UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Marcela Lehotská

Jak se stát lepším učitelem matematiky

OLOMOUC 2013 Vedoucí práce: doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 16. dubna 2013

…………………………….

Děkuji doc. RNDr. Tomášovi Zdráhalovi CSc. za odborné vedení diplomové práce a poskytování cenných rad při konzultacích. Také děkuji panu učiteli a paní učitelce za spolupráci a za čas, který mi věnovali.

.

Obsah

Úvod

V diplomové práci jsem si zvolila tři dílčí cíle – identifikaci složitého tématu z pohledu učitele, v oboru školské matematiky, rozebrání dílčího tématu z pohledu kurikulárního dokumentu rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, návrh vlastních pracovních listů s metodickým komentářem k vybranému tématu.

Jako složité téma, které bych chtěla rozebírat, jsem vybrala zlomky, protože si myslím, že je jedním z hůře pochopitelných témat z hlediska žáka. Na něm budu demonstrovat hlavní cíl – předat svůj pohled na otázku, kterou kladu čtenáři hned v názvu své práce, tedy jak se stát lepším učitelem matematiky.

Nepůjde mi proto o vytvoření konkrétních rad, jak se stát lepším učitelem, které by mu pomohly čtenáři stát se lepším, kdyby je dodržel. Každý učitel je jedinečná osobnost a dávat mu konkrétní rady by bylo zbytečné, protože ty jsou určené, jak jejich označení naznačuje, spíše pro konkrétního učitele. Má práce by měla ukázat směr, kterým se lze dívat na učení matematiky a který může čtenáře podnítit k vlastním úvahám o své výuce.

Chtěla bych, aby má práce přispěla k praktičnosti matematiky. Aby se matematika nestávala předmětem, který je příliš abstraktní a žákům těžko přístupný, předmětem, který je obsažen pouze v učebnicích a sbírkách a žáci nevidí jeho využitelnost. Někdy se říká, že matematika učí žáky kritickému myšlení a proto je důležitá. Já bych se však nechtěla spokojit jen s tím, že budu žáky učit tomuto myšlení, chtěla bych jim ukázat, že matematika vždy popisovala a dodnes popisuje reálný svět a že ji mohou využít ve svém každodenním životě.

Proto jsem se rozhodla napsat diplomovou práci a v ní ukázat pohled na otázku: „Jak se stát lepším učitelem matematiky?“. Budu v ní poukazovat na propojení matematiky s hudbou, protože tyto dva předměty studuji ve své aprobaci a jsou mi blízké. Na tomto propojení bych chtěla poukázat na konkrétnost matematiky v jejich aplikacích na další obory a tedy v důsledku na jakoukoliv oblast reálného světa.

Práce je rozdělena na dvě hlavní části – teoretickou a empirickou. V teoretické části se zabývám zařazením učiva zlomků v kurikulárním dokumentu, motivací v matematice a hlavně modely, kterými mohu zakreslit zlomky a to jak matematickými, tak hudebními. V empirické části se věnuji hlavně pracovním listům, ve kterých hudební modely demonstruji. Jsou zde pracovní listy, které obsahují typové příklady pro práci se zlomky, jejich porovnávání, sčítání a násobení. Následně analyzuji výsledky čtyř tříd, které vyplnily pracovní list pro sčítání zlomků a zpětnou vazbu od dvou pedagogů, kteří se výuky zúčastnili.

Jak již bylo řečeno, tato práce nemá být „kuchařkou“, která dá čtenáři jasný postup k tomu, aby se stal lepším učitelem – ve svém celku 26ukazuje, jak se na vyučování matematiky můžeme podívat a žáky jím provést, aby na konci vždy viděli reálný svět, který matematika popisuje.

1. Teoretická část

1.1. Učivo zlomků v matematice z pohledu RVP

1.1.1. Charakteristika vyučovacího předmětu

„Vzdělávání v matematice je především zaměřeno na výchovu přemýšlivého člověka, který umí používat znalosti z matematiky v různých situacích občanského a profesního života. V hodinách matematiky proto vyučující cíleně motivují žáky k řešení matematických problémů; vedou žáky k matematizaci reálných situací a k posuzování věrohodnosti výsledků; rozvíjejí u žáků schopnost správně se matematicky vyjadřovat; podporují u žáků důvěru v jejich schopnosti; vychovávají žáky k vytrvalosti, kritičnosti a týmové spolupráci; budují u žáků pozitivní vztah k matematice.“

(Doporučené učební osnovy předmětů Čj, Aj a M pro základní školy: str. 86.)

Svou prací bych chtěla upozornit hlavně na matematizaci reálných situací a na její využití v pracovních listech, kterými vede učitel žáky k rozšíření a prohloubení učiva. Tímto můžeme u žáků probudit zájem o matematiku a zároveň je vyvádět z omylu, že matematika je jen v učebnicích.

Strategie k rozvoji kompetencí

Svými pracovními listy se zaměřuji na rozvoj kompetencí k učení a kompetencí pracovních. Vzhledem k aplikaci učiva zlomků na poznatky hudby rozvíjejí žáci znalosti z hudební výchovy a tím i získávají představu, že matematiku mohou využít v různých oborech i u takových, kde to není na první pohled zřejmé.

Zde jsou vyjmenované konkrétní kompetence z doporučených učebních osnov předmětu Matematika, které se v pracovních listech rozvíjejí.

„Strategie vedoucí k rozvoji kompetence k učení

Učitel:

- zadává vhodné slovní úlohy a příklady z běžného života a tím motivuje žáky k využívání matematických poznatků a dovedností v praxi;

Strategie vedoucí k rozvoji kompetence pracovní

Učitel:

- pestrým výběrem netradičních úloh rozvíjí u žáků schopnost využívat znalosti a dovednosti z různých oborů."

1.1.2. Zlomky v učivu šestého a sedmého ročníku ZŠ

Šestý ročník

„Učivo: Zlomky: polovina, čtvrtina, třetina, pětina, zlomky se jmenovatelem 10 a 100 (desetinné zlomky).

Dílčí výstupy:

- čte, zapíše, porovná zlomky a zobrazí je na číselné ose;
- vyjádří část celku graficky i zlomkem;
- sečte zlomky se stejným jmenovatelem;
- vysvětlí pojem číselný výraz, určí hodnotu číselného výrazu v daném oboru;

Sedmý ročník

Učivo: Zlomky.

Dílčí výstupy:

- zapíše převrácený zlomek, rozšíří a zkrátí zlomek, zapíše zlomek v základním tvaru, převede smíšené číslo na zlomek a naopak, upraví složený zlomek;
- provádí početní operace se zlomky (sčítání, odčítání, násobení a dělení)."

(Doporučené učební osnovy předmětů Čj, Aj a M pro základní školy, str. 92.)

1.2. Motivace v matematice

„Pokud bychom měli říci, proč některé věci člověka zaujmou a jiné nikoli, asi bychom tvrdili, že ty první jsou nějak přímo důležité pro jeho život. Buď baví, nebo odvádějí jeho mysl od nepříjemných myšlenek, nebo mu umožňují úspěšněji zvládat úkoly a vycházet s lidmi, s nimiž se setkává.“

(D. Fontana, Psychologie ve školní praxi, str. 153)

Pro matematiku nám může být užitečná myšlenka, že by matematika měla být důležitá pro náš život. Někdy se stává, že učitel sice vysvětlí, kde kolem sebe mohou žáci matematiku hledat, ale už je nepodnítí k tomu, aby opravdu hledali. Ti pak dokážou ze sebe vysypat několik příkladů aplikace matematiky, ale sami jen těžko některé vymyslí.

Zajímavé by bylo si zodpovědět i otázku, zda matematika odvádí mysl od nepříjemných myšlenek. Opravdu dokáže žáky natolik zaujmout, že zapomenou na své problémy a vnoří se do ní? Myslím, že to by mohlo být cílem každého učitele, ale rozhodně se mu to velmi zřídka povede u celé třídy a většinou si bude gratulovat, když tak nadchne alespoň pár jedinců.

Myslím si, že matematika má velký potenciál ukázat žákům, že s její pomocí mohou jednodušeji a přehledněji zvládat své úkoly. Jestliže pochopí, že není vědou sama pro sebe, ale mohou ji využít ve svém každodenním životě a dokonce dokážou převést tuto myšlenku i v praxi, pak se jim opravdu může dařit zvládat své problémy. Např. když se naučíme argumentovat logicky a věcně, pomůže nám to v komunikaci s ostatními lidmi a někdy i v našich problémech. Když si je zkusíme zanalyzovat, jak to děláme u úloh či příkladů, může nás napadnout řešení, které bychom jinak intuitivně dlouho hledali.

Abychom všechny tyto myšlenky mohli ukázat žákům, většinou se obrátíme na aplikaci matematiky do jiných oborů.

1.2.1. Aplikace matematiky

Jedním ze základních motivačních faktorů se uvádí aplikace matematiky na jiný vědní obor či oblast. Nejprve bychom se měli zamyslet právě nad onou aplikovatelností a tím, co z ní vyplívá.

„V rozporu s tím, co se často říká, matematika není pouze jiným jazykem, třebas i mnohem bohatším a přesnějším. Matematické myšlení je jednou ze schopností, kterou sdílejí všechny lidské bytosti, stejně jako schopnost mluvit, psát, poslouchat nebo skládat hudbu, prohlížet si a malovat obrazy, věřit v kulturní a morální kodexy a podřizovat se jim. Tyto schopnosti nejsou rozděleny rovnoměrně a mohou být různými jednotlivci rozvinuty v menší nebo větší míře. Je zřejmě nemožné uspořádat tyto různé schopnosti do jakékoliv hierarchie a ze všeho nejméně si lze dělat nárok na svrchovanost matematického myšlení.“

(J. P. Aubin, O motivaci v matematice, str. 155)

Na začátku úvah o motivaci v matematice bych chtěla upozornit na fakt, že matematika či matematické myšlení není něco výjimečného nebo dokonce nadřazeného. Autor zde uvádí, že matematika si je rovna s ostatními vědami či odvětvími, a myslím, že by na tento fakt neměli zapomínat ani učitelé matematiky a vyzdvihovat ji jako jediný a nejlepší předmět. Zároveň je jasné, že nemůže být ani podřadnější, proto bychom ji neměli podcenit v rámci ostatních předmětů ZŠ.

„Dějiny matematiky jsou plné příkladů toho, jak matematické postupy motivované problémy, na které jsme narazili v jednom vědeckém oboru, našly aplikace v mnoha dalších oborech. *Je to tato „univerzalita", jež činí matematiku tak fascinující.*“

(J. P. Aubin, O motivaci v matematice, str. 156)

Zde si můžeme všimnout, že aniž abychom posuzovali matematiku s ostatními obory, nemůžeme ji upřít jednu základní vlastnost – univerzalitu. V jiných oborech bychom těžko takovou vlastnost hledali. Díky tomu je zajímavé a důležité hledat matematické postupy i jinde, než v tomto oboru, protože tyto námi nalezené postupy nám mohou pomoci pochopit další části matematiky, nebo je můžeme využít i jinde.

Tímto způsobem může i učitel ukazovat svým žákům, k čemu slouží matematika. Jak mohou vztahy a postupy, které se učí v hodinách aplikovat jinde. Neměl by oddělovat matematiku od reálného světa, tím by ji vytrhl z kontextu její historie, jelikož matematika vždy popisovala reálný svět a byla nástrojem, jak nové poznatky popsat a vystihnout. Proto je i důležité uvědomit si zmiňovanou rovnost matematiky s ostatními vědami a díky ní si lze všimnout využitelnosti této disciplíny v jiných oblastech reálného světa a neuzavírat se jen do sebe.

„Tento způsob výuky“ (takový, že studentům se jen předkládají důkazy, které by sami se svými znalostmi ještě nemohli odvodit) „nevede k ničemu jinému než ke zmaření veškeré schopnosti „učit se hrou" a intuitivních (na rozdíl od logických) vloh studentů, které mohli původně mít. Vyučování určité teorie by asi mělo odrážet její historický vývoj, přičemž by se nemělo příliš prodlévat u jednotlivých etap, ale také by se tyto etapy neměly ignorovat. Pouze po takovém historickém úvodu by měli být studenti seznámeni s později vynalezenými zkratkami těchto křivolakých cest.“

(J. P. Aubin, O motivaci v matematice, str. 159)

Autor zde zmiňuje důležitý aspekt didaktiky matematiky, že bychom neměli zapomínat na ontogenezi jednotlivých pojmů. Celá koncepce školství je na ní založená, proto bychom ji neměli opomíjet ani při výuce a řazení jednotlivých témat za sebe. Vždyť třeba kmenové zlomky Egypťané používali tisíce let, neměli bychom proto uspěchat ani my jejich učení a až po jejich důkladném osvojení přejít na zlomky obecně.

Zároveň zde radí, abychom u takových témat nezůstávali příliš dlouho. Nemělo by cenu nejprve měsíc cvičit operace s kmenovými zlomky a pak na další dobu přejít k obecným. Pak by se mohlo jednoduše stát, že bychom učivo ZŠ nestihli probrat v devíti letech, ale potřebovali bychom na to zbytečně třeba třináct let.

Zajímavé také je, že bychom neměli žákům předkládat důkazy našich tvrzení takovým způsobem, na který by sami nemohli přijít. Vyžaduje to větší důslednost učitele, aby neříkal „k tomu se dostaneme v dalším ročníku“ a podobné věty. Rozvleklost někdy může žáky znechutit či odradit od dané tematiky.

„Někdy se motivace ztrácí tím, že děti musí příliš dlouho čekat na výsledky své práce. Model operantního podmiňování ukazuje, že čím je delší přestávka mezi výkonem a seznámení s výsledky, tím méně účinné je učení a tím větší je pravděpodobnost, že děti ztratí zájem o úkol a o to, jak jej zvládly.“

(D. Fontana, Psychologie ve školní praxi, str. 154)

Autor zde sice poukazuje spíše na délku čekání žáka na vyhodnocení testu či jeho výsledků, ale je možné tuto ztrátu motivace převést i na pouhé ukazování do budoucna. Např. neustálým odkazováním, to se vám bude hodit, až budeme brát něco složitějšího apod. Přitom spoustu důkazů můžeme žákům ukázat rovnou jejich jazykem, nemusíme čekat na další ročník.

„Školská matematika — tak jako matematika vůbec — souvisí s realitou dvojím způsobem: jednak svými kořeny, jednak svým použitím. To první znamená, že poskytuje aparát k popisování reálných situací, tj. k sestrojování modelů reality. To druhé znamená, že pomocí aparátu matematiky může řešit problémy reálného světa; tomu se říká aplikovat matematiku. Obě tyto činnosti nelze od sebe odloučit a samozřejmě je nelze odloučit od matematiky samé; proto asi nelze plně souhlasit s hlasem praktika, adresovaným učitelům matematiky, který jsme slyšeli před léty: „Naučte žáky (rozuměj žáky všeobecně vzdělávací školy) pořádně matematiku, ty aplikace už si uděláme s nimi sami.“.“

(J. Vyšín, Co udělat, aby vyučování matematice bylo užitečné?, str. 286)

Autor nám zde ukazuje, co vše je potřeba si představit pod pojmem aplikovat matematiku. Nejedná se jen o použití matematického jazyka či myšlení na jiný obor, ale skrývá se v něm i popsání reálného světa, bez toho, abychom ho začali řešit. To je potom obzvláště výhodné využívat v mezipředmětových vztazích, protože pro žáky bude jednodušší si představit, co znamená daný pojem, jestliže je popsaný matematicky. A zároveň zde učitel může poukázat na fakt, že nové objevy se často prolínaly s matematikou a byla opravdu využívána.

Zároveň je v citaci důležitá myšlenka, že bychom neměli matematiku oddělovat od praxe, ale naopak bychom ji měli v praxi ukazovat již během vyučovacího procesu.

