UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Marcela Štecová

Planimetrie v učivu matematiky 2. stupně ZŠ s využitím dynamické geometrie

Olomouc 2013 Vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 16. 4. 2013 …………………………

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu práce Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D., za odborné vedení diplomové práce, věnovaný čas a ochotu, poskytování cenných rad a pomoc při konzultacích.

OBSAH

ÚVOD 6

1 UČIVO PLANIMETRIE NA 2. STUPNI ZÁKLADNÍCH ŠKOL 7

1.1 Planimetrie v RVP a doporučených učebních osnovách 7

1.2 Uspořádání učiva geometrie na 2. stupni základních škol 8

1.3 Klíčové kompetence a podpora interaktivní výuky 12

2 ÚLOHY V DYNAMICKÉ GEOMETRII 14

2.1 Dynamická geometrie 14

2.2 Typy učebních úloh v dynamické geometrii 14

2.3 Metody výuky 19

2.3.1 Principy konstruktivistického učení 19

2.3.2 Problémové vyučování..20

2.3.3 Heuristická metoda 20

2.3.4 Výzkumná metoda 20

2.4 Význam výuky s dynamickou geometrií 21

3. TVORBA VÝUKOVÝCH MATERIÁLŮ NA WEBU 23

3.1 Software dynamické geometrie 23

3.2 Vytváření webové stránky s applety 26

3.2.1 Tvorba appletů...26

3.2.2 Webová stránka 29

3.3 Využití ve výuce 31

3.3.1 Frontální výuka s projektorem 31

3.3.2 Práce s interaktivní tabulí..31

3.3.3 Výuka v počítačové učebně..32

3.3.4 Samostudium žáků 32

4 VÝUKOVÉ MATERIÁLY PRO PODPORU VÝUKY PLANIMETRIE 33

4.1 Soubor úloh a jejich členění 33

4.1.1 Charakteristika úloh 33

4.2 Práce s applety 34

4.2.1 Pohyb objektů v appletech 34

4.3 Základní prvky roviny 36

4.4 Úhel v rovině 40
4.5 Trojúhelník 44
4.6 Čtyřúhelník 49
4.7 Mnohoúhelníky 54
4.8 Kružnice a kruh 57
4.9 Obvody a obsahy 60
4.10 Množiny bodů dané vlastnosti 63
4.11 Konstrukční úlohy 68
ZÁVĚR 71
Literatura 72
Seznam příloh 75

Úvod

Moderní pedagogika podporuje užití informačních a komunikačních technologií ve vzdělávání. Počítače, projektory, interaktivní tabule jsou zaváděny do škol, aby rozvíjely informační gramotnost žáků a poskytly jim i učitelům vhodný prostředek pro usnadnění procesu vzdělávání. Technologií lze využít také ve výuce geometrie na základních školách a to především prostřednictvím softwaru dynamické geometrie, který umožňuje pohyb konstruovaných objektů a tím nabízí širokou škálu využití ve vzdělání. Proto mě tato oblast zaujala při studiu učitelství matematiky a zaměřila jsem se na studium programu Cabri Geometrie a jeho možnosti pro výuku planimetrie na základních školách.

Cílem diplomové práce bylo vybrat z učiva matematiky na druhém stupni základních škol oblasti planimetrie vhodné pro aplikaci programu dynamické geometrie. Na základě vybraných témat rovinné geometrie vytvořit v programu Cabri Geometrie II úlohy s interaktivními prvky. Dále potom z úloh sestavit výukové materiály přístupné na webových stránkách ve formě CabriJava appletů a popsat možnosti aplikace těchto materiálů ve výuce i pro samostatné opakování žáků.

Diplomová práce je členěna do čtyř základních kapitol. První kapitola vybírá učivo planimetrie z kurikulárních dokumentů pro základní školy a zdůrazňuje očekávané výstupy žáků, požadované kompetence a jejich možnou realizaci v prostředí dynamické geometrie. Zabývá se také chronologickým sestavením učiva geometrie ve školních vzdělávacích programech. Další kapitola se věnuje klasifikaci úloh v dynamické geometrii a výukovým metodám a shrnuje význam dynamické geometrie ve vzdělávání. V třetí části je rozebrán postup tvorby appletů a webových stránek a potřebné softwarové vybavení.

Praktickou částí diplomové práce jsou webové stránky se souborem úloh z planimetrie a vytvořenými applety ke každé úloze. Ve čtvrté kapitole jsou některé úlohy vybrány a je zde rozebráno jejich sestavení a práce s webovou stránkou a applety ve výuce. Výukové materiály jsou volně dostupné na internetu a nabízí velké množství úloh s interaktivními applety vhodné pro výuku na základních školách.

1 Učivo planimetrie na 2. stupni základních škol

Na druhém stupni základních škol se vyučuje geometrie v rovině a prostoru v rámci předmětu Matematika a její aplikace v průběhu všech čtyř ročníků, od 6. do 9. třídy. Obsah učiva je dán Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (dále RVP), kde jsou formulovány schopnosti a dovednosti, kterých má žák v této oblasti dosáhnout po absolvování základní školy. Konkrétní rozvržení učiva je určeno učebními osnovami ve školním vzdělávacím programu, který si každá základní škola vytváří sama.

1.1 Planimetrie v RVP a doporučených učebních osnovách

Vzdělávací obsah předmětu Matematika a její aplikace pro 2. stupeň základních škol se člení do čtyř oblastí – číslo a proměnná, závislosti, vztahy a práce s daty, geometrie v rovině a prostoru a nestandardní aplikační úlohy a problémy. Budeme se tedy blíže zabývat právě oblastní rovinné geometrie, ve které se podle Rámcového vzdělávacího programu žáci naučí: orientovat se v rovině, popsat, změřit a sestrojit daný geometrický útvar a spočítat obsahy, povrchy a objemy různých geometrických útvarů v rovině. Z oblasti nestandardních aplikačních úloh se v geometrii zaměří především na dovednosti modelování v matematice (RVP, 2013).

Očekávané výstupy v geometrii a jejich realizace

RVP stanovuje základní seznam výstupů, který charakterizuje, kam by měli žáci dojít po absolvování 2. stupně základní školy. S ohledem na tyto dovednosti byl sestaven i výukový materiál. V oblasti geometrie jsou to právě následující výstupy:

- *„Žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku.“ (RVP, 2013, s. 30).* Tuto dovednost se žáci naučí zejména v celku Základní prvky roviny, kde se budou seznamovat s pojmy v geometrii, odvodí si jednotlivé polohové vlastnosti útvarů; zápis symboliky si osvojí až pod vedením učitele.
- *„Žák charakterizuje a třídí základní rovinné útvary“* (RVP, 2013, s. 30). Rovinné útvary budou v materiálu třízeny již v záhlaví pro celkový přehled. Žáci si vyzkoušejí jednotlivé vlastnosti útvarů a na základě jejich experimentálních činností je budou

umět charakterizovat a porovnávat. Své poznatky mají za úkol formulovat vždy na závěr úlohy v tzv. shrnutí.

- *„Žák určuje velikost úhlu měřením a výpočtem"* (RVP, 2013, s. 30). Měření úhlu je dovednost, kterou lze nacvičit ve výuce. Výpočet úhlů zejména při využití vlastností dvojic úhlů (vedlejší, souhlasné, střídavé, součet úhlů v trojúhelníku apod.) leze procvičovat rovněž pomocí dynamických materiálů, kde každé posunutí zadané přímky či úsečky generuje nový příklad k procvičení.
- *„Žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů"* (RVP, 2013, s. 30). Dynamika v geometrii umožňuje měnit parametry rovinných útvarů a tím generuje množství příkladů pro odhad a následné ověření velikosti obsahů a obvodů. Také ukazuje závislosti parametrů (velikost strany, výšky apod.) na konečném obsahu či obvodu útvaru.
- *„Žák využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh"* (RVP, 2013, s. 30). Pro lepší pochopení konstrukce množin bodů daných vlastností je výborným nástrojem právě dynamická geometrie, která umožňuje postupně hledané body vykreslovat. Seznámí se se základními množinami bodů (kružnice, osa přímky atd.) a také s množinami bodů, které vykreslují další útvary (kuželosečky apod.).
- *„Žák načrtne a sestrojí rovinné útvary"* (RVP, 2013, s. 30). Při nácviku konstrukčních úloh jsou žáci odkázání především na ukázkový postup učitele a zejména pomalejší žáci si při domácí přípravě už nepamatují, jak daný rovinný útvar konstruovali. Může jim proto pomoci výukový materiál zavěšený na dostupném internetovém prostředí, kde jsou typické základní konstrukce nakrokované a mohou si podle nich postup nacvičit, či alespoň osvěžit. Zároveň jsou materiály interaktivní i v tom, že dané rozměry mohou žáci zadat a uvidí, jak by měl konečný útvar vypadat a srovnat ho tak se svým řešením.

1.2 Uspořádání učiva geometrie na 2. stupni základních škol

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy připravilo spolu s Výzkumným ústavem pedagogickým doporučené učební osnovy pro předmět matematiky, ve kterém navrhují rozvržení učiva do jednotlivých ročníků. Toto rozvržení však není žádným způsobem závazné a školy jej mohou libovolně upravovat podle svých potřeb. V matematice jsou tematické oblasti rovinné geometrie v rámci ročníků navrženy takto:

Doporučené učební osnovy (2011)	
6. ročník	• Vzájemná poloha dvou přímek v rovině. • Shodnost geometrických útvarů. • Základní rovinné útvary: bod, přímka, polopřímka, úsečka, čtyřúhelník, trojúhelník, kruh, kružnice, polorovina. • Úhel a jeho velikost. • Trojúhelník (druhy trojúhelníků, vnitřní a vnější úhly trojúhelníku, výšky, těžnice a těžiště trojúhelníku). • Pravidelný mnohoúhelník. • Obsah a obvod čtverce, obdélníku, trojúhelníku, mnohoúhelníku.
7. ročník	• Čtyřúhelníky (rovnoběžníky a lichoběžníky). • Obvod a obsah čtyřúhelníků. • Středová souměrnost.
8. ročník	• Pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta. • Kruh, kružnice. • Množiny bodů dané vlastnosti. • Thaletova kružnice a věta. • Konstrukce rovinných útvarů: trojúhelníku, čtyřúhelníku (rovnoběžníku, lichoběžníku), kružnice.
9. ročník	• Podobnost.

Školy si však tvoří vlastní školní vzdělávací program (dále v textu ŠVP), ve kterém si učivo mohou do ročníků uspořádat podle svých potřeb. Zohledňují výstupy Rámcového vzdělávacího programu, zapojují klíčové kompetence a průřezová témata, samotné časové rozvržení učiva se může v různých školách lišit. Uvádíme zde proto příklady některých školních vzdělávacích programů a jejich realizaci témat z geometrie v jednotlivých ročnících.

Prvním příkladem je Základní škola, Nový Jičín, Tyršova 1 a jejich ŠVP:

Rozvržení učiva rovinné geometrie v ŠVP (ZŠ Nový Jičín, Tyršova 1)	
6. ročník	• Rovinné obrazce (rovina, bod, úsečka, přímka, polopřímka, čtverec, obdélník, kružnice, kruh). • Úhel (velikost – odhad, měření, osa úhlu, typy a druhy úhlů, přenášení úhlů). • Osová souměrnost (osově souměrné obrazce, osa úsečky a úhlu, konstrukce obrazu daného útvaru). • Trojúhelník (konstrukce trojúhelníků, vnitřní a vnější úhly trojúhelníku, rozdělení trojúhelníků, výšky a těžnice trojúhelníku, kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku).
7. ročník	• Shodnost geometrických útvarů (shodnost trojúhelníků, věty o shodnosti, trojúhelníková nerovnost, konstrukce trojúhelníků). • Shodná zobrazení (osová souměrnost, rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník, středová souměrnost). • Čtyřúhelníky (třídění čtyřúhelníků, rovnoběžníky a jejich vlastnosti, lichoběžník a jeho vlastnosti, konstrukce čtyřúhelníku). • Obvod a obsah rovinného obrazce (obvod a obsah rovnoběžníku, trojúhelníku, lichoběžníku).
8. ročník	• Pythagorova věta (výpočet délky přepony a odvěsny, praktické úlohy s využitím Pythagorovy věty). • Kružnice, kruh (vzájemná poloha přímky a kružnice, vzájemná poloha dvou kružnic, délka kružnice, obvod kruhu, obsah kruhu, části kružnice, kruhu (rozšiřující učivo). • Konstrukční úlohy (množiny bodů dané vlastnosti, Thaletova kružnice, konstrukce tečen ke kružnici, konstrukce trojúhelníků, čtyřúhelníků).
9. ročník	• Podobnost (podobnost útvarů, zvětšení, zmenšení, podobnost trojúhelníků v konstrukcích).

Dalším příkladem ŠVP ZŠ Nový Jičín, Jubilejní 3, která má ve svých učebních osnovách rozvrženo učivo geometrie následujícím způsobem:

Rozvržení učiva rovinné geometrie v ŠVP (ZŠ Nový Jičín, Jubilejní 3)	
6. ročník	• Geometrické útvary v rovině (rovina, bod, úsečka, přímka, polopřímka, kružnice, kruh). • Úhel a jeho velikost (osa úhlu, jednotky velikosti úhlu a měření velikosti úhlu, ostrý, tupý, pravý a přímý úhel, vrcholové a vedlejší úhly). • Mnohoúhelníky (šestiúhelník, pravidelný osmiúhelník). • Osová souměrnost (shodné útvary, osově souměrné útvary). • Obvod a obsah čtverce, objem a povrch krychle a kvádru. • Trojúhelník (druhy, vnitřní a vnější úhly trojúhelníku, těžnice, střední příčky, výšky, kružnice opsaná, vepsaná).
7. ročník	• Trojúhelník (shodnost trojúhelníků, trojúhelníková nerovnost, konstrukce trojúhelníků). • Rovnoběžníky (vlastnosti, rozdělení, konstrukce, obvod a obsah). • Lichoběžník. • Středová souměrnost (sestrojení obrazu obrazce ve středové souměrnosti).
8. ročník	• Kruh, kružnice (vzájemná poloha přímky a kružnice, vzájemná poloha dvou kružnic, délka kružnice, obsah kruhu). • Konstrukční úlohy (jednoduché konstrukce, množiny všech bodů dané vlastnosti, Thaletova kružnice, konstrukční úlohy).
9. ročník	• Podobnost (věty o podobnosti trojúhelníků, dělení úsečky, praktické příklady na podobnost trojúhelníků).

Na uvedených příkladech ŠVP můžeme vidět, že největší úsek učiva geometrie je v nejnižších ročnících, tedy především v 6. ročníku. Uspořádání témat v různých školních vzdělávacích programech a v doporučených učebních osnovách je podobné zejména v posledních dvou ročnících, kde se probírá učivo kružnice a kruhu, dále konstrukční úlohy s využitím Thaletovy kružnice a množiny bodů daných vlastností a v devátém ročníku se probírá podobnost geometrických útvarů.

Rozdíly ve školních vzdělávacích programech jsou v zařazování učiva obvodů a obsahů rovinných útvarů, bývá zařazené v 6. ročníku po probrání učiva o trojúhelnících a mnohoúhelnících, nebo až v 7. ročníku, kde následuje za tématem čtyřúhelníků. Učivo trojúhelníků může být také rozděleno do více ročníků – např. pojem trojúhelníků je brán v 6. ročníků, shodnost a konstrukce trojúhelníku v 7. nebo 8. ročníku a vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku až v 8. ročníku.

Pořadí tematických celků učiva geometrie v průběhu školního roku je také ovlivněno sestavením konkrétní učebnice matematiky, podle které učitel na dané škole vyučuje. Proto jsme se rozhodli členit učivo geometrie ve výukových materiálech nikoli podle jednotlivých ročníků druhého stupně základní školy, ale podle tematických celků daných názvy geometrických útvarů, ke kterým se vztahují. Učitel tak může snadněji najít požadované učivo bez ohledu na rozložení učiva v ŠVP jeho školy.

1.3 Klíčové kompetence a podpora interaktivní výuky

V doporučených osnovách vzdělávacích plánů jsou uvedeny výukové strategie pro učitele navržené k jednotlivým klíčovým kompetencím. Je zde podporovaná výuka v podnětném prostředí a tedy i využívání multimediální techniky, počítačových učeben a další. Ve výuce by měly proto být nabízeny žákům také další rozšiřující aktivity, soutěže, didaktické hry a programy podporující žákův zájem o matematiku.

Jaké metody a postupy tedy mohou učitelé a žáci uplatňovat při užívání výukových materiálů s dynamickými prvky právě v geometrii?

Kompetence k učení

Aby žáci uměli pracovat s informacemi a efektivně je využívat ve vzdělávání, měli by se seznámit i s možnostmi softwarového a internetového prostředí se zaměřením na geometrii. Takové prostředí nabízí žákům vhodnou organizaci výuky, vyhledávání informací v tištěné i elektronické podobě, dále především modelování situací a tím rozvíjení představivost žáků a budování pojmů v mysli žáků. Rozvíjí je v oblastech informačních a komunikačních technologiích a vede žáky k využívání digitálních zdrojů ke studiu matematiky, tedy především geometrie (Doporučené učební osnovy pro ČJL, AJ a M, 2011).

Kompetence k řešení problémů

Žáci jsou při samostudiu s výukovými materiály vedeni k hledání vlastního řešení, tedy především k volbě vlastního postupu, k ověřování výsledků například metodou pokus-omyl, jsou vedeni k odhadům výsledku a srovnání jejich představivosti s realitou. Na základě svých zkušeností s pohybem geometrických útvarů v rovinném prostoru rozvíjí hypotézy, logické myšlení a následné ověřování svých hypotéz v praxi. Využívají více induktivního přístupu při řešení problémů.

Kompetence komunikativní

Samotné využívání prostředků informačních a komunikačních technologií patří do komunikativní kompetence, žák by měl své postupy řešení úloh umět předvést ve škole a slovně okomentovat.

Kompetence občanská a kompetence sociální a personální

Žák má v dynamické geometrii příležitost k ověřování a dokazování matematických závislostí, k jejich kritickému posouzení a vytváření názoru na základě vlastní zkušenosti. Výukový materiál na počítači napomáhá žákovi k vlastnímu seberozvíjení podle svých možností a zároveň nebrání sociální interakci, která je podpořena například internetovými diskuzemi.

Kompetence pracovní

Výukový materiál nabízí úlohy pojaté jiným způsobem než ve školské geometrii, kde je experimentování omezeno časovou náročností. Žáci se naučí efektivně využívat technologií dynamické geometrie ke svému studiu a při plnění zadaných úkolů mohou postupovat podle svého tempa.

2 Úlohy v dynamické geometrii

Principy moderního vyučování se prosazují také ve výuce školské geometrie, kde již není hlavním cílem předmětu nácvik dovednosti rýsování, ale především orientace v rovině a prostoru, pochopení vztahů jednotlivých prvků prostoru, posílení geometrické představivosti a zkoumání světa z geometrického pohledu. K objasnění řady geometrických poznatků je výhodné využít pohyb – tedy dynamiku v geometrii, kterou klasické školní pomůcky neumožňují (Vaníček, 2009).

2.1 Dynamická geometrie

Prostředí, které umožňuje pohyb prvků roviny či prostoru, nazýváme dynamická geometrie. Uživatel v něm objekty libovolně nebo omezeně pohybuje, mění jejich velikost, otáčí jimi. Pohyb zprostředkovávají počítačové technologie – tedy software pro konstruování na počítači. Jedná se tedy o interaktivní formu výuky, neboť do vykreslených konstrukcí můžeme zasahovat a měnit parametry (např. polohu bodů, velikost úsečky nebo odchylky přímek) a sledovat, jak se tyto změny projeví ve výsledné konstrukci.

Dynamická geometrie proto poskytuje školní výuce mnohem více než pouhé rýsování na počítači. Učitel může dynamiky využít při modelování rovinných i prostorových útvarů, pro simulaci pohybu a překrývání útvarů, při řešení konstrukčních úloh a dalších geometrických problémů (Vaníček, 2009). Žáci mohou pomocí nástrojů dynamické geometrie procvičovat učivo, rozvíjet geometrickou představivost a také experimentovat s objekty a objevovat vlastností útvarů v prostoru samostatnou činností.

2.2 Typy učebních úloh v dynamické geometrii

Dynamická geometrie nabízí velkou škálu rozmanitých úloh. Tyto úlohy lze zařadit do obecné typologie učebních úloh (např. podle Tollingerové) a také se dají třídit podle různých hledisek – podle obtížnosti, podle formulace požadavku na výkon žáka, podle tematického obsahu, podle druhu vyžadující činnosti a dalších kritérií.

Typologie učebních úloh podle Tollingerové je členěna s ohledem na Bloomovu taxonomii poznávacích procesů od těch nejjednodušších, jako je pamětní reprodukce, až po tvořivé myšlení (Kalhous a Obst, 2002). Soubor úloh ve výukovém materiálu by měl obsahovat úlohy ze všech těchto kategorií:

1) **Úlohy vyžadující pamětní reprodukci.**

   Žáci by měli znát základní termíny a definice pojmů v geometrii, aby se dokázali orientovat v prostoru roviny. Samozřejmě nemohou otázky na pamětní reprodukci v souboru úloh z geometrie převažovat. Vhodné je otázky pamětního zaměření volit na začátek úloh, aby si žáci zopakovali pojmy, které znají a mohli pak dále rozvíjet tyto znalosti.

