakou úsečku, například *AB*, abych vztáhl k jejím různým bodům všechny body této křivky *EC*, a na této úsečce *AB* zvolím bod, například *A*, abych v něm začal výpočet. … Poté, co jsem na křivce vybral bod, například *C*, v němž je umístěn přístroj sloužící k jejímu opsání, vedu z tohoto bodu *C* přímku *CB* rovnoběžně s *GA*; a protože *CB* a *BA* jsou dvě neurčité a neznámé veličiny, pojmenuji jednu *y* a druhou *x*. Abych však nalezl vztah jedné k druhé, uvážím jaké znám veličiny, které určují popis této křivky: například *GA*, kterou nazvu *a*, *KL*, kterou nazvu *b*, a *NL*, rovnouběžnou s *GA*, kterou nazvu *c*. Pak řeknu: tak jako se má *NL* k *LK* čili *c* ku *b*, tak se má *CB* čili *y* k *BK*, která je tudíž $\frac{b}{c}\,y$; a *BL* je $\frac{b}{c}\,y - b$; a *AL* je $x + \frac{b}{c}\,y - b$. Navíc jak se má *CB* k *LB*, čili *y* ku $\frac{b}{c}\,y - b$, tak se má *a* čili *GA*, k *LA*, čili $x + \frac{b}{c}\,y - b$. Takže násobíme-li druhou třetí, dostaneme $\frac{ab}{c}\,y - ab$, což se rovná $xy + \frac{b}{c}\,y^2 - by$, což se dostane násobením první a poslední; a tak dostáváme rovnici, kterou bylo třeba najít:

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}x\,y + ay - ac\ .$$

Z ní poznáváme, že křivka *EC* je prvního rodu: a opravdu to není nic jiného než hyperbola.“

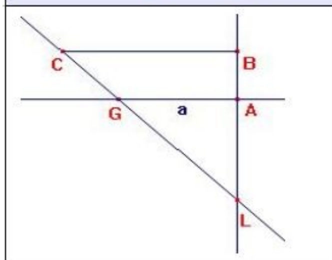
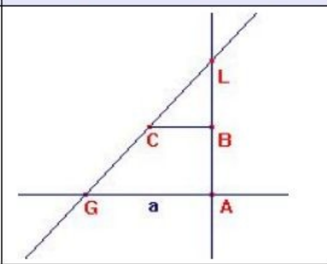
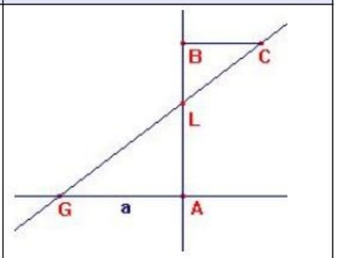
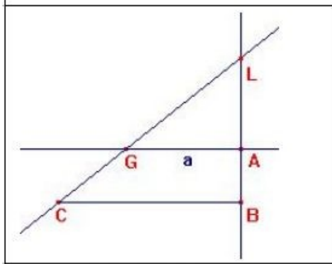
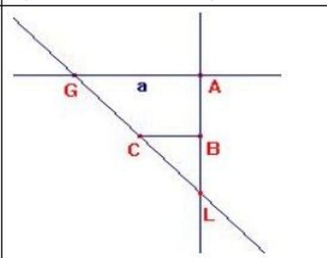
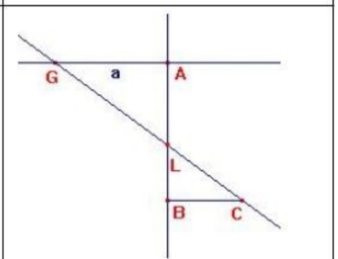
Descartem odvozená rovnice má však platnost pouze levém horním kvadrantu vymezeném pravítky *GA* a *LA*. Vztahy $BL = KB - b$ a $LA = x + BL$, které Descart použil, totiž neplatí obecně a závisí na poloze bodu *C*. Musíme si uvědomit, že každá použitá hodnota je velikostí úsečky a nemůže nabývat záporných hodnot. Uvedené vztahy tak dokonce neplatí ani v celém levém horním kvadrantu. Pro přehlednost celou plochu rozdělíme na šest částí: již zmíněnými přímkami *GA* a *LA* a dále přímkou, řekněme *g*, která prochází bodem *G* a je kolmá na přímku *GA*. Pokud budeme v dalším textu uvažovat poloroviny či kvadranty, budeme vždy, jestliže nebude řečeno jinak, mluvit o rozdělení roviny přímkami *GA* a *LA*. Nadále si rovněž budeme, v situacích kdy bude nutné rozlišovat, značit průsečíky ležící nalevo od přímky *g* jako C_3, průsečíky ležící mezi přímkami *g* a *LA* jako C_1 a průsečíky ležící napravo od přímky *LA* jako C_2. Na přímce *LA* v námi uvažovaných situacích získat průsečík nemůžeme, na přímce *g* je průsečíkem vždy pouze bod *G*. Vztahy mezi *LB*, *KB* a *b* jsou následující:

LB = b - KB	LB = KB - b	LB = KB + b
LB = KB - b	G LB = b - KB	A nejsou průsečíky

Tabulka 1

Je třeba si povšimnout toho, že tyto vztahy platí pouze při zvolené konfiguraci přístroje: bod *K* leží nad bodem *L* a bod *N* leží od bodu *L* vlevo. Pokud například přemístíme bod *N* napravo od bodu *L* nebo bod *K* pod bod *L*, bude se přímka *NK* svažovat na opačnou stranu a zmíněné vztahy již platit nebudou. Není však nijak těžké si nové vztahy odvodit a tak je zde uvádět nebudu.

Vztahy mezi *LA*, *BL* a *x* mají obecnější platnost. Nejen, že postačí zachováme-li pouze polohu bodu *G* na pravítku nalevo od bodu *A*, ale dokonce nemusíme ani rozlišovat nachází-li se bod *C* nad nebo pod přímkou *GA*. Tyto vztahy se nám budou hodit i při pozdějších odvozováních, proto je tabulka doplněna i o rovnice platící v pravém dolním kvadrantu, i když pro aktuálně řešený případ, zde průsečíky získat nemůžeme. Zároveň s ohledem na pozdější využití této tabulky při jiných výpočtech jsou úsečky *x* a *y* označeny svými krajními body *BA* a *CB*.

nalevo od přímky g (C_3)	mezi přímkami g a LA (C_1)	napravo od přímky LA (C_2)
		
		
BA = BL – LA	BA = LA – BL	BA = LA + BL
vždy platí : $\frac{LA}{LB} = \frac{a}{CB}$		
$LB = \frac{CB*BA}{CB-a}$	$LB = \frac{CB*BA}{a-CB}$	$LB = \frac{CB*BA}{a+CB}$

Tabulka 2

Po zopakování Descartova postupu odvození rovnice hyperboly i s ostatními vztahy získáváme tyto rovnice:

pro C_1 a C_3 nad přímkou *GA*: $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$

pro C_1 a C_3 pod přímkou *GA*: $y^2 = cy + \frac{c}{b}xy + ay - ac$

pro C_2 nad přímkou *GA*: $y^2 = -cy + \frac{c}{b}xy - ay - ac$

Vidíme, že Descartův vzorec odpovídá rovnici pro pro C_1 a C_3 nad přímkou *GA*. Nyní na chvíli zapomeneme na to, že x a y reprezentují velikosti úseček a zavedeme si pravoúhlou soustavu souřadnic. Např. bod *A* bude počátkem, přímka *GA* osou y s hodnotami rostoucími zprava doleva, přímka *LA* osou x s hodnotami rostoucími odspoda nahoru. Do rovnice pro C_1 a C_3 pod přímkou *GA* si nyní můžeme za x dosadit $-x$ a do rovnice pro C_2 nad přímkou *GA* za y dosadit $-y$. Tak dostaneme stejnou rovnici pro všechny části hyperboly. Tento postup lze aplikovat i na všechny další rovnice křivek narýsovaných pravítkovým přístrojem.

5.1 Pravítkový přístroj – přímka KN rovnoběžná s pravítkem GA

V pravítkovém přístroji pro hyperbolu, který jsme si připravili v předešlé kapitole, odstraníme přímku *KN*. Místo ní si bodem *K* proložíme kolmici k přímce *LA*. Průsečíkem této kolmice a přímky *GL* je bod *C*, který bude vykreslovat při pohybu bodu *L* hledanou hyperbolu.

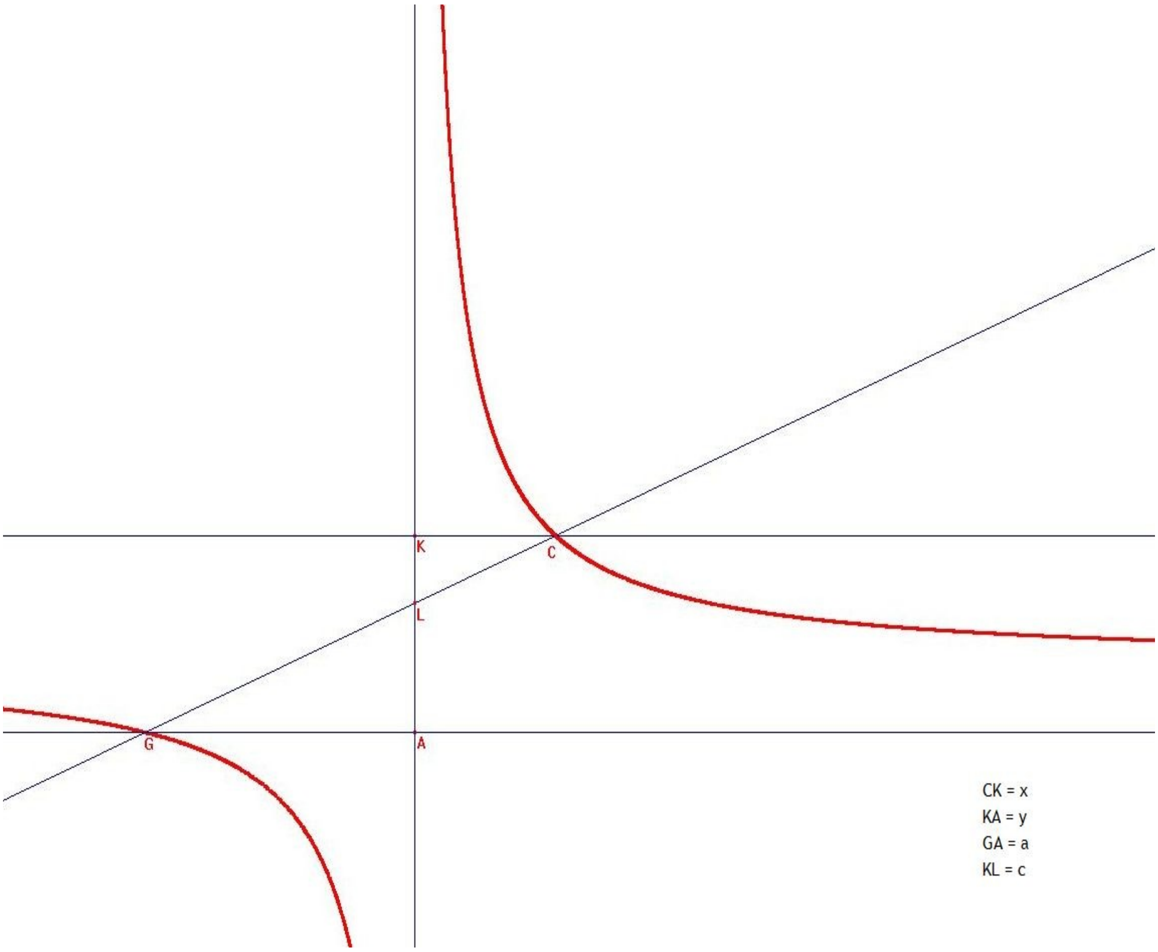
Pro odvození rovnice narýsované hyperboly využijeme podobnosti trojúhelníků *GAK* a *CKL*. Z ní plyne: $\frac{LA}{a} = \frac{c}{x}$. Podle polohy bodu C nyní platí vztahy: C_3: $AL = c - y$; C_1: $AL = c + y$; C_2: $AL = y - c$. Po dosazení a úpravě dostáváme rovnice pro jednotlivé části hyperboly:

$$C_3\colon xy = cx - ac;$$

$$C_1\colon\ xy = -cx + ac;$$

$$C_2\colon xy = cx + ac.$$

Stejně jako v předchozím případě bychom mohli zavést pravoúhlou soustavu souřadnic a tím sjednotit tyto tři rovnice do jedné.