„Je možné slyšet hlasy, že aplikace jsou nejsilnější motivací pro žákovskou zvídavost po matematických poznatcích. Je to pravda, ale jen zčásti. Jisté však je, že se aplikace pokládají za nejúčinnější prostředek, jak zbavovat školskou matematiku papírovosti a prokázat její užitečnost. *Ale pozor! řekli jsme školskou* matematiku, neboť v ní se ocitáme mezi dvěma omezeními. Aplikace musí být jednak přirozené, nenásilné, jednak zvládnutelné poměrně skrovným školským aparátem; to platí zejména pro ZŠ.“

(J. Vyšín, Co udělat, aby vyučování matematice bylo užitečné?, str. 286)

Autor zde jen potvrzuje myšlenku, kterou jsme již uvedli výše. Je potřeba matematiku ukazovat žákům aplikovaně, ale nesmíme zapomínat na jejich jazyk. Neměli bychom jim ukazovat, kde se to dá využít a přitom mluvit v pro ně neznámých termínech.

„A tu trpí vyučovaní matematice orientované na aplikace obdobnou nemocí jako např. rozvíjení světonázorové výchovy. Je sice mnoho teoretických studií o tomto tématu, teoretikové-didaktici dávají o překot mnoho dobrých rad, ale učitelé nemají to, co nejvíce potřebují — konkrétní materiál. Jen těžce se rodí vhodné matematicky nenáročné tematické okruhy, které mimo tradiční aplikace fyzikální a technické přinášejí nové netradiční problémové situace nebo nově zpracovávají situace staré.“

(J. Vyšín, Co udělat, aby vyučování matematice bylo užitečné?, str. 286)

Zde upozorňuje autor na důležitý fakt. Neměli bychom se zabývat pouze tím, jak má vypadat správné vysvětlování aplikovatelnosti matematiky, správným jazykem či správnou délkou tohoto procesu, ale měli bychom dbát i na praktické ukázky.

Jestliže zvláště začínající učitel se dostane k takovému materiálu a nadchne se pro tento přístup, může velmi jednoduše skončit pouze u myšlenky a do praxe ji nepřevede, protože už nebude mít konkrétní zpracování. Nemusí mít na vytvoření dostatek času nebo si nebude jist, zda vše správně pochopil. A mohli bychom nalézt i další důvody. Proto bychom měli celé téma uchopit i prakticky. Přiložit konkrétně vypracované aplikace, aby si čtenář mohl utvořit lepší představu a dostal námět zlepšení své pedagogické činnosti.

Na závěr uvádím citaci situace, která vystihuje a podtrhuje předešlé řádky.

„Na sympoziu v Bielefeldu r. 1976 vyslovil přítomný pracovník švédského školství dotaz: Žáci se často ptají po probrání (teoretického) úseku školské matematiky: k čemu to je? Co jim máme odpovědět? A tu prof. Freudenthal odpověděl: Zatleskejme švédským žákům za to, že se ptají, k čemu to je.“

(J. Vyšín, Co udělat, aby vyučování matematice bylo užitečné?, str. 288)

1.3. Zlomky

1.3.1. Příprava pojmu zlomek

Pro žáky není pojem zlomku ani při vstupu do školy ničím neznámým. Už v předškolním věku se seznamuje s pojmem třetina, polovina aj. Např. ve větě: „Dal bych si půlku jablíčka. Vlak má tři čtvrtě hodiny zpoždění ". Předškolák už ví, co je půlka či tři čtvrtiny a má o nich hmatatelnou představu.

Na 1. stupni ZŠ se žáci seznámí s pojmem zlomek již podrobněji a uceleněji. V RVP pro základní vzdělávání je pro 1. stupeň určené učivo zlomků v pátém ročníku. Konkrétně je zde v učivu Zlomky očekávaným výstupem: „žák porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným základem v oboru kladných čísel." (RVP ZV, str. 26). V jiném platném kurikulárním dokumentu, Doporučené učební osnovy předmětu matematika, je učivo zlomků zařazeno až do 2. stupně, konkrétně do šestého ročníku.

Na 2. stupeň tedy žák nepřichází bez znalosti zlomků. Chápe ho nejen jako určení dané části, ale i jako operátora, což je pro průpravu tohoto pojmu důležité. Je potřeba si tvořit představu zacházení se zlomky, aby pak nebylo např. násobení pro žáky tak nepochopitelné.

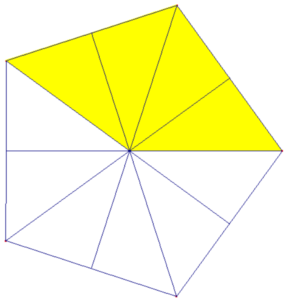
1.3.2. Modely

Učitel by měl dbát hlavně ze začátku na názornost příkladů. K této názornosti přispívají právě modely. Žáci by si je měli často kreslit do sešitů, vystřihovat si je z papíru a celkově s nimi manipulovat. Jsou vhodné pro žáky, kteří mají spíše senzomotorický styl učení, protože si mohou modely „osahat".

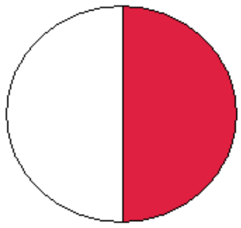
Máme čtyři základní modely pro zlomky. Na těchto modelech ukazujeme žákům operace se zlomky i jejich zakreslování či popisování obecně. Je dobré využívat všechny, protože každý má svá specifika a slabé i silné stránky. Zároveň je každému žákovi bližší jiný a tak bychom měli i na tuto skutečnost brát ohled.

Koláčový model

Žáci libovolně krájí koláč, tedy kruh. Nemusíme mít přímo kruh, ale lze jej obměnit jakýmkoliv jiným geometrickým obrazcem. Jestliže ho obměníme za obdélník, či čtverec, můžeme dostat model dělení čokolády. Tento model je velmi vhodný pro zlomky s malým číslem ve jmenovateli – poloviny, čtvrtiny, pětiny atd., hůře by se používal pro větší čísla – jedenáctiny apod.



Barevně jsou vyznačeny $\frac{4}{10}$.

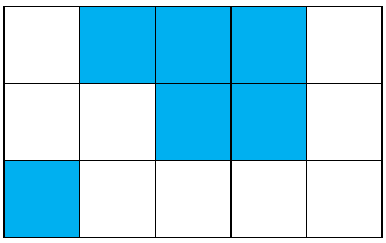


Barevně je vyznačena $\frac{1}{2}$.

Dělení čokolády

Žáci mají předem dané čtverečky, které mohou dělit. Tento model je vhodný pro násobení zlomků, jelikož lze dobře vynásobit i jmenovatele, což se hůře znázorňuje pomocí jiného, např. koláčového modelu. Aby žáci nemuseli pořád kreslit čokoládu, lze jednoduše použít čtverečkovaný papír.

Hůře se na něj zakreslují čísla, která na první pohled neukazují, jak by měla čokoláda vypadat. Např. sedminy, jelikož abychom je mohli zakreslit do čokolády, potřebujeme najít taková celá čísla *a, b*, která po násobení $a \cdot b$ dají číslo sedm.



Barevně je vyznačeno $\frac{6}{15}$.

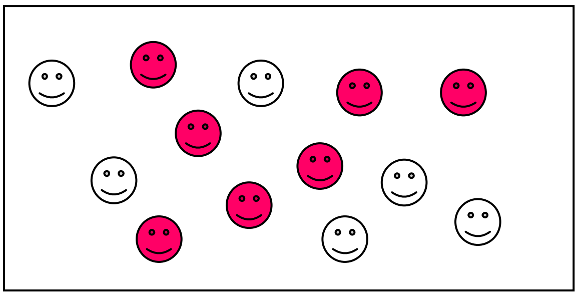
Rozdělení tyče

Je dána úsečka, kterou je možno libovolně dělit. Tento model lze velice jednoduše a rychle nakreslit. Také se dá jednoduše rozdělit. Je zde otázkou, zda učitel bude trvat na přesnosti, tedy nutnosti využít pravítka, nebo mu budou stačit „náčrtky". Jelikož zlomek má být rozdělen na stejné části, je potřeba dobře úhel pohledu zvážit.

Barevně jsou vyznačeny $\frac{3}{5}$.

Kuličkový model

Jsou dány body, které lze přehledně přemisťovat. Tyto body mohou označovat spoustu předmětů – bonbóny, kuličky, jablka, sirky, pastelky, žáky samotné atd. Výhodu tohoto modelu je možnost ho rychle zakreslit. Zároveň se s ním dobře manipuluje, protože je jednoduché rozdělit je na třetiny a potom snadno na poloviny.



Barevně je vyznačeno $\frac{7}{13}$.

1.3.3. Hudební modely

V předchozí kapitole jsme si vyjmenovali modely, které se běžně využívají ve výuce a kterými žáci zakreslují úlohy se zlomky. Můžeme se však na ně podívat i z jiné stránky a zamyslet se, zdali bychom nenašli další. Bylo by zajímavé přiblížit žákům matematiku i na jiném modelu, takovém, který znají z běžného života a tím jim ukázat tuto provázanost. Zároveň tím budeme podporovat mezipředmětové vztahy, což je trendem v moderní pedagogice.

Jelikož hledání takového modelu v jiném odvětví, než je matematika, vyžaduje velkou zběhlost a velké znalosti jiného oboru, nabízí se druhý obor z aprobace učitele, protože u něj by měl mít znalostí nejvíce. V mém případě se jedná o hudební výchovu, proto jsem se snažila najít modely právě v ní. Následující podkapitoly ukazují, jak lze uplatnit znalosti z hudby v učivu o zlomcích a jak jde hudba použít jako model pro zakreslení konkrétního zlomku.

Délka tónu

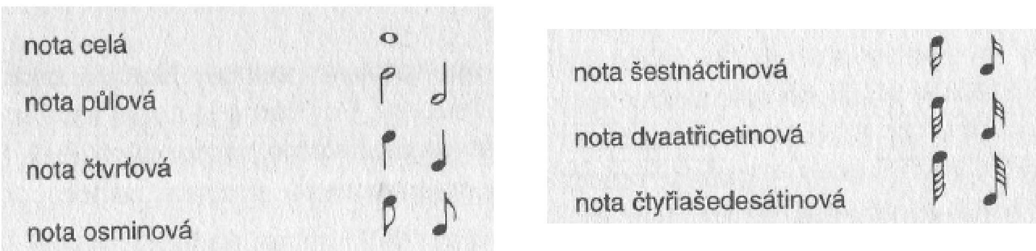
Abychom mohli ukázat, jak délka tónu s modely souvisí, nejprve musíme definovat několik pojmů.

Základní hudební pojmy

Základním hudebním pojmem je **tón**, ten vzniká pravidelným chvěním (nepravidelným chvěním vzniká hluk). Každý tón má svou výšku, barvu, délku a sílu. Pro nás je v této části zásadní právě délka tónu, ta označuje, jak dlouho tón zní.

„Tóny se zapisují pomocí not. **Délku tónu** označujeme tvarem noty, výšku tónu umístěním v notové soustavě. Barva tónu je dána zvoleným obsazením (hudebními nástroji, pěveckými hlasy), k označení síly tónu slouží zvláštní označení.“
(L. Zenkl, ABC hudební nauky, str. 15)

V hudbě užíváme těchto základních hodnot a tvarů not:



obr. 1: Základní hodnoty a tvary not

Hudební skladby členíme na krátké úseky, zvané **takty**, ty dále členíme na doby – stejně dlouhé časové úseky (Zenkl, 2007).

Délka tónu jako model

Během vypracovávání pracovního listu jsem zjistila, že i délka tónu by mohla být samostatným modelem. Neřadí se sice mezi klasické modely, ale je svým způsobem jedinečný a nelze ho zařadit přímo do žádného, výše jmenovaného.

Každou notu totiž můžeme přepsat do zlomku – např. notu půlovou lze zapsat jako jednu polovinu, tři noty osminové jako tři osminy, atd.

Jednotlivé noty za sebou nám dělí čas skladby na části. Můžeme si tento jev představit jako přímku, která označuje čas a jednotlivé úsečky na ní, které nám značí délky not. Díky tomu se tento model nejvíce podobá modelu tyče. Ale jelikož tuto tyč nelze zakreslit, protože zakreslit přesně čas nelze, není jím doslova. Navíc se zakresluje jinak než tyč, a sice notami ne úsečkou.

Tento model je zajímavý svou abstrakcí, žáci mohou již u něj pochopit dělení abstraktního pojmu, který nedokážou přesně zakreslit, ale mají znak, který toto dělení označuje. Učitel tak může žáky připravovat na proměnnou, protože stejně jako proměnná neoznačuje vždy jednu a tu stejnou věc, ani noty neoznačují přesnou délku času.

Další velkou výhodou tohoto modelu je, že může přiblížit matematiku i žákům, kteří vynikají v hudbě a myslí si, že jim matematika není k ničemu. Jestliže by takový žák byl v matematice slabší než jeho spolužáci a naopak v hudbě vynikal, při využití tohoto modelu najednou může předčit své spolužáky a ukázat jim, že i v matematice může být dobrý.

Výška tónu

Už při zavádění modelu délky not jsme si definovali pojem tón, který má svou barvu, délku, sílu a výšku. A právě výška tónu nás teď bude zajímat. „Určujeme ji přesně podle počtu kmitů tělesa za vteřinu."
(Zenkl, ABC Hudební nauky, str. 10)

Můžeme říct, že každý tón má svou výšku, můžeme ji tedy přesně určit. Stejně tak je možné určit rozdíl dvou tónů, který nazýváme intervalem. Tedy interval znamená v hudbě výškovou vzdálenost mezi dvěma tóny (Zenkl, 2007).

„Název interval se skládá vždy ze dvou slov. Jedno je číslovka, která určuje velikost intervalu přibližně, druhé je přídavné jméno, které určení intervalu upřesňuje. Pro označení intervalů používáme latinských číslovek a pro zkrácení v písmu číslic: prima (1), sekunda (2), tercie (3), kvarta (4), kvinta (5), sexta (6), septima (7), oktáva (8).“
(Zenkl, ABC Hudební nauky, str. 80)

Toto označení intervalů můžeme považovat za první slovo, číslovku, která dává název intervalu. Další slovo, přídavné jméno, nám určí přesněji výšku intervalu.

Intervaly dělíme do dvou skupin, na čisté a velké. Velké intervaly jsou sekunda, tercie, sexta a septima a čisté intervaly jsou prima, kvarta, kvinta, oktáva. Jestliže velké intervaly ještě snížíme o půltón, dostáváme intervaly malé (Zenkl, 2007). Zde je tedy rozlišení přídavných jmen, která se používají ve spojení s názvem intervalu.

Určení výšky tónu

Výšku tónu můžeme přesně vypočítat. Pro její výpočet se dá využít alikvotní řady tónů.

Alikvotní tóny

„Stěžejním předmětem zájmu hudební akustiky jsou alikvotní tóny (zvané též tóny svrchní, vyšší harmonické, parciální, částkové, zde dále jen *alikvoty*). Jsou to velmi slabé tóny, znějící spolu se svým tzv. *tónem základním.* Je-li výška základního tónu určena frekvencí f (počtem kmitů za sekundu, kmitočtem, udávaným v hertzích, Hz), jsou frekvence jeho alikvotů rovny celistvým násobkům frekvence f, tedy $2f$, $3f$, $4f$ atd. Jsou tedy vyšší než základní tón. Za běžných okolností je nevnímáme odděleně, nýbrž globálně, jako barvu (témbr) základního tónu. Jejich souhrn označujeme jako alikvotní (popř. harmonické) spektrum (zde dále jen *spektrum).*“
(Klapil, Akustika v učitelském studiu hudební výchovy, str. 96)

Schematicky bychom mohli zapsat:

První harmonická složka $f_1 = f$ [Hz] je základním tónem,

druhá harmonická složka $f_2 = 2f$ [Hz] je interval oktáva,

třetí harmonická složka $f_3 = 3f$ [Hz] je kvinta přenesená o oktávu výše,

čtvrtá harmonická složka $f_4 = 4f$ [Hz] je tón o dvě oktávy výše, atd. (Janoušek, 1979).

Také bychom mohli celou řadu zapsat do notové osnovy. Základním tónem je v tomto příkladě nota velké C.

Obr. 2: Alikvotní řada tónů.