   Otázky: *Jak se nazývá průsečík těžnic? Kolik úhlopříček má čtyřúhelník?*

2) **Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s poznatky.**

   Takovými operacemi je myšleno zjišťování faktů (měření) a vztahů mezi fakty (závislost), popis faktů, vyjmenování, popis procesů, rozlišování a třídění objektů, zobecňování, abstrahování, konkretizace. Tohoto typu úloh se v geometrii využívá velmi často.

   Otázky a úkoly: *Jaké znáte trojúhelníky z hlediska délky jeho stran? Rozlište na obrázku těžnice a výšky. Jsou délky těžnic v obecném trojúhelníku stejně dlouhé? Najděte v obrázku dvojice vrcholových úhlů. Jaký je rozdíl mezi kružnicí a kruhem?*

3) **Úlohy vyžadující složité myšlenkové operace.**

   Složitějšími myšlenkovými operacemi rozumíme vysvětlení významu, zdůvodnění, indukci, dedukci, dokazování a ověřování. V dynamické geometrii často ověřujeme platnost vlastností pro všechny možné případy poloh či tvarů geometrických útvarů. Také se často vyvozují některé vlastnosti rovinných útvarů a zobecňují se pro celou množinu útvarů.

   Otázky a úkoly: *Zkuste vymodelovat trojúhelník se dvěma pravými úhly. Existuje? A proč? Mohou být těžnice nějakého trojúhelníku umístěny (tak jako výšky) mimo trojúhelník? Ověřte pokusem. Myslíte, že lze každému obdélníku vepsat kružnici? Ověřte pokusem.*

4) **Úlohy vyžadující sdělení poznatků.**

   Žáci by se měli umět vyjadřovat, interpretovat výsledek svého řešení a popsat postup, jak k němu došli. V geometrii je lépe proto vyžadovat i ústní sdělení a vysvětlení žákova řešení. Požadavek na tuto dovednost je určen především učiteli, který s výukovým materiálem pracuje. V každé úloze je na závěr formulováno shrnutí, ve kterém má žák doplnit poznatky, ke kterým dospěl během plnění úloh.

Formulace zjištěných poznatků: *Kosodélník se liší od obdélníku v tom, že _________________ (doplňte). Ortocentrum je ____________ (doplňte).*

5) **Úlohy vyžadující tvořivé myšlení.**

   Tento typ úloh vyžaduje praktickou aplikaci poznatků, řešení problémových situací, proces objevování na základě vlastního pozorování a vlastních úvah. Jedná se například o situace, kdy mají žáci sami vyzkoumat na základě svého experimentování, které další vlastnosti platí.

   Otázky: *Vymodelujte obecný tětivový čtyřúhelník. Platí nějaká vlastnost pro jeho úhly? Jsou některé shodné? Máme-li zkonstruovaný střed kružnice vepsané, jak najdeme její poloměr? Kružnice má svou délku. Jakými způsoby ji můžeme přibližně změřit?*

Typy úloh podle činností v prostředí dynamické geometrie

Úlohy prováděné v dynamické geometrii se liší od úloh geometrie statické, protože je zde k dispozici širší škála možností pohybu objektů a tedy i zkoumání. Planimetrie realizovaná softwarovou technologií necvičí sice zručnost v rýsování pravítkem a tužkou, ale poskytuje prostředí pro experimentování, vyvozování závěrů, ověřování a dokazování závislostí prvků prostorů roviny a podporuje tak orientaci v prostoru a logické myšlení. Podle různých specifických činností, které můžeme provádět s pohyblivými geometrickými objekty, a následných závěrů můžeme úlohy třídit na několik typů.

- **Ověřování známých vlastností.**

  V dynamické geometrii můžeme velmi jednoduše pohybem bodů ověřovat vlastnosti geometrických útvarů pro všechny jejich typy a krajní případy.

  Příklady úloh: *Jsou vždy výšky umístěny uvnitř trojúhelníku? Nejprve odhadněte, potom ověřte na obrázku vymodelováním ostroúhlého a tupoúhlého trojúhelníku.*

  Bude střed kružnice opsané ležet vždy uvnitř trojúhelníku? Odhadněte, potom ověřte vymodelováním všech možných typů trojúhelníku.

Vymodelujte kosočtverec, který má některý vnitřní úhel pravý. Který geometrický útvar dostaneme?

- **Objevování nových vlastností.**

Novými vlastnostmi jsou zde myšleny ty skutečnosti týkající se geometrických útvarů, které jsou žákovi zatím neznámé, tedy jsou pro něj nové. Jedná se o souvislosti, které nejsou z definice některého planimetrického pojmu ihned patrné a žák je může objevovat právě v prostředí onymické geometrie.

Příklady úloh: *Bude souviset délka jedné střední příčky s velikostí některé strany trojúhelníku? Se kterou stranou asi? Odhadněte podle obrázku, pak najděte na obrázku hodnoty stran a středních příček a vypočítejte.*

Budou úhlopříčky rovnoramenného lichoběžníku oproti obecnému lichoběžníku tentokrát shodné? Proč?

Jsou některé úhly deltoidu shodné? Platí nějaká vlastnost pro součet protějších úhlů? Ověřte alespoň na třech různých modelech deltoidů.

- **Otestování závislostí prvků roviny.**

Geometrické útvary mohou být definovány jako množiny bodů, které závisí na některé jiné množině bodů (na jiném geometrickém útvaru). Ne vždy je souvislost mezi útvary, popř. jejich vlastnostmi (velikost vnitřních úhlů, počet vrcholů apod.) zřejmá. Máme-li narýsovanou kolmici k dané přímce, pak posunutím této přímky se zřejmě posune i kolmice, aby se zachovala kolmost přímek. Ale jak souvisí např. počet vrcholů mnohoúhelníku s počtem jeho úhlopříček? Záleží na velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku, chceme-li mu opsat kružnici? Takové a další otázky mohou žáci v dynamické geometrii lehce testovat a napomáhá jim to v představě geometrických pojmů a prostoru roviny.

Příklady úloh: *U kterých mnohoúhelníků lze vymodelovat více než jeden nekonvexní úhel? Kolik nejvíce nekonvexních úhlů může daný mnohoúhelník mít? Závisí tento počet na počtu vrcholů? Odhadněte a potom vyzkoušejte na obrázku.*

Pohybujte bodem X kdekoli po kružnici, jak se změní vnitřní úhel trojúhelníku nad průměrem AB při vrcholu X?

Vyzkoušejte si měnit velikost stran lichoběžníku (pohybem vrcholů) a sledujte, jak se mění velikost vnitřních úhlů. Souvisí spolu protější úhly jako u rovnoběžníků?

- **Modelování možností v polohových úlohách.**

  Pohyb objektů v dynamické geometrii poskytuje velmi rychlé ověření všech možných poloh dvou nebo více útvarů v rovině v závislosti na jejich velikosti či vzájemné vzdálenosti. Vzájemná pozice útvarů pak určuje průnik množin bodů, tedy počet společných bodů, což je důležité zejména pak v konstrukčních úlohách, kde tato skutečnost určuje počet hledaných řešení.

  Příklady úloh: *Existuje ještě nějaká poloha, kdy kružnice nemají společný bod a přitom není jedna vně druhé? Vymodelujte ji.*

  Posuňte přímku tak, aby svírala s kružnicí jediný bod. Jaká bude vzdálenost přímky od středu kružnice v porovnání s poloměrem? Jak se nazývá tato přímka?

- **Hypotéza a ověření možností řešení.**

  Žáci na základě svých zkušeností mohou možnosti řešení úloh v geometrii odhadovat, vytvářet si některé představy a formulovat hypotézy, které následně v dynamické geometrii pohybem bodů či změnou jiných parametrů daného útvaru ověří a tím korigují své úsudky a závěry.

  Příklady úloh: *Dá se kosočtverci opsat kružnice? Zkuste nejprve odhadnout. Potom vyzkoušejte přesunout kružnici tak, aby procházela všemi vrcholy kosočtverce.*

  Myslíte, že velikosti těchto úhlů spolu souvisí? Pohybujte libovolně body F a G. Mění se oba vyznačené úhly? Jaká je jejich vzájemná velikost?

- **Konstruování množin bodů.**

  Množiny bodů daných vlastností jsou pro žáky základních škol náročnější na jejich představivost. Proto se v dynamické geometrii využívá funkce *Stopa bodu.* Nejprve je vymodelována konstrukce jednoho bodu dané vlastnosti a pohybem bodů, na kterých hledaná množina závisí se pak dynamicky vykresluje zbytek této množiny.

  Příklady úloh: *Na obrázku kružnice je vyobrazeno několik bodů, které jí náleží. Co platí pro všechny tyto body? V jaké vzdálenosti od středu jsou? Souvisí to s velikostí poloměru?*

Zvětšujte a zmenšujte libovolně úsečku o velikosti d - vykreslí se stopa všech takových X a Y stejně vzdálených od bodu A a B. Jak pojmenujete množinu bodů, která vznikla?

2.3 Metody výuky

V edukačním procesu by učitel měl využívat rozmanité metody práce s žáky, aby efektivně dosáhl výukového cíle. V moderní pedagogice se zdůrazňují především metody aktivního učení, kdy žák nepřijímá pasivně informace, ale podílí se aktivně na jejich získávání, osvojení a vytvoření vlastního úsudku. Žáci si tak rozvíjejí schopnost tzv. kritického myšlení. Jedná se o analyticko-syntetický proces vlastního objevování, posuzování, porovnávání, třídění informací do vlastního strukturovaného systému a rozhodování na základě svých zkušeností a potřeb (Sitná, 2009).

Aktivní výuku podporují především následující metody a principy, které je možné použít právě pro výuku s dynamickou geometrií.

2.3.1 Principy konstruktivistického učení

Tendencí v didaktice matematiky je tzv. konstruktivistický přístup k učení, který je orientován především na aktivitu žáka v edukačním procesu. (Hejný a Kuřina, 2009). Podstatu tohoto přístupu uvádí přední čeští didaktici prof. Hejný a prof. Kuřina ve své publikaci Dítě, škola, matematika (Fehérová aj., 2006).

Některé zásady konstruktivismu můžeme realizovat právě v prostředí dynamické geometrie. Žáci jsou při práci s applety aktivními účastníky procesu vzdělávání (zásada aktivity), mohou si na základě vytvořených a formulovaných úloh sami ověřovat své myšlenky a hypotézy. Na základě svých zkušeností s applety si vytváří představy geometrických pojmů (zásada zkušenosti). Dynamické geometrie patří mezi podnětná prostředí, která pomáhají podporovat tvořivost žáků (v programech dynamické geometrie mohou vytvářet své vlastní konstrukce a úlohy). Výukový materiál na webových stránkách je strukturován podle tematických celků, což napomáhá žákům třídit probírané kapitoly planimetrie a zařazovat je v systému celé školské geometrie (Hejný a Kuřina, 2009).

2.3.2 Problémové vyučování

Jednou z metod, při kterých se žáci aktivněji zapojují, je metoda problémového výkladu. Učitel stanoví nějaký problém, tedy učební úlohu, jejíž řešení mají žáci nalézt za pomoci učitele. Žáci si osvojují postup při řešení problému, který pak mohou aplikovat na další úlohy (Kalhous a Obst, 2002). „*Problémový přístup k vyučování matematice obrací pozornost především k otázce vhodných úloh*“ (Kuřina, 1976, s. 13). Takové úlohy by měly mít přiměřenou obtížnost s ohledem na znalosti a zkušenosti žáků a měly by být správně formulované, nejčastěji formou otázek. Hledání řešení problémových úloh se nejčastěji opírá o experiment, kdy žáci formulují své domněnky, které na základě modelování situací v dynamické geometrii a pozorování vlastností pohyblivých objektů ověřují a vyvozují závěry (Kuřina, 1976).

„*Problémovým vyučováním rozumíme takový systém vyučování, kdy žák samostatným zkoumáním dané problémové situace, formulací a řešením úloh dospívá k pochopení a tvorbě matematických pojmů a postupů k řešení problému*“ (Kuřina, 1976, s. 14). Programy dynamické geometrie právě takovéto prostředí pro zkoumání geometrických útvarů a jejich vlastností poskytuje.

2.3.3 Heuristická metoda

Učitel aplikující heuristickou metodu ve výuce nejprve vytyčí žákům nějaký problém – tedy určitou učební úlohu problémového charakteru a postupně je jednotlivými otázkami vede k řešení problému. Jedná se o metodu částečně výzkumnou. Učitel zde hraje ještě významnou roli při procesu nalezení řešení. Důležitá je formulace dílčích otázek tak, aby neprozrazovala řešení, ale aby vedla žáky v jejich myšlenkové aktivitě právě tím směrem, kde mohou najít řešení (Kalhous a Obst, 2002).

2.3.4 Výzkumná metoda

Tato metoda již vyžaduje samostatné hledání řešení žáky. Učitel vybírá učební úlohy vhodné pro experimentování a ověřování hypotéz, zadává podmínky splnění úlohy (možnosti dalších pomůcek, literatury) a kontroluje výsledky práce žáků. Žáci si sami stanoví postup nalezení řešení (Kalhous a Obst, 2002). Proto je vhodné, aby k tomu byli připraveni a aby v případě využití prostředí dynamické geometrie již měli v této oblasti nějaké zkušenosti. Prof. Kopka zdůrazňuje výzkumný přístup k matematice především kvůli souvislosti s vědeckou matematikou, která se od školské matematiky velmi liší. V běžné hodině matematiky totiž učitelé ukazují žákům již hotové poznatky, definice, věty, zatímco na spoustu informací mohou žáci přijít vlastním zkoumáním a bádáním (Kopka, 2004). Co se týče geometrie, některé poznatky se hůře objevují. Například kvůli nepřesnostem v rýsování nebo časové náročnosti vyrýsování více možností poloh a velikostí geometrických útvarů. V prostředí dynamické geometrie ale tyto problémy odpadají. Rýsování stejně jako vyčíslení velikostí úseček a úhlů je přesné a pohybem bodů je možné modelovat všechny možnosti. Výzkumná metoda může být tedy v geometrii realizována především právě s využitím dynamiky appletů.

2.4 Význam výuky s dynamickou geometrií

Metody práce s dynamickou geometrií modernizují výuku planimetrie na základních školách, která se dlouhá léta příliš neměnila a nevyvíjela. Samozřejmě není možné úplně nahradit klasické rýsování pravítkem a tužkou konstruováním v počítačových programech, žáci by si měli osvojit obě dovednosti. Nicméně zařazením právě nových technologií (počítače, interaktivní tabule apod.) mohou učitelé výuku tradiční geometrie oživit a zaujmout tak žáky. Důvodů k využití dynamické geometrie je hned několik (Lávička, 1998):

- **Motivace**. Výuka s využitím techniky, ať už se jedná o počítačovou učebnu, nebo učebnu s interaktivní tabulí či alespoň projektorem je pro žáky atraktivnější, žáci k ní přistupují s větším zaujetím, bývají aktivnější. Může ke geometrii přivést i žáky, kteří například nejsou tak zruční v rýsování, a proto u nich není geometrie oblíbená. S programy interaktivní geometrie je však výuka zaměřená trochu jiným směrem – především na „hraní si“ s objekty v rovině a objevování jejich vlastností.
- **Heuristické učení.** Žáci mohou při práci s dynamickými geometrickými útvary přicházet na některé vlastnosti sami. Na rozdíl od statické geometrie totiž mohou pohybovat objekty a zjišťovat, zda dané souvislosti platí pro všechny typy některého geometrického útvaru, nebo naopak. Vhodně zvolené otázky učitele potom mohou vést žáky k některým objevům, na které vlastně přijdou sami svým pozorováním a myšlením. Metody heuristického učení jsou velmi efektivní, neboť poznatky, ke kterým dojde žák vlastním úsudkem, bývají trvalejší.

- **Experimentování.** Ve školní geometrii často není prostor pro experimentování z časových důvodů (jedna konstrukce zabere žákům mnoho času). Při použití dynamické geometrie mohou žáci experimentovat snadno pohybem bodů, přímek apod. Mohou si sami vyzkoušet, kolik různých poloh mohou mít dvě kružnice, mohou „hledat“ střed kružnice opsané čtyřúhelníku apod.
- **Ověření odhadů a dokazování.** Na základě svého myšlení žáci mohou formulovat odhady a hypotézy týkající se útvarů v rovině a také snadno tyto hypotézy v dynamické geometrii ověřit. Například mohou ověřit platnost Thaletovy věty vymodelováním všech úhlů nad průměrem kružnice.
- **Individuální přístup.** Při plnění úloh na počítači může každý žák pracovat vlastním tempem, což je důležité třeba u postupného odvozování vlastností. Také poskytuje software dynamické geometrie široký prostor pro vlastní experimentování.
- **Variabilita příkladů.** Dynamika geometrie generuje velké množství modelových situací (škála poloh mnohoúhelníků, jejich velikostí, variabilita vnitřních úhlů apod.) a také příkladů k výpočtům (např. při dopočítávání velikostí úhlů).

Význam využití dynamické geometrie především z hlediska motivačního uvádí ve své publikaci i autoři Nocar – Bártková (2012). Především pro nadané žáky by mohlo být motivující hledat i taková řešení úloh, která jsou realizovatelná pouze za určitých technických podmínek, tím máme na mysli za podmínek využití výpočetní techniky (počítače a příslušného softwarového nástroje). Nadaný žák může uspokojit svou touhu nalezením více způsobů řešení zadané úlohy, ale řekneme-li mu, že existuje ještě další způsob, vneseme do hledání řešení další motivaci, kterou u mladé generace pozdvihneme ještě tím, když uvedeme, že existuje řešení, které je realizovatelné pouze s využitím ICT a např. dynamické geometrie a stejný postup je bez využití těchto prostředků nerealizovatelný.

3. Tvorba výukových materiálů na webu

Výukovým materiálem je myšleno každé verbální, grafické, obrazové, popř. audiovizuální sdělení učební informace, které má tištěnou nebo elektronickou podobu (Lepil, 2010). Nejlépe je dostupný výukový materiál umístěný na internetu, kde je pohodlně přístupný ve škole při výuce v počítačové učebně, ale také pro žáky doma. Může mít spoustu forem, jednou z nich je právě materiál sestavený ze souboru úloh, které vedou ke zjištění požadovaných poznatků.

Výukový materiál je určen obsahem učiva (v našem případě tedy vybrané učivo planimetrie pro 2. stupeň základních škol), metodami (převažuje heuristická metoda, problémové vyučování a experimentování) a dále materiálními didaktickými prostředky (Lepil, 2010).

K tvorbě výukového materiálu s využitím dynamiky geometrie potřebujeme některý z programů pro dynamickou geometrii, programy pro vytváření appletů a nástroje pro vytvoření webové stránky s applety a její zavěšení na internet.

3.1 Software dynamické geometrie

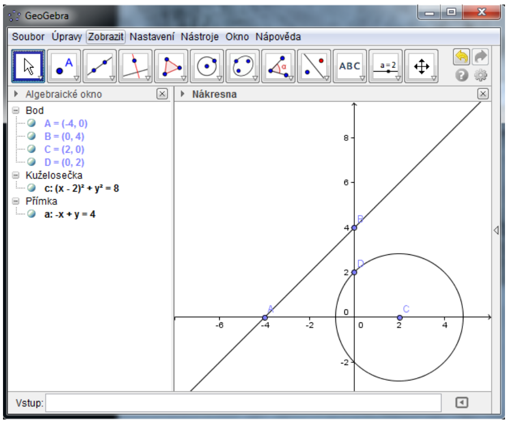
Existuje mnoho grafických editorů, ve kterých je možné načrtnout nebo narýsovat některé geometrické útvary. Neznamená to však, že jsou vhodné pro geometrické konstrukce, protože v nich není možné například ukotvit bod na přímce, označit průsečíky, narýsovat přesnou kolmici nebo měnit polohu objektů po narýsování, aniž by se zachovaly vlastnosti kolmic poloh bodů. Programy přímo určené pro rýsování a pohyb objektů zahrnujeme tedy pod pojem software dynamické geometrie.

Mezi takové programy patří Cinderella, GeoGebra, Geonext a Cabri Geometry. Uvádíme zde pro přehled stručnou charakteristiku jednotlivých aplikací a jejich náhledem (viz obrázky č. 1-4). Pro vytvoření dynamických rysů i ve tvorbě appletů lze použít všechny uvedené programy. Liší především svou dostupností, podporou českého jazyka a souborem funkcí, které lze s vytvořenými objekty provádět.

GeoGebra

GeoGebra je program dynamické matematiky spojující geometrii, algebru a matematickou analýzu. Jedná se o interaktivní geometrický systém, ve kterém je možno konstruovat: body, přímky, úsečky, vektory, kružnice, kuželosečky, ale kromě geometrických útvarů také můžeme konstruovat grafy funkcí, které lze interaktivně měnit. GeoGebra není pouze program pro geometrii, zabývá se také rovnicemi a souřadnicemi, z algebry umožňuje počítat s čísly, vektory, souřadnicemi bodů, určovat derivace, integrály, nulové body a extrémy funkcí. GeoGebra poskytuje dva úhly pohledu na jednotlivé objekty: výraz v algebraickém okně odpovídá objektu v geometrickém okně a naopak (Hohenwarter, 2007).