Ilustrace 12: Pravítkový přístroj pro hyperbolu, přímka KC rovnoběžná s přímkou GA

6. Pravítkový přístroj s kuželosečkami

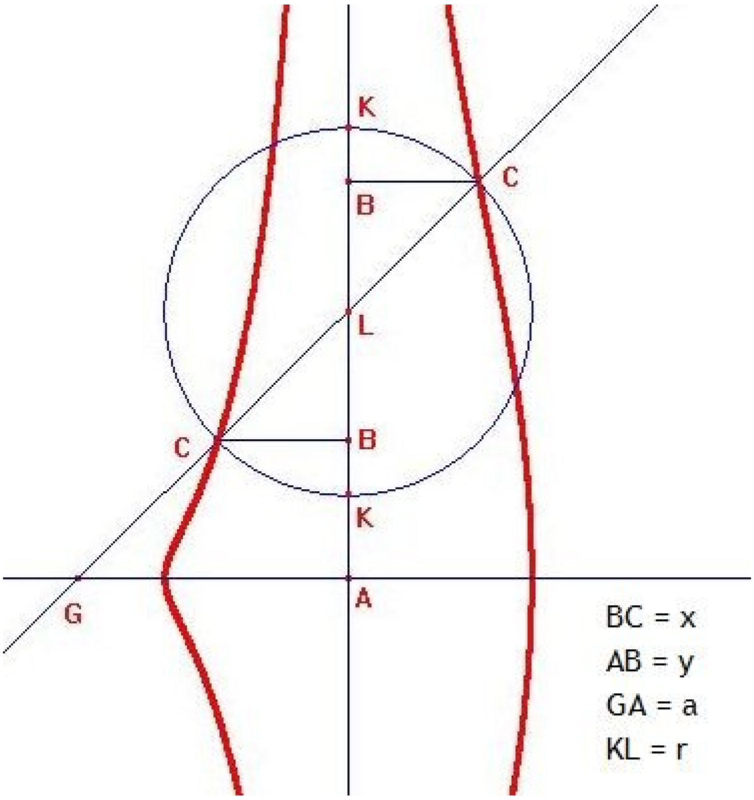
K pravítkovému přístroji, který jsme zkoumali v předchozí kapitole, Descartes dodává: „Jestliže se v přístroji, který slouží ke kreslení této křivky, úsečka nahradí *CNK* tentokrát hyperbolou nebo jakoukoli jinou křivkou prvního rodu, která ohraničuje útvar *CNKL*, bude průsečík této křivky s pravítkem *GL* opisovat místo hyperboly *EC* jinou křivku, která bude druhého rodu. Například jestliže je *CNK* kružnice, jejímž středem je *L*, opíše první konchoidu starých geometrů; a jestliže je to parabola, jejíž diametr je *KB*, opíše křivku, která je, jak jsem už řekl, první a nejjednodušší v Pappově otázce.“ (DESCARTES 1637b, str. 23)

V několika následujících kapitolách využijeme toho, že Cabri Geometry II má funkci pro vykreslování kuželoseček, a několik konstrukcí křivek pravítkovým přístrojem s kuželosečkou místo přímky *NK* si vyzkoušíme. S výjimkou tridentu sám Descartes tyto konstrukce v *Geometrii* neprovádí.

Pro konstrukci kuželosečky v Cabri Geometry II je třeba zadat pět různých bodů. Vzájemná poloha těchto bodů určuje druh a tvar kuželosečky. Pro správnou funkci pravítkového přístroje potřebujeme, aby se kuželosečka pohybovala zároveň s bodem *L*. Toho lze dosáhnout například tím, že body definující kuželosečku umístíme na soustředné kružnice se středem v bodě *L*. Změnou poloměrů kružnic pak můžeme měnit nejen tvar ale i druh kuželosečky.

6.1 Pravítkový přístroj s kružnicí

Jak už zjistil Descartes, pokud nahradíme přímku *KN* kružnicí se středem v bodě *L* opíše průsečík *C* konchoidu. Rovnici narýsované konchoidy odvodíme velice snadno. Rovnice naší kružnice je $LB^2+x^2=r^2$. Do této rovnice dosadíme předem připravené vztahy pro dosazení za *LB* (tabulka 2).



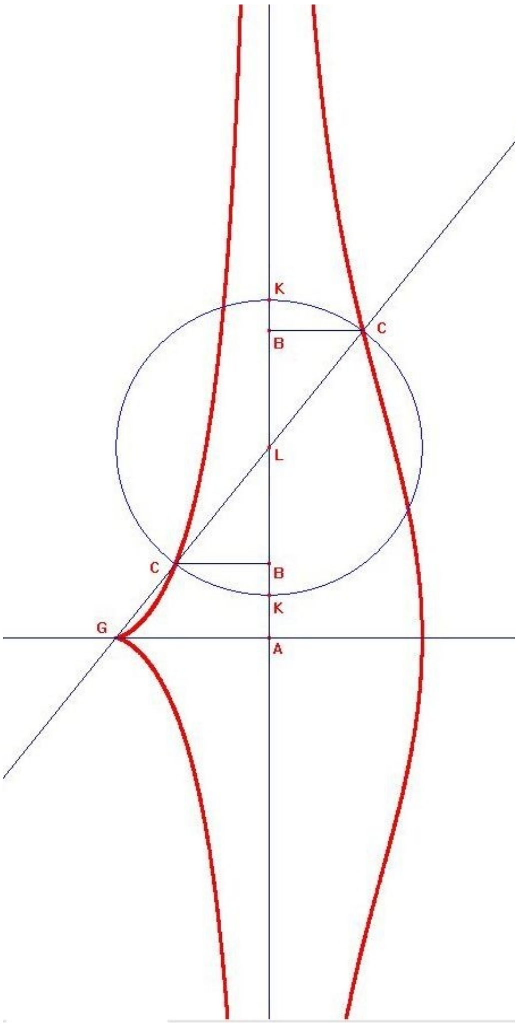
Ilustrace 13: Pravítkový přístroj s kružnicí - konchoida

Po úpravě dostáváme rovnice:

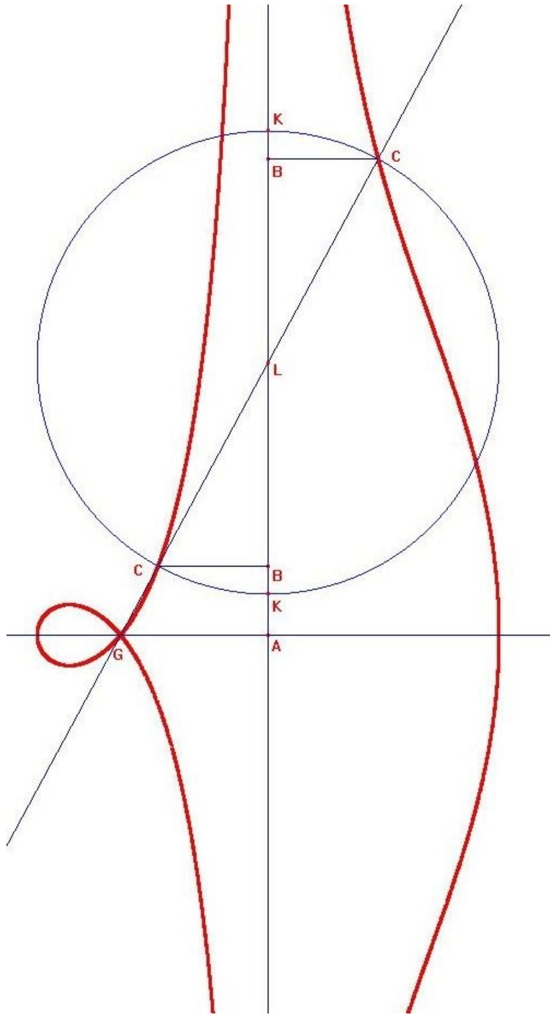
pro C_3 a C_1: $x^2 y^2 = (r^2 - x^2)(x - a)^2$;

pro C_2: $x^2 y^2 = (r^2 - x^2)(x + a)^2$.

Pro poloroviny nad a pod přímkou GA jsou rovnice shodné. Je to dáno osovou symetrií konchoidy podle osy GA. Ještě naposledy připomeneme, že jako vždy bychom po zavedení soustavy souřadnic a nahrazení velikostí úseček x a y souřadnicemi, získali jedinou rovnici konchoidy společnou pro obě poloroviny.



Ilustrace 14: Pravítkový přístroj s kružnicí - konchoida, GA = r



Ilustrace 15: Pravítkový přístroj s kružnicí - konchoida, GA > r

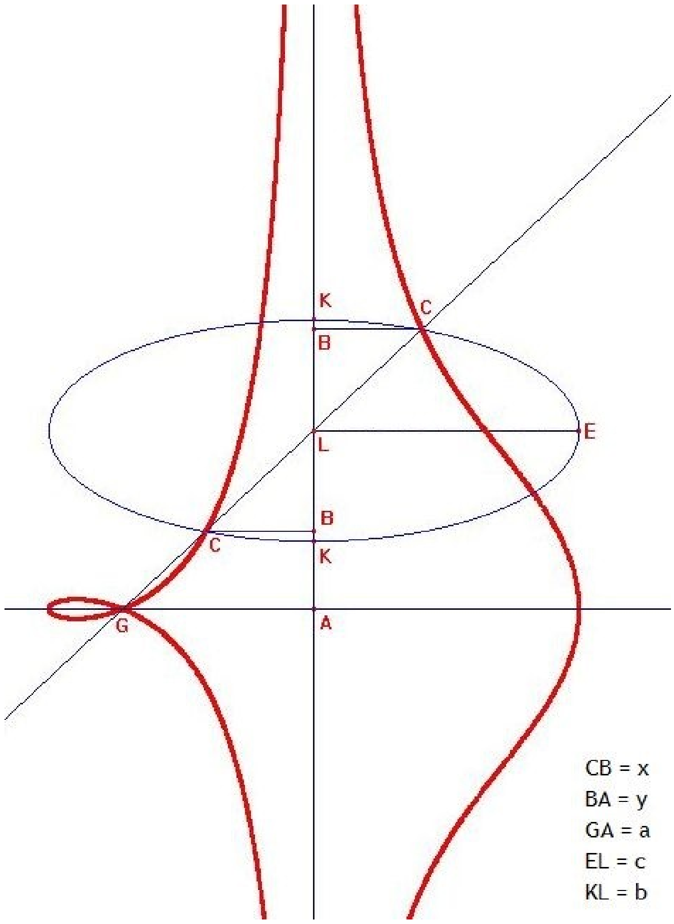
6.2 Pravítkový přístroj s elipsou

Pokud nahradíme kružnici v pravítkovém přístroji elipsou, získáme křivku, která je velice podobná konchoidě z předchozí kapitoly. I její rovnici získáme podobným způsobem. Nejprve se podívejme na případ, kdy jedna osa elipsy leží na přímce *LA* a druhá s ní svírá pravý úhel. Do rovnice elipsy $\frac{x^2}{c^2}+\frac{LB^2}{b^2}=1$ dosadíme předpřipravené vztahy pro dosazení za *LB* (Tabulka 2, viz str. 29).

Po dosazení a úpravě získáváme rovnice výsledné křivky:

pro *C3* a *C1*: $x^2 y^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - x^2)(x-a)^2$;

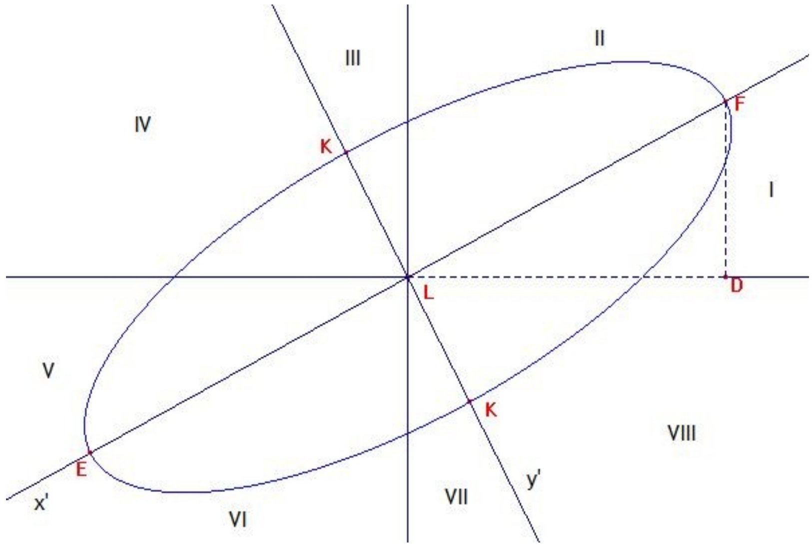
pro C2: $x^2 y^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - x^2)(x+a)^2$.