Relativní výška

„Relativní výšky (relativní = poměrné = vztažné, matematicky vyjadřované poměrem, podílem, úměrou, zlomkem) jsou ze spektra plynoucí kmitočtové poměry, určující jednotlivé hudební intervaly: čistá oktáva 2:1 ($^{2}/_{1}$), čistá kvinta 3:2 ($^{3}/_{2}$), čistá kvarta 4:3 ($^{4}/_{3}$), velká tercie 5:4 ($^{5}/_{4}$), malá tercie 6:5 ($^{6}/_{5}$), velká sekunda 9:8 ($^{9}/_{8}$), popř. 10:9 ($^{10}/_{9}$), malá sekunda 16:15 ($^{16}/_{15}$). Jsou ve všech absolutních výškách (frekvencích) pro týž interval (ode všech tónů: c - g, des - as, d - a, ...) ve všech oktávách (např. A_2 - E_1, A_1 - E, A - e, a^1 - e^2...) stejné.“
(Klapil, Akustika v učitelském studiu hudební výchovy, str. 97)

Právě díky relativní výšce můžeme výšku tónu použít jako model při vysvětlování a aplikování násobení zlomků v hudbě. Jelikož, jak jsme výše ukázali, se dá zapsat každý interval jako poměr, tedy jako zlomek.

„Podle Weber - Fechnerova zákona (*„mění-li se fyzikální podněty působící na naše smysly řadou geometrickou, vnímáme jejich změnu v řadě aritmetické“*) je pro sčítání výsledných vjemů třeba objektivní údaje násobit. Platí to i při skládání (tj. sčítání) intervalů**,** které se matematicky provádí násobením jejich relativních výšek**,** odčítání intervalů pak jejich dělením.“
(Klapil, Akustika v učitelském studiu hudební výchovy, str. 97)

Tento princip už ukazuje, proč jej využíváme při násobení zlomků. Můžeme si jej uvést na příkladě:

Složením velké tercie (c – e) a čisté kvarty (e – a) dostáváme velkou sextu (c – a). Nyní ověřme tento postup matematicky:

$\frac{5}{4}$ (velká tercie) $\cdot \frac{4}{3}$ (čistá kvarta) $= \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ (velká sexta).

Hudební ladění

Přirozené ladění

„Přirozené laděni je založeno na osmi tónové stupnici, kterou můžeme rozložit do tří durových kvintakordů, T (tóniky), D (dominanty) a S subdominanty, tvořené čtvrtým, šestým a osmým tónem přirozeně laděné stupnice. Mezi 15. a 18. stoletím bylo navrženo mnoho různých přirozených ladění, lišících se tím, jak vytvářejí zbývající tóny chromatické stupnice“.

(Rachel W. Hall; Krešimir Josić, Matematika hudebních nástrojů, str. 41)

„Toto ladění má některé problémy. Jeden z nejkřiklavějších je poměr kmitočtů šestého a druhého stupně, který je 40 : 27, a nikoli 3 : 2. V přirozeném ladění může mít táž nota různou výšku v různých stupnicích. Například poměr výšek tónů A : G je 10 : 9 ve stupnici C-dur, ale 9 : 8 v G-dur.“

(Rachel W. Hall; Krešimir Josić, Matematika hudebních nástrojů, str. 42)

„Byly navrženy různé kompromisy včetně temperovaného ladění, které dolaďuje i tóny přirozeného ladění. Jiné řešení pro klávesové nástroje jsou dodatečné klávesy nebo použití speciálního pedálu či páky k doladění některých tónů“

(Rachel W. Hall; Krešimir Josić, Matematika hudebních nástrojů, str. 42)

Pythagorejské ladění

Pythagoras tvořil jednotlivé tóny stupnice pouze využitím kvint a oktáv. Skládal nad sebe dostatečný počet kvint a pak daný tón o určitý počet oktáv snížil, aby dostal konkrétní tón. (Rache, Josić, 2002). Tento postup si můžeme ilustrovat na příkladu.

Skládejme nejprve první kvintu (c_1 – g_1), potom další kvintu (g_1 – d_2) a tu následně snižme o oktávu (d_2 – d_1). Dostáváme interval sekundy (c_1 – d_1). Nyní si tento postup zkusme vypočítat.

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} : \frac{2}{1} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}.$$

Tedy nejprve si určíme, čemu se rovná kvinta $\left(\frac{3}{2}\right)$, potom čemu oktáva $\left(\frac{2}{1}\right)$. Jelikož nejprve zvyšujeme o kvintu, musíme je mezi sebou vynásobit a potom snižujeme o oktávu, tedy výsledek musíme vydělit. Výsledný zlomek opravdu odpovídá sekundě.

Pythagorejské koma

Jedná se o rozdíl mezi dvanácti kvintami a sedmi oktávami. Měl by to být ten samý tón, ale ani matematicky ani vypočítáním frekvencí nevyjde. Jde tu o malý rozdíl, o necelých 24 centů, tedy asi o čtvrt tón temperovaného ladění.

I tady si můžeme celý problém dokázat výpočtem:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{3^{12}}{2^{12}} = \frac{531\,441}{4\,096} \doteq 129{,}746$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{7} = \frac{2^{7}}{1} = \frac{128}{1} = 128.$$

Jelikož $129{,}746 \neq 128$, dané tóny se sobě nerovnají.

Temperované ladění

Aby se mohlo hrát i na klávesové nástroje ve všech tóninách a nemusel se na každou zvlášť přeladit nástroj, vybralo se nové – temperované ladění. Řada sedmi tónů po sobě jdoucích, tedy stupnice, se rozdělila na dvanáct stejných půltónů, každý s malou odchylkou od přirozeného či Pythagorejského ladění. Tedy každý tón trochu rozladěný. Dohromady ovšem nedochází k nepřesnostem, i když budeme hrát v jiných tóninách či skládat intervaly nad sebe.

Rozdíly jednotlivých ladění můžeme zaznamenat do tabulky. Jednotlivé stupně zaznamenáme v centech (setinách stupně temperovaného ladění).

Stupeň	Pythagorejské ladění (centů)	Temperované ladění (centů)	Přirozené ladění (centů)
I.	0	0	0
II.	204	200	204
III.	408	400	386
IV.	498	500	498
V.	702	700	702
VI.	906	900	884
VII.	1 100	1 100	1 088
VIII.	1 200	1 200	1 200

Tab. 1: Hudební ladění

Červeně jsou zaznačeny hodnoty, které jsou větší než v temperovaném ladění a modře hodnoty, které jsou menší.

Podobně můžeme vystavět tabulku poměrů. Jelikož poměry jsou různé podle typu ladění, vybereme vždy ty, které se nejvíce hodí do školské matematiky – vzhledem k potřebě je využít ve vyučování. Pro zajímavost jsou uvedeny dané intervaly i v centech, abychom si mohli představit jaké „chyby“ se při jejich využití dopouštíme.

Stupeň	Relativní výška	Centy	Stupeň	Relativní výška	Centy
čistá **prima**	$\frac{1}{1}$	0	čistá **kvinta**	$\frac{3}{2}$	701,9
malá **sekunda**	$\frac{16}{15}$	111,7	malá **sexta**	$\frac{8}{5}$	813,7
velká **sekunda**	$\frac{9}{8}$	203,9	velká **sexta**	$\frac{5}{3}$	884,3
malá **tercie**	$\frac{6}{5}$	315,6	malá **septima**	$\frac{9}{5}$	1017,6
velká **tercie**	$\frac{8}{5}$	386,3	velká **septima**	$\frac{15}{8}$	1088,3
čistá **kvarta**	$\frac{4}{3}$	498	čistá **oktáva**	$\frac{2}{1}$	1200

Tab. 2: Relativní výšky intervalů

Harmonická posloupnost

Na poměry určené jednotlivým intervalům se můžeme podívat ještě dalším způsobem: jako na posloupnost.

Mějme posloupnost $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n};$ kde $n \in \mathbb{N}$. Tuto posloupnost nazveme harmonickou.

Jestliže označíme všechny tóny z alikvotní řady čísly, kde prvnímu tónu přiřadíme jedničku, můžeme z nich harmonickou řadu sestavit. Její členy budeme tvořit poměrem základní tón ku dalšímu tónu (další harmonické složce). Tyto členy seřazené za sebou dají právě harmonickou posloupnost.

Z této posloupnosti vychází i relativní výška, jelikož přirozené ladění, ze kterého je vyvozena, vychází právě z alikvotní řady tónů. Poměr relativní výšky vytvoříme tak, že nalezneme dva tóny, které určí hledaný interval, a zjistíme, kolikáté jsou v řadě.

Např. kvinta je mezi druhým a třetím alikvotním tónem, tedy 1:3. V notách ji můžeme zapsat jako C – g. Ovšem takto máme nad sebou oktávu C – c a kvintu c – g, hudebně se tento interval nazývá duodecima. Tedy mohu zapsat, že se jedná oktávu mínus kvintu. Oktáva je v alikvotních tónech mezi prvním a druhým tónem, tedy 1:2. Nyní si výpočtem ověříme správnost.

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2}.$$

Jedná se tedy opravdu o poměr relativní výšky, který je uveden v tabulce.

Výška tónu jako model zlomků

Již jsme si pojmenovali všechny termíny, které potřebujeme pro zavedení výšky tónu jako modelu pro práci se zlomky. Na první pohled se může zdát, že je k tomu potřeba hodně teorie, a proto model může učitele odradit. Pokud se podíváme hlouběji, zjistíme, že to nebylo zbytečné, protože vše můžeme využít nejen u zlomků, ale i u dalšího učiva – dopočítat pomocí trojčlenky přesnou výšku tónu v Hz, pokud známe poměr intervalu a výšku jednoho tónu a další.

Jelikož délka tónu je pro násobení jen málo využitelná, využijeme jeho další vlastnost – výšku. Vzhledem k tomu, že při součtu intervalů se násobí jejich poměry, nabízí se velké spektrum příkladů. Dá se ověřovat, zda toto pravidlo opravdu platí a zda dokážou žáci správně určit intervaly, jak základní pro součet, tak jejich výsledný. Také se mohou ověřovat výpočtem vlastnosti intervalů – sečtením dvou intervalů, které jsou vůči sobě v převratu, je vždy oktáva. Oba tyto typy jsou využity v pracovním listě pro žáky.

Při využití tohoto modelu je potřeba zhodnotit, jak jsou na tom žáci s výukou v hudební výchově. Podle mého názoru není běžné, že by všichni žáci ZŠ uměli určit hudební intervaly a to přesně na čisté, malé a velké.

Při tvorbě příkladů je potřeba dát pozor na „nepřesnost“ poměrů, které jsou určeny k jednotlivým stupňům. Z tabulky si lze všimnout, jak moc se liší od rovnoměrného, temperovaného ladění. Proto by nás nemělo překvapit, že když sečteme některé z nich, nedostaneme přesnou hodnotu. Tedy ani interval určený výslednému tónu.

Např. Chceme ukázat, že sečtením velké sekundy (c – d) a jejího převratu, malé septimy (d – c), vznikne oktáva. Tedy:

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{5} = \frac{81}{40} = 2{,}025. \qquad 2{,}025 \neq \frac{2}{1}$$

Jak jde vidět, nebude nám vždy vycházet přesná hodnota. Máme několik možností, jak se k tomu postavit. Můžeme žákům ukazovat jen některé příklady, kde si předem ověříme, že nám vyjde správný výsledek nebo věnujeme čas vysvětlení této problematiky a naopak si můžeme společně s žáky vypočítat Pythagorejské koma. Podle mého názoru ani jedno řešení není špatné, je jen na učiteli, které se mu více líbí a které s žáky uskuteční.

Jelikož se jedná o docela rozsáhlou problematiku, nemusíme jí věnovat jen hodinu s pracovním listem, kde si prohloubíme znalosti násobení zlomků, lze jí využít i pro projekt. Např. projekt se zaměřením na antiku, kde by se probrala zvídavost antických myslitelů, pro nás nejpříhodněji pythagorejců, a jejich zájem o matematiku, hudbu či astrologii.

Žákům bychom tak mohli přiblížit toto období a naučit je aplikovat poznatky z matematiky do jiných předmětů nebo jim ukázat, jak dříve byla propojená matematika s hudbou a její poznatky nevznikaly jen tak proto, abychom se měli co učit, ale aby se tehdejší lidé dokázali vyznat ve věcech a zákonitostech kolem sebe. Toto pochopení spojitosti matematiky a reálného světa by klidně mohlo být pro dnešní žáky (nebo i studenty vysoké školy) nejvyšším cílem v učení se matematice.

Poukázali jsme na několik nedostatků využití tohoto modelu, proto i zde bychom si měli uvědomit, že se nejedná a plnohodnotný model a nemá cenu ho bezmyšlenkovitě zavádět do výuky. Může však pro nás být návodem či inspirací pro jeho využití či vymyšlení svého vlastního.

1.3.4. Porovnávání a operace se zlomky

Porovnávání zlomků

Porovnávání zlomků je složitější než porovnávání přirozených čísel, je proto potřeba se dobře zamyslet, jakou formou jej předávat žákům.

„Bohužel, velmi často se porovnávání zlomků redukuje na pravidla

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc \qquad (a, b, c, d \ > 0).$$

nebo na přepis zlomku na desetinné číslo a porovnávání desetinných zlomků. Oba dva postupy trpí formalizmem, pokud k tomu nedojdeme přes konkrétní modely."
(Hejný, Teória vyučovania matematiky, str. 71)

Autor zde zřejmě nemá na mysli jen modely, které jsme vyjmenovali výše, ale celkově modely jako úlohy, které jsou z každodenního života žáků. A tím ukázat, jak je toto učivo užitečné a zároveň budovat představu žáků o důležitosti matematiky pro jejich život. Tyto situace většinou můžeme dále zakreslit pomocí některého z modelů.

Sčítání zlomků

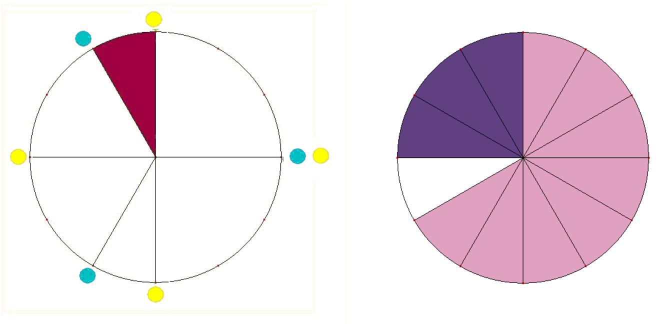
Nadále je potřeba příklady řešit i na modelech, protože když už k nim žáci našli praktické využití v porovnávání zlomků, je zbytečné toho nevyužít. Ukažme si, jak bude vypadat příklad $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=?$ na uvedených modelech.

Klasické modely

1. **Koláčový model**

„Koláč rozdělíme na třetiny (vyznačeno modrými body) a čtvrtiny (vyznačeno žlutými body) tak, že jeden řez dělení bude společný. Ze šesti dílů, na které se koláč rozpadl, vezmeme nejmenší (červený). Na takovéto kousky rozkrájíme koláč. Kousky budou dvanáctiny a do jedné čtvrtiny se vejdou tři (fialové), do dvou třetin osm (růžové). Dohromady tedy $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=11$ kousků $=\frac{11}{12}$."

(Hejný, Teória vyučovania matematiky, str. 76)



Obr. 3: Koláčový model pro sčítání zlomků

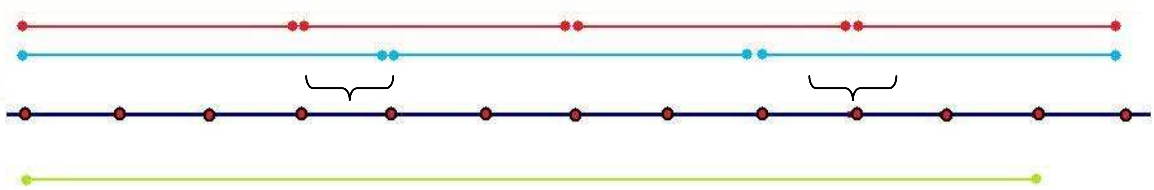
2. **Tyč**

„Tyč rozdělíme nejprve na čtvrtiny (vyznačeno červenou barvou), potom na třetiny (vyznačeno modrou barvou). Nejmenší dílek, který tyto body vytvoří, naneseme po celé tyči. Zjistíme, že se vejdou 12-krát a že $\frac{2}{3}=8$ dílků a $\frac{1}{4}=3$ dílky.

Tedy $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=11$ kousků $=\frac{11}{12}$."

(Hejný, Teória vyučovania matematiky, str. 76)

Výsledek je vyznačen poslední úsečkou zelené barvy.