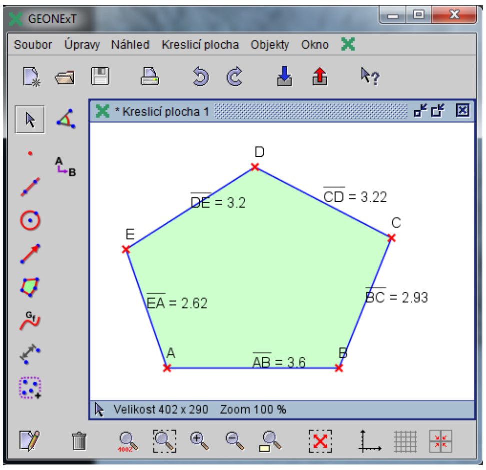
GeoGebra je volně ke stažení a instalaci pro nekomerční účely. Můžete také otevřít funkční applet GeoGebry ve vašem internetovém prohlížeči a vytvářet nákresy i bez instalace programu (Geogebra, 2013).



Obrázek č. 1 – Náhled programu GeoGebra.

Geonext

Volně šiřitelný program Geonext je podobný programu Cabri Geometry. Lze s ním provádět dynamické konstruování geometrických objektů. Zkonstruované prvky můžeme na obrazovce přesouvat, měnit jejich délku, velikost. Ovládání a možnosti tohoto programu jsou velmi intuitivní. Výhodné je například automatické označování bodů při jejich konstrukci. Geonext je dostupný také v češtině a jeho největší výhodou je právě možnost volného šíření. Program je možné nainstalovat ve škole na libovolný počet počítačů a žáci si jej mohou spustit i doma (Prikner, 2008).

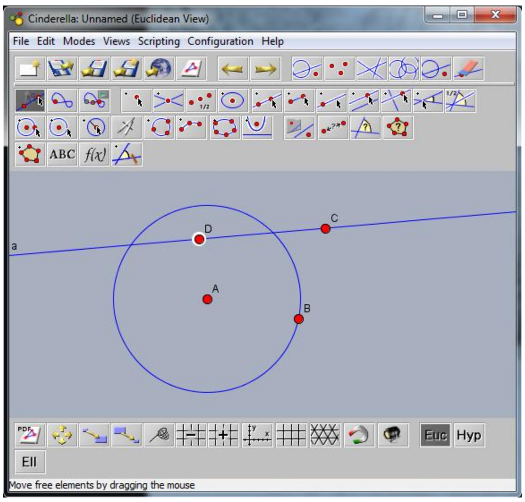


Obrázek č. 2 – Náhled programu Geonext.

Cinderella

Dalším softwarem dynamické geometrie je německá Cinderella. Cinderella nabízí některé nadstandardní funkce, jako například přepínání mezi Euklidovskou, sférickou a hyperbolickou geometrií. Je kompletně naprogramovaná v Javě, poskytuje jednoduchý export konstrukce do webové stránky. Nicméně má i řadu nevýhod. Pro školní prostředí není vhodná kvůli složitějšímu prostředí (např. v nastavení vzhledu objektů) a také není dostupná v českém jazyce. Ovládání není tak jednoduché a intuitivní a nenabízí některé služby jiných programů dynamické geometrie (nelze zobrazit název kružnice chybí možnost výpočtů apod.) (Patáková, 2005).

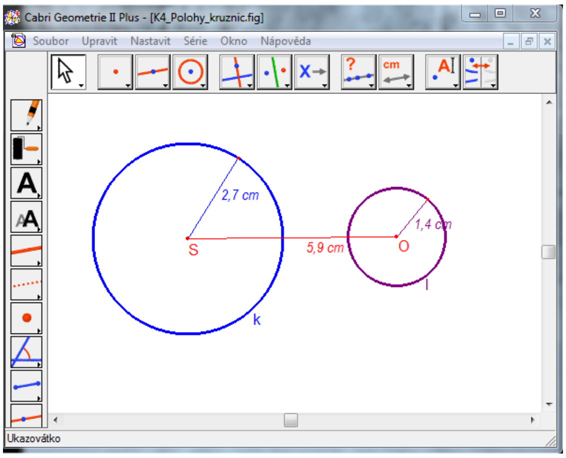
Co se týče dostupnosti programu, lze stáhnout nižší verzi programu zdarma. Při užití ve školním prostředí a pro učitele je však třeba zakoupit licenci (Cinderella, 2012).



Obrázek č. 3 – Náhled programu Cinderella.

Cabri Geometrie

Program Cabri Geometrie má několik verzí. Jsou to Cabri II a Cabri II Plus pro rovinnou geometrii a Cabri 3D pro prostorovou geometrii. Ovládání je jednoduché podobně jako u Geonextu a ke konstrukcím stačí znalosti geometrie. Program také umožňuje následnou manipulaci s hotovými objekty, zajímavá je například funkce množina vykreslující množiny bodů daných vlastností. Zdarma je dostupná demoverze programu Cabri, která není omezená z hlediska funkcí programu, ale nelze v ní ukládat hotové konstrukce a program se po patnácti minutách zavře. Tato verze slouží především k prohlížení již hotových konstrukcí. Pro vytváření a ukládání rysů je potřeba si zakoupit licenci programu (Vaníček, 2010).



Obrázek č. 4 – Náhled programu Cabri Geometry.

3.2 Vytváření webové stránky s applety

Ve výuce můžeme používat úlohy vytvořené v uvedených programech dynamické geometrie. Ale ne vždy budeme mít na počítačích k dispozici zrovna ten program, ve kterém máme rys vytvořen, a navíc nemusí mít žáci tento program k dispozici doma pro případnou samostatnou výuku, proto je vhodné umisťovat úlohy na webovou stránku ve formě tzv. appletů, což jsou geometrické rysy zpracované v programu Java, která zajišťuje právě pohyblivost objektů.

3.2.1 Tvorba appletů

Pokud máme vytvořený rys v programu Cabri, který chceme umístit na webovou stránku, musíme soubor zpracovat tak, aby ho bylo možné zobrazit ve webovém prohlížeči. Máme k tomu několik možností – použitím souborů CabriJava (popř. CabriWeb), nebo nainstalováním Plug-inu (Cabri.cz, nedatováno).

CabriJava

CabriJava je software, jehož prostřednictvím lze publikovat na internetu dynamické geometrické obrázky vytvořené v programu Cabri II. Pokud máme tedy vytvořený obrázek v programu Cabrii II Plus, musíme jej nejprve uložit jako soubor Cabri II. Ve stejné složce pak musíme mít umístěn soubor *CabriJava.jar* a náš v Cabri II vytvořený *Obrazek.fig*. Ve zdrojovém kódu webové stránky potom umístíme tento text:

```
<p><applet align="bottom" archive="CabriJava.jar"
code="CabriJava.class" height="300" width="700">
<param name="file" value="Obrazek.fig">
<param name="lang" value="cz">
<param name="xposition" value="0">
<param name="yposition" value="0"></applet></p>
```

Značka „align" určuje zarovnání appletu na stránce, „archive" odkazuje na umístění souboru *CabriJava.jar*, „height" určuje výšku a „width" šířku appletu v pixelech. Parametr „file" odkazuje na umístění souboru *Obrazek.fig*, „lang" označuje jazyk (cz pro češtinu), další parametry jsou volitelné, například „xposition" a „yposition" umožňuje posouvat obrázek v appletu podle os x a y (Vaníček, nedatováno). Dalšími parametry mohou být ohraničení appletu, obrázek pozadí aj.

Pokud umisťujeme na web obrázek, ve kterém chceme zobrazit lištu s krokováním konstrukce, použijeme ještě další parametry. Zdrojový kód pro applety s postupem konstrukce pak bude vypadat takto:

```
<p><applet align="bottom" archive="CabriJava.jar"
code="CabriJava.class" height="300" width="800">
<param name="file" value="Trojuhelnik.fig">
<param name="lang" value="cz">
<param name="autocontrol" value="true">
<param name="step" value="point 27">
<param name="loop" value="false"></applet></p>
```

Parametr „autocontrol“ nastavuje, aby se lišta s krokováním konstrukce zobrazila v appletu, „step“ určuje první krok, který se zobrazí při načtení konstrukce, „loop“ stanovuje, zda se konstrukce při načtení appletu spustí ihned automaticky (hodnota true), nebo se spustí, až při kliknutí na tlačítko Play (false).

Výhodou tohoto postupu je to, že applety fungují každému návštěvníkovi stránek, jehož prohlížeč podporuje Javu (standardně Internet Explorer), nebo má Javu nainstalovanou (v ostatních prohlížečích bude muset při zobrazení stránek „povolit spuštění aplikace java“) (Vaníček, nedatováno).

CabriJava a CabriWeb

Není-li uživatel zběhlý ve vkládání a úpravě zdrojového kódu webových stránek, může vytvořit HTML soubor ze souborů s koncovkou „fig“ pomocí souborů *CabriWeb.jar* a *CabriWeb.bat*, které si možné volně stáhnout na internetu. Tyto soubory společně se souborem *CabriJava.jar* a vytvořeným obrázkem v Cabri II (*Obrazek.fig)* je potřeba umístit do jedné složky. Pak se spustí soubor *CabriWeb.bat*, ve spuštěném okně se pak otevře *Obrazek.fig* a je možné jej libovolně poupravit. Například velikost okna bude pak konečnou velikostí obrázku na webové stránce, další možnosti jsou uvedeny v nabídce Upravit. Hotový obrázek je třeba uložit jako HTML soubor (v nabídce Soubor – Uložit jako…). Tento soubor (*Obrazek.html)* pak můžeme zobrazit v kterémkoli internetovém prohlížeči (Vaníček, nedatováno).

Plug-in

Další způsob vytvoření appletů je **použití tzv. plug-inu**. Tento postup funguje pro vyšší verzi - Cabri II Plus. Velkou výhodou je skutečnost, že se applet na webových stránkách přesně tak, jak se v Cabri II Plus vytvoří. Nicméně ale ne každý uživatel jej při prohlížení stránek uvidí, protože k zobrazení appletu je třeba mít nainstalovaný plug-in. Ten lze zdarma stáhnout z oficiálních stránek programu Cabri a funguje zaručeně zatím pouze v prohlížečích Internet Explorer.

Pokud zvolí uživatel tento postup, uloží svůj soubor s koncovkou „fig“, tedy například soubor „Kruznice_opsana.fig“, do téže složky jako html soubor a vloží do kódu webových stránek tento kód:

```
<embed src="Kruznice_opsana.fig" width="600"
height="500"> <noembed>Není-li zobrazen obsah appletu,
stáhněte si plug-in.<A HREF="http://www.cabri.com/
download-cabri-2-plus.html#plugin">zde</A></noembed>
```

Kde „src“ odkazuje na zdroj – tedy cestu k souboru, „width“ označuje šířku zobrazeného appletu, „height“ výšku. Pro případ, kdy se uživateli nezobrazí applet, se mu vypíše hláška, aby si stáhnul plug-in pomocí hypertextového odkazu (Vaníček, nedatováno).

3.2.2 Webová stránka

Pro tvorbu webových stránek je k dispozici mnoho programů, např. KompoZer (dříve Nvu), Notepad++, NetBeans až po složitější Adobe Dreamweaver a další. Rychlejší variantou je však využít některé šablony webových stránek, která má vytvořenou logickou strukturu a grafický rámec, a napasovat na ni naši představu o webové stránce. Takové šablony včetně webhostingu poskytuje mnoho serverů zcela zdarma. Uveďme alespoň některé příklady: Webnode, Webzdarma, eStranky, Stranky-zdarma a další. K vytvoření stránek pak není potřeba žádný program, stačí se zaregistrovat a webovou stránku může uživatel začít vytvářet přímo online v internetovém prohlížeči. Nabídka úprav šablon a podmínky pro sdílení webové stránky se u každého poskytovatele liší. Kapacita informací zobrazovaných na stránkách může být omezena, také ne vždy je možné ukládat soubory se spustitelnou koncovkou (exe, bat) nebo applety a některé servery podmiňují poskytnutí stránek počtem unikátních přístupů za měsíc (není-li stránka dostatečně navštěvována, může být smazána). U jednoduchých prezentačních webových stránek se většinou s problémy nesetkáme, ale chceme-li vytvořit stránky s výukovými materiály pro dynamickou geometrii, je třeba najít vhodnou alternativu.

Společnost Google vytvořila aplikaci Google Sites (česky Google weby), která je propojená s dalšími službami jako je Gmail, Dokumenty Google aj. Pomocí této aplikace může uživatel vytvářet kvalitní webové stránky bez nutnosti znalostí jazyků HTML a CSS, jež jsou pro tvorbu stránek nezbytné a pro laika poměrně složité. Google Weby kromě běžných stránek mohou obsahovat přiložené soubory, umožní vám sdílet web buď pouze s konkrétními uživateli, nebo také s celým světem a vše zdarma. Adresa webových stránek je sice složitější – ve tvaru: *http://sites.google.com/site/nazevstranek,* ale společnost

Google poskytuje i vlastní domény, tedy už za poplatek. Pro tvorbu stránek je nejvýhodnější používat prohlížeč Google Chrome, ve kterém je zaručeno, že veškeré úpravy stránek lze provést. U ostatních prohlížečů se může stát, že některé funkce úprav nebudou podporovány (Bobek, 2010).

Postup vytváření stránek je velmi jednoduchý. Stačí se přihlásit na svůj účet Gmail a vyhledat Weby Google – tlačítko Vytvořit. Průvodce vytvářením se zeptá na název webu, nabídne širokou škálu šablon a různě barevných motivů a stránky hned vytvoří. Pak je možné vkládat další stránky, upravovat horní nebo levé menu, přepínat mezi zobrazením menu, upravovat jednotlivé stránky včetně stylování písma, přepínání do režimu zdrojového kódu, vkládání různých obrázků, grafů, tabulek, souborů z Google Dokumentů přihlášeného uživatele a dalších miniaplikací od Googlu. Standardem je také automatické ukládání konceptu stránek, takže se uživateli nestane, že se po výpadku internetového připojení vytvořená stránka vůbec neuloží. Ke každé stránce je možné přiložit soubor ke stažení a vkládat komentáře.

Při **vkládání appletů** vytvořených v programu dynamické geometrie nelze využít toho, že bychom zobrazili zdrojový kód stránky a vložili výše uvedený kód appletu. Google Sites kód `<applet>` blokuje. Je potřeba vložit applet jako miniaplikaci. Musíme tedy použít následující postup:

1) Na stránce, do které chceme vložit applet, je potřeba se přepnout do režimu *Upravit stránku*.
2) Využijeme nabídku *Vložit – Další miniaplikace – Embed gadget - Zvolit*.
3) Vytvoří se okno, do kterého už můžeme vkládat zdrojový kód appletu.
4) Můžeme nastavit výšku a šířku zobrazeného appletu, vložit posuvník, přidat ohraničení. Tlačítkem *Náhled miniaplikace* se přepneme do zobrazení appletu, jak bude vypadat po uložení. Můžeme se případně vrátit zpět a upravit zdrojový kód a applet uložit.

Při ukládání stránky bude prohlížeč pravděpodobně vyžadovat povolení ke spuštění appletu. Toto povolení může vyžadovat při prohlížení také většina prohlížečů, zejména Google Chrome, Opera, Mozilla Firefox. Internet Explorer povolení aplikace nevyžaduje.

3.3 Využití ve výuce

Výukové materiály umístěné na webu jsou dostupné všude tam, kde je připojení k internetu, což dnes patří ke standardu ve školách, v knihovnách, ale také v domácnostech. Jsou tedy vhodné pro výuku ve škole i pro samostudium žáku doma. Mohou být využívány při objevování zákonitostí geometrických útvarů – tedy při výuce a odvozování nového učiva planimetrie ve školách. Ale také při procvičování učiva a prohlubování znalostí (materiál zahrnuje některé úlohy nad rámec doporučných osnov matematiky a úlohy s hvězdičkou, které propojují znalosti tvorby množin bodů daných vlastností). V neposlední řadě je užitečný pro opakování učiva, shrnování poznatků z planimetrie. Každá úloha s appletem obsahuje závěrečné shrnutí poznatků, které měli žáci objevit při plnění úkolů a hledání odpovědí na přiložené otázky.

Přímo ve výuce můžeme pracovat s výukovým materiálem podle toho, jaká počítačová technika je ve třídě nebo ve škole dostupná.

3.3.1 Frontální výuka s projektorem

Pokud máme ve třídě k dispozici počítač a projektor, můžeme z výukového materiálu využít především applety jako názornou ukázku. Učitelům to usnadní práci zejména proto, že nemusí rýsovat objekt (např. trojúhelník s kružnicemi připsanými) na tabuli. Jednoduchým pohybem bodů se mění parametry objektu a v krátkém časovém úseku se tak vymodeluje daleko více poloh v rovině, než kdyby při psaní na tabuli musel učitel nejprve útvary smazat a narýsovat znova. Konstrukce je přesná, navíc jsou některé velikosti úseček či úhlů ihned při pohybu vyčísleny. Projektoru se nejlépe využívá při výkladu nového učiva. Žáci nebudou tolik aktivní, protože se nedostanou všichni k ovládání konstrukcí (nejvýše jeden žák na počítači). Nicméně zde působí především motivační prvek – atraktivita počítačové techniky. Netradiční výuka (předpokládáme-li, že ve výuce matematiky stále převládá výuka s učebnicí a tabulí) s dynamikou útvarů v rovině může u žáků vzbudit větší zájem o geometrii.

3.3.2 Práce s interaktivní tabulí

Výuka s dynamickou geometrií může být ještě názornější při práci s interaktivní tabulí. Žáci mohou například chodit k tabuli a pohybovat objekty přímo dotykem na interaktivní ploše. Důležité je přitom správně nakalibrování tabule, aby byl pohyb efektivní. Pokud uchopíme vrchol mnohoúhelníku a budeme jím pohybovat rukou přímo na tabuli, dosáhneme lepší transparentnosti pohybu než při pohybu myší na počítači, když je k dispozici ve třídě pouze projektor.

3.3.3 Výuka v počítačové učebně

Aby si žáci mohli dynamické konstrukce dostatečně „osahat", je vhodné zařadit do matematiky výuku v počítačové učebně, kde bude mít v ideálním případě každý žák k dispozici svůj počítač. Učitel může vést výuku tak, aby všichni žáci postupovali stejně rychle, může zadávat instrukce k obrázkům všem žákům najednou a vyčkat jejich provedení a průběžně kontrolovat jejich postup. Nabízí se také jiný způsob - nechat žáky pracovat samostatně podle svého tempa, aby řešili jednotlivé úlohy zadané v materiálech bez bližších instrukcí učitele. Při této formě výuky se nejvíce uplatní jejich aktivní přístup. Zároveň je zde prostor pro případnou pomoc žákům, kteří by byli bezradní a nevěděli, jak postupovat dál. V ideálním případě bude učitel tyto přístupy kombinovat – tedy společnou frontální výuku s instrukcemi prokládat časem vyhrazeným k samostatnému modelování a objevování geometrických vlastností.

3.3.4 Samostudium žáků

Výukový materiál na webu je připraven tak, aby nebyla nezbytně nutná asistence učitele. Otázky a úkoly k jednotlivým appletům jsou sestaveny od nejjednodušších (pamětní reprodukce, popis obrázku, nalezení prvků) až postupně po ty těžší, vyžadující uvažování (formulování odhadu a jeho ověření, vyvození nějaké vlastnosti). K řešení úloh je potřeba jen elementárních znalostí typu představy o pojmu (např. co je to výška). Všechny další vlastnosti jsou odvozeny z obrázku a žák je schopen experimentováním s dynamikou geometrických objektů na tyto vlastnosti přijít. Vedou ho k tomu postupně otázky formulované k úlohám. Na závěr každé úlohy je sestaveno shrnutí poznatků, které žák měl v průběhu plnění úkolů zjistit a do shrnutí doplnit. Samostudium je proto důležité završit ověřením, že žák dospěl ke správným závěrům.

4 Výukové materiály pro podporu výuky planimetrie

Praktickou částí diplomové práce jsou výukové materiály vytvořené na webových stránkách s názvem *Dynamická planimetrie v učivu ZŠ* (dále jen webové stránky), odkaz: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/.

Jedná se o soubor úloh, které jsou tříděny do tematických celků a jsou k nim vytvořeny applety v programu Cabri Geometrie II, které lze interaktivně ovládat přímo na webových stránkách.

4.1 Soubor úloh a jejich členění

Úlohy ve výukovém materiálu jsou uspořádány do tematických celků podle rovinných útvarů, ke kterým se vztahují (Základní prvky roviny, Úhel v rovině, Trojúhelník, Čtyřúhelníky, Mnohoúhelníky, Kružnice a kruh) nebo podle oblasti studia geometrických útvarů (Obvody a obsahy, Množiny bodů daných vlastností, Konstrukční úlohy, Další úlohy).