Ilustrace 16: Pravítkový přístroj s elipsou, osy elipsy rovnoběžné s GA a LA

6.2.1 Elipsa s rotací

Pro odvození rovnice křivky vykreslované průsečíky pootočené elipsy s přímkou *GL* nejprve upravíme rovnici elipsy $\frac{x'^2}{c^2} + \frac{y'^2}{b^2}$ = 1 tak, aby vyjadřovala závislost velikostí úseček *x* a *BL*. Situaci nám opět poněkud komplikuje nemožnost vyjadřovat velikost úseček zápornými čísly. Rovinu je proto nutno rozdělit na osm sektorů:



Pro rotaci 0º – 90º včetně proti směru hodinových ručiček v jednotlivých sektorech platí vztahy (veličinu *e* jsme zavedli pro zjednodušení zápisu – jedná se o velikost úsečky LD a její velikost získáme pomocí pythagorovy věty z trojúhelníku *LDF*):

I. + V.: $x' = \frac{d}{c} y + \frac{e}{c} x \qquad y' = -\frac{e}{c} y - \frac{d}{c} x$

II. + VI.: $x' = \frac{d}{c} y + \frac{e}{c} x \qquad y' = \frac{e}{c} y - \frac{d}{c} x$

III. + VII: $x' = \frac{d}{c} y - \frac{e}{c} x \qquad y' = \frac{e}{c} y + \frac{d}{c} x$

IV. + VIII: $x' = -\frac{d}{c} y + \frac{e}{c} x \qquad y' = \frac{e}{c} y + \frac{d}{c} x$.

Pro rotaci 0º – 90º včetně po směru hodinových ručiček v jednotlivých sektorech platí vztahy:

I. + V.: $x' = -\frac{d}{c} y + \frac{e}{c} x \qquad y' = \frac{e}{c} y + \frac{d}{c} x$

II. + VI.: $x' = \frac{d}{c} y - \frac{e}{c} x \qquad y' = \frac{e}{c} y + \frac{d}{c} x$

III. + VII: $x' = \frac{d}{c} y + \frac{e}{c} x \qquad y' = \frac{e}{c} y - \frac{d}{c} x$

IV. + VIII: $x' = \frac{d}{c} y + \frac{e}{c} x \qquad y' = -\frac{e}{c} y + \frac{d}{c} x$.

Všimněme si, že pro sektory nacházející se ve stejných kvadrantech vzhledem k přímkám *LD* a *LA* mají rovnice stejnou druhou mocninu. Tím se nám množství nutných výpočtů zredukuje na polovinu. Dále se odvodíme rovnici křivky při rotaci elipsy o 0º – 90º včetně proti směru hodinový ručiček (odvození rovnice pro otočení v opačném směru probíhá analogicky). Po dosazení do rovnice elipsy získáme vztahy pro jednotlivé části elipsy:

I., II., V., VI.: $$\frac{\left(\frac{d}{c} BL + \frac{e}{c} x\right)^2}{c^2} + \frac{\left(\frac{e}{c} BL - \frac{d}{c} x\right)^2}{b^2} = 1$$

III., IV., VII., VIII.: $$\frac{\left(\frac{d}{c} BL - \frac{e}{c} x\right)^2}{c^2} + \frac{\left(\frac{e}{c} BL + \frac{d}{c} x\right)^2}{b^2} = 1$$

Po dosazení vztahů pro BL podle Tabulky 2 (viz str.29) a úpravě dostáváme rovnice:

pro C_2 v I. a II. sektoru:

$$\begin{aligned}&(b^2 d^2 + c^4 - c^2 d^2) x^2 y^2 = \\ &(a+x)(b^2 c^4 (a+x) - 2d\sqrt{c^2 - d^2}(b^2 - c^2) x^2 y - (b^2 c^2 - b^2 d^2 + c^2 d^2) x^2 (a+x))\end{aligned} ,$$

pro C_1 v III. a IV. sektoru:

$$\begin{aligned}&(b^2 d^2 + c^4 - c^2 d^2) x^2 y^2 = \\ &(a-x)(b^2 c^4 (a-x) - 2d\sqrt{c^2 - d^2}(b^2 - c^2) x^2 y - (b^2 c^2 - b^2 d^2 + c^2 d^2) x^2 (a-x))\end{aligned} ,$$

pro C_3 v III. a IV. sektoru:

$$\begin{aligned}&(b^2 d^2 + c^4 - c^2 d^2) x^2 y^2 = \\ &(x-a)(b^2 c^4 (x-a) - 2d\sqrt{c^2 - d^2}(b^2 - c^2) x^2 y - (b^2 c^2 - b^2 d^2 + c^2 d^2) x^2 (x-a))\end{aligned} ,$$

pro C_2 v VII. a VIII. sektoru:

$$(b^2 d^2+c^4-c^2 d^2)x^2 y^2= \\ (a+x)(b^2 c^4(a+x)-2d\sqrt{c^2-d^2}(c^2-b^2)x^2 y-(b^2 c^2-b^2 d^2+c^2 d^2)x^2(a+x)) \quad ,$$

pro C_1 v V. a VI. sektoru:

$$(b^2 d^2+c^4-c^2 d^2)x^2 y^2= \\ (a-x)(b^2 c^4(a-x)-2d\sqrt{c^2-d^2}(c^2-b^2)x^2 y-(b^2 c^2-b^2 d^2+c^2 d^2)x^2(a-x)) \quad ,$$

pro C_3 v V. a VI. sektoru:

$$(b^2 d^2+c^4-c^2 d^2)x^2 y^2= \\ (x-a)(b^2 c^4(x-a)-2d\sqrt{c^2-d^2}(c^2-b^2)x^2 y-(b^2 c^2-b^2 d^2+c^2 d^2)x^2(x-a)) \quad .$$

V levém horním kvadrantu leží body C_1 z V. a VI. sektoru a body C_3 ze III. a IV. sektoru. Při bližším ohledání zjistíme, že jsou jejich rovnice totožné. Stejnou rovnici mají i body z levého dolního kvadrantu C_1 ze III. a IV. sektoru a C_3 z V. a VI. sektoru. Nyní si můžeme napsat rovnice částí křivky v jednotlivých kvadrantech vzhledem k přímkám GA a LA:

v levém horním kvadrantu:

$$(b^2 d^2+c^4-c^2 d^2)x^2 y^2= \\ (a-x)(b^2 c^4(a-x)-2d\sqrt{c^2-d^2}(c^2-b^2)x^2 y-(b^2 c^2-b^2 d^2+c^2 d^2)x^2(a-x)) \quad ,$$

v pravém horním kvadrantu:

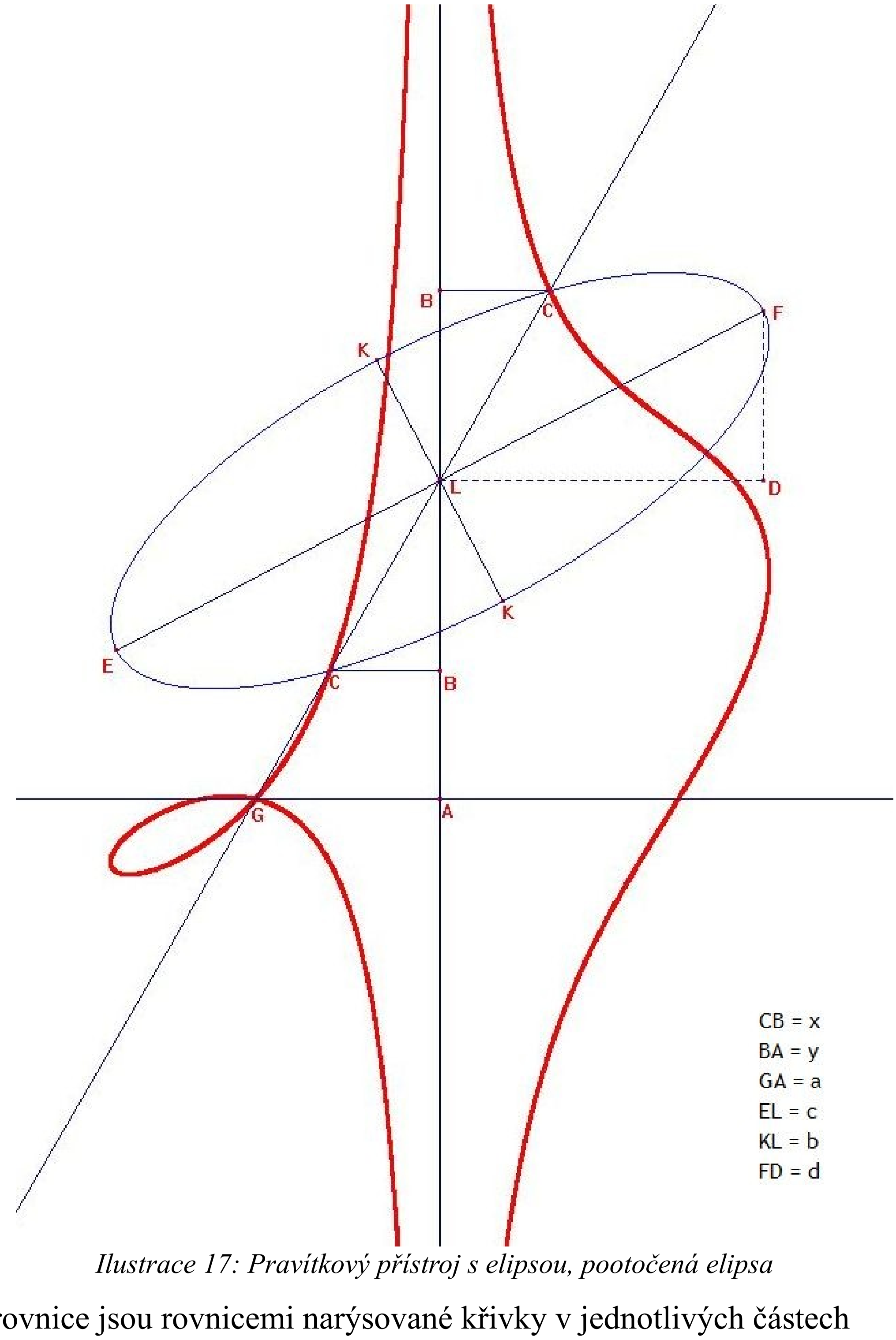
$$(b^2 d^2+c^4-c^2 d^2)x^2 y^2= \\ (a+x)(b^2 c^4(a+x)-2d\sqrt{c^2-d^2}(b^2-c^2)x^2 y-(b^2 c^2-b^2 d^2+c^2 d^2)x^2(a+x)) \quad ,$$

v levém dolním kvadrantu:

$$(b^2 d^2+c^4-c^2 d^2)x^2 y^2= \\ (a-x)(b^2 c^4(a-x)-2d\sqrt{c^2-d^2}(b^2-c^2)x^2 y-(b^2 c^2-b^2 d^2+c^2 d^2)x^2(a-x)) \quad ,$$

v pravém dolním kvadrantu:

$$(b^2 d^2+c^4-c^2 d^2)x^2 y^2= \\ (a+x)(b^2 c^4(a+x)-2d\sqrt{c^2-d^2}(c^2-b^2)x^2 y-(b^2 c^2-b^2 d^2+c^2 d^2)x^2(a+x)) \quad .$$



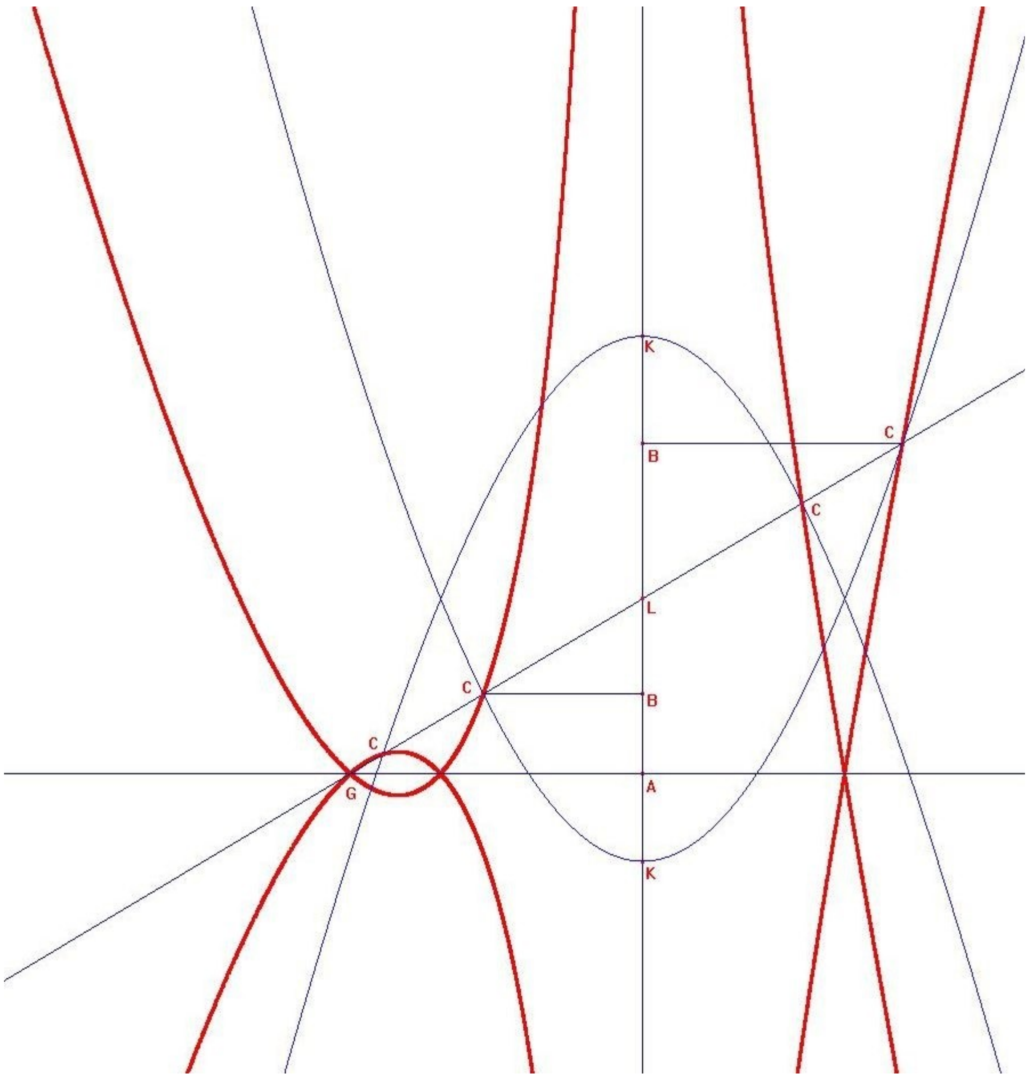
Ilustrace 17: Pravítkový přístroj s elipsou, pootočená elipsa

Tyto rovnice jsou rovnicemi narýsované křivky v jednotlivých částech roviny. Snadno si ověříme, že po dosazení $d = 0$ do rovnic získáme rovnice křivky, kterou generuje elipsa „bez rotace“. Dosadíme-li do rovnic $b = c$ získáme rovnici konchoidy, naše elipsa se totiž v takovém případě stane kružnicí.