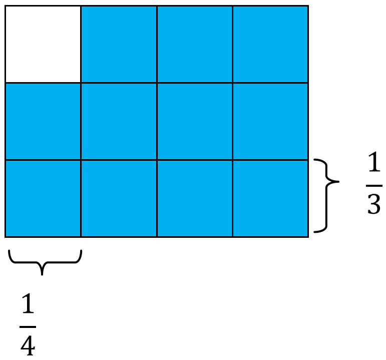
Obr. 4: Tyčový model pro sčítání zlomků

Dělení čokolády

„Vezmeme speciální čokoládu: na šířku bude mít 3 čtverečky, na výšku 4, dohromady tedy 12 čtverečků. Čokoláda má 4 sloupky a 3 řádky, proto jeden sloupek (= 3 čtverečky) je čtvrtina a jeden řádek (= 4 čtverečky) je třetina celé čokolády.

Takže $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = 8■ + 3■ = 11\ ■ = \frac{11}{12}$.“

(Hejný, Teória vyučovania matematiky, str. 77)

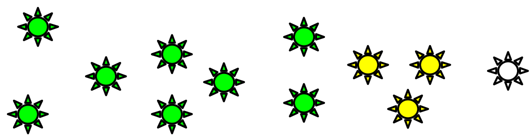


Obr. 5: Model dělení čokolády pro sčítání zlomků.

3. Kuličkový model

U kuličkového modelu můžeme součet zakreslit podobně jako u dělení čokolády. Nejprve si musíme vypočítat nejmenší společný násobek, jinak nemůžeme rozhodnout, kolik kuliček máme zakreslit. Potom barevně vyznačíme čtvrtinu kuliček (žlutá barva) a třetinu kuliček (zelená barva) a sečteme, kolik jich dohromady máme zakroužkovaných. To je náš hledaný výsledek.

Tedy $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = 8 + 3 = 11 = \frac{11}{12}$.

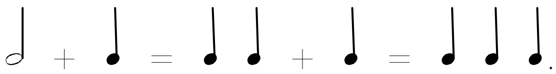


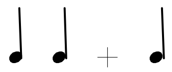
Hudební model

Délka tónu

U délky tónu můžeme počítat pouze se zlomky, které máme k dispozici, dají se tedy odvodit z délek not (čtvrťová – jedna čtvrtina, osminová – jedna osmina, atd.). Nemůžeme proto vypočítat jeho pomocí zadaný příklad, stejná situace by mohla nastat např. u koláčového modelu při zobrazení jedenáctin. Dá se ale ukázat, kolik se rovná součet poloviny a čtvrtiny. Ukažme, jak bude vypadat příklad $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = ?$ na modelu délek tónu.

Nejprve si zakreslíme zlomek příslušnou notou, dále si noty převedeme jen do jedné hodnoty – tedy půlovou notu jako dvě čtvrťové. Teď můžeme sečíst počet dob a převést je zase do zlomku.



Tedy $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$  $= \frac{3}{4}$.

Výhodou tohoto modelu je názornost nejmenšího společného násobku, protože je to vždy násobek čísla dvě. Zároveň mohou žáci přijít sami na nutnost převést zlomky, neboli noty, na stejnou hodnotu mohou žáci přijít sami.

Podle vyobrazení příkladu na modelech lze vidět, že ne každý model se hodí na ztvárnění každého příkladu součtu dvou zlomků. Na koláčovém modelu bychom zřejmě špatně vynášely třeba sedminy a hudební model můžeme využívat jen pro některé zlomky. I přesto je dobré na nich ukázat alespoň příklady, které lze vyobrazit, protože tím si žáci mohou rozšířit svou konkrétní představu.

Násobení zlomků

I násobení zlomků můžeme znázornit žákům na modelech. Tím jim ukážeme, že i násobení jde znázornit a není jen v jednom předpisu, který se musí naučit. Celkově všechno znázorňování může pomoci žákům tím, že si poučku nakreslí, ne jen zapamatují.

Zobrazení na modelech

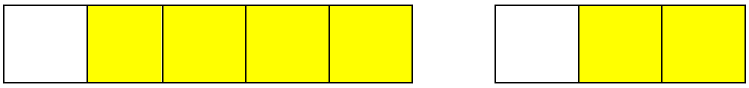
1. **Dělení tyče a čokolády**

Ukažme, jak bude vypadat příklad $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = ?$ na uvedených modelech.

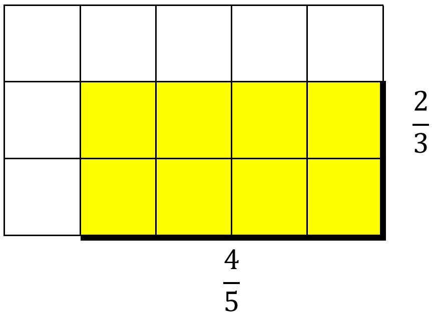
„Obrázek je spojením tyčového a čokoládového modelu – celkově jde o čokoládový model, ale každá strana obdélníka se chápe jako tyčový model. Podobně, jako při sčítání, také tu se součin modeluje podle jmenovatelů."

(Hejný, Teória vyučovania matematiky, str. 78)

Tento postup si můžeme znázornit na následujících obrázcích. Nejprve znázorníme dvě tyče a v nich vyznačeny $\frac{4}{5}$ a $\frac{2}{3}$. Na obrázku jsou tyto tyče jinak dlouhé, kdybychom brali stejně dlouhé tyče, jako u předešlých zobrazení tyčového modelu, nehrálo by to žádnou roli – jen by nám vyšel obdélník (čokoláda) s jinými rozměry, v tomto případě s vyššími sloupci.

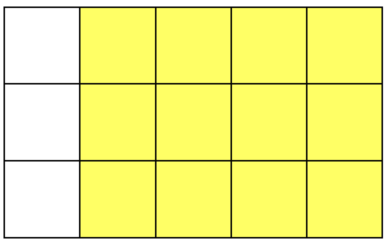


Z nich uděláme obdélník tak, že jednu stranu tvoří tyč, označující pětiny a druhou stranu tyč označující třetiny. Vznikne nám čokoláda o rozměrech 5×3 čtverečky. V ní vyznačím žlutě 4×2 čtverečky. Tyto čísla jsme nevybrali náhodně, 4 – protože máme 4 pětiny a 2 – protože máme dvě pětiny.

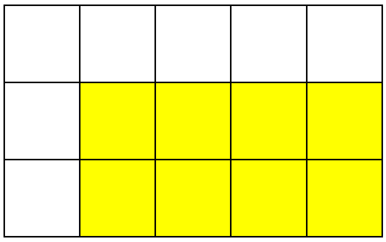


Na čokoládový model můžeme jít i jiným způsobem. Nejprve vytvoříme čokoládu 5×3 čtverečky. Poté v ní vyznačíme část 4×3 (jako znázornění zlomku $\frac{4}{5}$). Z něj pak vybereme 2 řádky a to je znázornění $\frac{2}{3}$. Tedy budeme příklad znázorňovat podobným způsobem, jako u následujícího modelu.
(Hejný, 1989)

I tento postup si zobrazíme postupně. Nejprve vytvoříme čokoládu 5×3 čtverečky a v ní vyznačíme část, představující zlomek $\frac{4}{5}$.



Z nově vzniklé čokolády, která je tvořená světle žlutou barvou, poté vybereme dvě třetiny. Díky tomu dostáváme stejnou část jako v předchozím způsobu řešení.

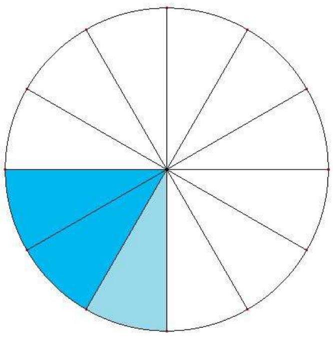


Tedy nejprve jsme znázornili zlomek $\frac{4}{5}$ a z něj potom zlomek $\frac{2}{3}$.

2. Koláčový, tyčový a kuličkový model

Jelikož pětina by se špatně zakreslovala do koláčového modelu, ukážeme tento model na příkladu, který se bude snadněji zakreslovat. Mějme proto příklad $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = ?$.

„Operaci $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ chápeme jako nalezení $\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{4}$. Z koláče vybereme nejprve $\frac{1}{4}$ (modrá část) a z ní potom $\frac{2}{3}$ (tmavě modrá část). Vidíme, že výsledek je $\frac{2}{12}$. Podobně to můžeme znázornit na tyčovém či kuličkovém modelu.“
(Hejný, Teória vyučovania matematiky, str. 79)



Z obrázku můžeme poznat, proč interpretujeme násobení zlomků $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{4}$ jako $\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{4}$.

Zlomek bereme jako určitou část z celku. Proto z celého koláče, tedy z celku, vyznačíme určenou část – v tomto případě $\frac{1}{4}$, potom se pro nás stává jen tato $\frac{1}{4}$ novým celkem a v něm vyznačíme druhou část, zlomek $\frac{2}{3}$.

3. Hudební model – délka tónu

Na tomto modelu bychom si mohli ukázat pouze odvození notových délek. Jestliže vynásobím celou notu jednou polovinou, dostanu půlovou notu. Když i tu vynásobím jednou polovinou, dostávám čtvrťovou notu (jednu čtvrtinu) atd. Díky tomu si můžeme ukázat, jak vznikala terminologie délek not a že zde bylo použito právě násobení zlomků.

Toto odvození se dá zakreslit, ale jiné příklady bychom zakreslovali těžce – např. bychom ani nemohli zakreslit příklad $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8}$, protože nemáme v běžném hudebním označení notu, kterou bychom tímto násobením dostali.

Proto se tento model pro násobení nehodí. Ale to by učitele nemělo odradit k jeho využití při porovnávání a sčítání, protože na něm může ukázat, jak se i hudba dá zapojit do matematiky a tedy provázanost matematiky s reálným světem.

Model délky not nemůžeme brát jako soběstačný, stejně jako výše uvedené – kuličkový, koláčový, dělení čokolády a tyče. To ovšem neznamená, že ho proto nebudeme brát v potaz. Možná právě proto, že není klasickým modelem, může žáky zaujmout, protože ho budou používat jen občas. Dá se i didakticky využít, např. žáci mohou sami posuzovat, zda-li se dá vyřešit konkrétní příklad i přes model délek not.

I když jsme ukázali, že délky not není možné využít jako model pro násobení zlomků, můžeme najít v hudbě model jiný. V třetím pracovním listu je ukázáno, jak se dá využít násobení zlomků v hudební akustice, tedy při zkoumání hudebních intervalů.

Tento model nelze vnímat graficky jako u předešlých příkladů. Hudební interval totiž značí poměr a ten se zakreslit nedá, aniž bychom se dopustili zkreslení. Můžeme si jej zaznačit jako část úsečky, ale tím poměr není – kdybychom totiž úsečky skládali nad sebe, evokovalo by to sčítání daných poměrů, ty se však mezi sebou násobí (tento princip jsme již vysvětlovali ve výšce tónu). Dá se však zahrát či zazpívat, a tak si jej můžeme prakticky představit.

1.3.5. Shrnutí

Našim záměrem bylo podívat se na zlomky netradičním způsobem. Rozhodli jsme se pro zakreslení porovnávání, sčítání a násobení zlomků v modelech. Proto je nutné se nejdříve podívat na klasické modely a potom na to, jestli je můžeme nějak obměnit, nahradit či k nim přidat další. Zvolili jsme poslední případ, najít další modely.

Chceme najít takový nový model, který by neplynul přímo z matematiky, ale z jiného oboru, abychom žákům mohli přiblížit aplikovatelnost poznatků z matematiky na reálný svět. Lehce se hledá tento nový model v druhém předmětu aprobace učitele, protože právě v něm má učitel největší znalosti. Mohlo by se stát, že kdybychom vybrali model z předmětu, kde není odborník, model by měl nějaké úskalí, kterého by si nevšimnul a v praxi by nemusel fungovat. Proto bychom měli hledat tam, kde jsme opravdu experti.

Našli jsme hudební model, který vystihuje operace sčítání, násobení a relaci porovnávání zlomků a můžeme na něm žákům ukázat úlohy prakticky. Nejprve jsme popsali model Délka tónu, ten lze využít ve sčítání a porovnávání zlomků a pro žáky je lehce pochopitelný. Další model Výška tónu nám poslouží v násobení zlomků, je ale těžší pro pochopení z hudební stránky a pro žáky sedmých tříd velmi obtížný, hodí se ovšem pro projekty ve vyučování, kde by bylo více času na jeho zavedení, nebo nám může posloužit jen jako ilustrace, že lze najít opravdu všechny matematické operace.

1.3.6. Tvorba hudebního modelu

Abychom mohli vymyslet jiný model, než některý z klasických, měli bychom se s nimi nejprve dobře seznámit, potom již můžeme vymyslet vlastní. Mohlo by se to zdát na první pohled jednoduché, ale jestliže se do toho pustíme, můžeme přijít na to, že to byl opravdu jen první pohled.

Když jsem vymýšlela já hudební modely, ze začátku mi to šlo jednoduše. Vymyslela jsem model délky not a s ním jsem si vystačila jak při porovnávání, tak při sčítání zlomků. Tvorba příkladů mi trvala jen několik týdnů. Potýkala jsem se hlavně s terminologií a s principem, jak ji co nejvíce zjednodušit, aby pro žáky byla srozumitelná a zároveň aby zachovala správnost termínů. Ovšem při vymýšlení příkladů pro násobení mi tento model nestačil. Proto jsem se rozhodla vymyslet ještě jeden.

Napadl mě model výšky tónu. Ale zde jsem měla menší znalosti z hudby a abych si byla jistá tím, že principy opravdu fungují tak, jak si myslím, musela jsem si prostudovat ještě hudební akustiku. Až při jejím pochopení a nabytí jistoty v ní jsem mohla vymyslet příklady tak, aby nezkreslovaly hudební poznatky, a zároveň je vysvětlit v metodickém listě případným dalším pedagogům. Tento proces trval již přes měsíc, ale na jeho konci jsem měla radost z toho, že se na něj dalo přijít a motivovalo mě to k další práci.

A právě tato motivace a radost může být pro pedagoga klíčová. Kdyby učil jen podle učebnic a sbírek, mohlo by se mu stát, že by upadl do stereotypu a práce by ho postupně mohla přestat bavit. Vymyslet si vlastní model může být lékem proti tomuto stereotypu, protože učitele nutí, aby nad daným tématem přemýšlel a to jiným způsobem, než byl dosud zvyklý. Zároveň ho může vést k prohloubení si znalostí jak v matematice, tak v jiné oblasti, ze které by čerpal.

Proto nám může takovýto způsob myšlení pomoci stát se lepšími učiteli, protože nás bude nejen motivovat a dávat nám radost z práce, ale zároveň nás povede k dalšímu vzdělávání a k hledání nových způsobů při přemýšlení nad vyučovanou látkou a k jejímu předávání žákům.

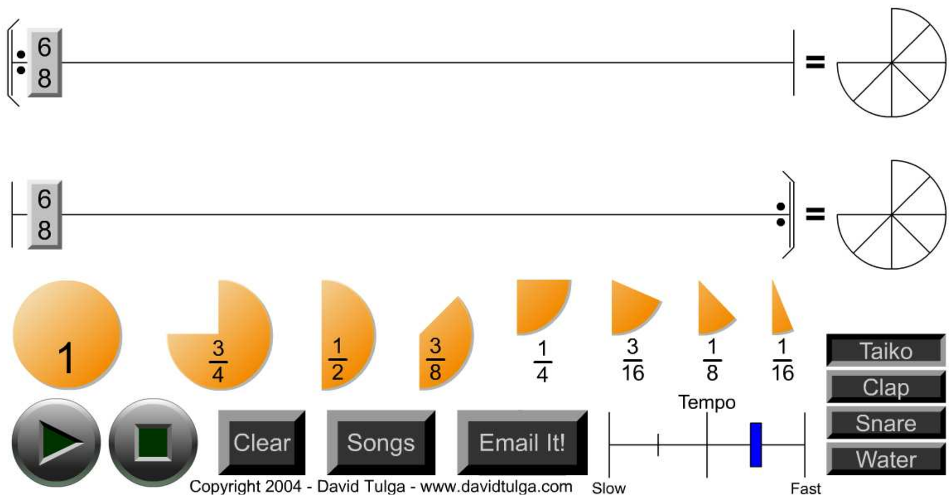
1.3.7. Zajímavé webové stránky

Propojení hudby a matematiky modelem délky tónu a výšky tónu můžeme najít i na internetu. Pro ilustraci uvádím tři webové stránky, které se tématu věnují.