Každý tematický celek obsahuje úvodní charakteristiku, seznam všech úloh a jsou zde vytyčeny výukové cíle, kterých by měl žák dosáhnout po jejich splnění. Ke každému celku zde uvádím ukázky vybraných úloh z výukového materiálu včetně náhledu interaktivního appletu. Všechny úlohy jsou volně k dispozici na uvedených webových stránkách.

4.1.1 Charakteristika úloh

Úlohy jsou formulovány vždy k jednomu interaktivnímu appletu s geometrickými útvary. Každá úloha je nazvána podle toho, který úsek planimetrie zkoumá, a obsahuje otázky k danému tématu a úkoly pro práci s objekty v appletu. Otázky jsou uspořádány od jednodušších, vyžadujících především pamětní reprodukci, po složitější – otázky na zamyšlení, odhad výsledku apod. Otázky a úkoly, které jsou náročně na syntézu širších poznatků i z jiných kapitol, jsou označeny hvězdičkou.

Na závěr každé úlohy je formulováno shrnutí poznatků, ke kterým měli žáci během plnění úkolů dojít. Na základě experimentálně ověřených faktů mají v této části doplnit vynechané pojmy či zakroužkovat správnou odpověď. Pomocí tohoto shrnutí se tak ověřují dané výukové cíle tematických celků.

4.2 Práce s applety

Pokud chceme efektivně pracovat ve výuce s applety vytvořenými na webových stránkách, je potřeba mít základní znalosti, jak pohybovat s objekty v appletech a především, co nastavit v počítači, pokud applety nefungují a nezobrazují se správně. K prohlížení appletů je totiž nutné mít stažený a nainstalovaný prohlížeč Java aplikací. Bez této aplikace se applety nebudou zobrazovat vůbec. Lze ji získat na oficiálních stránkách (java.com) a je k dispozici zdarma.

Také je možné, že internetový prohlížeč bude požadovat povolení ke spuštění aplikace – v tom případě je třeba zadat "Run" nebo "Povolit" pro každý applet (obvykle vícekrát podle počtu appletů). Pokud nechcete povolovat jednotlivé applety, je nutné nastavit zvolený prohlížeč tak, aby tyto aplikace povoloval automaticky (návod pro konkrétní prohlížeč je uveden na webových stránkách).

4.2.1 Pohyb objektů v appletech

V appletech je možné pohybovat narýsovanými geometrickými útvary. Některé objekty jsou narýsovány volně v rovině, nejsou vázány na jiný objekt (tedy neleží na něm, nejsou k němu kolmé, rovnoběžné, nezachovávají určitou vzdálenost od jiného prvku roviny apod.). Takovými prvky můžeme pohybovat takto (pokud není uvedeno jinak v zadání):

- Bod - uchopení a volný pohyb (kliknutí a podržení levého tlačítka myši, přesun bodu, uvolnění tlačítka).
- Přímka - pohyb dvou bodů, pokud je jimi přímka zadána, popř. pohyb jednoho bodu a určení směru (uchopení přímky kdekoli).
- Polopřímka - přesun polopřímky - pohyb počátečního bodu, směr polopřímky - pohyb dalšího bodu polopřímky.
- Úhel - změna velikosti úhlu - posun ramen úhlu (polopřímek), přesun celého úhlu - pohyb vrcholu (bodu).
- Mnohoúhelník - změna délek stran pohybem vrcholů (bodů), pohyb celého objektu uchopením strany objektu.

- Kružnice - změna velikosti kružnice - uchopení kteréhokoli bodu kružnice a pohyb, přesun celé kružnice - přesun středu (bodu).

Některými narýsovanými geometrickými útvary nelze v appletu libovolně pohybovat, protože jsou konstruovány tak, že závisí na jiných objektech, jejich pohyb je proto podle toho omezen. Takovými objekty lze pohybovat následujícím způsobem:

- Bod na přímce – bodem lze pohybovat pouze po dané přímce.
- Bod na kružnici - bodem lze pohybovat pouze po dané kružnici.
- Kolmice - směr kolmice je dán přímkou, na kterou je kolmá, pohybuje se pouze ve směru přímky uchopením vyznačeného bodu kolmice.
- Rovnoběžka - směr rovnoběžky je dán přímkou, se kterou je rovnoběžná, lze posouvat jedním daným bodem a tím měnit vzdálenost od přímky.
- Obdélník - má všechny úhly pravé a protější strany shodné, proto pro vykreslení obdélníku nelze pohybovat vždy všemi body - lze měnit velikost pouze dvou stran, ostatní strany se dokončují konstrukčně; u appletů je uvedeno, kterými body je možné pohybovat.
- Čtverec - měníme pouze jeden parametr - velikost strany, proto lze pohybovat pouze krajními body jedné strany, ostatní strany se podle toho konstruují samy, aby byl zachován čtverec (u appletů je uvedeno, kterými body lze pohybovat).

Objekty v appletech lze posouvat i mimo výřez appletu, takže je můžeme „schovat“ a pak zase posunout zpět do viditelné oblasti. Lze také pohybovat i textem v appletech jednoduchým uchopením myší a přesunutím.

Při pohybu geometrických útvarů s vyznačenými úhly může dojít k tomu, že se vyznačí místo požadovaného úhlu úhel doplňkový (úhel je dán třemi body a není v konstrukci určen vnitřní bod úhlu). V případě, že se uživateli podaří objekt špatně umístit, či se nesprávně vyznačí úhly apod., nejlepším řešením je aktualizovat stránku a applet se vrátí do původní podoby.

4.3 Základní prvky roviny

Základními prvky roviny rozumíme nejjednodušší geometrické útvary v rovině, jako jsou bod, přímka, polopřímka, úsečka. Dále rozlišujeme pojem rovina a polorovina. Z těchto prvků jsou pak složeny další geometrické útvary (např. množiny bodů daných vlastností), nebo jsou tvořeny průnikem těchto prvků (např. trojúhelník je průnikem tří polorovin). V této kapitole se zabýváme polohami bodů, přímek, polopřímek, úseček, jejich velikostmi a tím, jak jsou v rovině vymezeny.

Výukové cíle

Po zodpovězení otázek v úlohách a splnění praktických úkolů v appletech s konstrukcemi geometrických útvarů budou žáci schopni:

- vysvětlit pojem bod, určit polohu bodu v náčrtku,
- vysvětlit pojem přímka, popsat, čím je určena; načrtnout přímku a označit ji,
- vysvětlit pojem polopřímka, určit opačnou polopřímku k dané polopřímce,
- vysvětlit pojem úsečka, načrtnout ji, určit její délku, popsat a ukázat polohy dvou úseček na přímce a v rovině,
- vymodelovat různé polohy dvou přímek, určit počet jejich společných bodů a pojmenovat tyto polohy,
- popsat postup a možnosti řešení sestrojení rovnoběžky v určité vzdálenosti od dané přímky,
- vysvětlit pojem rovina a polorovina, určit vnitřní a vnější body poloroviny,
- pohybovat body a přímkami v prostředí dynamické geometrie.

Seznam úloh

Úloha Z1 Bod v rovině

Úloha Z2 Bod a přímka

Úloha Z3 Polopřímka

Úloha Z4 Úsečka

Úloha Z5 Polohy dvou přímek

Úloha Z6 Kolmice

Úloha Z7 Rovnoběžky

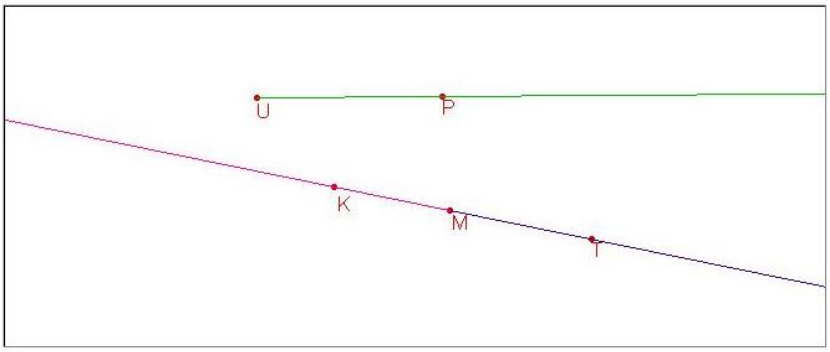
Úloha Z8 Rovina a polorovina

Všechny úlohy jsou uvedeny na vytvořených webových stránkách: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/zakladni-prvky-roviny. Dále uvádím pouze vybrané úlohy.

Vybrané úlohy

Úloha Z3 Polopřímka

1. Najděte na obrázku zeleně vykreslenou polopřímku. Jak se liší od přímky?
2. Který bod polopřímky nazveme počáteční? Který bod určuje orientaci přímky? Pohybujte bodem P a sledujte, jak se mění polopřímka.
3. Na obrázku je přímka KT rozdělena na dvě polopřímky (barevně odlišené). Najděte počáteční bod každé polopřímky.
4. Pojmenujte polopřímky pomocí bodů. Jsou tyto polopřímky stejně orientované (směřují od počátečního bodu stejným směrem)?
5. Přesuňte polopřímku UP tak, aby měla společný počáteční bod s polopřímkami MK a MT. Bude UP opačná polopřímka? Kde by musel ležet bod P?



Obrázek č. 5 – Náhled appletu k úloze Z3.

Shrnutí Z3

Polopřímka je část __________, ohraničená bodem, který se nazývá ____________ bod.

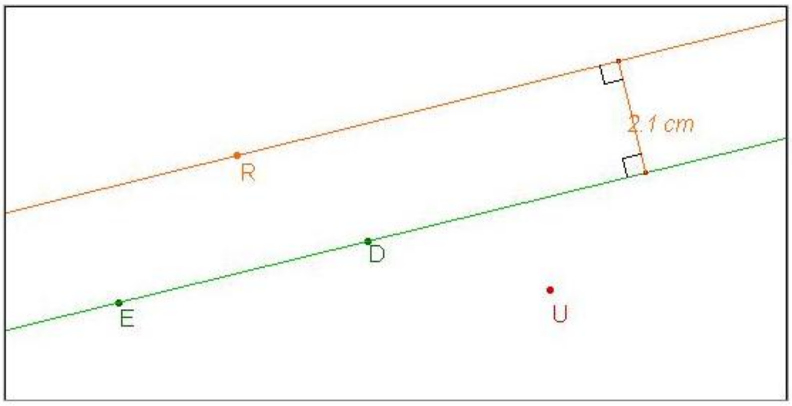
Polopřímka je ____________ dlouhá.

Polopřímka je určena ___ (počet) body.

Opačné polopřímky leží na stejné ____________, mají společný ______________ bod a jsou (stejně - opačně) orientované.

Úloha Z7 Rovnoběžky

1. Na obrázku jsou přímky, které nemají žádný společný bod. Jak jim říkáme?
2. Pohybujte libovolně body E, D nebo R a sledujte, jak se mění směr rovnoběžných přímek. Mají stále stejný směr?
3. Jak najdeme vzdálenost od rovnoběžek? Najděte ji na obrázku a popište, jak byste ji narýsovali. Bude tato vzdálenost stále stejná pro dané rovnoběžky? Pohybujte krajním bodem úsečky označující vzdálenost po přímce ED. Mění se tato vzdálenost?
4. Máme-li narýsovat přímku procházející bodem U rovnoběžnou k přímce ED, kolik různých přímek narýsujeme? Posuňte rovnoběžku (posouvejte bodem R) tak, aby procházela bodem U. Existuje ještě nějaká jiná rovnoběžka procházející bodem U?
5. Vymodelujte rovnoběžku k přímce ED tak, aby byla od ní vzdálena 2 cm. Kolik možností existuje?



Obrázek č. 6 – Náhled appletu k úloze Z7.

Shrnutí Z7

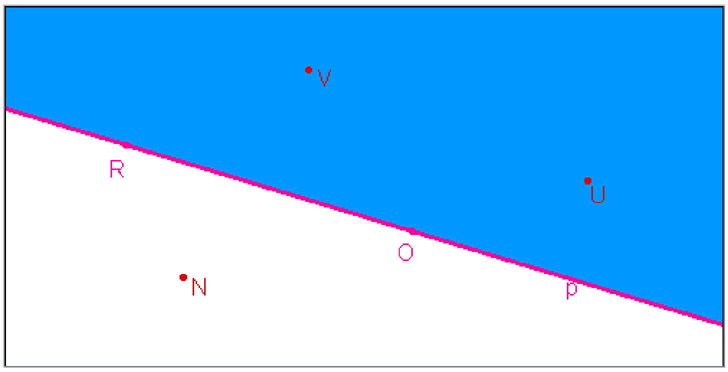
Rovnoběžky nazýváme dvě přímky, které (nemají - mají) společný bod.

Všechny body jedné přímky jsou (stejně - různě) vzdáleny od druhé rovnoběžné přímky.

Je-li vzdálenost mezi rovnoběžkami nulová, pak přímky ____________.

Úloha Z8 Rovina a polorovina

1. Rovina je nekonečně velká rovná plocha. V uvedených obrázcích je zobrazena vždy jen část roviny, která pokračuje i za hranicemi obrázku. Které nekonečně dlouhé útvary roviny znáte z této kapitoly? Které omezené rovinné útvary znáte?
2. Rovinu můžeme rozdělit také na části, jak je to na obrázku. Tyto části nazýváme poloroviny (bílá a modrá polorovina). Čím jsou od sebe oddělený tyto poloroviny?
3. Které body na obrázku patří do poloroviny vyznačené modře? Které patří do opačné poloroviny?
4. Kolik prvků potřebujeme k pojmenování poloroviny? Stačí nám hraniční přímka? Budeme vědět, kterou z polorovin máme na mysli?



Obrázek č. 7 – Náhled appletu k úloze Z8.

Shrnutí Z7

Rovina je ________________________________.

Polorovina je část _________________ *ohraničená* ___________________.

Polorovina je dána hraniční ______________ *a jedním vnitřním* __________.

Dvě poloroviny, které mají společnou ____________ *přímku, ale jinak žádné jiné body nemají společné, se nazývají* _____________ *poloroviny*

4.4 Úhel v rovině

Úhel je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami se společným počátečním bodem. V následujících úlohách budeme rozlišovat úhly podle velikosti, graficky je sčítat a odčítat a uvedeme zde několik typů dvojic úhlů, pomocí kterých můžeme dopočítat velikosti dalších neznámých úhlů.

Výukové cíle

Po zodpovězení otázek v úlohách a splnění praktických úkolů v appletech s konstrukcemi geometrických útvarů budou žáci schopni:

- popsat a načrtnout úhel přímý, plný, nulový, pravý, konvexní a nekonvexní,
- najít na obrázku dvojice úhlů – vrcholové, souhlasné a střídavé úhly a popsat jejich vlastnosti,
- aplikovat znalosti o velikostech dvojic úhlů v příkladech a dopočítat neznáme velikosti dalších úhlů,
- načrtnout vedlejší úhly a dopočítat jejich velikost,
- graficky i početně sčítat a odčítat úhly,
- načrtnout středový a obvodový úhel na kružnici a popsat, co platí pro jejich velikosti.

Seznam úloh

Úloha U1 Úhel a jeho velikost

Úloha U2 Vedlejší úhly

Úloha U3 Vrcholové úhly

Úloha U4 Souhlasné úhly

Úloha U5 Střídavé úhly

Úloha U6 Určení velikosti úhlů

Úloha U7 Sčítání a odčítání úhlů

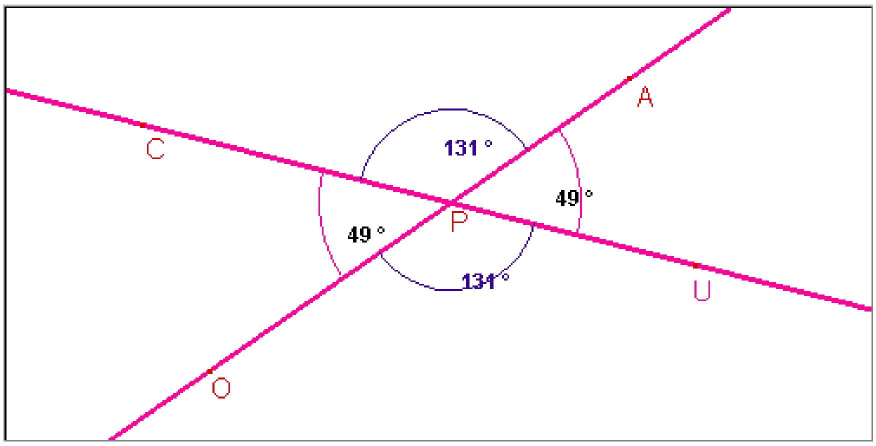
Úloha U8 Středový a obvodový úhel

Všechny úlohy jsou uvedeny na vytvořených webových stránkách: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/uhel-v-rovine. Dále uvádím pouze vybrané úlohy.

Vybrané úlohy

Úloha U3 Vrcholové úhly

1. Na obrázku jsou 2 dvojice vrcholových úhlů zvýrazněné jednou barvou, které dvojice to jsou?
2. Co mají společného úhel CPA a OPU? Jakou mají velikost? Pohybujte přímkami a ověřte, že jsou úhly stále shodné.
3. Co může říct o ramenech vrcholových úhlů? Jaké polopřímky tvoří?
4. Najděte na obrázku vedlejší úhly. Kolik dvojic vedlejších úhlů najdete?
5. Vymodelujte přímky tak, aby byly na sebe kolmé. Jakou velikost budou mít všechny úhly?



Obrázek č. 8 – Náhled appletu k úloze U3.

Shrnutí U3

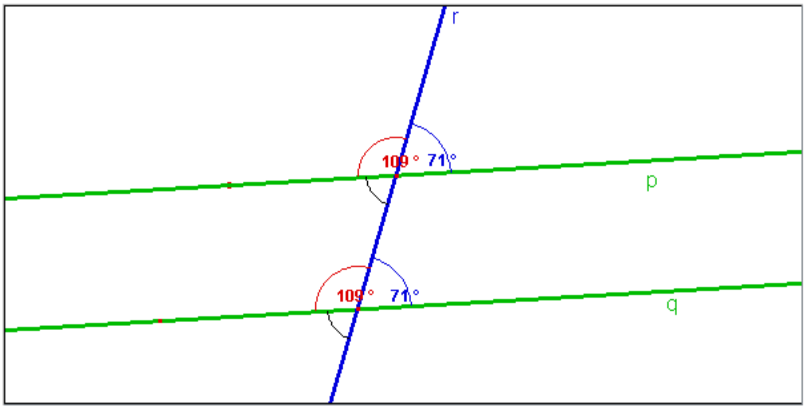
Vrcholové úhly mají společný ________ a jejich ramena tvoří ____________ polopřímky.

Vrcholové úhly jsou vždy ___________, mají stejnou velikost

Úloha U4 Souhlasné úhly

1. Najděte na obrázku rovnoběžné přímky a různoběžku. Které dvojice úhlů tam najdete? Které úhly jsou vedlejší? Které vrcholové?
2. Souhlasné úhly jsou vyznačeny stejnou barvou. Jaká je jejich velikost? Pohybujte různoběžkou i rovnoběžkami a sledujte, jak se mění velikost úhlů.

3. Co platí pro ramena souhlasných úhlů? Která jsou rovnoběžná? Která leží na stejné přímce?
4. Rozdělíme-li rovinu obrázku na dvě poloroviny přímkou *r*, leží souhlasné úhly v téže polorovině?
5. Kolik dvojic souhlasných úhlů je na obrázku?



Obrázek č. 9 – Náhled appletu k úloze U4.

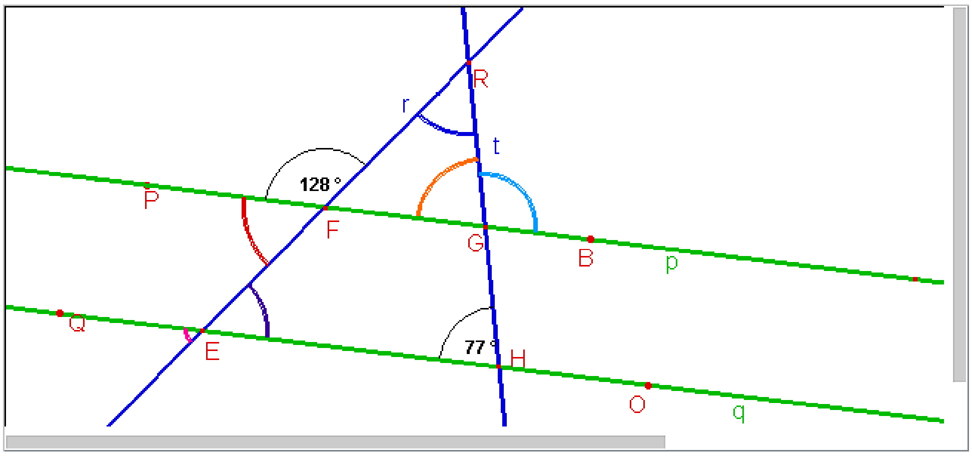
Shrnutí U4

Souhlasné úhly mají první ramena (různoběžná - rovnoběžná) a zbývající ramena leží na ________ přímce a jousou stejně orientovaná. Leží ve stejné polorovině dané ______________.

Souhlasné úhly mají ________ velikost.