6.3 Pravítkový přístroj s parabolou

6.3.1 Osou paraboly je přímka *LA*

Touto variantou konstrukce se Descartes zabývá podrobněji. Výsledná křivka, trident, je totiž řešením Pappova problému pro pět přímek z nich jsou čtyři rovnoběžné a pátá je kolmo protíná. Tridentu se dnes říká také Descartova parabola.

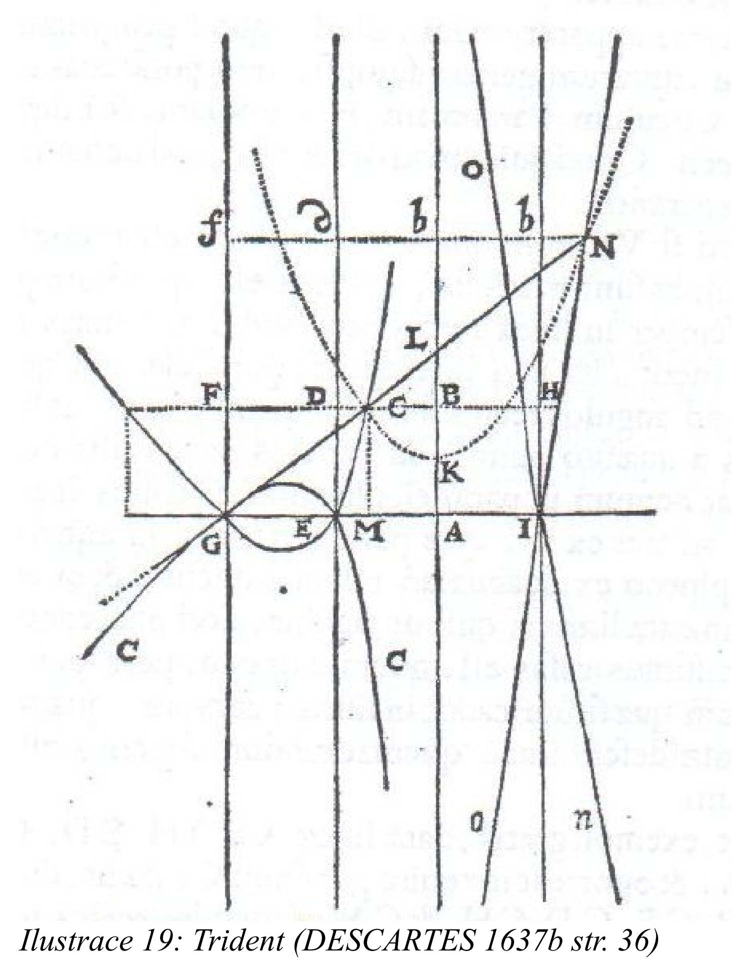


Ilustrace 18: Trident, CB = y, BA = x, GA = 2a, KL = a

Descartovo odvození rovnice tridentu je následující:

„Uvažuji křivku *CEG*, kterou si představuji opsanou průsečíkem paraboly *CNK*, kterou nechám pohybovat takovým způsobem, aby její diametr *KL* byl

stále na přímce AB a pravítko GL, které se otáčí kolem bodu G takovým způsobem, že prochází v rovině této paraboly stále bodem L. A položím $KL = a$ a dvojnásobek parametru, ten, který se vztahuje k ose této paraboly a je také roven a; a $GA = 2a$ a CB nebo $MA = y$; a CM nebo $AB = x$. Potom vzhledem k podobnosti trojúhelníků GMC a CBL se GM, což jest $2a - y$, má k MC, což jest x, jako CB, což jest y, k BL, což jest v důsledku $\frac{xy}{2a-y}$.
A protože KL je a, BK je $a - \frac{xy}{2a-y}$ neboli $\frac{2a^2 - ay - xy}{2a-y}$. A konečně, protože totéž BK, které je úsečkou diametru paraboly, se má k BC, které je k němu ordinátou, jako BC k dvojnásobku parametru, který je a, dá výpočet $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3$ je rovno axy; a v důsledku toho je bod C ten, který jsem hledal."



Ilustrace 19: Trident (DESCARTES 1637b str. 36)

Nyní si tento Descartův specifický případ poněkud zobecníme. Osou paraboly bude nadále přímka LA, bod L leží uvnitř paraboly. Velikosti úseček

AG, VL a KL, však již budou na sobě nezávislé. Rovnice paraboly je $KB = px^2$, kde p je konstantou. Hodnotu parametru $p = \frac{c}{b^2}$ zjistíme dosazením známých velikostí úseček KB a x pro bod V, který na parabole leží. V dalším postupu budeme uvažovat parabolu obrácenou vrcholem dolů. Vztahy pro výpočet velikosti úsečky KB se budou lišit podle polohy průsečíku C: pro průsečíky C_1: v horní polorovině: $KB = c - LB$, v dolní polorovině: $KB = c + LB$; pro průsečíky C_2 a C_3: v horní polorovině $KB = c + LB$, v dolní polorovině $KB = c - LB$. (Rozložení jednotlivých částí plochy odpovídá vymezení, které bylo učiněno výše.)

Po dosazení do rovnice paraboly získáváme:

pro C_1 v horní polorovině a C_2 a C_3 v dolní polorovině: $c - LB = \frac{c}{b^2} x^2$,

pro C_1 v dolní polorovině a C_2 a C_3 v horní polorovině: $c + LB = \frac{c}{b^2} x^2$.

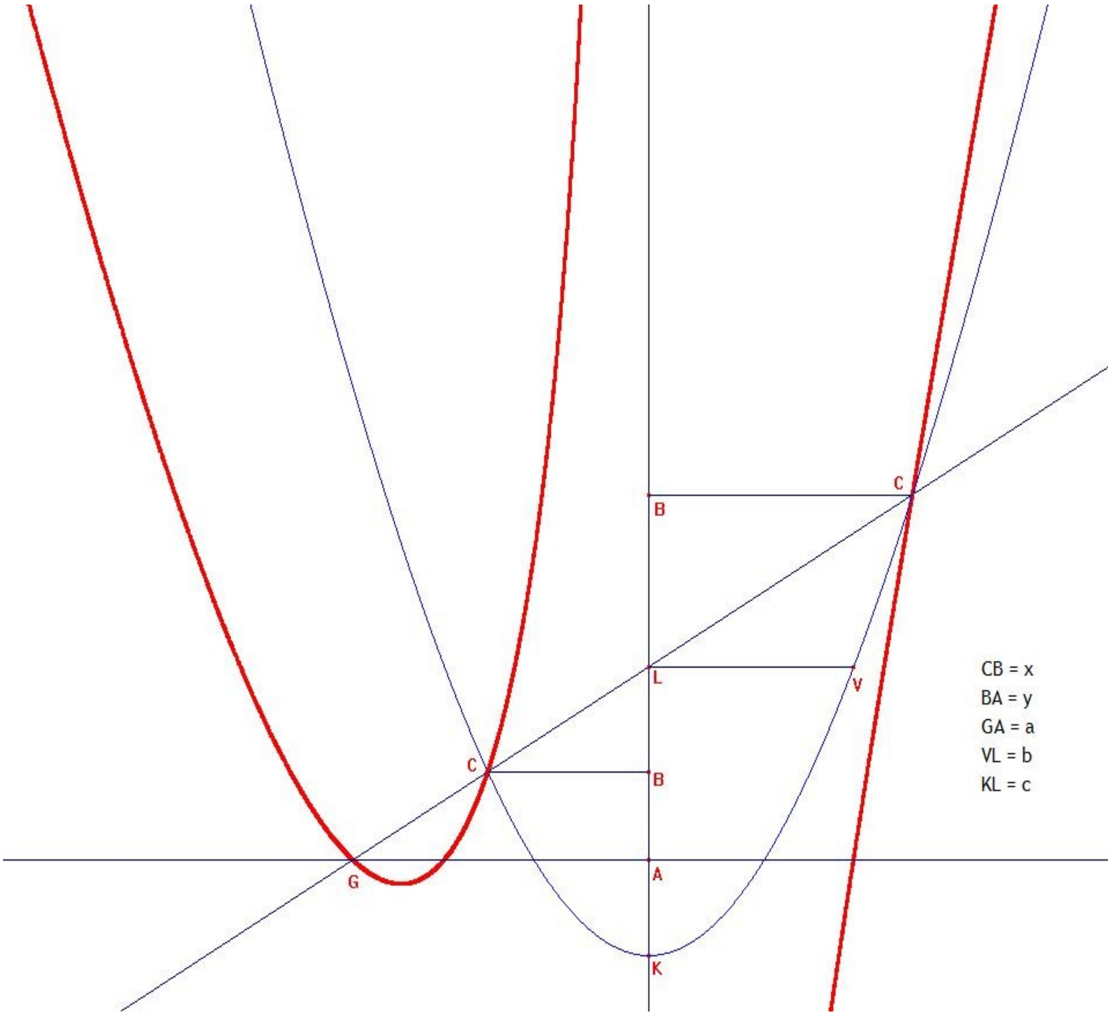
Za LB si dosadíme již dříve odvozené vztahy (Tabulka 2, viz str. 29). Po úpravě dostáváme rovnice tridentu opisovaného průsečíkem C při použití přístroje s parabolou s vrcholem směrovaným dolů:

pro levý horní kvadrant: $xy = -\frac{c}{b^2}(x-a)(b^2 - x^2)$,

pro pravý horní kvadrant: $xy = -\frac{c}{b^2}(x+a)(b^2 - x^2)$,

pro levý dolní kvadrant: $xy = \frac{c}{b^2}(x-a)(b^2 - x^2)$,

pro pravý dolní kvadrant: $xy = \frac{c}{b^2}(x+a)(b^2 - x^2)$.



Ilustrace 20: Pravítkový přístroj s parabolou, vrchol paraboly otočený dolů

Při dosazení Descartových vstupních podmínek do našich rovnic zjistíme, že Descartově rovnici pro trident odpovídá rovnice pro levý horní kvadrant.

Odvození rovnic pro křivku opisovanou průsečíky *C* při použití paraboly s vrcholem orientovaným nahoru probíhá analogicky. Výsledné rovnice jsou:

pro levý horní kvadrant: $xy=\frac{c}{b^2}(x-a)(b^2-x^2)$,

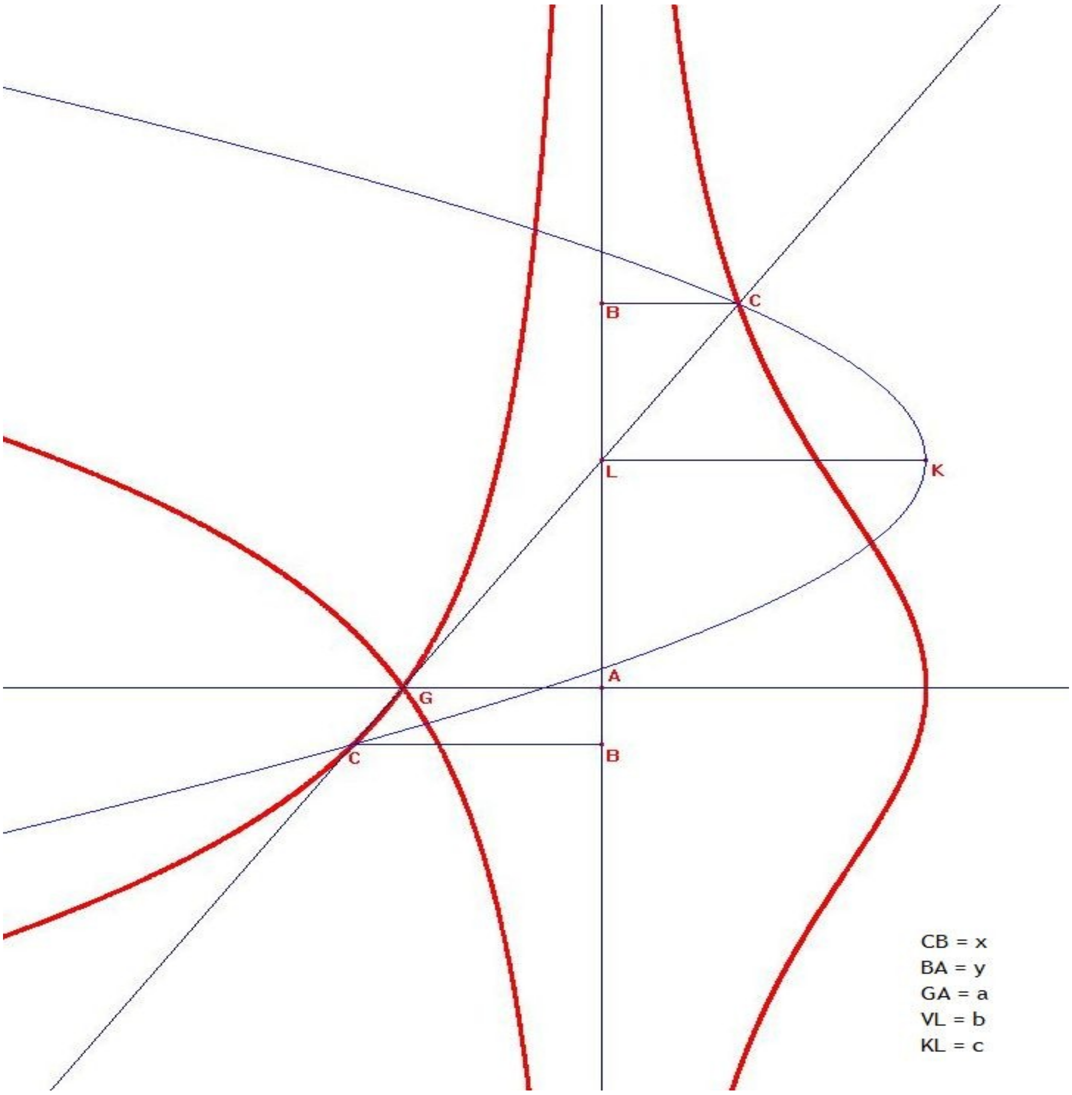
pro pravý horní kvadrant: $xy=\frac{c}{b^2}(x+a)(b^2-x^2)$,

pro levý dolní kvadrant: $xy=-\frac{c}{b^2}(x-a)(b^2-x^2)$, pro pravý dolní kvadrant: $xy=-\frac{c}{b^2}(x+a)(b^2-x^2)$.