První se věnuje modelu délky not a máme na ní možnost si vyzkoušet dávat dohromady části koláče a potom si nechat přehrát, co nám tím vznikne. Druhé stránky se věnují modelu výšky tónu a máme na nich možnost skládat různě velké tyče, kde každá tyč reprezentuje určitý tón, tedy nám dají dohromady melodickou skladbu. Na třetích stránkách, které se také věnují modelu délky not, si můžeme nechat vykreslit prvních pět tónů alikvotní řady.

Stránky, které využívají modelu délky tónu

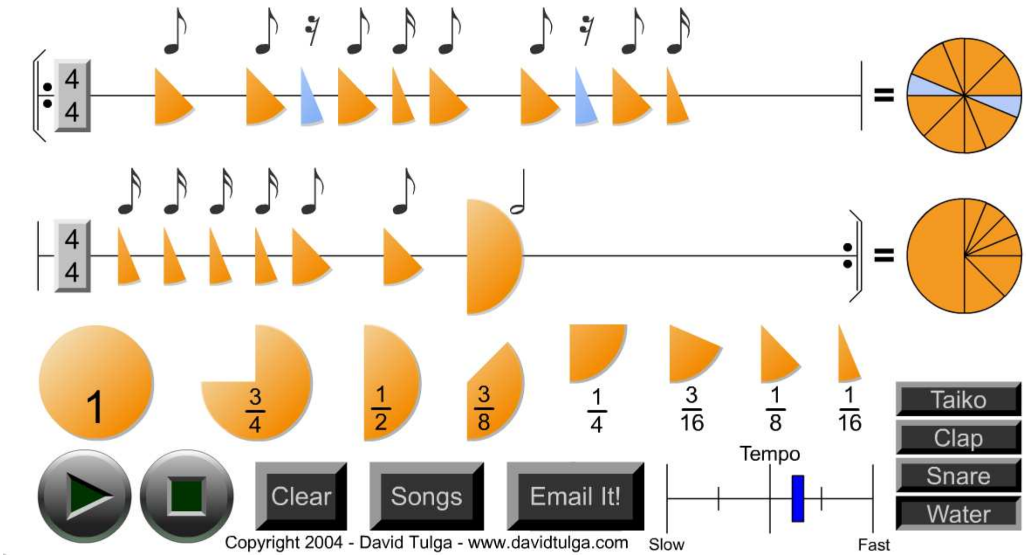
Dostupné z WWW: < http://www.philtulga.com/pie.html>.



Obr. 6: Model délky tónu na internetu

Na těchto stránkách můžeme doplňovat dva takty, jeden na vrchním řádku a druhý na spodním, částmi koláče tak, aby daly dohromady správný počet dob. V první ukázce šest osmin, protože se jedná o šestiosminový takt.

Na dalším obrázku je rytmicky zapsaná ukázka ze znělky seriálu Flintstones. Můžeme u ní měnit tempo a taky různé zvuky, které nám budou skladbu přehrávat.

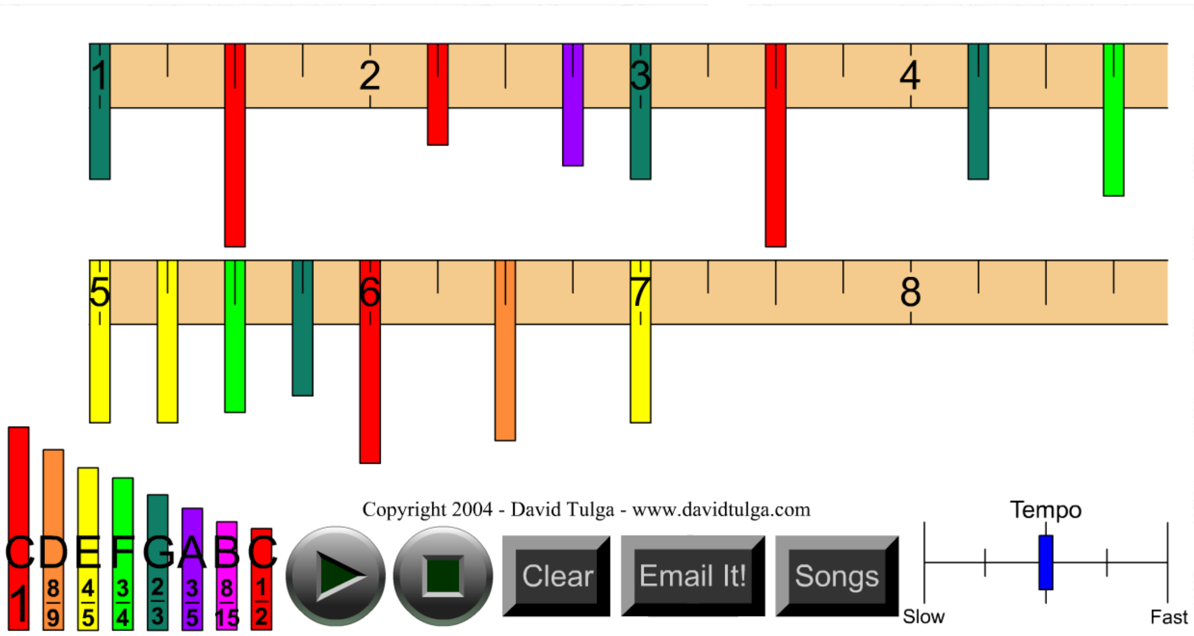


Obr. 7: Model délky tónu na internetu – vyplněný

Stránky, které využívají modelu výšky tónu

Dostupné z WWW: < http://www.philtulga.com/pie.html>.

Na těchto stránkách si můžeme zahrát libovolnou melodii. Jednotlivé tóny jsou označeny zlomkem, který vyjadřuje interval mezi základním a daným tónem. Např. nota D je reprezentována zlomkem $\frac{8}{9}$, který značí velkou sekundu, zároveň noty C –D dohromady dávají opravdu interval velké sekundy. Na ukázce vidíme znovu znělku ze seriálu Flintstones, tentokrát zahranou melodicky.

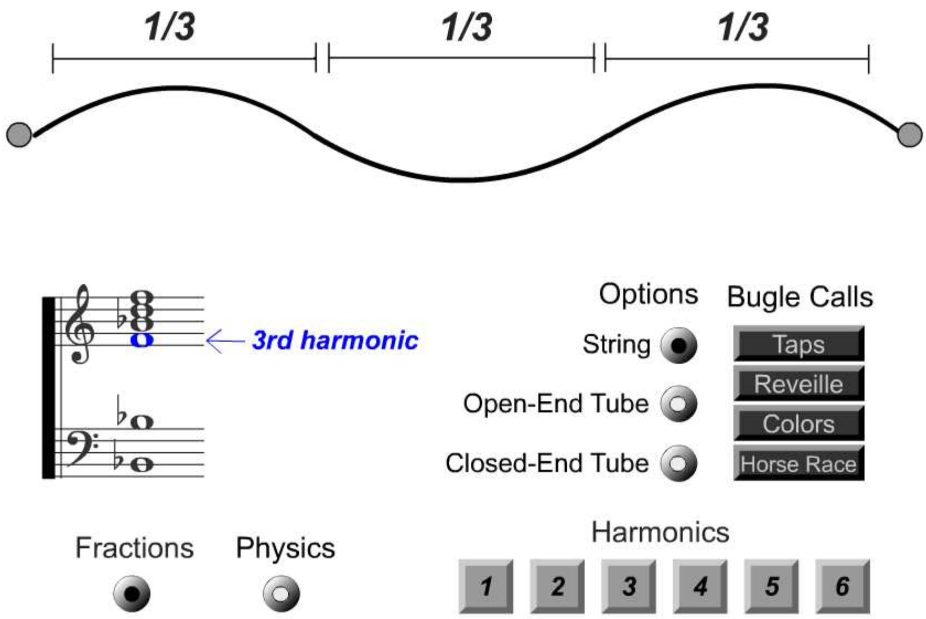


Obr. 8: Model výšky tónu na internetu

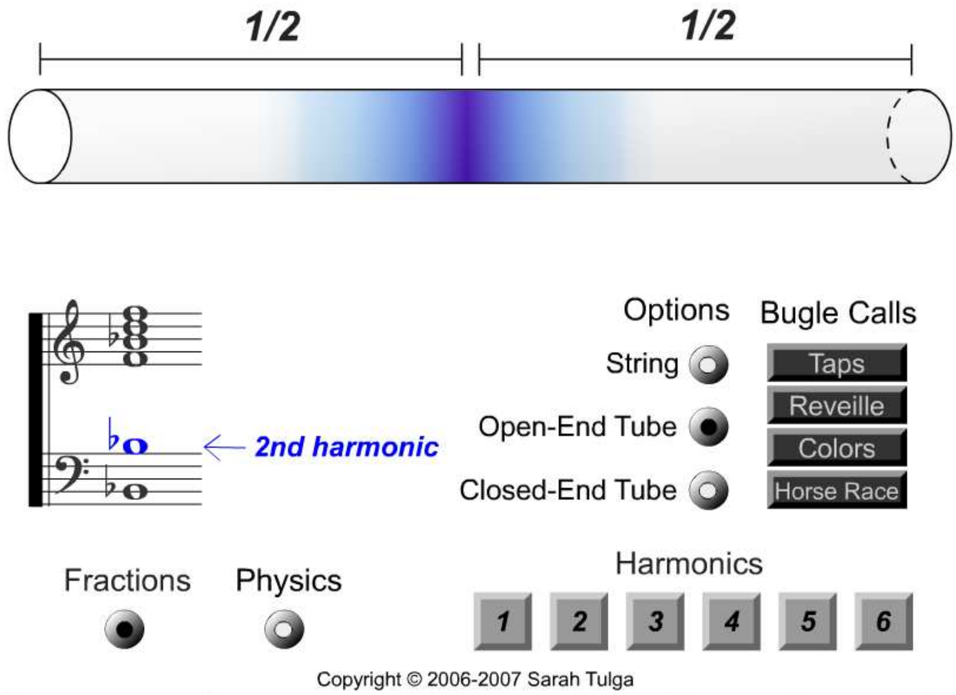
Stránky, které využívají modelu výšky tónu

Dostupné z WWW: < http://www.philtulga.com/harmonics.html>.

Tyto stránky umožňují nechat si zahrát prvních pět tónů z alikvotní řady. Všechny tyto tóny si můžeme nechat vykreslit jak sinusoidou, tak i barevným válcem. Také si zde můžeme nechat zahrát čtyři skladby a vidět, jak se mění zakreslení jednotlivých alikvotních tónů.



Obr. 9: Model výšky tónu – alikvotní řada zakreslená sinusoidou



Obr. 10: Model výšky tónu – alikvotní řada zakreslená barevným válcem

2. Empirická část

2.1. Pracovní listy

Jako ukázka modelů nám poslouží vytvořené tři pracovní listy, jeden na každou práci se zlomky: porovnávání zlomků, sčítání a násobení. Odčítání, resp. dělení, je vynecháno, jelikož jsou to inverzní operace ke sčítání, resp. k násobení. Na těchto pracovních listech je demonstrováno, že tyto modely lze prakticky využít a je zde naznačen postup práce s nimi. Samozřejmě si učitel může listy upravit podle toho, jak mu budou vyhovovat lépe.

Ke všem těmto listům je vytvořen i tzv. „Metodický list pro učitele“, v němž je vysvětlen doporučený postup pro práci s nimi. Jestliže se tedy učitel rozhodne pro práci s některým z nich, podle metodického listu by měl být schopen vysvětlit vše žákům a vést výuku.

Jeden z těchto listů, konkrétně pro sčítání, byl vyzkoušen ve dvou třídách, kde jsem učila na praxi, tedy jsem žáky už znala. Další jsem vyplnila s žáky ve třídě, kam jsem přišla pouze na tuto hodinu a kde byla přítomna i jejich paní učitelka. Třetí jsem poslala s metodickým listem do školy, kde jej vyplnil s žáky pan učitel, sama jsem nebyla přítomna.

Pro zpětnou vazbu z těchto hodin jsem vytvořila krátký dotazník, který jsem zaslala paní učitelce i panu učiteli e-mailem, a oni mi ho po realizovaných hodinách zaslali vyplněný. Proto i následující stránky se postupně věnují těmto tematům – každému pracovnímu listu zvlášť a následně i zpětné vazbě, získané od obou učitelů a také mojí.

2.1.1. Tvorba pracovních listů

Abychom mohli hudební modely využít v praxi, musíme k nim vymyslet příklady. Mohlo by se to zdát na první pohled jednoduché, ale spíše opak je pravdou. Během vymýšlení pracovních listů se pedagog musí potýkat s řadou otázek. Jaká bude obtížnost hudebních pojmů, jaká z matematického hlediska? Jak žáky provést tematikou tak, aby se postupně učili zacházet s modely? Na všechny by si měl odpovědět během tvorby pracovních listů, protože všechny jsou pro něj klíčové.

Neměli bychom opomíjet ani technické hledisko tvorby pracovních listů, protože k zapsání jednotlivých cvičení je zapotřebí i znalost hudebních software, aby mohly být příklady dobře čitelné a nejen napsané vlastní rukou.

2.2. Porovnávání zlomků v hudbě

Tento pracovní list využívá modelu délky not. Žákům stačí jen základní vědomosti z hudby – jak se nota jmenuje, jak se zapisuje a jak jdou noty po sobě. Jestliže si tyto znalosti zopakují s učitelem na začátku hodiny, neměl by pro ně být problém pracovní list vyřešit. Je dobré při zavádění tohoto modelu začít u porovnávání, protože je jednodušší si představit právě spojení délek not a matematiky.

Zároveň žáci, kteří jsou v hudbě dobří a např. hrají na hudební nástroj, by měli rychle na tuto spojitost přijít, jelikož jim nebude dělat problém představit si noty a pracovat s nimi. Dokonce by si u toho mohli lépe představit, k čemu je matematika dobrá. Vždyť to, co se v hudební výchově někdy těžko učili, jak jdou délky not za sebou, jim najednou může připadat zcela logické, protože to je uspořádané podle velikosti zlomků s danými jmenovateli (půlová nota, čtvrťová, osminová – jako jedna polovina, čtvrtina, osmina).

Ještě se můžeme podívat na jeden aspekt. Názvy zlomků jsou pojmenovány podle čísla ve jmenovateli (pět – pětina, šestnáct – šestnáctina, …), všechny až na polovinu (dvě – polovina). Může to být z důvodu, že člověk půlil věci už mnohem dříve, než znal polovinu (Bednaříková 2005). A právě v notách jde o podobný princip – můžeme se podívat na název délky noty podle toho, kolik jich můžeme zapsat do čtyřdobého taktu, tedy čtyři – čtvrťová nota, osm – osminová, dvě – půlová, ne dvojková.

Tento pracovní list není náročný z hudebního hlediska pro učitele ani pro žáky. Stačí si osvojit názvy not a pak jen doplňovat do zadání. Měl by být pochopitelný i pro žáky, kteří se setkají s délkou not teprve v hodině matematiky.

2.2.1. Metodický list pro učitele – porovnávání zlomků v hudbě

Pracovní list je rozdělen do dvou úloh. V první je zadání dané ve zlomcích a úkolem žáků je porovnat je pomocí přepisu na noty příslušné délky. V druhé úloze jde o protipříklady – tedy zadání je zapsané v notách a žáci mají zjistit, kde je více dob a poté noty přepsat do zlomků.

Obě cvičení jsou založená na znalosti délek not u žáků. Proto je dobré nejprve s nimi zopakovat, jaké máme délky not a jak se dělí (viz příloha). Zároveň je dobré na začátku žáky motivačně uvést do hodiny. „Matematiku nemusíme vnímat jen skrze učebnici, ale máme kolem sebe mnoho příkladů. Už jsme si ukazovali čokoládu, koláče, laťky a mnoho dalšího. Dnes se budeme zabývat hudbou.“

Každé cvičení by se dalo vyřešit buď pouze matematicky, nebo pouze hudebně. Je proto dobré trvat u žáků na tomto propojování obou dvou rovin. Příklady jsou koncipované způsobem, který by měl postupně žáky uvést do objevování vztahu hudby a matematiky. Tedy od jednoduchých příkladů po složitější.