Úloha U6 Určení velikosti úhlů

1. Určete na obrázku, které přímky jsou rovnoběžné a které různoběžné.
2. Vypište alespoň 3 dvojice vrcholových, vedlejších, souhlasných a střídavých úhlů.
3. Dopočítejte velikosti všech úhlů na obrázku. Jak velký je úhel FRG? Svůj výpočet zkontrolujte tak, že posunete lištu obrázku směrem doprava.
4. Posuňte libovolně přímkami na obrázku a znovu dopočítejte všechny úhly. Pak opět ověřte velikost úhlu FRG.



Obrázek č. 10 – Náhled appletu k úloze U6.

Shrnutí U6

Shodné jsou úhly: souhlasné, ___________ a ___________.

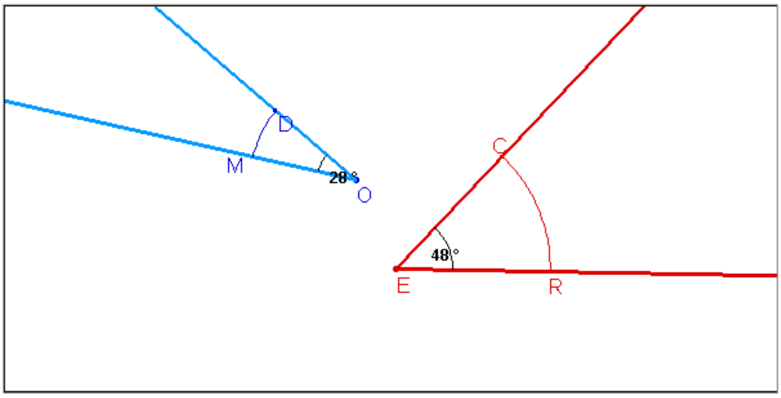
Součet velikostí vedlejších úhlů je ______°.

Součet úhlů v trojúhelníku je ____°.

Úloha U7 Sčítání a odčítání úhlů

1. Vyzkoušejte si pohyb úhlů na obrázku. Přemisťovat úhly můžete body O (popř. E), otáčet lze posunutím polopřímky OD (popř. ER) a velikost úhlu se mění posunutím bodu M (popř. C).
2. V rovině jsou dva úhly různých velikostí, jak je graficky sečtete? (Pokud nevíte, postupujte podle otázky č.3).
3. Přesuňte jeden úhel k druhému tak, aby body O a E splývaly. Nyní otočte jeden úhel (pohybem polopřímky OD nebo ER) tak, aby rameno modrého úhlu OD splývalo s ramenem červeného úhlu EC a zároveň aby nebyl jeden úhel uvnitř druhého. Jak velký bude výsledný úhel MER?
4. Jak se budou úhly graficky odečítat? Použijte podobný postup jako v bodě 3 - ramena úhlů OD a ER budou splývat a menší úhel bude uvnitř většího. Rozdílem úhlů pak bude úhel CEM. Jakou bude mít velikost?
5. Vymodelujte součet úhlů tak, aby výsledný úhel měl velikost 180 °. O jakou dvojici úhlů se jedná?

6. Vymodelujte na obrázku vrcholové úhly. Jak musí být umístěny?



Obrázek č. 11 – Náhled appletu k úloze U7.

Shrnutí U7

Sčítáme-li dva úhly, přeneseme jeden úhel k druhému tak, že ______________________.
Výsledný úhel bude mít velikost rovnou ____________ *velikostí původních úhlů.*
Odčítáme-li menší úhel od většího, přeneseme jeden úhel k druhému tak,
*že*___________________ *a zároveň menší úhel bude (uvnitř - vně) většího úhlu. Výsledný úhel bude mít velikost rovnou* ___________ *velikostí původních úhlů.*

4.5 Trojúhelník

Trojúhelník je konvexní rovinný útvar o třech stranách a třech vrcholech. Může být definován například jako průnik tří polorovin. V tomto tematickém celku se zaměříme především na jeho vlastnosti, které souvisí klasifikací trojúhelníků podle velikosti jeho úhlů nebo stran. Obsahem trojúhelníku se zabývá kapitola s názvem Obvody a obsahy. Každá úloha zobrazuje určitý prvek, který v trojúhelníku vykreslujeme (např. výška, těžnice, kružnice opsaná atd.). Poslední úloha shrnuje poznatky o všech prvcích v jediném vykresleném trojúhelníku.

Výukové cíle

Po zodpovězení otázek v úlohách a splnění praktických úkolů v appletech s konstrukcemi geometrických útvarů budou žáci schopni:

- rozlišit a načrtnout trojúhelník rovnostranný, rovnoramenný a obecný,

- rozlišit a načrtnout trojúhelník tupoúhlý, ostroúhlý a pravoúhlý,
- vysvětlit pojem trojúhelníková nerovnost a aplikovat tuto znalost tak, že rozhodnou, zda trojúhelník o daných rozměrech v rovině existuje,
- rozlišit vnitřní a vnější úhly trojúhelníku,
- určit polohu výšek a jejich průsečíku v trojúhelníku,
- určit polohu těžnic a těžiště v trojúhelníku,
- načrtnout polohu střední příčky trojúhelníku a vypočítat její velikost,
- najít střed a poloměr kružnice opsané a vepsané trojúhelníku,
- najít střed a poloměr kružnic připsaných trojúhelníku,
- charakterizovat polohy výšek, těžnic, kružnic opsaných a vepsaných v trojúhelníku pravoúhlém, rovnoramenném, rovnostranném.

Seznam úloh

Úloha T1 Klasifikace trojúhelníků podle úhlů a stran

Úloha T2 Trojúhelníková nerovnost

Úloha T3 Úhly v trojúhelníku vnitřní a vnější

Úloha T4 Výšky trojúhelníku

Úloha T5 Těžnice v trojúhelníku

Úloha T6 Střední příčky

Úloha T7 Kružnice trojúhelníku opsaná

Úloha T8 Kružnice trojúhelníku vepsaná

Úloha T9 Kružnice trojúhelníku připsané

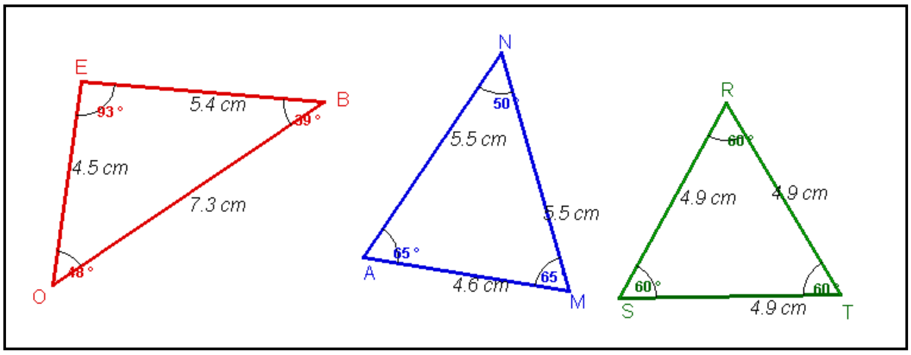
Úloha T10 Závěrečná úloha o trojúhelníku

Všechny úlohy jsou uvedeny na vytvořených webových stránkách: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/trojuhelnik. Dále uvádím pouze vybrané úlohy.

Vybrané úlohy

Úloha T1 Klasifikace trojúhelníků podle úhlů a stran

1. Jaké znáte trojúhelníky z hlediska délky jeho stran? Najděte všechny 3 typy na obrázku.
2. Jaké znáte trojúhelníky podle velikosti jejich vnitřních úhlů? Vymodelujte je na obrázku. (Měnit velikost stran nebo úhlů trojúhelníku je možné pomocí uchopení vrcholu kurzorem myši a pohybováním.)
3. Může být rovnostranný trojúhelník zároveň pravoúhlý? Nejprve odhadněte, potom vyzkoušejte na obrázku. Zdůvodněte.
4. Může být tupoúhlý trojúhelník rovnoramenný? Odhadněte a potom ověřte.
5. Existuje pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník? Odhadněte a potom ověřte.
6. Je každý rovnostranný trojúhelník ostroúhlý? Odhadněte a potom ověřte.



Obrázek č. 12 – Náhled appletu k úloze T1.

T1 Shrnutí

Rovnostranný trojúhelník může být (ostroúhlý - tupoúhlý - pravoúhlý).

Rovnoramenný trojúhelník může být (ostroúhlý - tupoúhlý - pravoúhlý).

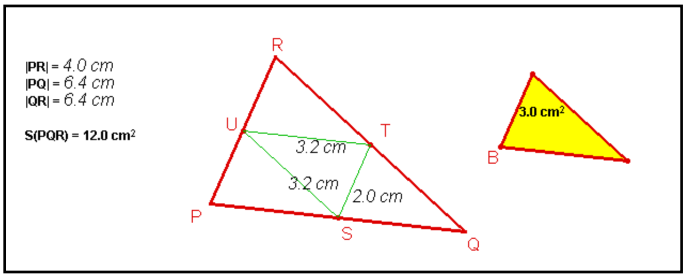
Pravoúhlý trojúhelník může být (rovnostranný - rovnoramenný - obecný).

Ostroúhlý trojúhelník může být (rovnostranný - rovnoramenný - obecný).

Tupoúhlý trojúhelník může být (rovnostranný - rovnoramenný - obecný).

Úloha T6 Střední příčky

1. Které body v trojúhelníku spojuje střední příčka? Kolik takových v trojúhelníku existuje? Najděte je na obrázku.
2. Na kolik trojúhelníků rozdělují střední příčky původní trojúhelník? Jsou tyto trojúhelníky shodné? Odhadněte.
3. Na pravé straně je vymodelovaný menší trojúhelník se žlutou výplní. Uchopte jej za vyznačený bod **B** a pohybujte s ním tak, aby se překrýval postupně se všemi menšími trojúhelníky v obrázku. Ověříte tak shodnost těchto trojúhelníků. Jsou shodné? Změňte velikost původního trojúhelníku pohybem vrcholu a znovu ověřte.
4. Bude mít tedy trojúhelník, jehož strany tvoří střední příčky, čtvrtinový obsah původního trojúhelníku? Nejprve odhadněte. Pak vyhledejte hodnoty na obrázku. Proč tomu tak je? (Souvisí to s vlastností ověřenou v bodu 3.)
5. Bude střední příčka rovnoběžná s některou stranou trojúhelníku? Pohybujte trojúhelníkem na obrázku a odhadněte. Dokážete tuto vlastnost zdůvodnit? Souvisí tato vlastnost s podobností trojúhelníků? Najděte na obrázku nějaké dva podobné (ale ne shodné) trojúhelníky.
6. Bude souviset délka jedné střední příčky s velikostí některé strany trojúhelníku? Se kterou stranou asi? Odhadněte podle obrázku, pak najděte na obrázku hodnoty stran a středních příček a vypočítejte.



Obrázek č. 13 – Náhled appletu k úloze T6.

T6 Shrnutí

Úsečka spojující __________ dvou stran trojúhelníku se nazývá ________ příčka.

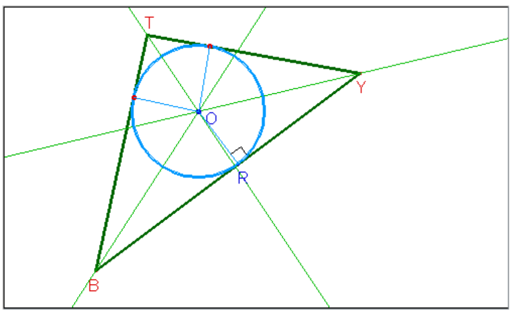
Střední příčka je (kolmá - rovnoběžná - různoběžná) (na jednu stranu - s jednou stranou) trojúhelníku a má poloviční __________ této strany.

Střední příčky rozdělují trojúhelník na _____ (počet) shodné trojúhelníky.

Trojúhelník PQR je s trojúhelníkem PSU (shodný - podobný - různý).

Úloha T8 Kružnice trojúhelníku vepsaná

1. Kolika body trojúhelníku prochází kružnice opsaná? Kde se tyto body nachází? Najdi na obrázku.
2. Můžeme říci, že strany trojúhelníku leží na tečnách ke kružnici vepsané?
3. Odhadnete z obrázku, jak se zkonstruují zelené přímky, v jejichž průsečíku leží střed kružnice opsané?
4. *Kdybychom chtěli zkonstruovat kružnici, která se dotýká dvou různoběžných přímek, jak najdeme její střed? Jak bude vypadat množina všech takových středů? (Odvození viz kapitola Množiny bodů daných vlastností.) Co dostaneme, když zkonstruujeme takovou množinu pro každou dvojici stran trojúhelníku? Co bude průnikem těchto množin?
5. Bude střed kružnice vepsané ležet vně nějakého trojúhelníku? Odhadněte, potom ověřte na obrázku. (Pohybujte vrcholy trojúhelníku, vyzkoušejte vymodelovat ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník.)
6. Máme-li zkonstruovaný střed kružnice vepsané, jak najdeme její poloměr? Zkuste najít poloměr na obrázku. Zvolíme poloměr k bodu dotyku R. Jaký úhel svírá poloměr se stranou trojúhelníku?
7. Pokuste se vymodelovat trojúhelník tak, aby všechny osy úhlů procházely postupně všemi body dotyku kružnice. Jaký trojúhelník jste vymodelovali?



Obrázek č. 14 – Náhled appletu k úloze T8.

T8 Shrnutí

Kružnice trojúhelníku vepsaná se dotýká všech tří (vrcholů - stran - úhlů) trojúhelníku.

Strany trojúhelníku leží na (tečnách - sečnách - poloměrech) kružnice vepsané.

Střed kružnice vepsané trojúhelníku leží v průsečíku __________________.
V jakémkoliv trojúhelníku leží střed kružnice vepsané vždy (uvnitř - vně) trojúhelníku.
Poloměr kružnice vepsané je vzdálenost od středu kružnice vepsané k (vrcholu trojúhelníku - bodu dotyku). Sestrojíme jej pomocí (rovnoběžky - kolmice) ze středu O ke straně trojúhelníku.

4.6 Čtyřúhelník

Čtyřúhelník je mnohoúhelník se čtyřmi vrcholy a čtyřmi stranami. Čtyřúhelníky dále dělíme podle různých kritérií. Podle velikostí vnitřních úhlů na konvexní a nekonvexní. Podle počtu rovnoběžných stran potom na rovnoběžníky, lichoběžníky a obecné čtyřúhelníky. Také můžeme rozlišovat čtyřúhelníky tětivové, tečnové a dvojstředové podle toho, zda jim lze vepsat nebo opsat kružnici. Vlastnostem takto rozdělených čtyřúhelníků se věnuje právě tato kapitola, zejména si budeme všímat vnitřních úhlů, délek a odchylek úhlopříček a existence kružnice opsané, popř. vepsané.

Výukové cíle

Po zodpovězení otázek v úlohách a splnění praktických úkolů v appletech s konstrukcemi geometrických útvarů budou žáci schopni:

- rozlišit čtyřúhelníky podle rovnoběžnosti jejich stran a velikosti jejich úhlů a vymodelovat příklady,
- načrtnout a popsat vlastnosti (délky stran a úhlopříček, velikosti vnitřních úhlů, existence opsané a vepsané kružnice) kosodélníku, kosočtverce, obdélníku a čtverce,
- popsat obecný, pravoúhlý a rovnoramenný lichoběžník a rozlišit jejich vlastnosti,
- načrtnout deltoid a popsat jeho vlastnosti,
- vysvětlit pojem tětivový čtyřúhelník, uvést příklady tětivových čtyřúhelníků a vymodelovat je,
- vysvětlit pojem tečnový čtyřúhelník, uvést příklady a vymodelovat,
- vysvětlit pojem dvojstředový čtyřúhelník, uvést příklady a vymodelovat.

Seznam úloh

Úloha C1 Čtyřúhelník a jeho druhy

Úloha C2 Rovnoběžníky obecně, kosodélník

Úloha C3 Kosočtverec

Úloha C4 Obdélník

Úloha C5 Čtverec

Úloha C6 Lichoběžníky

Úloha C7 Rovnoramenný lichoběžník

Úloha C8 Deltoid

Úloha C9 Tětivový čtyřúhelník

Úloha C10 Tečnový čtyřúhelník

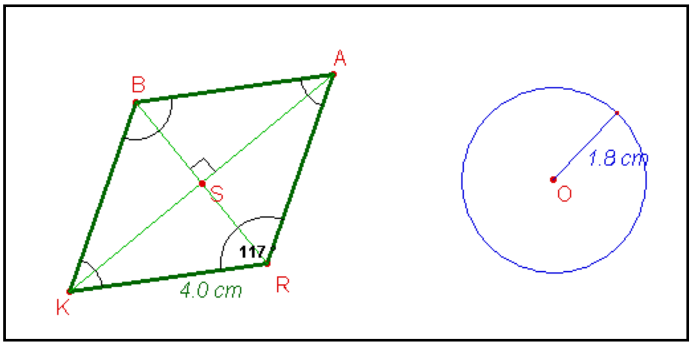
Všechny úlohy jsou uvedeny na vytvořených webových stránkách: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/ctyruhelnik. Dále uvádím pouze vybrané úlohy.

Vybrané úlohy

Úloha C3 Kosočtverec

1. Patří kosočtverec mezi rovnoběžníky? Ověřte modelováním různých kosočtverců. (Pohybujte vrcholy, ne všechny vrcholy jsou ale pohyblivé.)
2. Které strany v kosočtverci jsou stejně dlouhé? K ověření můžete využít kružnici. (Střed kružnice umístěte do jednoho vrcholu a kružnicí pohybujte tak, aby procházela dalším vrcholem. Uchopením za střed kružnice jí můžete pohybovat do dalších vrcholů při stejném poloměru.)
3. Kolik informací nám stačí k vymodelování určitého kosočtverce? Pokud nevíte, vyzkoušejte na obrázku, kolik prvků (číselných hodnot) můžete v kosočtverci měnit.
4. Stačí nám k určení ostatních vnitřních úhlů znát velikost jednoho vnitřního úhlu? Zkuste ostatní úhly dopočítat.
5. Mění se vlastnosti úhlopříček kosočtverce? Ověřte alespoň na dvou modelech kosočtverce, jestli platí, stejně jako u kosodélníku, zda jsou stejně dlouhé, svírají nějaký určitý neměnný úhel a zda se navzájem půlí.

6. Dá se kosočtverci opsat kružnice? Zkuste nejprve odhadnout. Potom vyzkoušejte přesunout kružnici tak, aby procházela všemi vrcholy kosočtverce.
7. Vymodelujte kosočtverec, který má některý vnitřní úhel pravý. Který geometrický útvar dostaneme?



Obrázek č. 15 – Náhled appletu k úloze C3.

C3 Shrnutí

Kosočtverec má protější strany ___________a všechny strany _______________.

Stejně jako kosodélník má kosočtverec protější úhly _____________ a součet sousedních úhlů je ______ °.

Úhlopříčky kosočtverce jsou (stejně - různě) dlouhé a navzájem se (půlí - nepůlí).

Kosočtverci (lze - nelze) vepsat kružnici tak, aby se dotýkala všech jeho stran.

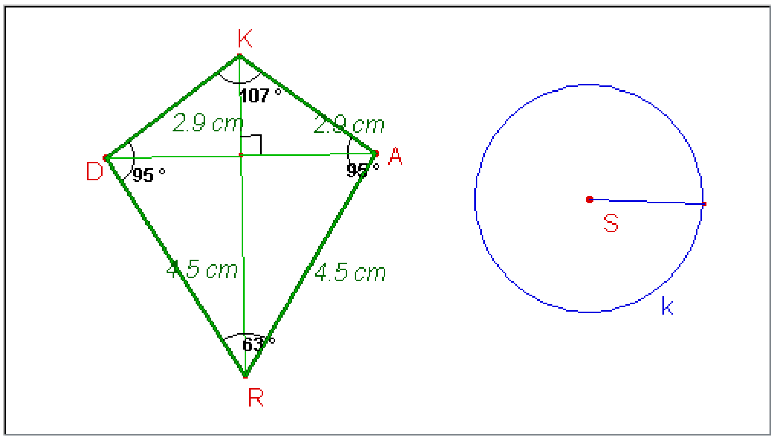
Kosočtverci (lze - nelze) opsat kružnici tak, aby procházela všemi jeho vrcholy.

Kosočtverec má stejně jako ___________ všechny strany stejně dlouhé, liší se od sebe tím, že _____________ má všechny vnitřní úhly ______.

Úloha C8 Deltoid

1. Deltoid je čtyřúhelník, který nemá žádné dvě strany rovnoběžné, proto nepatří mezi rovnoběžníky ani mezi lichoběžníky. Je určen pomocí úhlopříček. Jak mezi sebou svírají úhel?
2. Jedna z úhlopříček dělí deltoid na dva shodné trojúhelníky - takové říkáme hlavní úhlopříčka. Která z úhlopříček to je na obrázku?
3. Zbývající úhlopříčka se nazývá vedlejší. Také dělí deltoid na dva trojúhelníky. O jaké trojúhelníky se jedná z hlediska délek stran?