Povšimněme si, že se pouze změnila znaménka u pravých stran rovnic. Výsledné křivky jsou totiž vzájemně osově souměrné podle přímky GA.

6.3.2 Osa paraboly je kolmá na přímku *LA*

Nyní budeme uvažovat případ, kdy osa použité paraboly bude s přímkou LA svírat pravý úhel. Bod L nadále leží uvnitř paraboly na její ose.

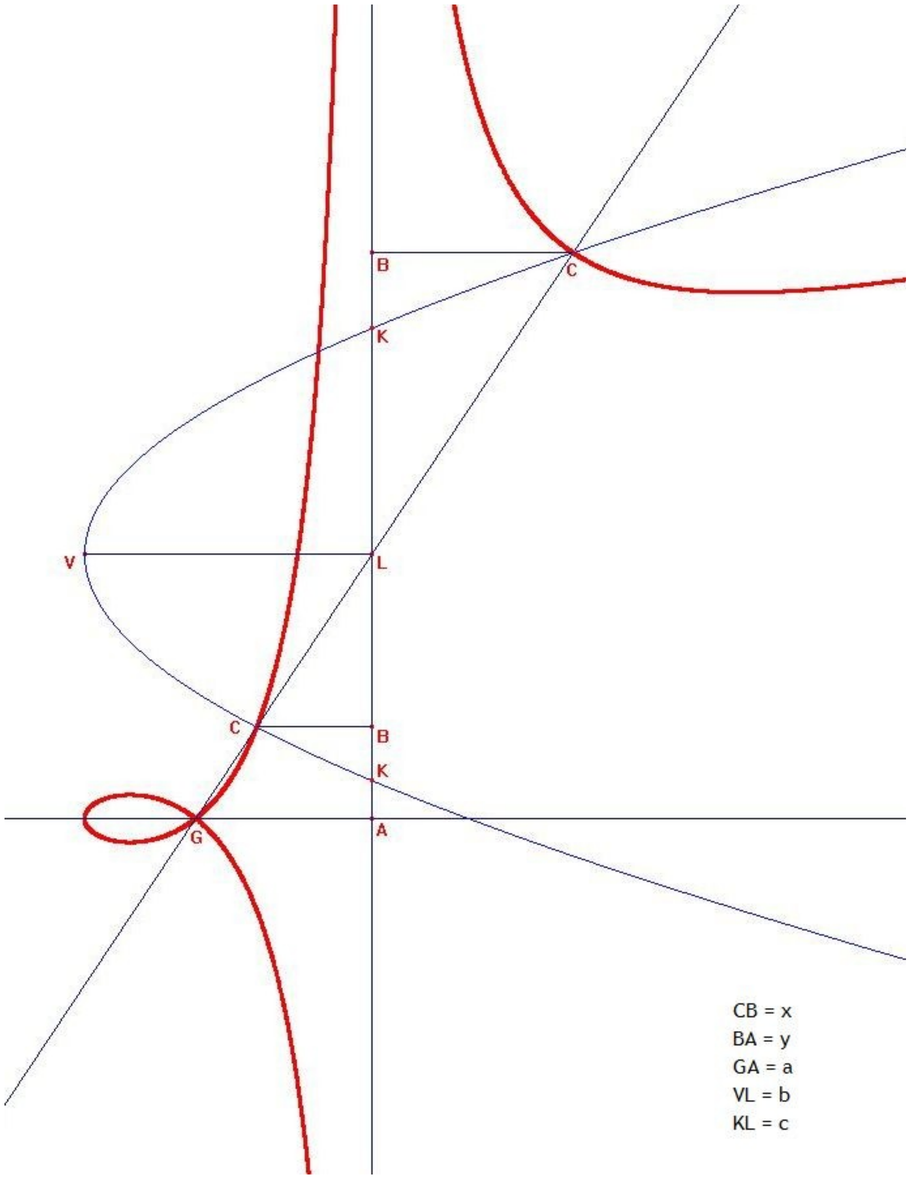


Ilustrace 21: Pravítkový přístroj s parabolou, vrchol paraboly otočený doprava

Pro parabolu orientovanou vrcholem doprava v levé polorovině platí rovnice paraboly: $pLB^2 = b + x$, v pravé polorovině pak rovnice: $pLB^2 = b - x$. To, že máme pro jednu parabolu dvě různé rovnice, je zapříčiněno tím, že neznámá

x není souřadnicí, ale velikostí úsečky – tedy kladné číslo. Toto by nás však již nyní nemělo překvapovat.

Hodnotu parametru $p = \frac{c}{b^2}$ získáme stejně jako v předchozí kapitole. Za velikost úsečky LB si dosadíme podle Tabulky 2 (viz str. 29). LB se v rovnici



Ilustrace 22: Pravítkový přístroj s parabolou, vrchol paraboly otočený doleva, VL > GA

paraboly vyskytuje pouze v druhé mocnině, která je pro body C_1 a C_3 shodná. Po dosazení a úpravě dostaneme výsledné rovnice narýsované křivky:

pro levou polorovinu: $x^2 y^2 = \frac{c^2}{b}(a-x)^2(b+x)$

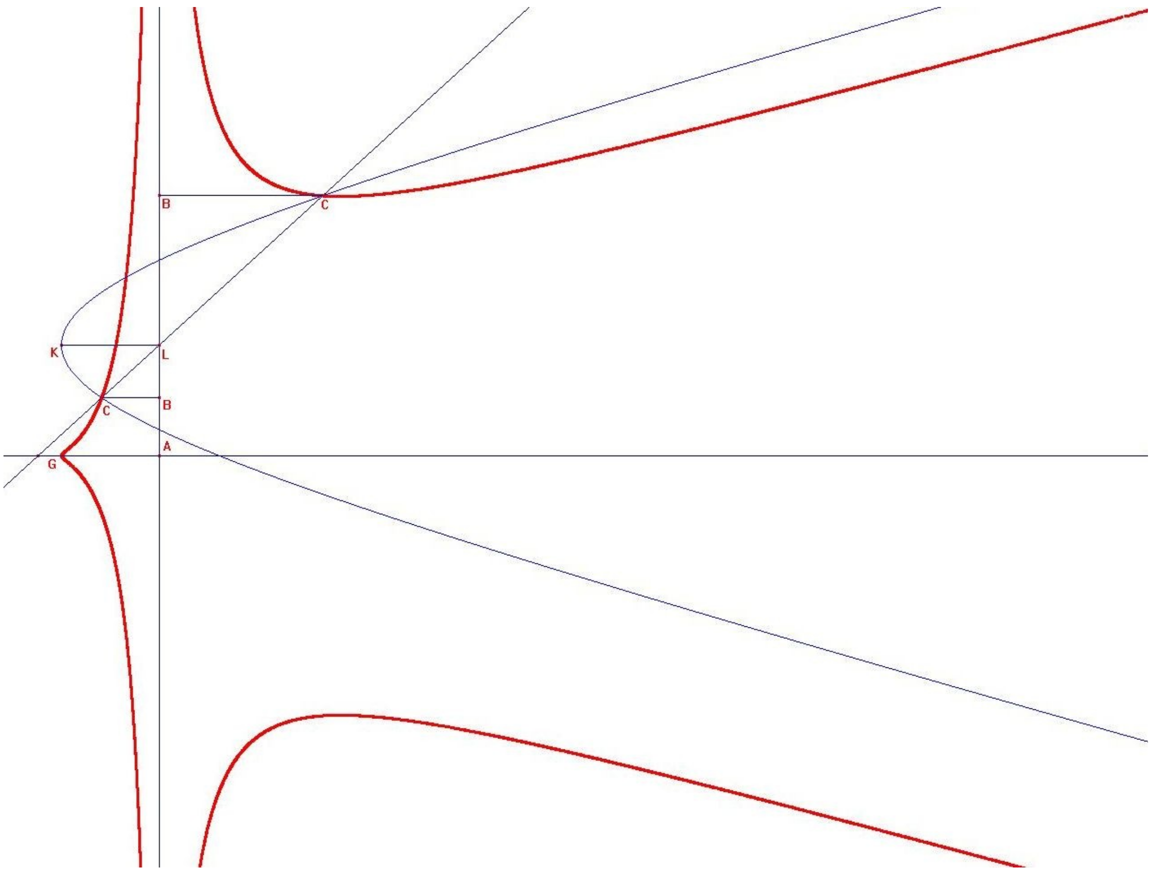
pro pravou polorovinu: $x^2 y^2 = \frac{c^2}{b}(a+x)^2(b-x)$

Parabola orientovaná vrcholem doleva má v levé polorovině rovnici: $pLB^2 = b - x$, v pravé polorovině rovnici: $pLB^2 = b + x$. Odvození rovnic křivky probíhá analogicky s předchozím případem. Získané rovnice jsou:

pro levou polorovinu: $x^2 y^2 = \frac{c^2}{b}(a-x)^2(b-x)$

pro pravou polorovinu: $x^2 y^2 = \frac{c^2}{b}(a+x)^2(b+x)$

Vzhledem k osové symetrii podle přímky *GA* u obou získaných křivek jsou i rovnice pro horní i dolní polorovinu symetrické.

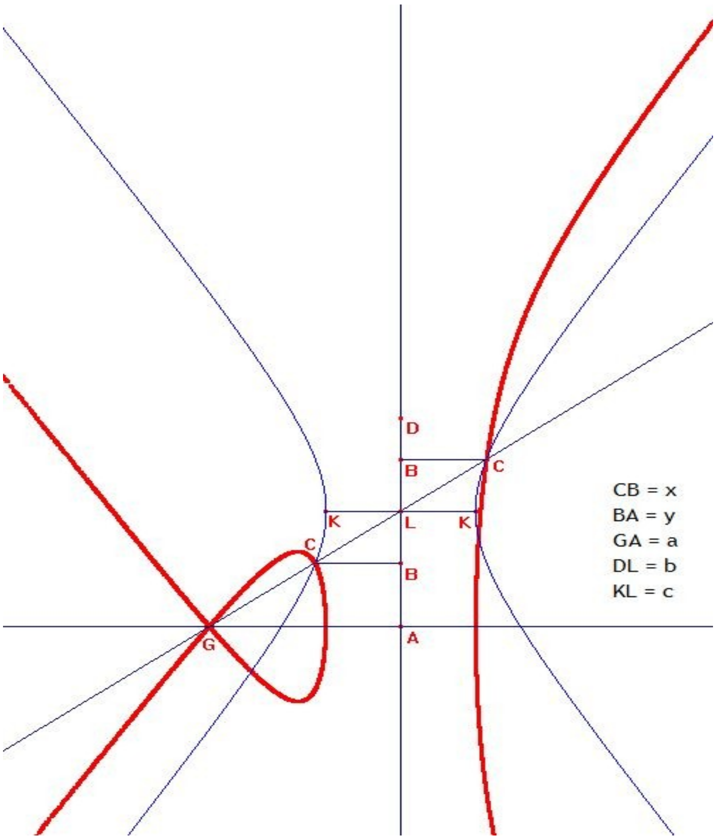


Ilustrace 23: Pravítkový přístroj s parabolou, vrchol paraboly otočený doleva, VL < GA

6.4 Pravítkový přístroj s hyperbolou

Hyperbola jejíž hlavní poloosa *KL* je kolmá na přímku *LA* a vedlejší poloosa *DL* leží na přímce *LA*, přičemž bod *L* je jejím středem, má rovnici:

$\frac{x^2}{c^2} - \frac{BL^2}{b^2} = 1$ Hodnota *BL* se v rovnici vyskytuje pouze jako druhá mocnina,