Popis jednotlivých cvičení a práce s nimi

Ve cvičení 1. a žáci po přepsání do not porovnávají jen dvě noty vedle sebe, což by po zopakování a zakreslení na tabuli by to mělo být jednoduché. Zde by měli pochopit princip cvičení a prohloubit si představu, že zlomek s vyšším číslem ve jmenovateli je menší.

Ve cvičení 1. b by si žáci měli osvojit poznatek, že dvě noty jednoho řádu se rovnají jedné notě řádu o jedno vyššího (tedy dvě čtvrťové noty se jednají jedné půlové notě). Tento vztah potom budou nadále využívat, proto by ho měli všichni pochopit. Zároveň se na něm dá ukázat, že je potřeba hledat společného jmenovatele – jestliže chci zjistit, které noty dají více dob, tak si je přepíšu na noty se stejnou hodnotou. Přesně jako ve zlomcích.

Cvičení 1. c aplikuje poznatek z předchozího cvičení. Žáci by si měli přepsat zlomky nejprve do not a potom si nějak zaznačit buď doby, nebo si je rovnou přepsat na stejné hodnoty. Je možné, že slabším žákům bude trvat déle, než tento princip pochopí, proto by se mu měla věnovat dostatečná pozornost. Cvičení 1. d má stejný způsob řešení, jako předchozí cvičení, jen jsou v něm zlomky, které jsou větší než jedna. Cvičení 1. e už je procvičovací.

Druhé cvičení je postavené na stejném principu. Nejprve si žáci osvojí zapisování délek not do zlomku, následné porovnávání a potom postupují ke složitějším příkladům. Hodnoty, které jsou na půl a čtvrt doby jsou zapsané záměrně dohromady, aby příklady byly pro žáky srozumitelnější.

Cvičení s hvězdičkou už je složitější, protože v něm žáci porovnávají dva notové zápisy, které nemusí být zapsané jednou notovou délkou. Tady by si už měli určitě přepsat noty do stejných délek, aby je následně mohli porovnat.

Možná práce s pracovním listem

Pracovní list se dá využít k zopakování a prohloubení učiva porovnávání zlomků. Žákům je v něm představený další model zlomků – délky not. Dá se využít k samostatné i skupinové práci. U samostatné práce bych doporučila prvních pár příkladů řešit společně, aby žáci pochopili princip cvičení.

Po vypracování listu by měla následovat reflexe, kde by se s žáky mohlo formou rozhovoru shrnout, jak fungují zlomky v hudbě. Jestli si u toho něco uvědomili nebo pochopili lépe danou látku. Zároveň je tu prostor, aby si žáci zkusili vymyslet svůj obor, kde by se se zlomky mohli potkat.

2.2.2. Pracovní list - zadání

1. Znázorněte zlomky pomocí délek not a poté zaznačte, kde jich je více a který zlomek je větší.

a) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$; $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$; $\frac{12}{16}$ $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{4}$ $\frac{2}{2}$.

c) $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{16}$ $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{8}$ $\frac{7}{16}$.

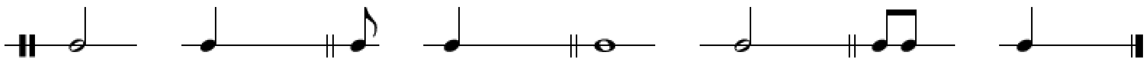
d) $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{16}$; $\frac{7}{4}$ $\frac{4}{2}$.

e) $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{16}$; $\frac{4}{4}$ $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{8}$ $\frac{2}{4}$;

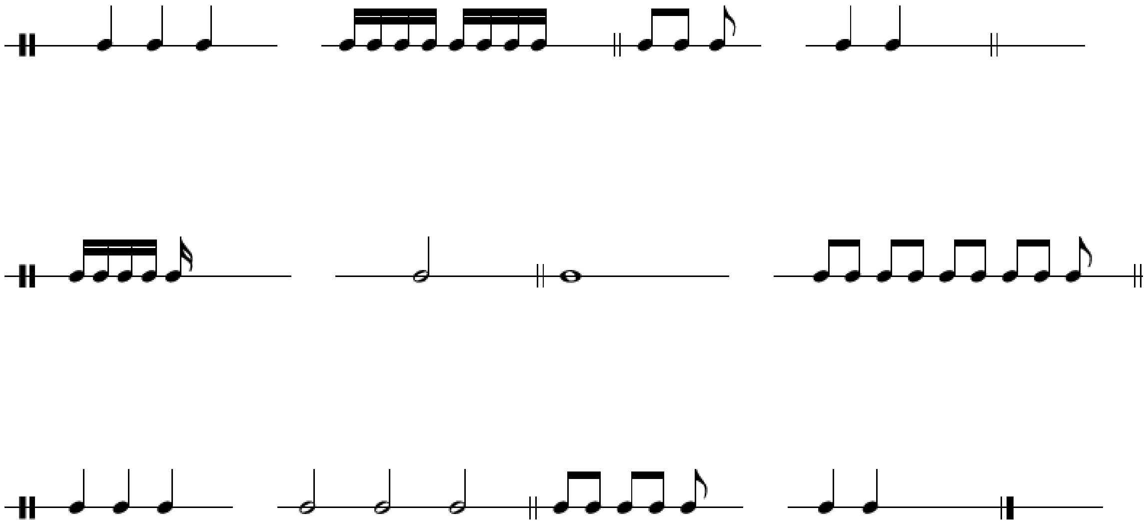
$\frac{17}{16}$ $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{4}$ $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$ $\frac{9}{16}$.

2. Určete, kde je více dob, a zaznačte výsledek pomocí zlomků.

a)



b)

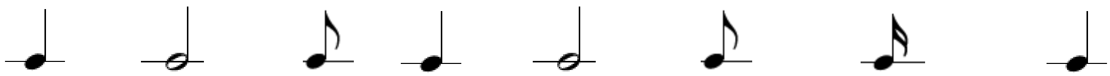


c)

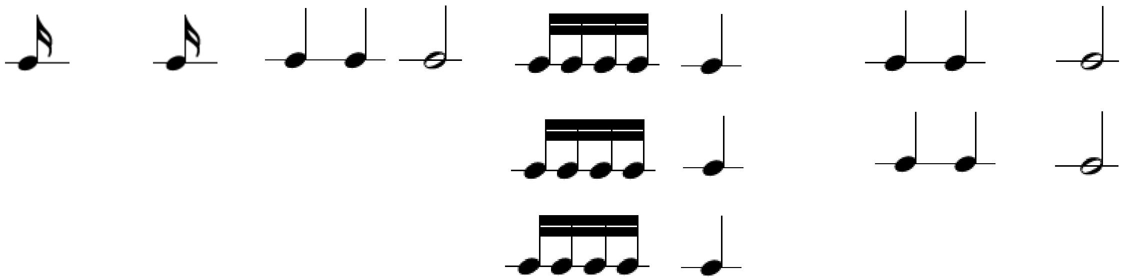
Pracovní list – vyřešený

1. Znázorněte zlomky pomocí délek not a poté zaznačte, kde jich je více a který zlomek je větší.

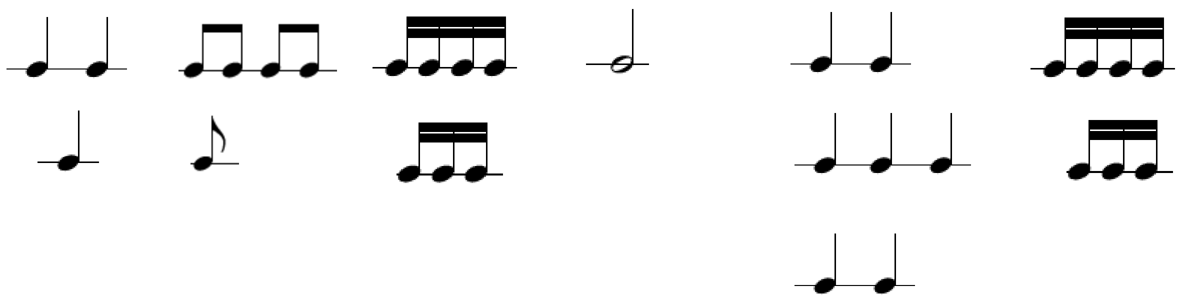
a) $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$; $\frac{1}{16} < \frac{1}{4}$.



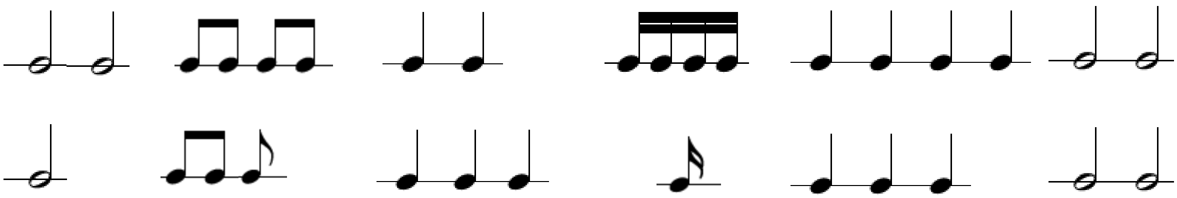
b) $\frac{1}{16} = \frac{1}{16}$; $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$; $\frac{4}{4} = \frac{2}{2}$.



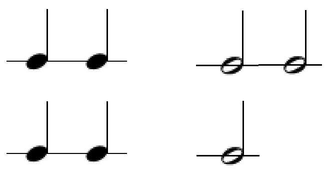
c) $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$; $\frac{7}{16} < \frac{1}{2}$; $\frac{7}{8} > \frac{7}{16}$.

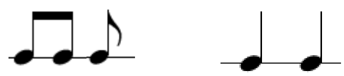


d) $\frac{3}{2} > \frac{7}{8}$; $\frac{5}{4} > \frac{5}{16}$; $\frac{7}{4} < \frac{4}{2}$.

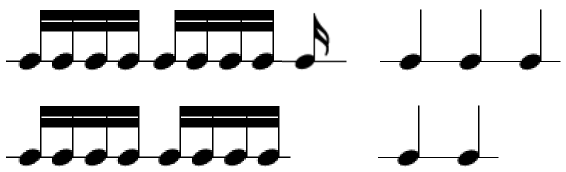


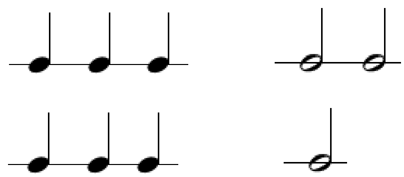
e) $\frac{2}{8} > \frac{3}{16}$; $\frac{4}{4} < \frac{3}{2}$; $\frac{3}{8} < \frac{2}{4}$,



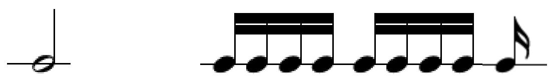


$\frac{17}{16} < \frac{5}{4}$; $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$;



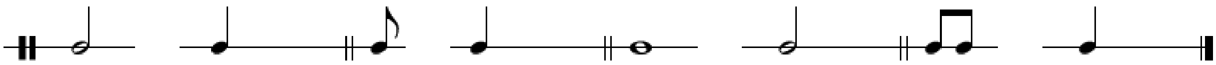


$\frac{1}{2} < \frac{9}{16}$.



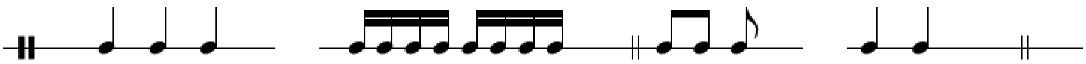
2. Určete, kde je více dob, a zaznačte výsledek pomocí zlomků.

a)

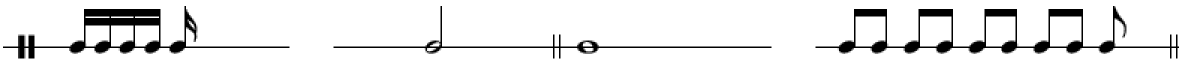


$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$; $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{1} > \frac{1}{2}$; $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

b)



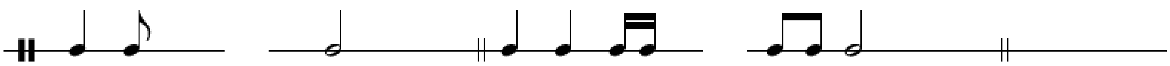
$\frac{3}{4} > \frac{8}{16}$; $\frac{3}{8} < \frac{2}{4}$;



$\frac{5}{16} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{1} < \frac{9}{8}$

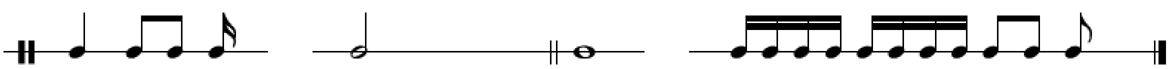
$\frac{3}{4} < \frac{3}{2}$; $\frac{5}{8} > \frac{2}{4}$.

c)



$\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$; $\frac{5}{8} < \frac{6}{8}$;

$\frac{4}{8} + \frac{1}{16} > \frac{4}{8}$; $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$;



$\frac{1}{2} + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}$. $\frac{1}{1} > \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$.

2.3. Sčítání zlomků v hudbě

Podobně, jako u porovnávání zlomků, je i v tomto pracovním listě využit model délek not. Je výhodné v tomto modelu pokračovat právě po zavedení v porovnávání zlomků. Takto pro žáky už nebude něčím novým a neznámým. Měli by také být zběhlí v délkách not.

Zároveň je možné podobných principů, které jsou ukázány v pracovním listě, využívat např. během rozcvičovacích cvičení na začátku vyučování. Velmi jednoduše se žákům zadá pár taktů na ověření, že je v něm správný počet dob (první a druhé cvičení) a žáci si během pár minut zopakují sčítání zlomků na jednodušších příkladech.

Výhodou cvičení je právě tato jednoduchost. Dají se zadat jen kmenové zlomky, na kterých se rychle ukáže, jak dalece jsou žáci s pochopením učiva. Ti, kteří už mají zaběhnutý algoritmus, jej budou mít rychle, zatímco žáci, kteří ještě potřebují procvičovat, si to budou mít možnost procvičit právě na základních příkladech.

Tento model ani při sčítání neklade na učitele velkou náročnost hudebních pojmů, proto by s ním mohl pracovat i učitel, který nemá hudební znalosti. Stačí si osvojit názvy délek not.

Také se dá využít tento pracovní list jako odvození odčítání, jelikož v posledním příkladu je „dopočítávání“ dob do jedné. Neboli od jedné žáci odečtou zadaný počet dob. Zároveň ho lze vyplnit bez znalosti odčítání a jen dopsat počet dob, který je třeba.

2.3.1. Metodický list pro učitele – sčítání zlomků v hudbě

1. Motivační úvod

   Zlomky se nenacházejí jen v učebnicích matematiky. Mají i spoustu využití ve světě kolem nás – už jsme si říkali třeba o pizze, dělení čokolády, … žáci by sami mohli doplnit.

   Dneska si ukážeme, jak najít zlomky v hudbě a jak na nich můžeme uplatnit to, co jsme se už učili.

2. Hudební základ

   Na tabuli napíšeme noty – celou, půlovou, čtvrťovou, osminovou, šestnáctinovou a dvaatřicetinovou. S žáky dáme dohromady, jaký zlomek bude patřit k jaké notě – pokud jsou zběhlí, mohou diktovat učiteli, pokud ne, učitel jim to jen vysvětlí.

   Je potřeba zdůraznit, že dvě osminové (či jiné noty s praporkem) můžeme napsat společně a „chlívečkem“ je spojit.

3. První příklad – na něm si vysvětlíme, co je úkolem žáků a jak převádět noty do zlomků.
   Úkolem žáků je:
      a. správně zapsat noty podle zlomků
      b. spočítat, jestli se každý takt rovná, po sečtení daných zlomků, jedné
      c. zakroužkovat ty, které se nerovnají
4. Druhý příklad – už by žáci měli sami doplňovat zlomky a zase stejným způsobem spočítat, zda se dané takty rovnají jedné a zakroužkovat ty, co se nerovnají.
5. Třetí příklad – dá se pojmout stejně jako předešlé, nebo na něm procvičit odčítání. Vždy dané doby odečíst od jedné a doplnit správný počet dob – pozor, je nutné zapisovat i hudebně správně, nejen doplnit číslo.