4. Je deltoid osově souměrný? Pokud ano, podle které přímky/úsečky?
5. Jsou některé úhly deltoidu shodné? Platí nějaká vlastnost pro součet protějších úhlů? Ověřte alespoň na třech různých modelech deltoidů. (Pohybujte body D, R nebo K.)
6. Odhadněte, jestli lze deltoidu vepsat kružnici. Pak využijte narýsovanou kružnici a ověřte pokusem.
7. Myslíte, že každému deltoidu můžeme kružnici opsat? Vyzkoušejte na obrázku pomocí kružnice pro různé deltoidy. Pak vyzkoušejte pro deltoid, který má při vrcholech A a D pravý úhel. Bude mít takový deltoid kružnici opsanou? Ověřte.



Obrázek č. 16 – Náhled appletu k úloze C8.

C8 Shrnutí

Deltoid je čtyřúhelník, který má všechny strany (rovnoběžné - různoběžné).

Úhlopříčky deltoidu jsou navzájem _________, hlavní úhlopříčka půlí __________

___________.

Deltoid je osově souměrný podle (hlavní - vedlejší) úhlopříčky.

Protější úhly při vrcholech u vedlejší úhlopříčky jsou (shodné - různé).

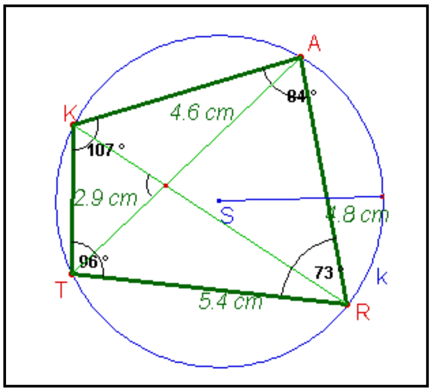
Protější úhly při vrcholech u hlavní úhlopříčky jsou (shodné - různé).

Deltoidu (lze - nelze) vepsat kružnici tak, aby se dotýkala všech jeho stran.

Deltoidu (lze - nelze) opsat kružnici pouze v případě, že jsou dva protější úhly ______.

Úloha C9 Tětivový čtyřúhelník

1. Tětivový čtyřúhelník je každý čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici. Které ze čtyřúhelníků, jež znáte, jsou tedy tětivové? Vyjmenujte je a pak vymodelujte (pokud to půjde) postupně na obrázku čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník, pravoúhlý a rovnoramenný lichoběžník a deltoid.
2. Vymodelujte obecný tětivový čtyřúhelník. Platí nějaká vlastnost pro jeho úhly? Jsou některé shodné? Jaký je součet vedlejších úhlů? Jaký je součet protilehlých úhlů? Ověřte alespoň na třech různých čtyřúhelnících.
3. Co bude platit pro velikosti úhlů, pokud bude střed kružnice S ležet na některé úhlopříčce? A co bude platit, bude-li S ležet v průsečíku úhlopříček? Proč?



Obrázek č. 17 – Náhled appletu k úloze C9.

C9 Shrnutí

Tětivový čtyřúhelník je čtyřúhelník, jemuž můžeme __________ kružnici.

Strany takového čtyřúhelníku budou pak (tečnami - tětivami) kružnice.

V tětivovém čtyřúhelníku platí, že součet _____________ úhlů je _____ °.

Tětivovými čtyřúhelníky jsou: ____.

4.7 Mnohoúhelníky

Mnohoúhelník je rovinný útvar ohraničený uzavřenou lomenou čárou. Mnohoúhelníku obecně o n vrcholech říkáme n-úhelník. V této kapitole se zaměříme na vlastnosti úhlopříček a vnitřních úhlů, které platí pro mnohoúhelníky obecně a závisí právě na počtu jejich vrcholů. Ukážeme si některé vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků a v posledních dvou úlohách pak podrobněji rozebereme pětiúhelník a šestiúhelník.

Výukové cíle

Po zodpovězení otázek v úlohách a splnění praktických úkolů v appletech s konstrukcemi geometrických útvarů budou žáci schopni:

- rozlišit na obrázku mnohoúhelníky konvexní a nekonvexní,
- výpočtem určit součet velikostí vnitřních úhlů libovolných n-úhelníků,
- výpočtem určit počet úhlopříček libovolného n-úhelníku,
- popsat vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků,
- načrtnout pravidelný pětiúhelník, popsat jeho vlastnosti (velikosti stran, velikost vnitřních úhlů, počet úhlopříček), vypočítat velikost poloměru kružnice vepsané a opsané,
- načrtnout pravidelný šestiúhelník, popsat jeho vlastnosti (velikosti stran, velikost vnitřních úhlů, počet úhlopříček), vypočítat velikost poloměru kružnice vepsané a opsané, popsat postup jeho sestrojení.

Seznam úloh

Úloha M1 Mnohoúhelník konvexní a nekonvexní

Úloha M2 Mnohoúhelník a vnitřní úhly

Úloha M3 Úhlopříčky mnohoúhelníků

Úloha M4 Pravidelný mnohoúhelník

Úloha M5 Pravidelný pětiúhelník

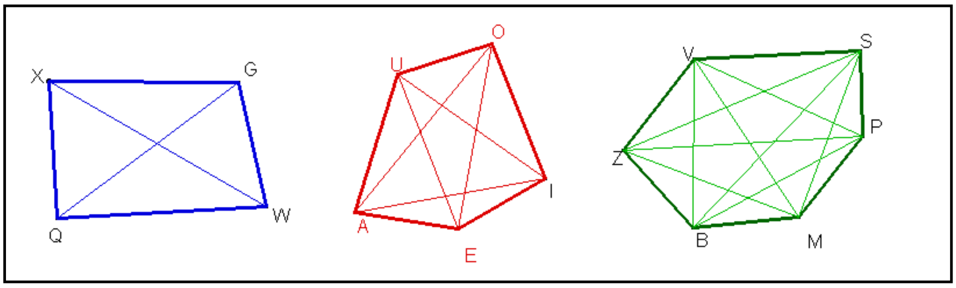
Úloha M6 Pravidelný šestiúhelník

Všechny úlohy jsou uvedeny na vytvořených webových stránkách: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/mnohouhelniky. Dále uvádím pouze vybrané úlohy.

Vybrané úlohy

Úloha M3 Úhlopříčky mnohoúhelníků

1. Kolik úhlopříček má čtyřúhelník? Kolik pětiúhelník? Nejprve počet odhadněte, pak ověřte na obrázku.
2. Kolik úhlopříček vychází z jednoho vrcholu u pětiúhelníku? O kolik je to méně, než je počet vrcholů? Proč?
3. Pokud vynásobíte počet úhlopříček vycházejících z jednoho vrcholu pětiúhelníku číslem 5 (počet vrcholů) - dostanete přesně počet všech úhlopříček? Proč?
4. Vyzkoušejte stejný postup pro šestiúhelník. Kolik úhlopříček vychází z jednoho vrcholu u šestiúhelníku? O kolik je to méně, než je počet vrcholů? Jak vypočítáte konečný počet úhlopříček?
5. Vypočítejte obdobně počet úhlopříček pro sedmiúhelník a desetiúhelník.



Obrázek č. 18 – Náhled appletu k úloze M3.

M3 Shrnutí

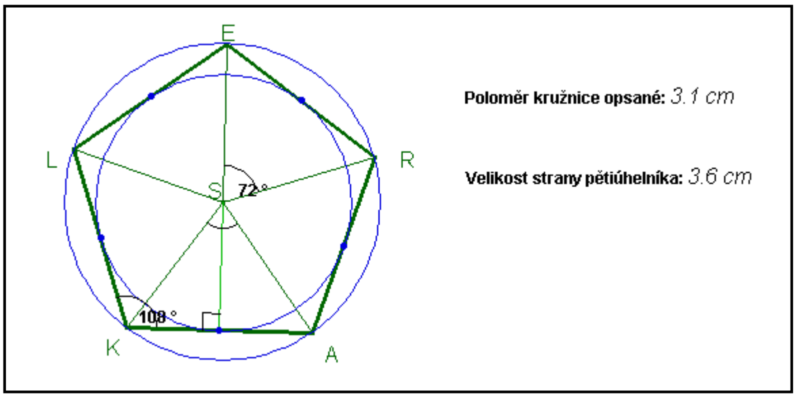
Čtyřúhelník má ____ (počet) úhlopříčky, pětiúhelník ____ (počet) úhlopříček.

Počet úhlopříček vycházejících z jednoho vrcholu n-úhelníku je: (n - _____) .

V n-úhelníku, kde n je počet vrcholů, můžeme zjistit počet úhlopříček takto: $\frac{(n-\ \ )\cdot n}{2}$.

Úloha M5 Pravidelný pětiúhelník

1. Na obrázku je pravidelný pětiúhelník. Zopakujte si, co znáte. Kolik úhlopříček má pětiúhelník? Jaký je součet všech jeho vnitřních úhlů? Jak velký bude úhel při každém vrcholu? Zkontrolujte své výpočty s údaji na obrázku.
2. Budou se údaje o úhlech měnit, pokud budeme zvětšovat nebo zmenšovat velikost strany pětiúhelníku? Odhadněte a pak vyzkoušejte. (Pohybujte vrcholy.)
3. Najděte trojúhelník KAS a určete z údajů na obrázku jeho rozměry. Jaký bude trojúhelník z hlediska velikosti stran?
4. Dopočítejte všechny vnitřní úhly trojúhelníku KAS.
5. Znáte-li velikost strany pětiúhelníku a poloměru kružnice opsané, vypočítejte velikost poloměru kružnice vepsané.
6. Dokážete z údaje o poloměru kružnice opsané vypočítat velikost strany pětiúhelníku?



Obrázek č. 19 – Náhled appletu k úloze M5.

M5 Shrnutí

Pravidelný pětiúhelník má ____ úhlopříček.

Součet všech vnitřních úhlů je ______ °, každý vnitřní úhel má velikost ______°.

Pravidelný pětiúhelník lze rozdělit na pět shodných (rovnoramenných - rovnostranných) trojúhelníků.

4.8 Kružnice a kruh

Kružnice je definována jako množina bodů, které jsou stejně vzdáleny od jednoho bodu (odvození viz kapitola Množiny bodů daných vlastností). Zde se budeme zabývat nejprve rozdílem mezi kruhem a kružnicí, potom délkou kružnice a polohovými vlastnostmi kružnice a přímky nebo dvou kružnic. Na závěr je zahrnuta úloha na Thaletovu kružnici, její důkaz a také ukázku obvodového a středového úhlu, které s Thaletovou kružnicí souvisí.

Výukové cíle

Po zodpovězení otázek v úlohách a splnění praktických úkolů v appletech s konstrukcemi geometrických útvarů budou žáci schopni:

- rozlišit pojmy kružnice a kruh a načrtnout je,
- uvést postup, jak přibližně najít délku dané kružnice, uvést vzorec pro výpočet délky kružnice a aplikovat jej při výpočtu,
- popsat a vymodelovat všechny možné polohy kružnice a přímky v rovině,
- popsat a vymodelovat všechny polohy dvou kružnic v rovině v závislosti na velikostech jejich poloměrů,
- vysvětlit pojem Thaletova kružnice a načrtnou ji,
- načrtnout v kružnici středový a obvodový úhel a popsat jejich vlastnosti.

Seznam úloh

Úloha K1 Kružnice a kruh

Úloha K2 Kružnice a její délka

Úloha K3 Vzájemná poloha kružnice a přímky

Úloha K4 Vzájemná poloha dvou kružnic

Úloha K5 Thaletova kružnice

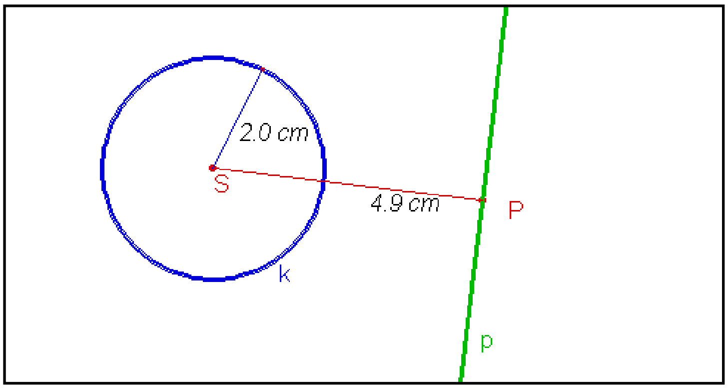
Úloha K6 Středový a obvodový úhel na kružnici

Všechny úlohy jsou uvedeny na vytvořených webových stránkách: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/kruznice-a-kruh. Dále uvádím pouze vybrané úlohy.

Vybrané úlohy

Úloha K3 Vzájemná poloha kružnice a přímky

1. Kružnice a přímka v rovině mohou mít vzájemně několik poloh podle toho, kolik mají společných bodů. Odhadnete, kolik možností je?
2. Na obrázku je kružnice a přímka, jejíž vzdálenost od středu kružnice je zobrazena úsečkou SP. Mluvíme-li o vzdálenosti, jaký úhel bude svírat úsečka SP s přímkou p?
3. Kolik společných bodů má přímka s kružnicí? Jaká je její vzdálenost od středu kružnice? Je tato vzdálenost větší než poloměr kružnice?
4. Posouvejte přímkou (uchopte ji v bodě P) tak, aby protínala kružnici ve dvou bodech. Jaká je nyní vzdálenost přímky a středu kružnice? Je tato vzdálenost větší než poloměr? Přímka v takovém případě "seká" kružnici na dvě části. Jak takovou přímku nazýváme?
5. Posuňte přímku tak, aby sdílela s kružnicí jediný bod. Jaká bude vzdálenost přímky od středu kružnice v porovnání s poloměrem? Jak se nazývá tato přímka?
6. Existují ještě nějaké další polohy kružnice a přímky? Může mít přímka společné 3 body nebo více s kružnicí? Pokuste se vymodelovat.



Obrázek č. 20 – Náhled appletu k úloze K3.

Shrnutí K3

Kružnice může mít s přímkou společné maximálně _____ (počet) body.

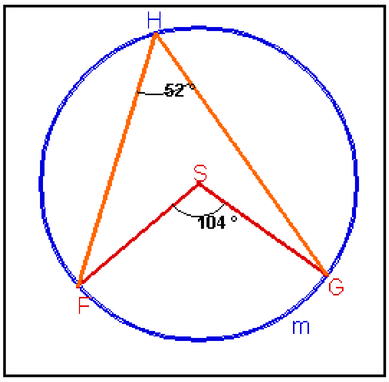
Protíná-li přímka kružnici ve 2 bodech, nazývá se (sečnou - tečnou - vnější přímkou) kružnice a její vzdálenost od středu kružnice je (větší než - menší než - stejná jako) poloměr kružnice.

Dotýká-li se přímka kružnice v 1 bodě, nazývá se (sečnou - tečnou - vnější přímkou) *kružnice a její vzdálenost od středu kružnice je (větší než - menší než - stejná jako) poloměr kružnice. Tento bod nazýváme bod ___________.*

Nemá-li přímka s kružnicí žádný společný bod, nazývá se _____________ přímka a její vzdálenost od středu kružnice je _________ než poloměr kružnice.

Úloha K6 Středový a obvodový úhel na kružnici

1. Na obrázku je kružnice a 3 libovolné body na této kružnici. Jak se nazývá úhel daný těmito třemi body na obvodu kružnice (úhel FHG)?
2. Jak se nazývá úhel daný dvěma body na kružnici a středem kružnice - tedy úhel FSG?
3. Myslíte, že velikosti těchto úhlů spolu souvisí? Pohybujte libovolně body F a G. Mění se oba vyznačené úhly? Jaká je jejich vzájemná velikost?
4. Pohybujte bodem H. Mění se velikost úhlu při vrcholu H?
5. Nastavte úhel FSG na 180°. Jaký úhel bude při vrcholu H? Pohybujte vrcholem H a sledujte velikost úhlu při jeho vrcholu. Co vám to připomíná? Jak se v takovém případě jmenuje narýsovaná kružnice?



Obrázek č. 21 – Náhled appletu k úloze K6.

Shrnutí K6

Středový úhel je dán dvěma body na ___________ a středem této kružnice.

Obvodový úhel je dán ____ (počet) body na jedné kružnici.

Středový úhel FSG má vždy ____________________ velikost než příslušný obvodový úhel (FHG).

Bude-li velikost obvodového úhlu 35 °, příslušný středový úhel bude velký _____°.

Bude-li velikost středového úhlu 260 °, příslušný obvodový úhel bude velký _____°. Pokud je středový úhel roven 180°, pak bude obvodový úhel velký _____° a jedná se o _______________ větu.

4.9 Obvody a obsahy

Mnohoúhelníky a kružnici či kruh můžeme charakterizovat pomocí velikosti jejich obvodu a velikostí obsahu rovinné plochy, jež ohraničují. Obvody a obsahy jsou vybrány do zvláštní kapitoly také proto, že jejich odvození spolu navzájem souvisí (např. obsah trojúhelníku souvisí se znalostí výpočtu obsahu rovnoběžníku apod.). Pro názornost jsou zde uvedeny úlohy využívající čtvercovou síť, což rozvíjí představu čtverečních jednotek v rovině. Další úlohy zase využívají dělení geometrických útvarů na části, které po složení zjednoduší výpočet obsahu plochy.

Výukové cíle

Po zodpovězení otázek v úlohách a splnění praktických úkolů v appletech s konstrukcemi geometrických útvarů budou žáci schopni:

- odhadnout obsah čtverce a obdélníku ve čtvercové síti,
- vypočítat obsah čtverce a obdélníku,
- vypočítat obsah libovolného rovnoběžníku a uvést, na kterých údajích závisí,
- uvést vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, aplikovat jej v příkladech a vysvětlit souvislost s obsahem rovnoběžníku,
- vysvětlit odvození obsahu lichoběžníku (pomocí trojúhelníku) a uvést vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníku,
- popsat, jak lze přibližně zjistit obvod kruhu a uvést vzorec pro výpočet,
- vypočítat obsah kruhu,
- určit obsah libovolného mnohoúhelníku zakresleného ve čtvercové síti.

Seznam úloh

Úloha O1 Obsah čtverce

Úloha O2 Obsah obdélníku

Úloha O3 Obvod a obsah obdélníku

Úloha O4 Obsah rovnoběžníku

Úloha O5 Obsah trojúhelníku

Úloha O6 Obsah lichoběžníku

Úloha O7 Obvod kruhu

Úloha O8 Obsah kruhu

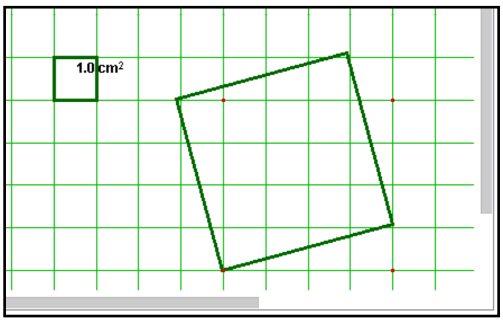
Úloha O9 Obvod a obsah rovinného útvaru

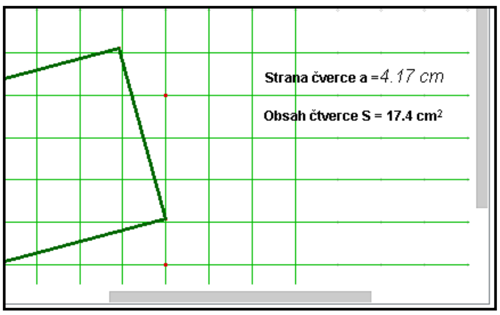
Všechny úlohy jsou uvedeny na vytvořených webových stránkách: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/obvody-a-obsahy. Dále uvádím pouze vybrané úlohy.

Vybrané úlohy

Úloha O1 Obsah čtverce

1. Odhadněte, jak velkou plochu roviny čtverec ohraničuje. Kolik přibližně malých čtverců ze čtvercové sítě je uvnitř zvýrazněného čtverce?
2. Malý čtverec má obsah 1 cm^2. Jaký obsah bude mít zvýrazněný čtverec v jednotkách cm^2? Ověřte svůj odhad - posuňte lištu obrázku směrem doprava a zkontrolujte výsledek.
3. Umístěte zvýrazněný čtverec do čtvercové sítě tak, aby byly všechny jeho vrcholy v bodech sítě. Kolik cm má jedna strana vašeho čtverce? Kolik cm^2 má pak obsah čtverce? Vymodelujte alespoň 3 další čtverce, určete velikost jejich strany a obsah (=počet čtverců sítě).
4. Jak souvisí počet malý čtverců s délkou strany čtverce? Jak tedy vypočítáme obsah čtverce, známe-li délku strany?



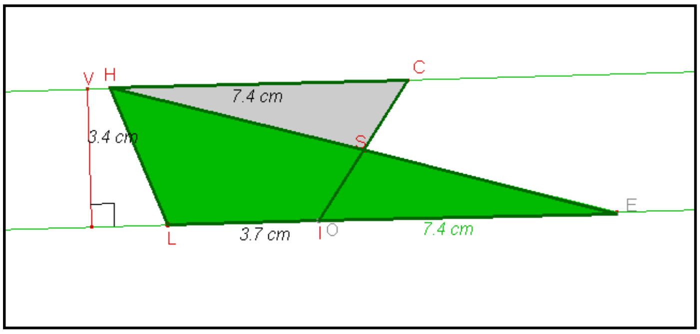


Obrázek č. 22 a č.23 – Náhled appletu k úloze O1.