Ilustrace 24: Křivka opisovaná průsečíky přímky GL a hyperboly, hlavní osa hyperboly rovnoběžná s GA

která je pro body C_1 a C_3 stejná. Po dosazení za *BL* podle Tabulky 2 (viz str. 29) získáme rovnice výsledné křivky:

pro levou polorovinu: $x^2 y^2 = \frac{b^2}{c^2}(x-a)^2(x^2-c^2)$,

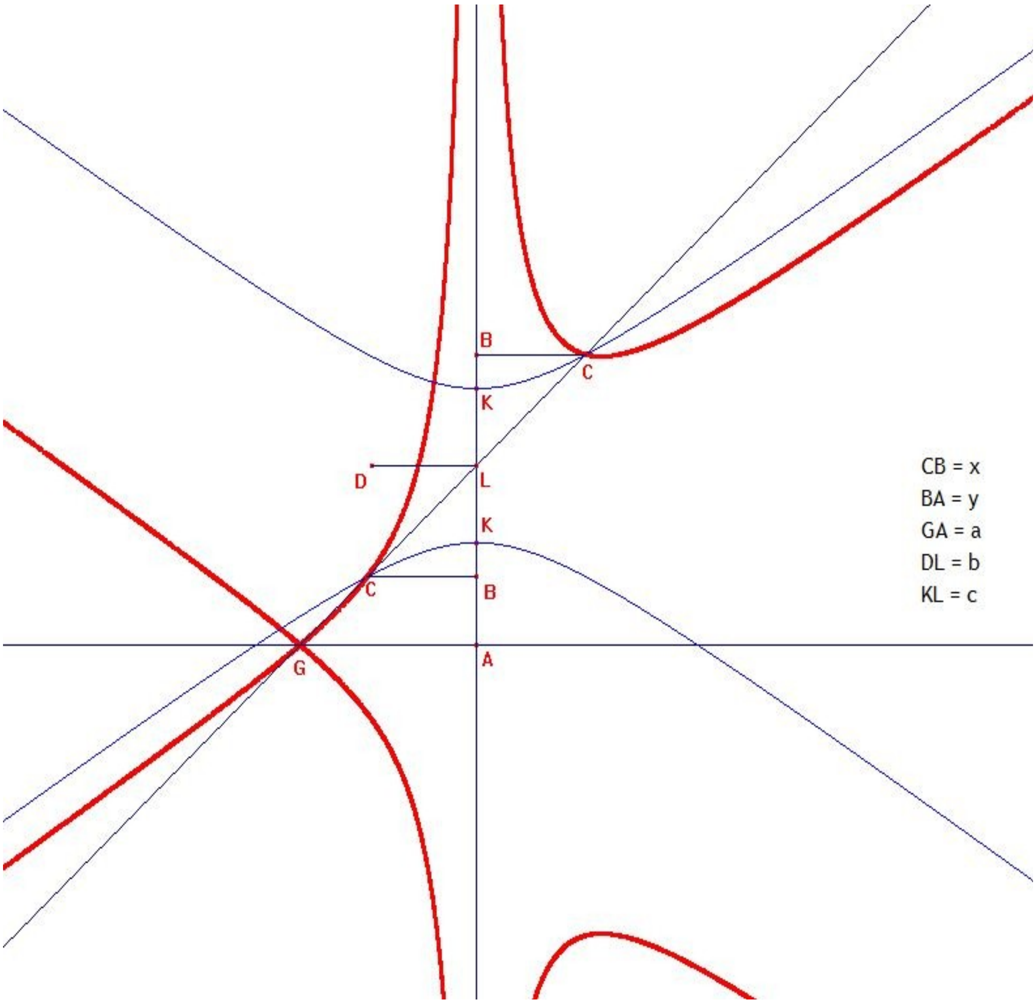
pro pravou polorovinu: $x^2 y^2 = \frac{b^2}{c^2}(x+a)^2(x^2-c^2)$.

Hyperbola jejíž hlavní poloosa *KL* je leží na přímce *LA* a vedlejší poloosa *DL* je na přímku *LA* kolmá, jejím středem je bod *L*, má rovnici: $\frac{BL^2}{c^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. Po dosazení za *BL* a úpravě získáváme rovnice křivky:

pro levou polorovinu: $x^2y^2=\frac{c^2}{b^2}(x-a)^2(x^2+b^2)$,

pro pravou polorovinu: $x^2y^2=\frac{c^2}{b^2}(x+a)^2(x^2+b^2)$.

Rovnice výsledné křivky v horní a dolní polorovině jsou díky souměrnosti podle přímky *GA* stejné.

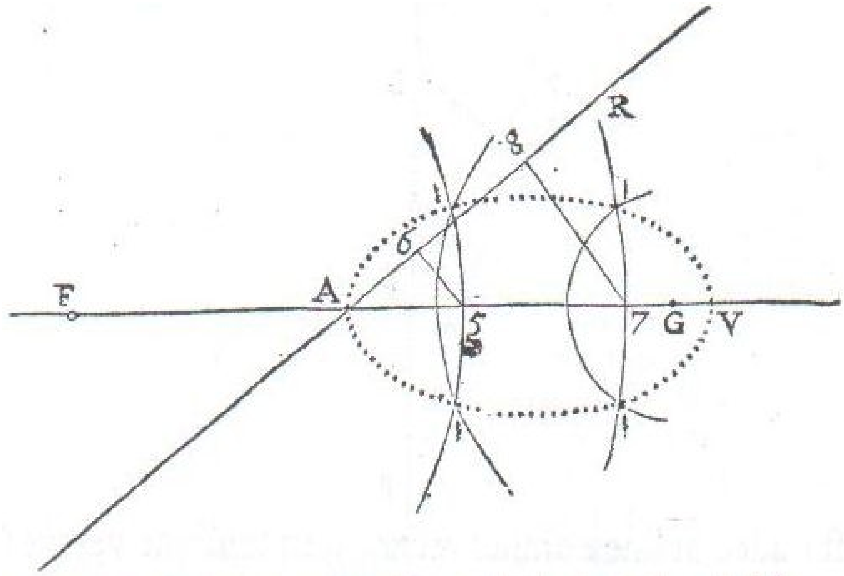


Ilustrace 25: Křivka opisovaná průsečíky přímky GL a hyperboly, hlavní osa hyperboly kolmá k GA

7. Descartovy ovály

7.1 První Descartův ovál

Descartes uvádí čtyři ovály jako příklad možného praktického využití křivek, konkrétně v katoptrice a dioptrice, tedy naukách o odrazu a lomu světla.

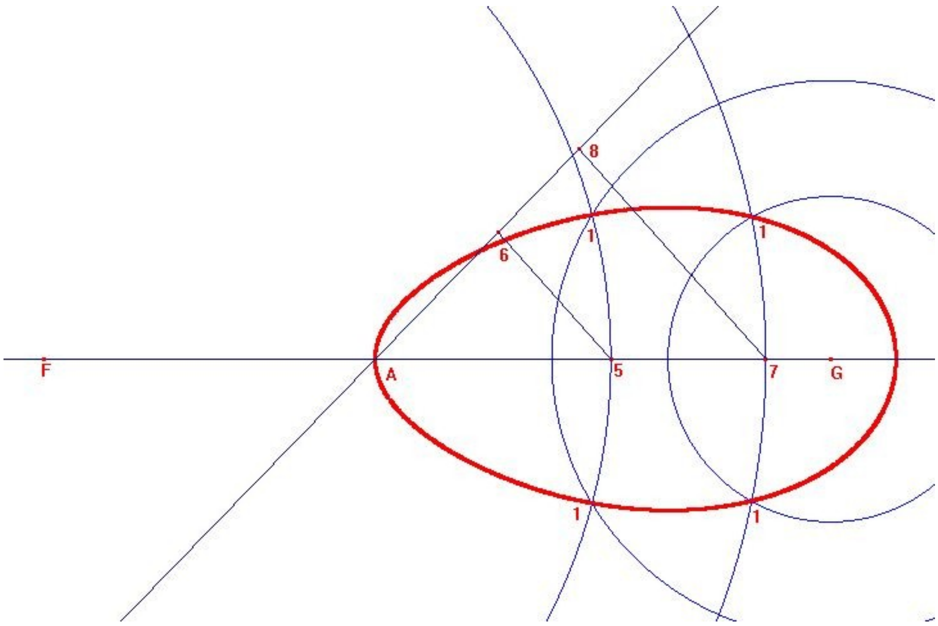


Ilustrace 26: 1. Descartův ovál (DESCARTES 1637b, str. 50)

Descartův popis konstrukce prvního z oválů je následující:

„Za prvé, poté co jsem vedl přímky *FA* a *AR*, které se protínají v bodě *A*, lhostejno pod jakými úhly, vezmu libovolně na jedné bod *F*, to jest více či méně vzdálený od bodu *A*, podle toho zda chci dělat ovály více či méně velké; a z tohoto bodu *F* jako středu opíši kružnici, která prochází poněkud za bodem *A*, například bodem *5*. Pak z tohoto bodu *5* vedu přímku *56*, která protíná přímku druhou v bodě *6*, tak že *A6* je menší než *A5* podle nějakého libovolného poměru, totiž podle takového poměru, který měří refrakce, má-li se těchto křivek použít v dioptrice. Poté vezmu také bod *G* na přímce *FA*, na té straně, kde je bod *5*, a opět libovolně, to jest tak, aby úsečky *AF* a *GA* byly v tomto poměru, který si zvolím. Pak položím *RA* rovno *GA* na přímce *A6* a ze středu *G* opíši kružnici s poloměrem rovným *R6*, protínající druhou kružnici z obou stran v bodě *1*, který je jedním z těch, jimiž musí procházet první z hledaných oválů. Pak znovu opíši ze středu *F* kružnici, která prochází trochu před nebo za bodem *5*, například bodem *7*; a poté co jsem vedl přímku *78* rovnoběžně s *56*, opíši ze středu *G* další kružnici, jejíž poloměr je roven úsečce *R8*, pak tato kružnice protne tu kružnici, která prochází bodem *7*, v bodě *1*, který je opět jedním z bodů téhož oválu. A takto lze nacházet tolik dalších bodů, kolik se nám zachce, tím že vedem další rovnoběžky s *78* a další kružnice se středy *F* a *G*.“ (Geometrie str. 50-51)

Konstrukce v Cabri Geometry II se dá bez problémů provést podle Descartova popisu postupu. Jen s tím rozdílem, že nemusíme stejně jako Descartes pro získání dalších a dalších bodů oválu vždy opakovat celou jejich konstrukci. Po získání druhé dvojice bodů *1* zapneme sledování jejich trasy pomocí funkce „Stopu zapni/vypni“. Plynulým zvětšováním a zmenšováním kružnice se středem v bodě *F* a procházející bodem *7* vykreslíme postupně celý první ovál.



Ilustrace 27: 1. Descartův ovál, použitý poměr A5:A6 = 1,34 : 1

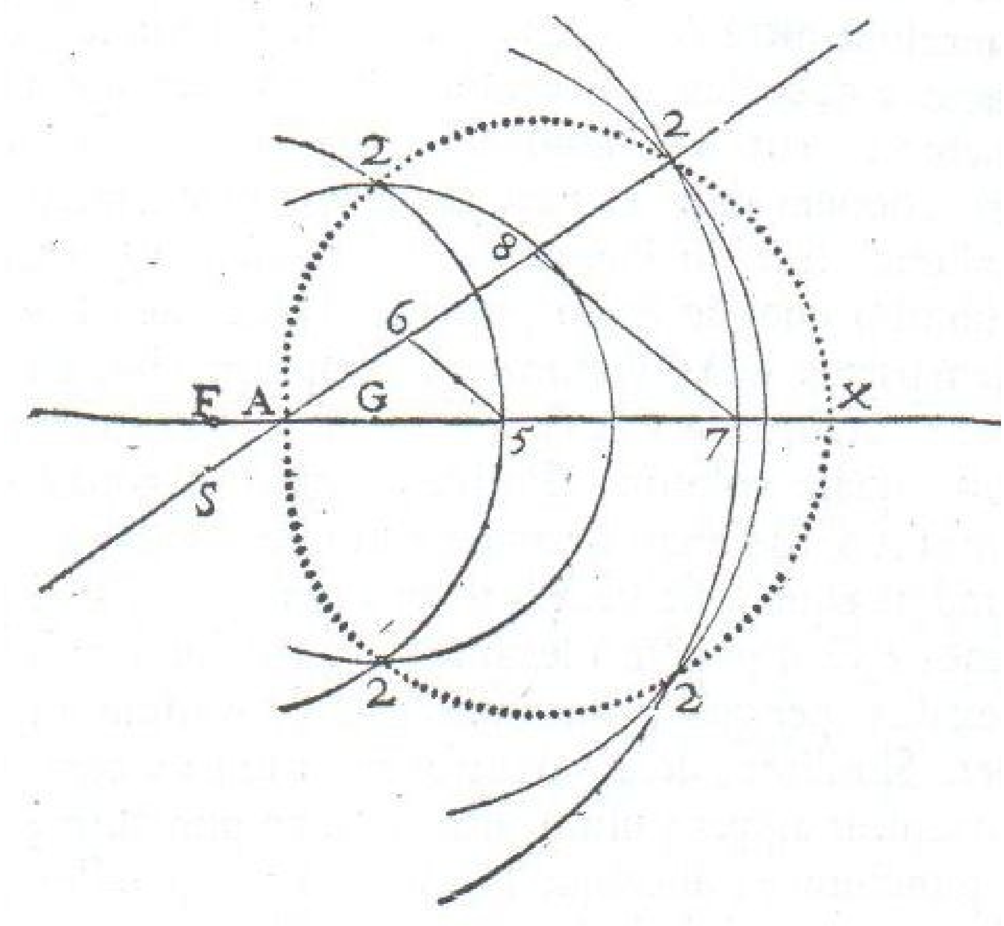
Rovnici prvního oválu získáme následujícím postupem:

„Označme daný poměr $A6 : A5 = m : n$, dané úsečky $AF = p$, $AG = q$. Pak $AR = GA = q$. $R6 = AR – A6 = q – \frac{m}{n} A5$. Máme $F1 = p + A5$, $G1 = R6 = q – \frac{m}{n} A5$ a odtud

$mF1 + nG1 = mp + nq$, $d= FG = p + q$." (Geometrie str. 51, doc. Jiří Fiala, poznámka č. 63)

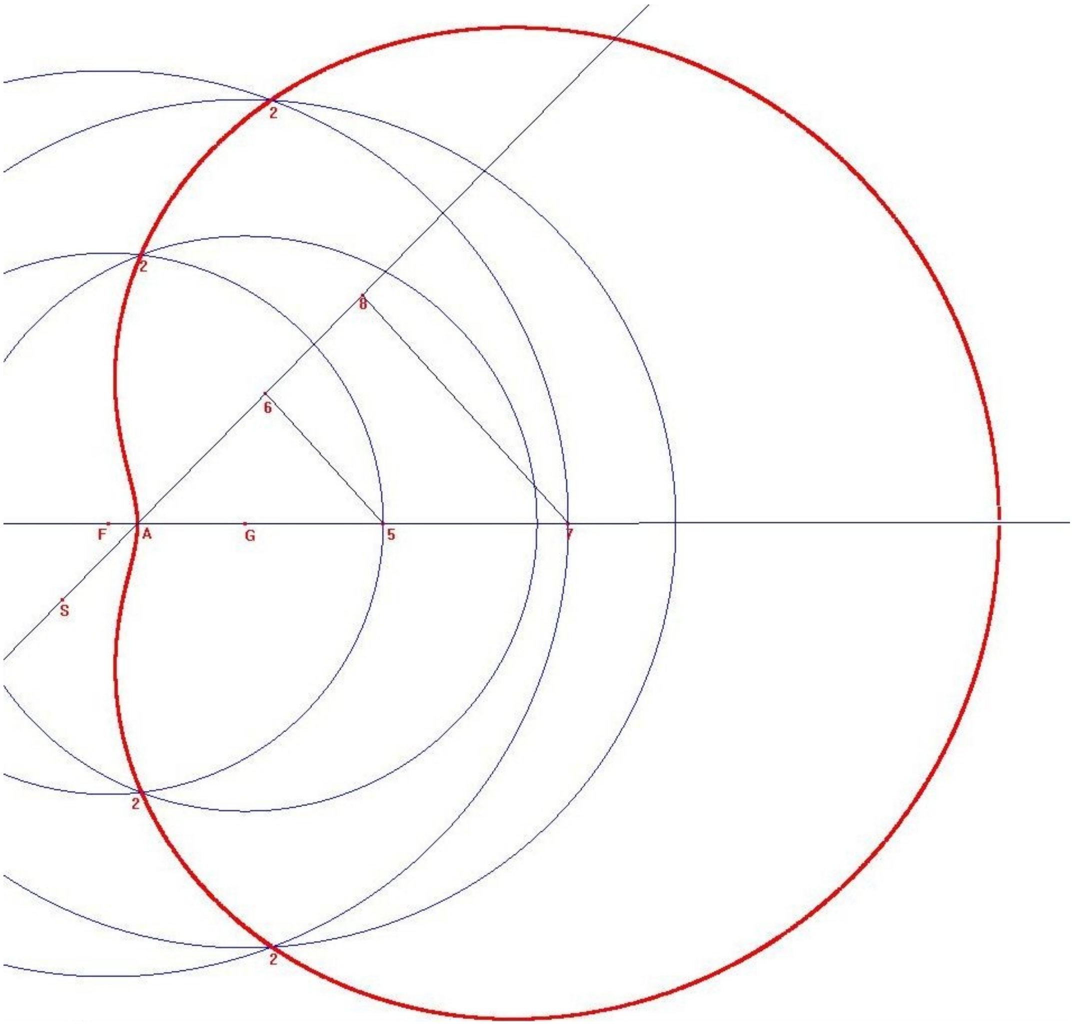
7.2 Druhý Descartův ovál

„Druhý ovál se liší jen tím, že místo *AR* je třeba vzít (na druhé straně od *A*) úsečku *AS* rovnou *AG* a že se poloměr kružnice opsané ze středu *G* (pro získání průsečíku s kružnicní opsané ze středu *F* a procházející bodem *5*)



Ilustrace 28: 2. Descartův ovál (DESCARTES 1637b, str. 52)

bere rovným úsečce *S6*, nebo *v* případě průsečíku kružnice procházející bodem *7*) rovným *S8* a tak dále. Pomocí čehož se tyto kružnice budou protínat v bodech označených *2*, *2*, což jsou body druhého oválu, *A2X*.“ (Geometrie str. 51-52)



Ilustrace 29: 2. Descartův ovál, použitý poměr A5:A6 = 1,33 : 1

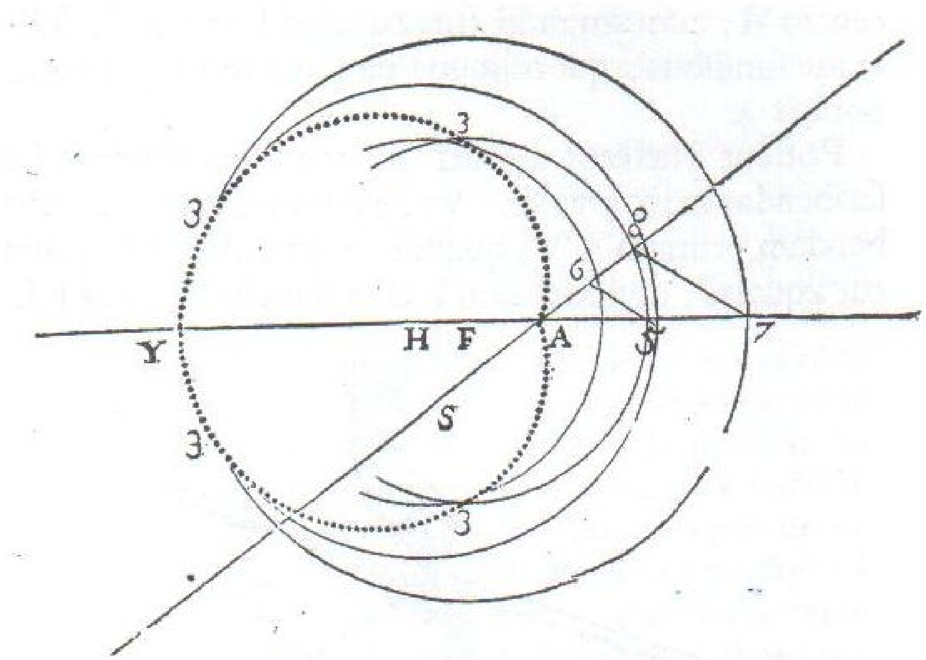
Pro vykreslení oválu v Cabri Geometry II budeme postupovat obdobně jako u konstrukce prvního oválu. Zapneme sledování trasy u druhé dvojice bodů *2* a plynulým měněním průměru kružnice se středem *F* a procházející bodem *7* vykreslíme druhý ovál.

„Zde $AS = AG = q$, $G2 = q + \frac{m}{n} A5$, $F2 = p + A5$, takže rovnice druhého oválu je:

$mF2 - nG2 = mp - nq$, $d = p + q$.“ (Geometrie, str. 52, doc. Jiří Fiala, poznámka č. 64)

7.3 Třetí Descartův ovál

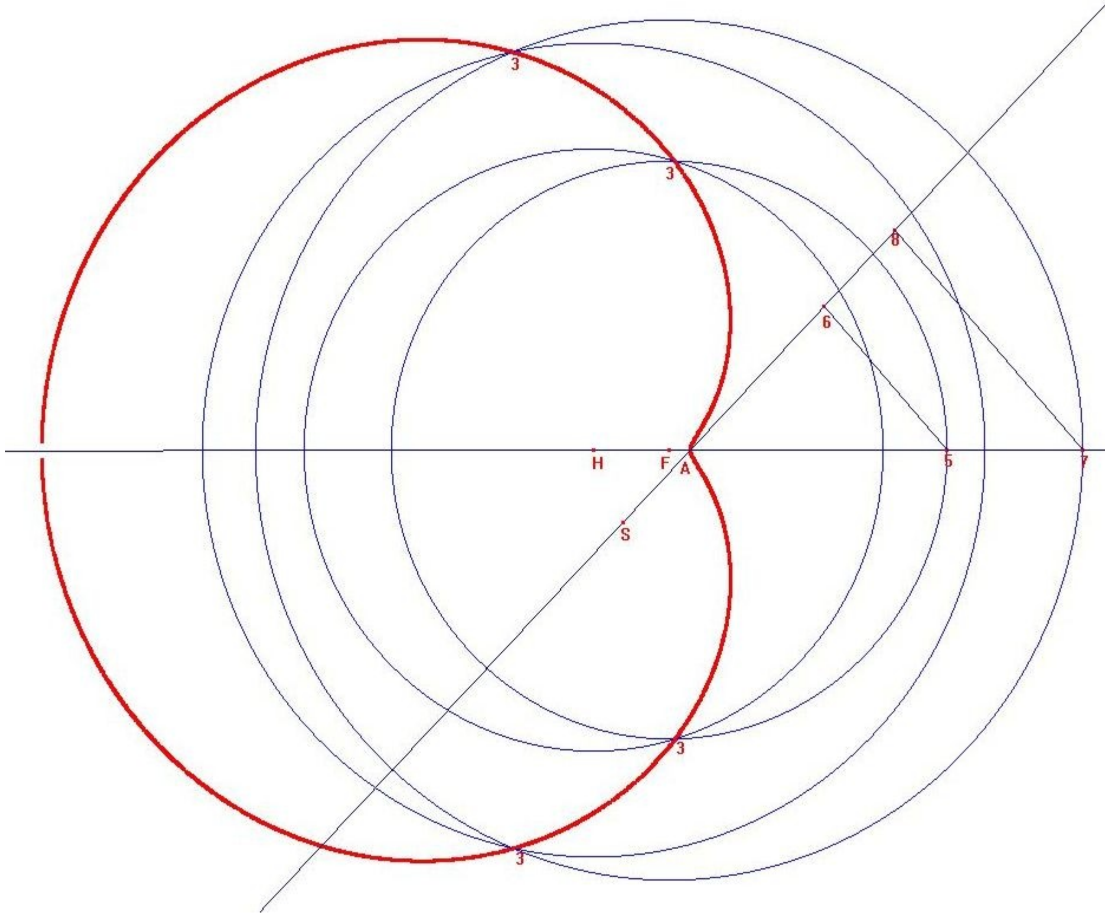
„Pro třetí a čtvrtý ovál je třeba vzít místo úsečky *AG* úsečku *AH* z druhé strany bodu *A*, totiž z té, kde je bod *F*. A je ještě něco dalšího, čeho je třeba si všimnout, totiž že tato úsečka *AH* musí být větší než *AF*, která sama může být nulová, takže se bod *F* při opisování tohoto oválu ocitne tam, kde je bod A. Potom jsou úsečky AR a AS rovny AH a pro opisování třetího oválu A3Y



Ilustrace 30: 3. Descartův ovál (DESCARTES 1637b, str. 53)

udělám kružnici se středem H, jejíž poloměr je roven S6 a která protíná v bodě 3 kružnici se středem F, která prochází bodem 5; a ještě další, jejíž poloměr je roven S8 a která protíná tu kružnici, jež prochází bodem 7 v bodě také označeném 3: a tak i pro další.“ (Geometrie, str. 52-53)