Další možná práce s délkou not

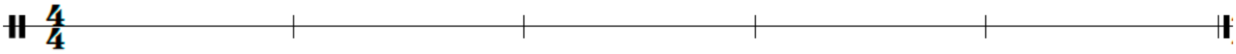
Jak byste zapsali notu s tečkou – zadat nejprve konkrétně: půlová nota s tečkou (je to vlastně půlová a čtvrťová dohromady), jak čtvrťovou s tečkou, …

Zadávat příklady v jiných taktech – třípůlový (3/2), tříčtvrťový (3/4), šestiosminový (6/8), … Dané takty opravdu existují a používají se v hudbě. Noty se potom nesčítají do jedné, ale právě do hodnoty taktu. Tedy do 3/2, …

Soutěž po týmech – na tabuli učitel zapíše jeden nebo dva takty a úkolem skupin je spočítat co nejrychleji, které mají správný počet dob a které ne. Postupně zadávat jiné takty, noty s tečkou.

2.3.2. Pracovní list - zadání

1. Zapište noty na notvou linku podle zlomků. Ověřte, zda je v každém taktu správný počet dob.



$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8};\quad 1\quad ;\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\ ;\ \frac{1}{2}\frac{1}{16}\frac{1}{16}\frac{1}{32}\frac{1}{32}.$$

2. Zapište dané délky not do zlomků. Ověřte, že je v každém taktu správný počet dob.

3. Doplňte chybějící doby v taktech - výpočtem si ověřte správnost.

Pracovní list - vyřešený

1. Zapište noty na notovou linku podle zlomků. Ověřte výpočtem, zda je v každém taktu správný počet dob.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ 1 $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{32}$.

a) b) c) d) e)

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}$.

b) 1

c) $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{16}{16}$.

d) $\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{17}{16}$.

e) $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{22}{32}$.

2. Zapište dané délky not do zlomků. Ověřte, že je v každém taktu správný počet dob.

1 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{16}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}$ $\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$

a) b) c) d) e)

a) 1

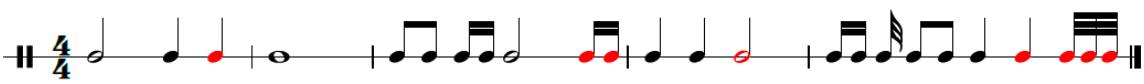
b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1.$

c) $\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{16}=\frac{2\cdot2+1\cdot4+1\cdot8+2}{16}=\frac{18}{16}.$

d) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{4+4}{8}=\frac{8}{8}=1.$

e) $\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}=\frac{4+1+1+4+2+2}{16}=\frac{14}{16}.$

3. Doplňte chybějící doby v taktech - výpočtem si ověřte správnost.



a) b) c) d) e)

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

b) 1

c) $\frac{2}{8}+\frac{2}{16}+\frac{1}{2}=\frac{4+2+8}{16}=\frac{14}{16}$. $\frac{14}{16}+\frac{2}{16}=1.$

d) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$. $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$

e) $\frac{2}{16}+\frac{1}{32}+\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4+1+8+8}{32}=\frac{21}{32}$. $\frac{21}{32}+\frac{11}{32}=1.$ $\left(\frac{11}{32}=\frac{8}{32}+\frac{3}{32}=\frac{1}{4}+\frac{3}{32}\right)$

2.4. Násobení zlomků v hudbě

Tento pracovní list je nejtěžší. Již nevyužívá modelu délek not, ale výšky – konkrétně hudební intervaly. Klade větší nároky jak na žáky, tak na učitele, jelikož je potřeba, aby se žáci i učitel vyznal v hudebních intervalech. Proto je vhodnější buď do škol s rozšířenou hudební výchovou, nebo jako součást projektu – např. o Pythagorovi, o goniometrických funkcích nebo hudebního projektu.

Na druhou stranu může být inspirací pro učitele. Jestliže by s žáky pracoval s předešlými listy, mohli by se ho zeptat, jestli jde udělat podobný i pro násobení. Tu se nabízí buď odvození názvů délek not (jestliže půlovou notu vynásobím polovinou, vznikne čtvrťová nota, atd.) Nebo právě ukázat jen náznak z pracovního listu pro násobení.

První a druhé cvičení jsou méně náročné na hudební znalosti. Tady učiteli i žákům postačí pochopit tabulku intervalů a pak jen dosazovat. Ovšem díky tomu jsou žáci ochuzeni o možnost objevovat. Tuto možnost dostanou právě až pomocí větších hudebních znalostí.

Třetí cvičení je nejtěžší a klade už nároky na znalost hudby a zároveň se zde už je více objevování. Ale dá se použít na běžných školách, jestliže s žáky budeme procvičovat (spíše v rámci hudební výchovy) hudební intervaly. Stačí si vypěstovat představu s klaviaturou nebo pomocí notové osnovy zjistit, o jaký interval se jedná, popř. jak se dá zapsat interval notami (např. velkou tercii umět zapsat jako c – e).

Podobné příklady, jaké jsou uvedeny v pracovním listě, se dají vytvořit i pro dělení zlomků. Stačí je místo sčítání intervalů dělit.

2.4.1. Metodický list pro učitele – násobení zlomků v hudbě

Tento pracovní list je vhodnější pro projekty (kvůli časové náročnosti), ale je možno ho využít i na ZŠ s rozšířenou výukou hudby. Jinak žáci asi nebudou zběhlí v hudebních intervalech, pak je pro ně pracovní list méně srozumitelný.

Možný průběh výuky

Nejprve je potřeba se žáky zopakovat, jaké máme hudební intervaly (prima, sekunda, tercie, kvarta, kvinta, sexta, septima a oktáva). Potom jak se tyto intervaly pojmenovávají – čistá prima, malá sekunda, velká sekunda, malá tercie, velká tercie, čistá kvarta, čistá kvinta, malá sexta, velká sexta, malá septima, velká septima a čistá oktáva.

Využitím poznatků z hudební akustiky můžeme každému z těchto intervalů určit poměr (pro nás bude sloužit jako zlomek). Dále lze využít pravidla z fyziky (Weber - Fechnerova zákona[1]), který lze aplikovat na pravidlo: jestliže dva intervaly spolu sečteme, jim přiřazené poměry mezi sebou vynásobíme, popř. jestliže je mezi sebou odečteme, poměry mezi sebou vydělíme.

Všechny intervaly jsou zapsané v přiložené tabulce (na konci textu). Je vhodné i tuto tabulku nakopírovat žákům nebo ji nějak viditelně vyvěsit či zapsat, aby byla viditelná po celou dobu práce s pracovním listem.

Tyto poměry nejsou jednoznačné (problém s hudebním laděním[2]). Nemusí nám tedy vždy vyjít přesný výsledek. Je nutné s tím počítat a i s ohledem na tento fakt se připravit na výuku. Učitel může využít dvou strategií – buď o této nepřesnosti rovnou žáky informovat a třeba si i nějakou spočítat, nebo žákům zadávat jen takové příklady, kdy k nepřesnostem nedojde.

[1] „Mění-li se fyzikální podněty působící na naše smysly řadou geometrickou, vnímáme jejich změnu v řadě aritmetické“

[2] Máme tři základní typy ladění:

1. **Pythagorejské ladění** – vychází pouze z využití kvint a oktáv. Problém nastává při 12 kvintě a 7 oktáva, kdy by měl nastat stejný tón, ale nenastane, jelikož dané poměry jsou nepřesné. Tehdy nastane tzv. *Pythagorejské koma*. (viz.: konec textu)
2. **Přirozené ladění** – dělí stupnici (řadu sedmi po sobě jdoucích tónů) podle výstavby akordů (3 současně znějících tercií). Toto ladění má problém v přechodu z různých tónin (D dur, G dur Fis dur, …) tehdy dochází k nepřesnostem.
3. **Temperované ladění** – je tvořeno ústupkem mezi Pythagorejským a přirozeným laděním. Dělí stupnici do přesných 12 půltónů. Kdybychom vytvořili poměry intervalů podle něj, vyšlo by nejpřesněji. Ovšem nejedná se o „hezké“ zlomky a ve školské matematice by se s nimi těžko počítalo. Proto jsme zvolili tento přístup – máme tabulku „hezkých“ poměrů, které ovšem jsou někdy nepřesné.

Tabulka hodnot je tvořena z poměrů, které byly pro školní praxi nejvhodnější – tedy s čísly, která byly nejmenší. V literatuře se dají dohledat i jiné poměry, pro náš pracovní list však postačí vypsané.

Popis jednotlivých cvičení a práce s nimi

Prvním cvičením si jen žáci zjistí, jak se s hudebními intervaly pracuje, protože se pouze dopočítávají zlomky do čísla 2. Neustále žáky odkazujeme na tabulku, aby si všimli, že vše potřebné je v ní zapsáno.

Také **druhé cvičení** je spíše seznamovací. Žáci zde násobí zlomky a výsledkem už není vždy dva. Nejprve je to jen jiný zlomek. V dalších už je nutné správně vypočítat obě strany rovnosti. Tedy obě strany se mají rovnat jednomu číslu (výslednému intervalu). Přičemž i tady se trochu stupňuje matematická obtížnost, jelikož nejprve se jen pravá strana násobí číslem 2 (oktáva) a potom už zlomek zlomkem.

Třetí cvičení je složitější. Je zde potřeba umět určit interval mezi dvěma tóny (u jiných než čistých intervalů i určit, zda se jedná o velký či malý). Po tomto určení už probíhá výpočet analogicky s předchozími cvičeními. I tady je poslední příklad nejtěžší, protože si žáci musí uvědomit, že už mají c_2 a ne c_1, tedy je nutno přičíst oktávu. Stupnice C dur je zadaná proto, aby žáci jednodušeji mohli srovnávat názvy tónů mezi sebou.

Vzhledem k tomu, že se jedná o hudební modely, je dobré žákům umožnit i zvukovou stránku příkladů. Je možné každý interval zahrát na klavír (popř. zazpívat či zahrát na jiný nástroj). Pro ilustraci jsou u každého cvičení vložené ukázky, spustí se aktivací hypertextového odkazu.

Možnosti další práce

Výpočtem příslušných zlomků lze odhalit, jaký interval je nóna (oktáva a sekunda), decima (oktáva a tercie) a undecima (oktáva a kvarta), které jsou rozšířením základních intervalů.

Jednoduše se dá zavést i **dělení** – kdy pouze intervaly od sebe odečítáme.

Tabulka hudebních stupňů a relativních výšek

Stupeň	Relativní výška	Stupeň	Relativní výška
čistá **prima**	$\frac{1}{1}$	čistá **kvinta**	$\frac{3}{2}$
malá **sekunda**	$\frac{16}{15}$	malá **sexta**	$\frac{8}{5}$
velká **sekunda**	$\frac{9}{8}$	velká **sexta**	$\frac{5}{3}$
malá **tercie**	$\frac{6}{5}$	malá **septima**	$\frac{9}{5}$
velká **tercie**	$\frac{5}{4}$	velká **septima**	$\frac{15}{8}$
čistá **kvarta**	$\frac{4}{3}$	čistá **oktáva**	$\frac{2}{1}$

Pro lepší představu ukážeme intervaly na klaviatuře a zapsané v notové osnově.

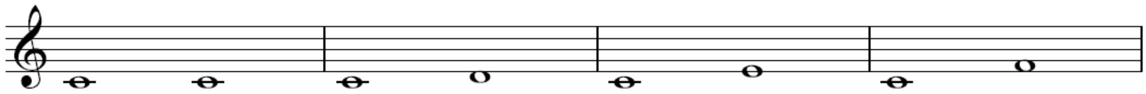
1) Klaviatura

c_1 d_1 e_1 f_1 g_1 a_1 h_1 c_2 d_2 e_2 ...

Čistá prima: c_1-c_1; velká sekunda: c_1-d_1; velká tercie: c_1-e_1; čistá kvarta: c_1-f_1; čistá kvinta: c_1-g_1; velká sexta: c_1-a_1; velká septima: c_1-h_1; čistá oktáva: c_1-c_2. Kdybychom chtěli vytvořit malé intervaly, snížili bychom vrchní tón intervalu. Např. malá tercie: c_1-es_1.

Každý interval má vždy stejný počet celých tónů a půl tónů. Kdy celý tón spolu dávají dvě bílé klapky a půl tón spolu dávají bílá a černa klapka. Jedinou výjimkou tvoří bílé klapky, mezi nimiž není černá, i tyto spolu tvoří půl tón.

2) **Notová osnova**

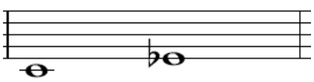


čistá prima velká sekunda velká tercie čistá kvarta

čistá kvinta velká sexta velká septima čistá oktáva

Názvy not u intervalů jsou stejné jako u klaviatury (např. čistá kvarta c_1-f_1). Kdybychom chtěli vytvořit malé intervaly, postupovali bychom shodně jako u předešlého příkladu, snížili bychom vrchní tón intervalu.

Např. z velké tercie c_1-e_1 bychom udělali malou tercii c_1-es_1 a zaznačili:



Pythagorejské koma

Jedná se o rozdíl mezi dvanácti kvintami a sedmi oktávami. Měl by to být ten samý tón, ale ani matematicky ani vypočítáním frekvencí nevyjde. Jde tu o malý rozdíl, o necelých 24 centů, tedy asi o čtvrt tón temperovaného ladění.

I tady si můžeme celý problém dokázat výpočtem:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{3^{12}}{2^{12}} = \frac{531\,441}{4\,096} \doteq 129{,}746$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{7} = \frac{2^{7}}{1} = \frac{128}{1} = 128.$$

Jelikož 129,746 ≠ 128, dané tóny se sobě nerovnají.

2.4.2. Pracovní list – zadání

1. Ověřte výpočtem, že sloučením základního intervalu a jeho převratu vznikne oktáva.

- čistá kvarta + čistá kvinta
- velká sexta + malá tercie
- malá sexta + velká tercie

2. Zapište hudební intervaly zlomkem a výpočtem ověřte, že platí rovnost.

- velká tercie + čistá kvarta = velká sexta

- velká sexta + malá sexta = čistá oktáva + čistá kvarta

- velká septima + malá tercie = čistá oktáva + velká sekunda

- čistá kvinta + velká sexta = velká tercie + čistá oktáva

3. Nejprve zapište, jaký interval vznikne sečtením daných intervalů, a pak správnost ověřte pomocí násobení zlomků.

Intervaly zapisujete v C dur se základním tónem c_1.

- velká tercie + čistá kvarta
- malá tercie + čistá kvinta
- velká sekunda + velká sexta
- velká septima + malá sexta

Pracovní list – vyřešený

1. Ověřte výpočtem, že sloučením základního intervalu a jeho převratu vznikne oktáva.

- čistá kvarta + čistá kvinta
- velká sexta + malá tercie
- malá sexta + velká tercie

$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$ $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} = 2$ $\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{4} = 2$

2. Zapište hudební intervaly zlomkem a výpočtem ověřte, že platí rovnost.

- velká tercie + čistá kvarta = velká sexta

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

- velká sexta + malá sexta = čistá oktáva + čistá kvarta

$\frac{5}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{3}$; $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

- velká septima + malá tercie = čistá oktáva + velká sekunda

$\frac{15}{8} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{4}$; $\frac{2}{1} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$.

- čistá kvinta + velká sexta = velká tercie + čistá oktáva

$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{2}$; $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{5}{2}$.

3. Nejprve zapište, jaký interval vznikne sečtením daných intervalů, a pak správnost ověřte pomocí násobení zlomků.

Intervaly zapisujete v C dur se základním tónem c_1.

- velká tercie + čistá kvarta

$c_1 - e_1$, $e_1 - a_1$. $c_1 - a_1$ je velká sexta.

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

- velká sekunda + velká sexta

$c_1 - d_1$, $d_1 - h_1$. $c_1 - h_1$ je velká septima.

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{8}$$

- malá tercie + čistá kvinta

$c_1 - es_1$, $es_1 - hes_1$. $c_1 - hes_1$ je malá septima.