Vzorec pro výpočet obsahu čtverce o straně ***a*** *je* ***S*** = ____________.

Úloha O6 Obsah lichoběžníku

1. Na obrázku je lichoběžník LICH. Pokuste se odhadnout, jak bychom mohli lichoběžník rozložit a zase složit, aby vznikl nějaký jiný útvar (obdélník, rovnoběžník, trojúhelník).
2. Najděte na obrázku bod O. Uchopte jej a pohybujte jím tak, aby překrýval bod I. Popište, jaký útvar jste na obrázku přesunuli a jak.
3. Jaký útvar (zeleně vyznačený) přesunutím části lichoběžníku vznikl? Bude mít stejný obsah jako lichoběžník?
4. Které rozměry zeleného trojúhelníku LEH známe? Můžeme vypočítat jeho obsah? Pokud ano, vypočítejte.
5. Vymodelujte jiný lichoběžník (pohybem vrcholů nebo výšky) a postup s vytvořením trojúhelníku opakujte.



Obrázek č. 24 – Náhled appletu k úloze O6.

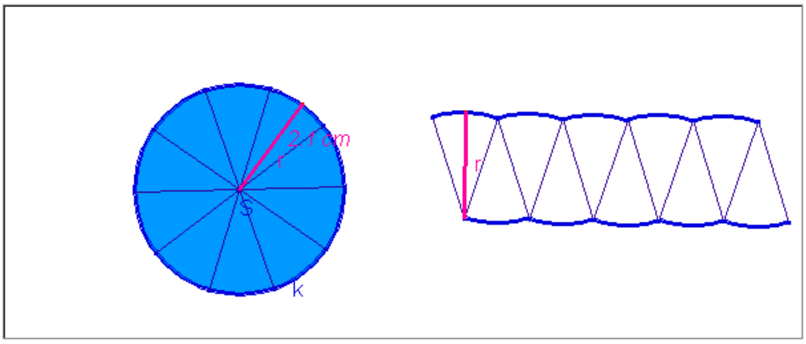
Vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníku o základnách ***a,b*** *a výšce* ***v*** *je* ***S*** = ____________.

Úloha O8 Obsah kruhu

1. Obsah kruhu je velikost plochy, kterou ohraničuje obvod kruhu. Plochu můžeme rozdělit na části, jak je to na obrázku. Na kolik částí je kruh rozdělen?
2. Části kruhu jsou sestaveny do útvaru připomínajícího rovnoběžník. Jak vypočítáme obsah rovnoběžníku?
3. Jakou výšku bude mít rovnoběžník na obrázku? Jak souvisí tato výška s kruhem?
4. Obvod kruhu je tlustě vyznačen na obrázku kruhu i na sestaveném rovnoběžníku.

Jak se vypočítá obvod kruhu, známe-li poloměr?

5. Jaká bude tedy velikost vodorovné strany tohoto rovnoběžníku? Bude to nějaká část obvodu kruhu? Jak ji vypočítáme, známe-li poloměr kruhu?
6. Vypočítejte obsah vzniklého rovnoběžníku a zapište, jak jste ho vypočítali.



Obrázek č. 25 – Náhled appletu k úloze O8.

Vzorec pro výpočet obsahu kruhu o poloměru ***r*** *je* ***o*** = ___________.

Vzorec pro výpočet obsahu kruhu o průměru ***d*** *je* ***o*** = ___________.

Číslo π se nazývá ______________________________ *a hodnota π je* __________ .

4.10 Množiny bodů dané vlastnosti

Některé geometrické útvary v rovině mohou být definovány jako množiny bodů s určitou vlastností. Mezí základní takové množiny, se kterými se určitě setkají žáci na základní škole, jsou kružnice, osa úsečky, úhlu a rovinného pásu, dále ekvidistanta přímky a kružnice a Thaletova kružnice. Zvlášť jsou rozlišeny další množiny bodů daných vlastností (úlohy D1-D4), které se nezařazují mezi učivo základních škol, protože jsou složitější pro konstrukci, nicméně v programech dynamické geometrie se dají názorně demonstrovat.

V této kapitole se nejprve zabýváme nalezením jednoho bodu určené vlastnosti a pak vykreslením stopy tohoto bodu (v závislosti na pohybu některého jiného prvku) nalezneme celou množinu bodů. Na závěr každého appletu je shrnuta definice útvarů pomocí množiny bodů.

Výukové cíle

Po zodpovězení otázek v úlohách a splnění praktických úkolů v appletech s konstrukcemi geometrických útvarů budou žáci schopni:

- popsat kružnici jako množinu bodů dané vlastnosti,
- sestrojit osu úsečky, osu rovinného pásu a osu úhlu a popsat tyto osy jako množiny bodů dané vlastnosti,
- vysvětlit pojem ekvidistanta přímky a ekvidistanta kružnice a načrtnout je,
- vysvětlit pojem Thaletova kružnice jako množinu bodů dané vlastnosti a popsat postup její konstrukce,
- odhadnout výsledek a popsat postup konstrukce některých dalších množin bodů daných vlastností.

Seznam úloh – základní množiny bodů

Úloha B1 Kružnice

Úloha B2 Osa úsečky

Úloha B3 Ekvidistanta přímky

Úloha B4 Osa rovinného pásu

Úloha B5 Osa úhlu

Úloha B6 Ekvidistanta kružnice

Úloha B7 Thaletova kružnice

Všechny úlohy jsou uvedeny na vytvořených webových stránkách: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/mnoziny-bodua-danych-vlastnosti.

Seznam úloh – další množiny bodů

Úloha D1 Množina středů tětiv

Úloha D2 Množina středů úseček

Úloha D3 Množina bodů stejně vzdálených od bodu a přímky

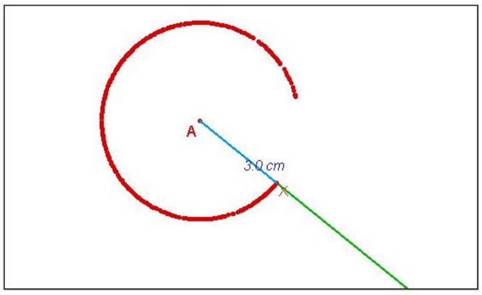
Úloha D4 Množina bodů, ze kterých lze vidět úsečku pod daným úhlem

Všechny úlohy jsou uvedeny na vytvořených webových stránkách: https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/dalsi-mnoziny-bodua. Dále uvádím pouze vybrané úlohy.

Vybrané úlohy

Úloha B1 Kružnice

1. Úkolem je sestrojit **množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost od zvoleného bodu A.** Odhadnete, jak bude taková množina vypadat?
2. Zvolíme vzdálenost např. 3 cm. Jak najdete bod, který je od A vzdálen 3 cm?
3. Na obrázku jsme nanesli vzdálenost 3 cm na polopřímku. Našli jsme jeden z hledané množiny - bod X.
4. Uchopte polopřímku a pohybujte jí kolem bodu A - vykreslí se stopa všech takových X vzdálených od bodu A 3 cm. Jak pojmenujete množinu bodů, která vznikla?



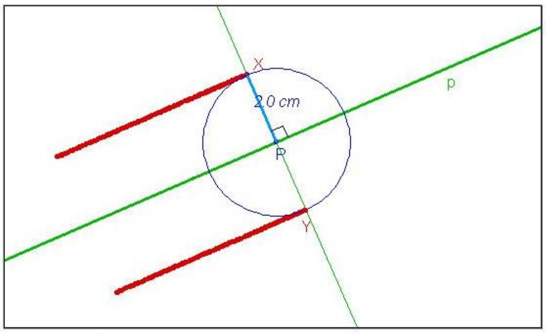
Obrázek č. 26 – Náhled appletu k úloze B1.

Množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost (r) od zvoleného bodu A, je ________________, která má _____ v bodě A a ____________ r.

Úloha B3 Ekvidistanta přímky

1. Úkolem je najít množinu bodů, které mají od dané přímky stejnou vzdálenost. Odhadnete, jak bude vypadat taková množina bodů?
2. Jak najdete 1 bod, který je od přímky vzdálen např. 2 cm?
3. Hledáme-li bod vzdálený d od přímky, musí ležet na kolmici k přímce. Potom je od paty kolmice P vzdálen právě o velikost d. Narýsujeme tedy v první fázi kolmici k přímce a naneseme pomocí kružnice velikost 2 cm. Kružnice nám protne kolmou přímku ve 2 bodech X a Y. Tyto body jsou oba vzdáleny od přímky 2 cm, proto budou náležet do naší hledané množiny.

4. Posouvejte patou kolmice - bodem P po přímce. Vykresluje se množina všech bodů X a Y. Jak tuto množinu nazveme?



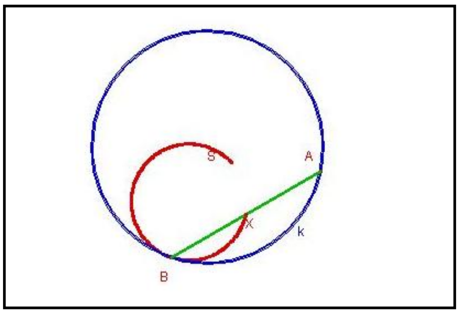
Obrázek č. 27 – Náhled appletu k úloze B3.

Množinou bodů, které mají od dané přímky stejnou vzdálenost, je ______________ přímky.

Jedná se o sjednocení dvou __________ s přímkou p v určené vzdálenosti.

Úloha D1 Množina středů tětiv

1. Je dána kružnice k (S, r) a na ní bod B. Najděte množinu středů všech tětiv kružnice k (S, r), které procházejí bodem B.
2. Jak bude asi vypadat tato množina? Odhadněte.
3. Jak najdete 1 bod této množiny?
4. Pohybujte na obrázku bodem A a sledujte, jaká množina bodů se vykresluje. Jak tuto množinu nazvete?

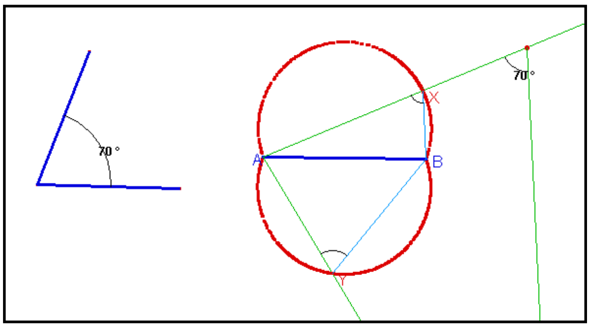


Obrázek č.28 – Náhled appletu k úloze D1.

Množinou bodů je kružnice o poloměru _____________ která se __________kružnice k v bodě B a prochází středem S.

Úloha D4 Množina bodů, ze kterých lze vidět úsečku pod daným úhlem

1. Sestrojte množinu bodů, ze kterých lze úsečku AB vidět pod úhlem o velikosti 54 °. (Popř. jiným úhlem, který je zadán v levé části obrázku.)
2. Jak bude asi vypadat tato množina? Pokuste se odhadnout.
3. Jak najdete 1 bod této množiny?
4. Sestrojíme polopřímku z bodu A a na tuto polopřímku v libovolné vzdálenosti naneseme úhel dané velikosti. Pak sestrojíme rovnoběžku s ramenem úhlu tak, aby procházela bodem B - našli jsme jeden bod X, který patří do hledané množiny. Stejně sestrojíme bod Y v druhé polorovině (pod úsečkou AB).
5. Pohybujte polopřímkou AX a polopřímkou AY ve všech směrech. Jaká množina bodů se vykresluje?
6. Vyzkoušejte pro ostrý i tupý úhel (změňte zadání úhlu v levé části pohybem krajních bodů úsečky). Jak se vykreslené množiny liší?
7. Vyzkoušejte pro úhel 90 °. Jaká bude množina bodů?



Obrázek č. 29 – Náhled appletu k úloze D4.

Množina bodů, ze kterých lze vidět kružnici pod určitým úhlem, tvoří dvě části _______________. Body A a B do této množiny (patří - nepatří).

4.11 Konstrukční úlohy

V této kapitole jsou v prostředí dynamické geometrie vykresleny některé konstrukce. Jedná se o dva tematické celky - konstrukce trojúhelníků a konstrukce tečny ke kružnici. Applety zobrazují nejprve pouze zadání, pro vykreslování postupných kroků konstrukce je třeba použít tlačítko Play na spodní liště appletu. Konstrukci lze také stejným tlačítkem zastavit v průběhu animace. Konstrukce nemají zadány doprovodné úkoly a úlohy, jedná se o kapitolu volně k dispozici pro upevnění znalostí sestrojování trojúhelníků a tečen. V appletech je možné dynamicky měnit zadání (strany a úhly v trojúhelníku nebo polohy zadaných bodů a kružnic) a sledovat vliv změny zadaných prvků na výsledné konstrukci.

Seznam konstrukcí trojúhelníků

Konstrukce KT1 Trojúhelník podle SSS

Konstrukce KT2 Trojúhelník podle SUS

Konstrukce KT3 Trojúhelník podle USU

Seznam konstrukcí tečen ke kružnici

Konstrukce KK1 Bod dotyku

Konstrukce KK2 Tečna rovnoběžná s přímkou

Konstrukce KK3 Tečna kolmá k přímce

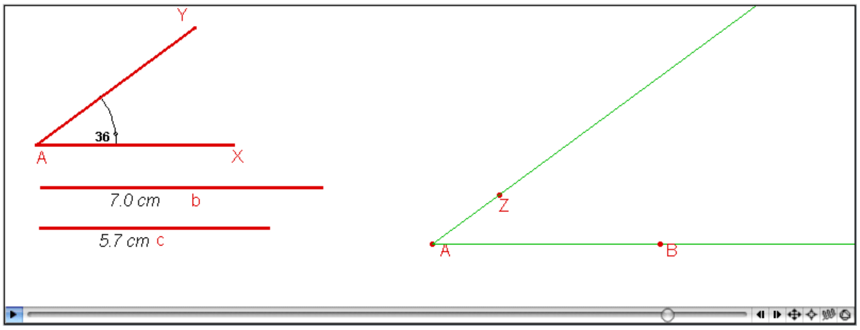
Konstrukce KK4 Tečna procházející bodem

Konstrukce KK5 Tečna ke dvěma shodným kružnicím

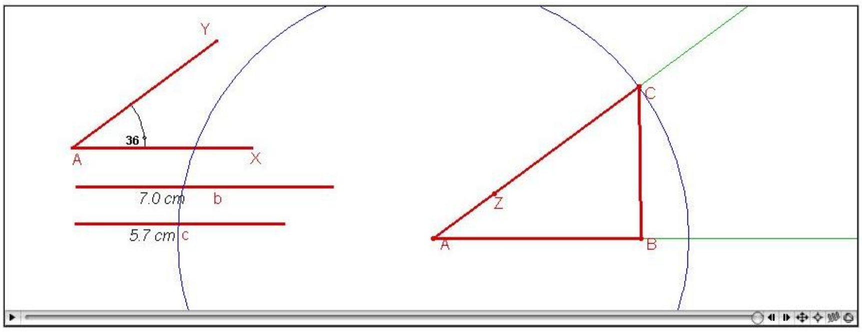
Konstrukce KK6 Tečna ke dvěma různým kružnicím

Konstrukce KT2 Trojúhelník podle SUS

Obrázek č. 31 – Náhled appletu ke konstrukci KT2 - zadání.

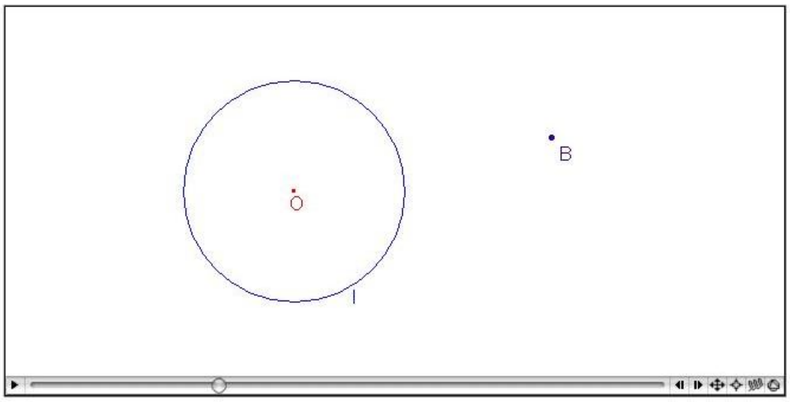


Obrázek č. 32 – Náhled appletu ke konstrukci KT2 - mezikrok.

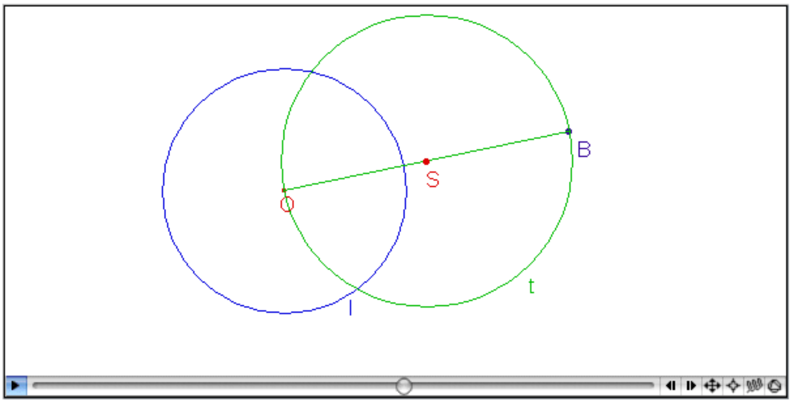


Obrázek č. 33 – Náhled appletu ke konstrukci KT2 - řešení.

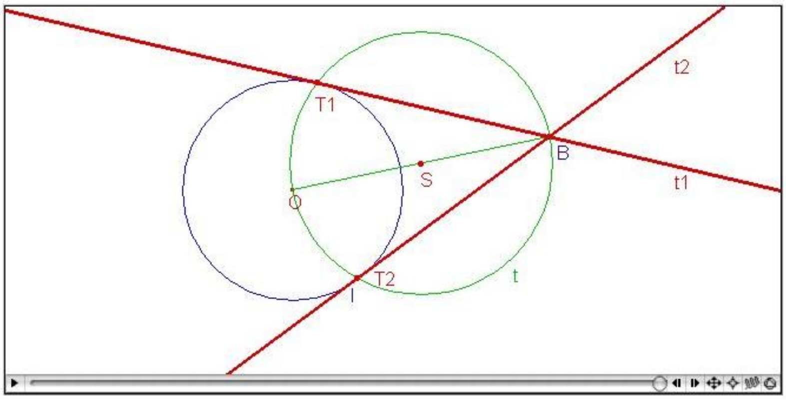
Konstrukce KK4 Tečna procházející bodem



Obrázek č. 34 – Náhled appletu ke konstrukci KK4 - zadání.



Obrázek č. 35 – Náhled appletu ke konstrukci KK4 - mezikrok.



Obrázek č. 36 – Náhled appletu ke konstrukci KK4 - řešení.

Závěr

Prvním cílem diplomové práce bylo vybrat z učiva matematiky v 6. – 9. ročníku základních škol oblasti planimetrie vhodné pro aplikaci softwaru dynamické geometrie. Jedná se o základní prvky roviny (bod, přímka, úsečka, úhel), geometrické útvary (trojúhelník, čtyřúhelník, mnohoúhelníky, kružnice a kruh) a jejich vlastnosti, dále pak množiny bodů daných vlastností a konstrukční úlohy. Tyto kapitoly mohou efektivně využít dynamiky geometrického softwaru pro modelování geometrických útvarů, jejich pohyb v rovině, změnu jejich parametrů a vykreslování konstrukcí.

V rámci diplomové práce byly k úlohám z vybraných oblastí planimetrie vytvořeny applety s interaktivními prvky v programu Cabri Geometrie. Každá úloha obsahuje otázky a úkoly, které se vztahují ke konkrétnímu appletu, a na závěr je formulováno shrnutí experimentálně získaných poznatků. Ze souboru úloh byl sestaven výukový materiál, který je členěn do tematických celků a je zavěšen na webových stránkách, jež jsou výstupem praktické části diplomové práce.

Dalším cílem bylo popsat možnosti aplikace těchto materiálů ve výuce i pro samostatné opakování žáků. Materiál je možné využít při frontální výuce ve třídě s projektorem, při práci s interaktivní tabulí a pro výuku v počítačové učebně, kde mohou žáci pracovat společně i samostatně. Výuka s využitím didaktické techniky žáky zaujme, protože pracují v atraktivním prostředí. Podporuje jejich aktivní přístup, mohou objevovat souvislosti pomocí experimentování, které je v běžné školské geometrii obtížné.

Vzhledem k tomu, že webové stránky jsou volně k dispozici všem uživatelům, může si žák také v domácím prostředí ověřit, zda učivu porozuměl. Výukový materiál je koncipován tak, aby mohli žáci samostatně podle otázek a úkolů objevovat vlastnosti rovinných útvarů, odhadovat a ověřovat své odhady či konstruovat množiny bodů daných vlastností. Učitel může využít materiál především při vysvětlování nového učiva a modelování většího množství ilustrativních příkladů poloh rovinných útvarů a jejich konstrukcí. Proto je soubor úloh s applety vhodný jako doplněk výuky planimetrie na druhém stupni základních škol.