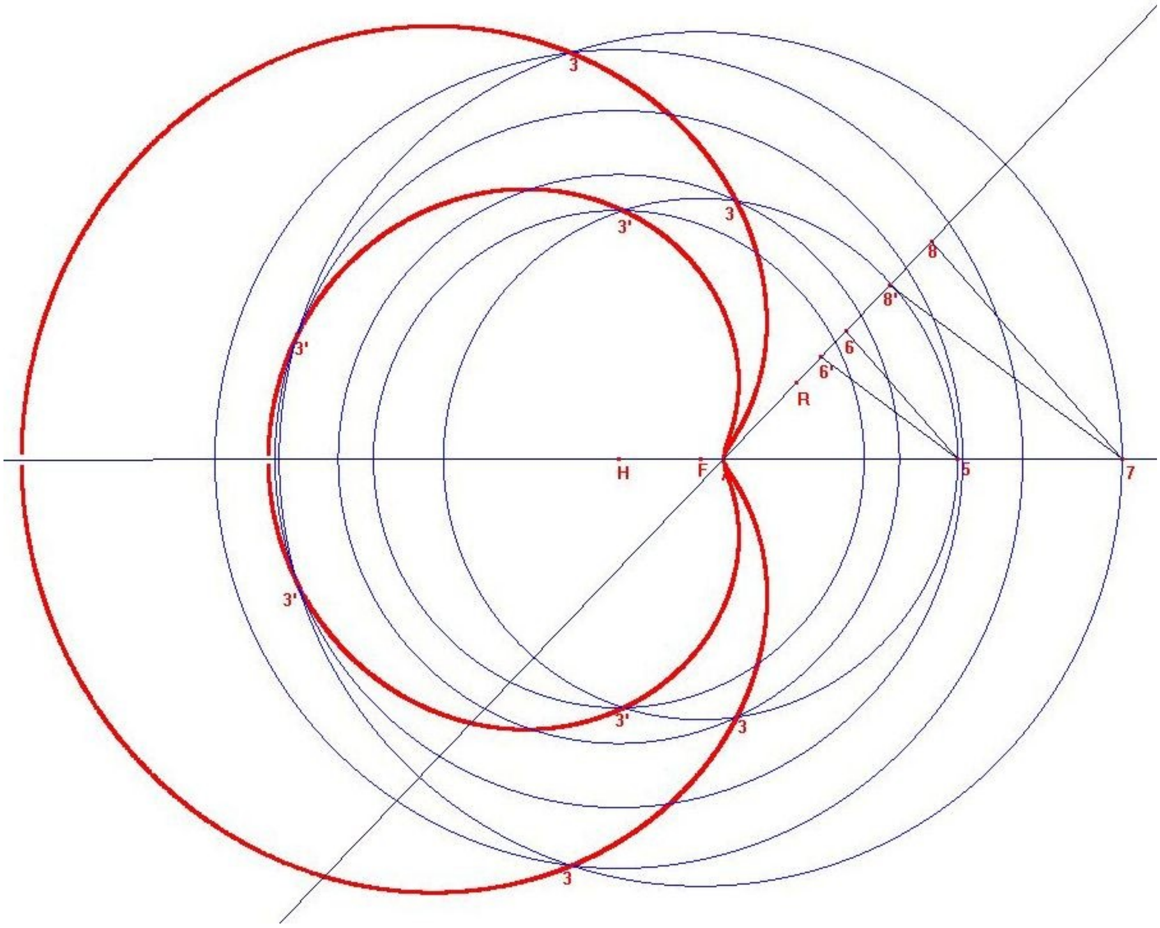
Pro vykreslení oválu v Cabri Geometry II budeme postupovat obdobně jako v předešlých dvou případech. Zapneme sledování trasy u druhé dvojice bodů *3* a plynulým měněním průměru kružnice se středem *F* a procházející bodem *7* vykreslíme třetí ovál.



Ilustrace 31: 3. Descartův ovál, použitý poměr A5:A6 = 1,33 : 1

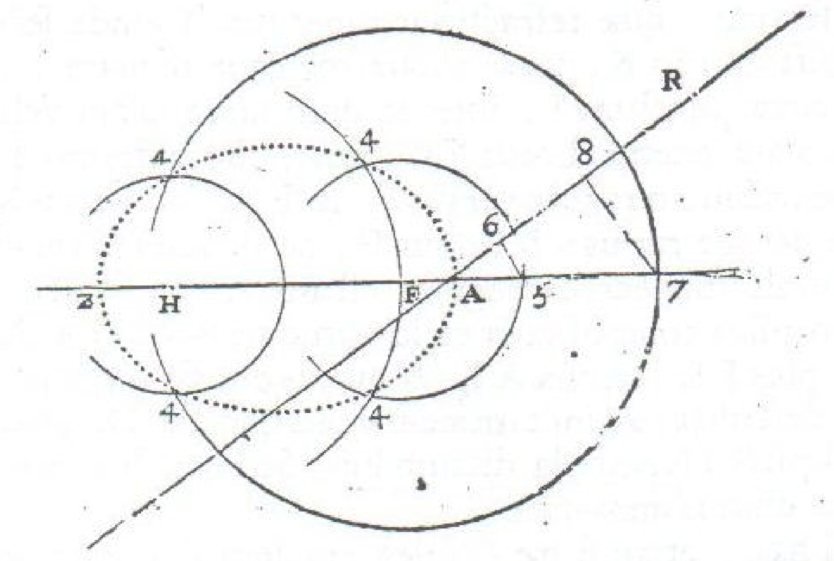
„Zde AR = AS = AH = q, H3 = AS + A6 = q + $\frac{m}{n}$ A5, F3 = p + A5, takže rovnice třetího oválu je:

mF3 – nH3 = mp – nq, d = q – p." (Geometrie, str. 52, doc. Jiří Fiala, poznámka č. 64)



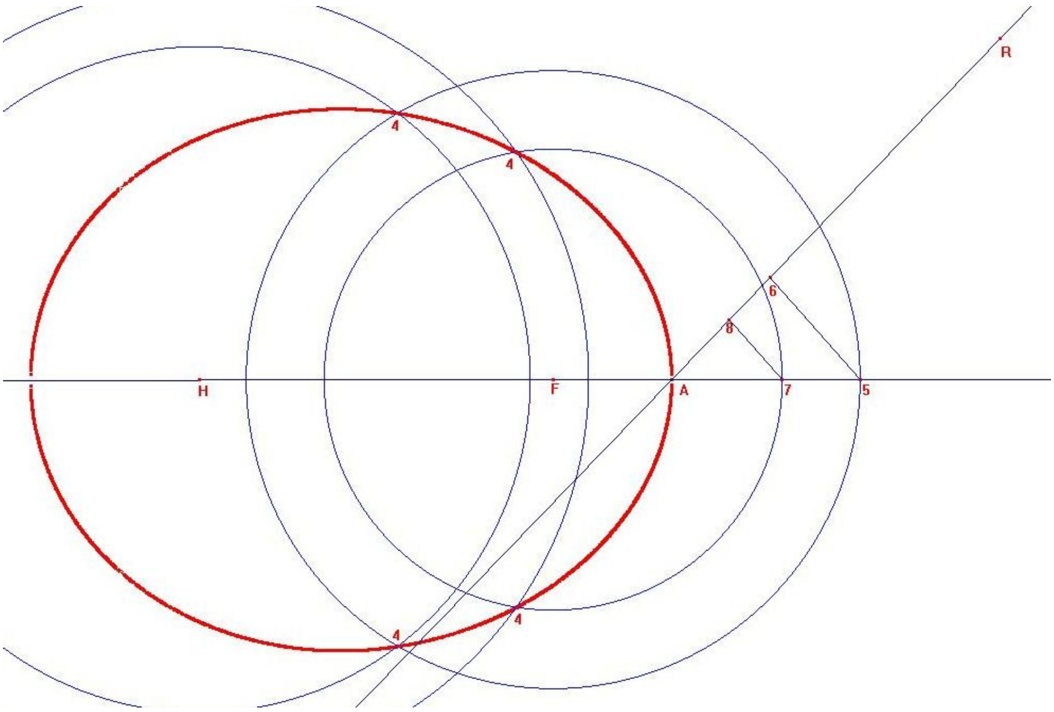
Ilustrace 32: 3. Descartův ovál, porovnání dvou oválů s různě zvolenými poměry A5:A6. Poměry jsou 1,22:1 pro ovál A3X a 1,77:1 pro ovál A3'X.

7.4 Čtvrtý Descartův ovál



Ilustrace 33: 4. Descartův ovál (DESCARTES 1637b, str. 53)

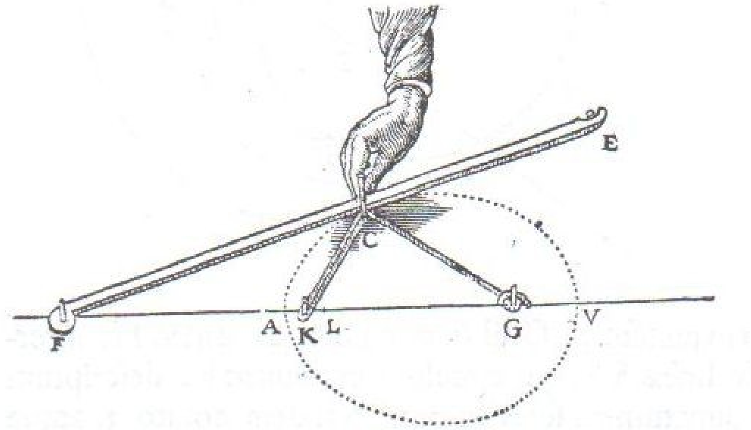
„Konečně pro poslední ovál opíši kružnice ze středu H, jejichž poloměry jsou rovny úsečkám R6, R8 a podobným, které protínají jiné kružnice ve středech označených 4.“ (Geometrie str. 53-54)



Ilustrace 34: 4. Descartův ovál, použitý poměr A5:A6 = 1,33 : 1

I tentokrát je pro vykreslení oválu v Cabri Geometry II postup obdobný jako u předchozích oválů. Zapneme sledování trasy u druhé dvojice bodů *4* a plynulým měněním průměru kružnice se středem *F* a procházející bodem *7* vykreslíme čtvrtý ovál.

„Zde R6 = FR – A6 = q – $\frac{m}{n}$ A5, H4 = R6 = q – $\frac{m}{n}$ A5, F4 = p + A5, takže rovnice čtvrtého oválu je mF4 + nH4 = mp + nq, d = q – p.“ (Geometrie, str. 54, doc. Jiří Fiala, poznámka č. 66)



Ilustrace 35: Provázková konstrukce oválu (DESCARTES 1637b, str. 54)

Podle Descarta je možno nalézt nekonečně mnoho konstrukcí těchto oválů, jako příklad uvádí příklad konstrukce oválu pomocí provázku. „Nechci se však u tohoto tématu déle zdržovat.“ prohlašuje posléze Descartes, od tématu konstrukce odchází a nadále se již zaobírá samotnou dioptrikou oválů.

Závěr

Podařilo se nám ukázat, že s pomocí moderní techniky je možno zopakovat Descartovy konstrukce. Tam, kde Descart naráží na technickou náročnost nebo dokonce nemožnost konstrukci provést, můžeme my pokračovat. Jako příklad nám může posloužit konstrukce oválů. U ní je Descart donucen použít bodovou konstrukci, my však s využitím počítače dokážeme namodelovat konstrukci dynamickou.

Domnívám se, že ukázané konstrukce jsou při výuce matematiky využitelné. Žákům lze k řešení předložit tu část problematiky, kterou jsou schopni na své úrovni zvládnout. Najdeme zde konstrukce, které jsou celkem jednoduché, ale i konstrukce komplikovanější.

I odvozování rovnic jednotlivých křivek má různou obtížnost. Náročnost výpočtu u některých křivek narůstá kvůli nutnosti odvozovat pro jednu křivku několik dlouhých rovnic. Výpočty je možné do jisté míry zjednodušit zavedením soustavy souřadnic, čemuž jsme se zde z historických důvodů vyhnuli.

Při dalším zájmu o problematiku dynamických konstrukcí křivek si zaslouží pozornosti kniha A. B. Kempeho How to Draw a Straight Line z roku 1877. Zpracování jeho konstrukčních přístrojů pomocí počítače jistě nebude bez zajímavosti. Několik ukázek je možné nalézt na stránkách www.wolfram.com.

Na úplný závěr mi dovolte ocitovat poslední větu Descartovy Geometrie:

„A já doufám, že naši potomci budou vděční nejen za věci, které jsem zde vysvětlil, ale i za ty, které jsem dobrovolně vynechal, abych jim ponechal rozkoš je vynalézt.“

K O N E C

Použitá literatura

BEČVÁŘ, Jindřich. *René Descartes: Milovník rozumu*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Velké postavy vědeckého nebe. ISBN 80-7196-082-9.

DESCARTES, René. 1637b, *Geometrie*. 1. vyd. Jiří FIALA. Praha: OIKOYMENH, 2010. ISBN 978-80-7298-313-3.

DESCARTES, René. 1637a, *Rozprava o metodě*. 2. vyd. Praha: Jan Laichter, 1947. Laichterova Filosofická knihovna, sv. 7.

FIALA, Jiří. Jak přijít úsečce na kloub. *Vesmír: přírodovědecký časopis Akademie věd České republiky*. Praha: Vesmír, 2008, roč. 87, č. 4, 258 - 263. ISSN 0042-4544.

HILTON, Harold. *Plane Algebraic Curves*. Oxford, U.K.: Clarendon Press, 1920.

KEMPE, A. B. *How to Draw a Straight Line;: a Lecture on Linkages*. London: MacMillan, 1877.

LEIBNIZ, G. W. 1684, Nová metoda maxim a minim, in: O reforme vied, Bratislava: Vydavatelstvo Slovenskej Akadémie vied, 1956, 94 - 102

LIVIO, Mario. *Je Bůh matematik?*. Praha: Dokořán, 2010. zip, sv. 17. ISBN 978-80-7363-282-3.

LOMTATIDZE, Lenka. *Historický vývoj pojmu křivka*. Brno: Česká matematická společnost, 2007, 239 s. Dějiny matematiky (Česká matematická společnost), sv. 30. ISBN 978-807-2044-924.

STUDNIČKA, F. J. O zásluhách Descartesových v oboru věd exaktních. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*. 1897, č. 26, 73 - 94.