Literatura

BAINVILLE, Eric. *Příručka pro uživatele Cabri Geometrie II Plus.* Přel. Antonín Vrba. Cabrilog, 2003. [cit. 2011-10-2]. Dostupné z WWW: http://www.pf.jcu.cz/p-mat/texty/vrba/manual_CabriPlus.pdf

BOBEK, Jan. *Google weby: Tutoriál projektu MOSS – učitelská verze.* [online]. Nový Jičín: Gymnázium a Střední odborná škola, Nový Jičín, příspěvková organizace, 2010. Dostupné z: http://www.mujstudijnisvetonline.eu/manualy/manual_weby_ucitele.pdf

Cabri.cz: Jak s Cabri obrázky na web. [online] [cit 5. 2. 2013]. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/cabri/download/cabriweb-pruvodce.htm.

Cinderella: The Interactive Geometry Software Cinderella. [online]. 2012. [cit. 2013-02-16]. Dostupné z: http://cinderella.de/tiki-index.php

Doporučené učební osnovy ČJL, AJ a M pro základní školu. [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2011. Dostupné z WWW: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2011/03/Doporucene-ucebni-osnovy-predmetu-CJL-AJ-a-M-pro-zakladni-skolu.pdf

FEHÉROVÁ, Šárka, KUČINOVÁ, Eva a KVĚTOŇ, Pavel. *Didaktika matematiky pro základní školy*. 1. vyd. Ostrava: Ostravská univerzita, 2006. ISBN: 80-7368-278-8.

FRANCOVÁ, M. MATOUŠKOVÁ, K. VAŇUROVÁ, M. *Sbírka úloh z elementární geometrie*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004. 86 s. ISBN: 80-210-3570-6.

GeoGebra: Download. [online]. [cit. 2013-02-10]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/cms/cs/download

HEJNÝ, Milan a KUŘINA, František. *Dítě, škola, matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN: 978-80-7367-397-0.

HOHENWARTER, Markus a PREINER, Judith. *GeoGebra nápověda 3.0*. [online]. 2007. [cit. 2013-02-14]. Dostupné z: http://geogebra.org/help/docucs

HOHENWARTER, Markus a PREINER, Judith. *Introduction to geogebra*. [online]. 2012. [cit. 2013-02-10]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/book/intro-en.pdf

KADLEČEK, Jiří a ODVÁRKO, Oldřich. *Knížka pro učitele ke školním vzdělávacím programům na druhém stupni ZŠ: Matematika a její aplikace.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006. ISBN: 80-7196-333-X.

KALHOUS, Zdeněk a OBST, Otto. *Školní didaktika*. 1. vyd. Praha: Portál, 2002. ISBN: 80-7178-253-X.

KOPKA, Jan. *Výzkumný přístup k výuce matematiky*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 2007. ISBN: 978-80-7044-926-4.

KUŘINA, František. *Problémové vyučování v geometrii.* 1.vyd. Praha, SPN, 1976. ISBN: 14-532-76.

LÁVIČKA, Miroslav. Možnosti dynamické geometrie ve školách. In *Počítačem podporovaná výuka matematiky a příprava didaktického experimentu: sborník ze semináře kateder matematiky fakult připravujících učitele matematiky*. 1. vyd. Plzeň: Pedagogické centrum, 1998. ISBN: 80-7020-040-5.

LÁVIČKA, Miroslav. *CabriJava: dynamická geometrie na WWW*. [online] [cit 5. 2. 2013]. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/cabri/temata/cabrijava/index.html.

LEPIL, Oldřich. *Teorie a praxe tvorby výukových materiálů.* 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. ISBN 978-80-244-2489-7.

NOCAR, David a BÁRTKOVÁ, Eva. Motivace nadaných žáků a studentů k řešení úloh pomocí ICT. In *Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách*. Brno: Masarykova univerzita, 2012. 232 s.
ISBN 978-80-210-6144-6.

PATÁKOVÁ, Eva. *Apolloniovy úlohy*. [online] Západočeská univerzita v Plzni, 2005. [cit. 2011-10-3]. Diplomová práce. Dostupné z WWW: http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/cinde/cinde.html

PRIKNER, Milan. [online]. 2008. [cit. 2013-02-15]. Dostupné z: http://www.spomocnik.cz/index.php?id_document=2221%20

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2013. [cit. 2013-03-05]. Dostupné z WWW: http://nuv.cz/file/214

SITNÁ, Dagmar. *Metody aktivního vyučování: spolupráce žáků ve skupinách*. 1. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN: 978-80-7367-246-1

Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání. [disk]. Základní škola Nový Jičín, Tyršova 1, příspěvková organizace, 2012. [cit. 2011-8-1].

Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Základní škola Nový Jičín, Jubilejní 3, příspěvková organizace, 2010. [cit. 2011-8-1]. Dostupné z: http://www.zsjubilejni.cz/wp-content/uploads/2010/03/ŠVP-4.-od-1.-9.-2011-1.pdf

VANÍČEK, Jiří. *Metodika použití dynamické geometrie pří vyučování na ZŠ a SŠ*. Dostupné online z http://www.pf.jcu.cz/cabri/metodika

VANÍČEK, Jiří. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie.* 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2009. s. 212. ISBN: 978-80-7290-394-8.

VANÍČEK, Jiří. (ad.) *Cabri.cz: český portál pro podporu výuky geometrie pomocí počítače* [online]. České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2000 [cit. 2013-20-2]. Dostupné z WWW: http://www.pf.jcu.cz/cabri

VRBA, Antonín. *Geometrie na počítači*. [online] Praha: MŠMT – SIPVZ, 2004. 72 s. [cit 5. 2. 2011]. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/p-mat/texty/vrba/Cabri_kurz.pdf

VRBA, Antonín a SUCHÝ, Ondřej. *Přehled nabídek Cabri Geometrie II*. [online]. [cit. 2011-02-14] Dostupné z WWW: http://www.pf.jcu.cz/p-mat/texty/vrba/Cabri_manual.pdf

Seznam příloh

Příloha č. 1 - Náhled webové stránky – Úvod.

Příloha č. 2 - Náhled webové stránky – kapitola Trojúhelník.

Příloha č. 3 - Náhled webové stránky – kapitola Obvody a obsahy.

Příloha č. 4 - Náhled webové stránky – kapitola Základní množiny bodů.

Příloha č. 1 – Náhled webové stránky – Úvod.

https://sites.google.com/site/dynamickaplanimetrie/

Příloha č. 2 - Náhled webové stránky – kapitola Trojúhelník.

Dynamická planimetrie a učivo ZŠ

Prohledat tento web

Úvodní menu
Úvod
Jak pracovat s applety

Základní pojmy
Základní prvky roviny
Úhel v rovině

Geometrické útvary
Trojúhelník
Čtyřúhelník
Mnohoúhelníky
Kružnice a kruh
Obvody a obsahy

Množiny bodů daných vlastností
Základní množiny bodů
Další množiny bodů

Konstrukční úlohy
Konstrukce trojúhelníků
Konstrukce tečen kružnic

Další úlohy
Pythagorova věta

Trojúhelník

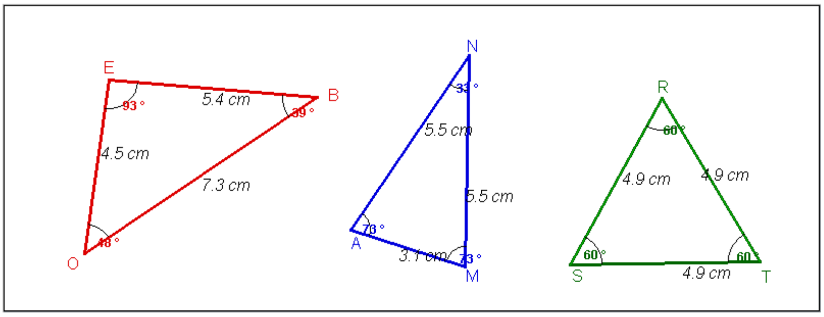
Trojúhelník je konvexní rovinný útvar o třech stranách a třech vrcholech. Může být definován například jako průnik tří polorovin. V tomto tematické celku se zaměříme především na jeho vlastnosti, které souvisí klasifikací trojúhelníků podle velikosti jeho úhlů nebo stran. Obsahem trojúhelníku se zabývá stránka s názvem Obvody a obsahy (viz levé menu). Každá úloha zobrazuje určitý prvek, který v trojúhelníku vykreslujeme (např. výška, těžnice, kružnice opsaná atd.). Poslední úloha shrnuje poznatky o všech prvcích v jediném vykresleném trojúhelníku.

Obsah

1 Úloha T1 Klasifikace trojúhelníků podle úhlů a stran
2 Úloha T2 Trojúhelníková nerovnost
3 Úloha T3 Úhly v trojúhelníku vnitřní a vnější
4 Úloha T4 Výšky trojúhelníku
5 Úloha T5 Těžnice v trojúhelníku
6 Úloha T6 Střední příčky
7 Úloha T7 Kružnice trojúhelníku opsaná
8 Úloha T8 Kružnice trojúhelníku vepsaná
9 Úloha T9 Kružnice trojúhelníku připsané
10 Úloha T10 Závěrečná úloha o trojúhelníku

Úloha T1 Klasifikace trojúhelníků podle úhlů a stran

1. Jaké znáte trojúhelníky z hlediska délky jeho stran? Najděte všechny 3 typy na obrázku.
2. Jaké znáte trojúhelníky podle velikosti jejich vnitřních úhlů? Vymodelujte je na obrázku. (Měnit velikost stran nebo úhlů trojúhelníku je možné pomocí uchopení vrcholu kurzorem myši a pohybováním.)
3. Může být rovnostranný trojúhelník zároveň pravoúhlý? Nejprve odhadněte, potom vyzkoušejte na obrázku. Zdůvodněte.
4. Může být tupoúhlý trojúhelník rovnoramenný? Odhadněte a potom ověřte.
5. Existuje pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník? Odhadněte a potom ověřte.
6. Je každý rovnostranný trojúhelník ostroúhlý? Odhadněte a potom ověřte.



T1 Shrnutí

Experimentálně ověřené výsledky shrň do následujících tvrzení:
Rovnostranný trojúhelník může být (ostroúhlý - tupoúhlý - pravoúhlý).
Rovnoramenný trojúhelník může být (ostroúhlý - tupoúhlý - pravoúhlý).
Pravoúhlý trojúhelník může být (rovnostranný - rovnoramenný - obecný).
Ostroúhlý trojúhelník může být (rovnostranný - rovnoramenný - obecný).
Tupoúhlý trojúhelník může být (rovnostranný - rovnoramenný - obecný).

Úloha T2 Trojúhelníková nerovnost

1. Může mít trojúhelník libovolné délky stran? Vymyslete libovolné délky stran a, b, c a vymodelujte je na obrázku. (Pohybem vrcholů trojúhelníku se budou měnit i velikosti stran.)
2. Podaří se vám vymodelovat na obrázku trojúhelník s délkami stran např. 2 cm, 3 cm a 6 cm? Proč?
3. V levé části obrázku se zapisují rozměry modelovaného trojúhelníku a vypočítává se součet dvou stran. Zkuste pohybovat vrcholem A. Je vždy součet stran $b + c$ větší než velikost strany a?
4. Pohybujte vrcholem A tak, aby se $a = b + c$ (tedy budou se sobě rovnat první dvě hodnoty). Kde se nachází vrchol A? Je v takovém případě na obrázku trojúhelník?
5. Pohybujte trojúhelníkem a všímejte si velikostí stran a, b, c a součtu stran zbývajících uvedených pod nimi. Jsou vždy součty dvou stran větší než zbývající strana?

Příloha č. 3 - Náhled webové stránky – kapitola Obvody a obsahy.

Dynamická planimetrie a učivo ZŠ

Prohledat tento web

Úvodní menu
- Úvod
- Jak pracovat s applety

Základní pojmy
- Základní prvky roviny
- Úhel v rovině

Geometrické útvary
- Trojúhelník
- Čtyřúhelník
- Mnohoúhelníky
- Kružnice a kruh
- Obvody a obsahy

Množiny bodů daných vlastností
- Základní množiny bodů
- Další množiny bodů

Konstrukční úlohy
- Konstrukce trojúhelníků
- Konstrukce tečen kružnic

Další úlohy
- Pythagorova věta

Obvody a obsahy

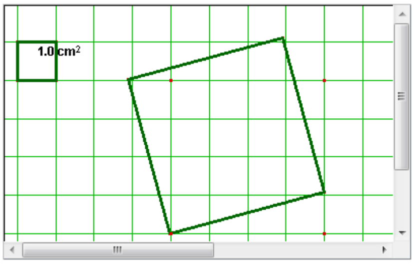
Mnohoúhelníky a kružnici či kruh můžeme charakterizovat pomocí velikosti jejich obvodu a velikostí obsahu rovinné plochy, jež ohraničují. Obvody a obsahy jsou vybrány do zvláštní kapitoly také proto, že jejich odvození spolu navzájem souvisí (např. obsah trojúhelníku souvisí se znalostí výpočtu obsahu rovnoběžníku apod.). Pro názornost jsou zde uvedeny úlohy využívající čtvercovou síť, což rozvíjí představu čtverečních jednotek v rovině. Další úlohy zase využívají dělení geometrických útvarů na části, které po složení zjednoduší výpočet obsahu plochy.

Obsah

1 Úloha 01 Obsah čtverce
2 Úloha 02 Obsah obdélníku
3 Úloha 03 Obvod a obsah obdélníku
4 Úloha 04 Obsah rovnoběžníku
5 Úloha 05 Obsah trojúhelníku
6 Úloha 06 Obsah lichoběžníku
7 Úloha 07 Obvod kruhu
8 Úloha 08 Obsah kruhu
9 Úloha 09 Obvod a obsah rovinného útvaru

Úloha 01 Obsah čtverce

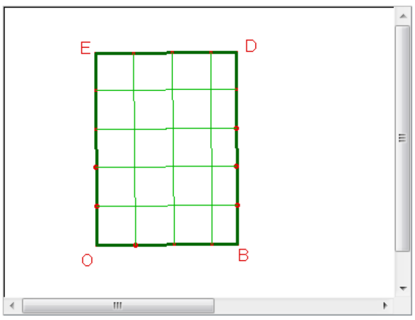
1. Odhadněte, jak velkou plochu roviny čtverec ohraničuje. Kolik přibližně malých čtverců ze čtvercové sítě je uvnitř zvýrazněného čtverce?
2. Malý čtverec má obsah 1 cm^2. Jaký obsah bude mít zvýrazněný čtverec v jednotkách cm^2? Ověřte svůj odhad - posuňte lištu obrázku směrem doprava a zkontrolujte výsledek.
3. Umístěte zvýrazněný čtverec do čtvercové sítě tak, aby byly všechny jeho vrcholy v bodech sítě. Kolik cm má jedna strana vašeho čtverce? Kolik cm^2 má pak obsah čtverce? Vymodelujte alespoň 3 další čtverce, určete velikost jejich strany a obsah (=počet čtverců sítě).
4. Jak souvisí počet malý čtverců s délkou strany čtverce? Jak tedy vypočítáme obsah čtverce, známe-li délku strany?



Vzorec pro výpočet obsahu čtverce o straně *a* je S = __________.

Úloha 02 Obsah obdélníku

1. Na obrázku je obdélník a síť, jejíž jeden díl má rozměr 1 cm. Kolik cm mají strany obdélníka?
2. Kolik čtverců obsahuje obdélník? Pokuste se odhadnout a spočítat přibližně i necelé části čtverců. Má-li 1 čtverec obsah 1 cm^2, koli cm^2 má tedy celý obdélník?
3. Pohybujte vrcholy B nebo D tak, aby obdélník měl obsah 15 cm^2 (tedy obsahoval 12 čtverců). Jaké rozměry mají strany obdélníka?
4. Najděte obdélník, který má obsah 24 cm^2. Jaké rozměry má obdélník? Najděte ještě jiný obdélník, který má stejný obsah 24 cm^2. Kolik obdélníků s různými celočíselnými rozměry najdete?
5. Jak vypočítáme obsah obdélníku, známe-li rozměry jeho stran?



Vzorec pro výpočet obsahu obdélníku o stranách *a*, *b* je S = __________.

Příloha č. 4 - Náhled webové stránky – kapitola Základní množiny bodů.

Dynamická planimetrie a učivo ZŠ

Prohledat tento web

Základní množiny bodů

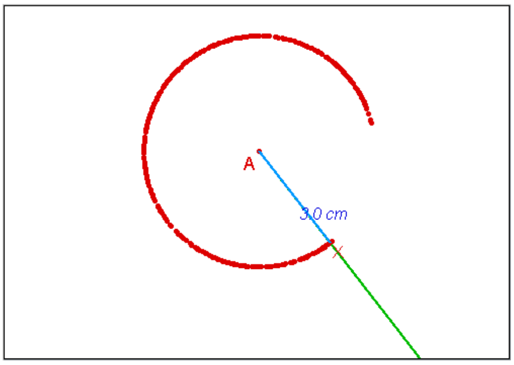
Některé geometrické útvary v rovině mohou být definovány jako množiny bodů s určitou vlastností. Mezí základní takové množiny, se kterými se určitě setkají žáci na základní škole, jsou kružnice, osa úsečky, úhlu a rovinného pásu, dále ekvidistanta přímky a kružnice a Thaletova kružnice. V této kapitole se nejprve zabýváme nalezením jednoho bodu určené vlastnosti a pak vykreslením stopy tohoto bodu (v závislosti na pohybu některého jiného prvku) nalezneme celou množinu bodů. Na závěr každého appletu je shrnuta definice útvarů pomocí množiny bodů.

Obsah

1 Úloha B1 Kružnice
2 Úloha B2 Osa úsečky
3 Úloha B3 Ekvidistanta přímky
4 Úloha B4 Osa rovinného pásu
5 Úloha B5 Osa úhlu
6 Úloha B6 Ekvidistanta kružnice
7 Úloha B7 Thaletova kružnice

Úloha B1 Kružnice

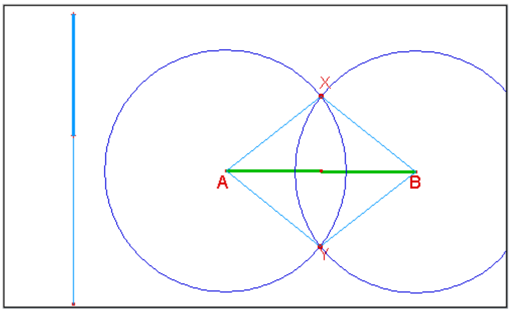
1. Úkolem je sestrojit **množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost od zvoleného bodu A.** Odhadnete, jak bude taková množina vypadat?
2. Zvolíme vzdálenost např. 3 cm. Jak najdete bod, který je od A vzdálen 3 cm?
3. Na obrázku jsme nanesli vzdálenost 3 cm na polopřímku. Našli jsme jeden z hledané množiny - bod X.
4. Uchopte polopřímku a pohybujte jí kolem bodu A - vykreslí se stopa všech takových X vzdálených od bodu A 3 cm. Jak pojmenujete množinu bodů, která vznikla?



Množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost (r) od zvoleného bodu A, je ______________ o _____ v bodě A a ___________ r.

Úloha B2 Osa úsečky

1. Úkolem je sestrojit **množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou bodů A a B.** Odhadnete, jak bude taková množina vypadat?
2. Zvolíme vzdálenost např. 5 cm. Jak najdete bod, který je od A vzdálen 5 cm a od B vzdálen 5 cm?
3. Na obrázku jsme nanesli obecně vzdálenost d, kterou lze libovolně měnit (pohybem úsečky d). Pro vzdálenost d jsme našli dva body z hledané množiny - bod X a bod Y v průsečíku kružnic o poloměru d.
4. Zvětšujte a zmenšujte libovolně úsečku o velikosti d - vykreslí se stopa všech takových X a Y stejně vzdálených od bodu A a B. Jak pojmenujete množinu bodů, která vznikla?



Množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou bodů A a B, je ________ úsečky AB.

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Marcela Štecová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2013

Název práce:	Planimetrie v učivu 2. stupně ZŠ s využitím dynamické geometrie
Název v angličtině:	Plane geometry in the mathematics curriculum of the lower secondary school using dynamic geometry
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá aplikací programů dynamické geometrie ve výuce na základní škole. K vybraným tematickým okruhům z planimetrie jsou připraveny výukové materiály s interaktivními applety umístěné na webových stránkách. Dále práce shrnuje typy úloh, metody výuky a způsoby využití výukového materiálu ve výuce.
Klíčová slova:	planimetrie, dynamická geometrie, matematika, výukový materiál
Anotace v angličtině:	This thesis analyses the application of dynamic geometry in teaching at the lower secondary school. On the web pages there are the teaching materials prepared with the interactive applets for the selected thematic areas of plane geometry. The thesis also summarizes the types of tasks, teaching methods and ways of using the learning material in education.
Klíčová slova v angličtině:	plane geometry, dynamic geometry, math, teaching material
Přílohy vázané v práci:	náhledy webové stránky
Rozsah práce:	75
Jazyk práce:	čeština