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{5}$$

- velká septima + malá sexta

$c_1 - h_1$, $h_1 - g_2$. $c_1 - g_2$ je oktáva + kvinta.

$\frac{15}{8} \cdot \frac{8}{5} = 3$; $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

2.5. Práce žáků

Vzhledem k tomu, že pracovní listy byly mnou vymyšleny, ověřovala jsem u žáků, že je lze aplikovat. Vypracovaly je čtyři třídy, kde každá se trochu lišila.

Abychom mohli ukázat, jak žáci vypracovali pracovní list, je potřeba si nejprve charakterizovat třídy, které je počítali. Ve třídě číslo jedna a dvě jsem zadávala pracovní list sama, ve třídě číslo tři jsem jej zadávala, ale po celou dobu výuky se mnou byla i jejich paní učitelka a ve třídě číslo čtyři list zadával jen pan učitel, kterému jsem já poslala materiály. Rozebereme si nejprve každou třídu zvlášť.

2.5.1. Porovnání tříd

U každé třídy je uvedena i tabulka správnosti vypracování. Jsou zde shrnuta jen celkové data. Rozebrání každého listu jednotlivě je uvedeno v přílohách.

Třída číslo jedna

V této třídě jsem vedla celou výuku sčítání zlomků a na závěr jsem s nimi vypracovala pracovní list. Třída byla šikovná již během výuky a zvláště dva žáci vynikali mezi ostatními. Byla jsem ve výuce sama, bez pomoci jiného pana učitele. Hudební pojmy jsme zopakovali na začátku hodiny. Někteří žáci se velmi dobře orientovali v názvech délek not, pro většinu to bylo opakování již probraného učiva a pro několik zcela nové. Na průběh hodiny to však nemělo velký vliv.

Výuku jsem poté měla ještě v druhé třídě na stejné škole, za podobných podmínek (lišily se pouze pozdějším zařazením v rozvrhu žáků), tato podobná třída je nazvaná „třída číslo dvě“.

V následující tabulce udávám, jak je práce žáků vyhodnocena. Řádek hodnocení listů udává, jak celkově pracovní list dopadl. I když měl žák částečně špatně jeden příklad, mohlo se stát, že celkově jsem pracovní list vyhodnotila jako správně vypracovaný.

Pracovní list vypracovalo celkem 18 žáků.

	Správně		Špatně		Nedokončeno	
1. cvičení	13	72%	0	0%	5	28%
2. cvičení	10	56%	1	6%	7	39%
3. cvičení	7	39%	0	0%	11	61%
Hodnocení listu	10	56%	1	6%	7	39%

Tab. 3: Hodnocení třídy číslo jedna.

Z tabulky vyplývá, že většina žáků vypracovala správně pracovní list. Jen jeden žák jej vypracoval špatně (tedy 6%) a více jak třetina jej nedokončila.

Výsledky této třídy je možné shrnout kladně, protože si žáci uměli poradit a vyřešit ho. Fakt, že ho velká část nedokončila, může mít mnoho důvodů. Ty jsou více rozvedeny ve třídě číslo dvě, protože tam byl tento problém markantnější.

Třída číslo dvě

Tato třída měla stejné podmínky jako třída číslo jedna, co se týče úrovně v matematice i hudební výchově. Celkově však tato třída již při běžné výuce byla slabší než předchozí.

Pracovní list vypracovalo celkem 15 žáků.

	Správně		Špatně		Nedokončeno	
1. cvičení	10	67%	0	0%	5	33%
2. cvičení	3	20%	4	27%	8	53%
3. cvičení	2	13%	3	20%	10	67%
Hodnocení listu	3	20%	4	27%	8	53%

Tab. 4: Hodnocení třídy číslo dvě.

Můžeme si všimnout, že i přes velmi podobné podmínky, dopadla tato třída velmi odlišně. Více jak polovina žáků pracovní list vůbec nedokončila a zároveň bylo více žáků, kteří jej vypracovali špatně než těch, kteří jej vypracovali správně.

Na přesnou analýzu, proč se tak stalo, by bylo potřeba se do této třídy vrátit a využít nějakou z diagnostických metod. Je však možné alespoň navrhnout důvody, které to způsobily.

Tyto důvody máme možnost rozdělit do tří skupin – důvody ovlivněny učitelem, žáky nebo vyučovacím procesem.

Mezi důvody ovlivněny učitelem, je možné zařadit špatnou motivaci hodiny, žákům se tedy nemuselo chtít list vypracovat. Nebo žáci vůbec nepochopili využití modelu not, a proto nevěděli, jak cvičení vypracovat. Dále jim nemuselo být jasné zadání cvičení, a tedy ani nevěděli, co mají dělat. Také mohla být špatně zvolena metoda – konkrétně samostatná práce, a žáky proto list zaujal třeba jen na chvíli.

Jako důvod ovlivněn žáky můžeme uvést jejich pocit, že vypracovávat list je zbytečné, dále schválně nevypracovat list učiteli, který je zde stejně jen na praxi, pocit, že list jim k ničemu není, a proto není potřeba jej vypracovávat, nebo se žáci mohli rozhodnout, že než vyplnit cvičení špatně, raději je nebudou vypracovávat vůbec.

Důvodem ovlivněným vyučovacím procesem může být událost, která se stala někdy během vyučování a žáky rozladila, proto se jim nechtělo vůbec pracovat a tato hodina by dopadla stejně, ať by se dělo cokoliv.

Podle mého názoru ani jeden z těchto důvodu není ten pravý. Během výuky jsem si nevšimla velkého nezájmu od žáků, procházela jsem třídou a žáci se na mě mohli obrátit s dotazy (jak byli zvyklí i v minulých hodinách) a také jsem si nevšimla nějakého celkového nezájmu, který by pramenil z výjimečné události dne. Proto bych se přiklonila ke kombinaci několika důvodů jak ze strany mé jako učitelky, tak ze strany žáků.

Myslím si, že velkou roli hrál fakt, že jsem na škole byla jako praktikantka, protože žáci mě vnímali jinak než svého učitele a mohlo se stát, že jim připadalo zbytečné list vypracovávat. Vzhledem k tomu, že škola je často navštěvovaná studenty vysoké školy, kteří tam mají praxi nebo jen něco zkouší, žáci již nemusí projevit zájem o nové metody, za kterou se dá model zlomků považovat.

Třída číslo tři

Do této třídy jsem přišla jen na jednu vyučovací hodinu, zkusit si s žáky pracovní list. Celou dobu výuky se mnou byla jejich paní učitelka, která byla nápomocna mně i žákům a spolu jsme procházeli během výuky třídou a odpovídaly na dotazy. V matematice teprve třetí hodinu probírali sčítání zlomků a v hudební výchově se věnovali délce tónu jen okrajově.

Pracovní list vypracovalo celkem 24 žáků.

	Správně		Špatně		Nedokončeno	
1. cvičení	23	96%	0	0%	1	4%
2. cvičení	14	58%	6	25%	4	17%
3. cvičení	12	50%	4	17%	8	33%
Hodnocení listu	13	54%	7	29%	4	17%

Tab. 5: Hodnocení třídy číslo tři.

Z tabulky jde vidět, že většina žáků neměla problém s vypracováním pracovního listu. U této třídy je necelá třetina těch, kteří list vypracovali špatně a jen necelá pětina těch, kteří jej nedokončili. Což je rozdíl oproti prvním dvěma třídám, kde vždy dost žáků nedokončilo pracovní list.

Zajímavé je, že u této třídy všichni žáci, kromě jednoho, měli správně první cvičení. Je pravda, že jsem tolerovala více chyb v algoritmu sčítání zlomků, protože žáci jej znali teprve třetí den. Můžeme z toho vyvodit, že u lehkého příkladu žáci neměli problém s využitím hudebního modelu.

Třída číslo čtyři

Tuto třídu vedl jen pan učitel beze mě. Měl k dispozici metodický list pro učitele a pracovní list pro žáky a jeden vypracovaný. Sčítání zlomků již měli probrané a list dostali žáci jako opakování látky. Délky not v hudební výchově brali, ale i tak bylo nutné ve výuce vše připomenout.

Pracovní list vypracovalo celkem 22 žáků.

	Správně		Špatně		Nedokončeno	
1. cvičení	19	90%	2	10%	0	0%
2. cvičení	12	57%	6	29%	3	14%
3. cvičení	12	57%	5	24%	4	19%
Hodnocení listu	12	57%	6	29%	3	14%

Tab. 6: Hodnocení třídy číslo čtyři.

Z tabulky je patrno, že tato třída dopadla nejlépe ze všech, co do počtu správně vypracovaných listů. Zároveň je zde ale necelá třetina těch, co vypracovali list špatně a sedmina, kteří list nedokončili.

Podobně jako u předešlých tříd ani zde nemůžeme přesně říct, čím je to dané. Nabízí se však odpověď, že žáci měli svého učitele, na kterého byli zvyklí. Podle mého názoru je to velmi důležitý fakt, protože cizí učitel jen těžce nahradí stálého za jednu hodinu či pár týdnů praxe.

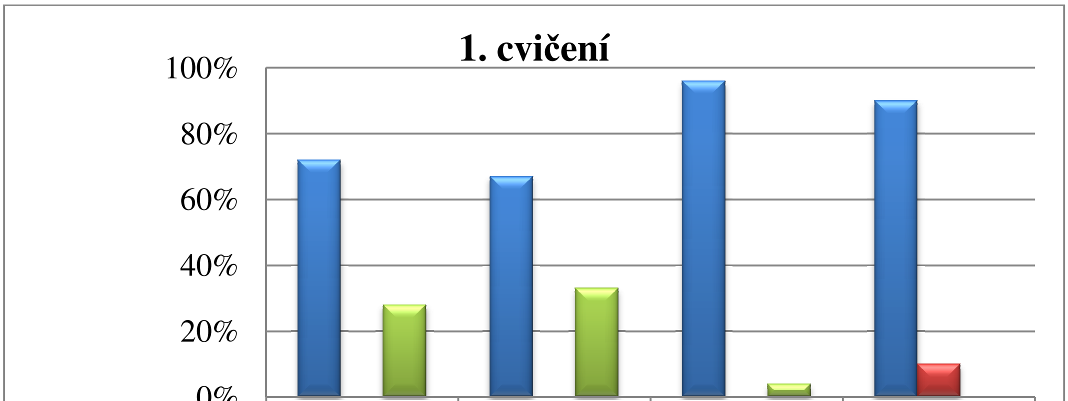
2.5.2. Porovnání cvičení

Již jsme vyjmenovali jednotlivé třídy a popsali jednotlivé výsledky pracovního listu. Můžeme se však podívat na tento pracovní list i z jiného úhlu pohledu. Doposud nás zajímalo, jak dopadla která třída spíše celkově ve vypracování pracovních listů. Nyní se podíváme, jak dopadla jednotlivá cvičení v různých třídách.

Jednotlivá cvičení

1. cvičení

Toto cvičení je nejjednodušší, žáci by si na něm měli vyzkoušet, jak se pracuje s hudebním modelem. Měli bychom proto očekávat, že v něm žáci nebudou dělat chyby a zvládnou ho vypracovat celé.



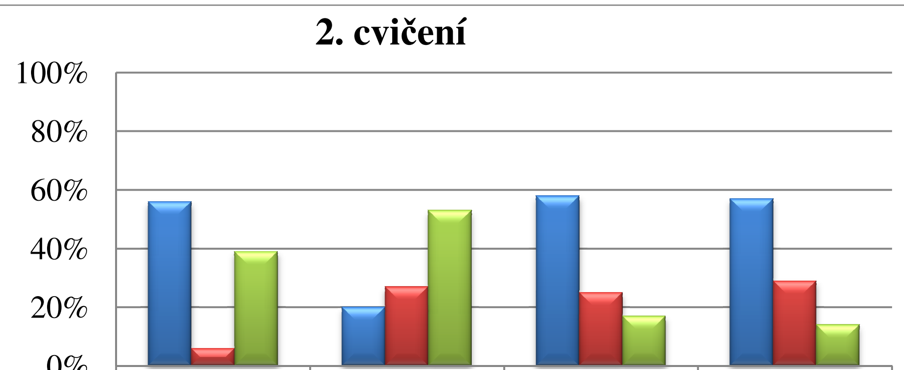
	Třída č. 1	Třída č. 2	Třída č. 3	Třída č. 4
Správně	72%	67%	96%	90%
Špatně	0%	0%	0%	10%
Nedokončeno	28%	33%	4%	0%

Graf 1: Hodnocení prvního cvičení.

Z grafu lze vyčíst, že opravdu většina žáků s cvičením neměla problém. Dokonce v polovině tříd správně vyplnilo cvičení alespoň 90% žáků. Je možné, že kdyby se odstranil některý z důvodů nedokončenosti úloh tříd číslo jedna a dvě, dopadl by i tady pracovní list lépe.

2. cvičení

Cvičení je už těžší. Žáci zde přepisovali noty na zlomky a museli již více pochopit hudební model, aby ho správně vypracovali. Dalo by se očekávat, že se i správnost vypracování pracovního listu sníží.



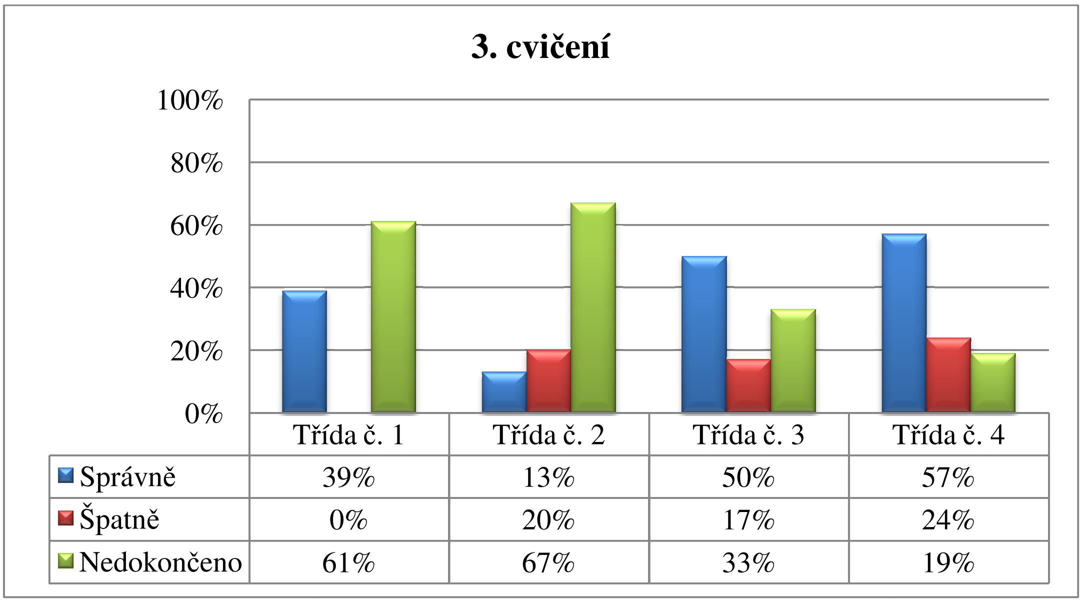
	Třída č. 1	Třída č. 2	Třída č. 3	Třída č. 4
Správně	56%	20%	58%	57%
Špatně	6%	27%	25%	29%
Nedokončeno	39%	53%	17%	14%

Graf 2: Hodnocení druhého cvičení.

Je zde možno vidět, že opravdu klesla správnost vyřešení pracovního listu. U třídy číslo jedna, tři a čtyři je nad 55% a jen žáci třídy číslo dvě ho správně vypracovali pouze na 20%. U třídy číslo dvě již většina nedokončila cvičení, tedy už zde si lze všimnout, že žáci začali mít problém správně vyplnit pracovní list.

3. cvičení

Závěrečné, tedy třetí cvičení, bylo nejtěžší. Žáci zde museli správně používat hudební model, aby mohli zjistit výsledek cvičení. V dřívějších úlohách se dalo řešení trochu odhadnout. Navíc zde nepoužívali jen sčítání zlomků, ale „dopočítávali" kolik chybí do jedné celé. Tedy použili představu hudebního modelu nebo již zlomku. Tedy toto cvičení by mělo dopadnout nejhůře.



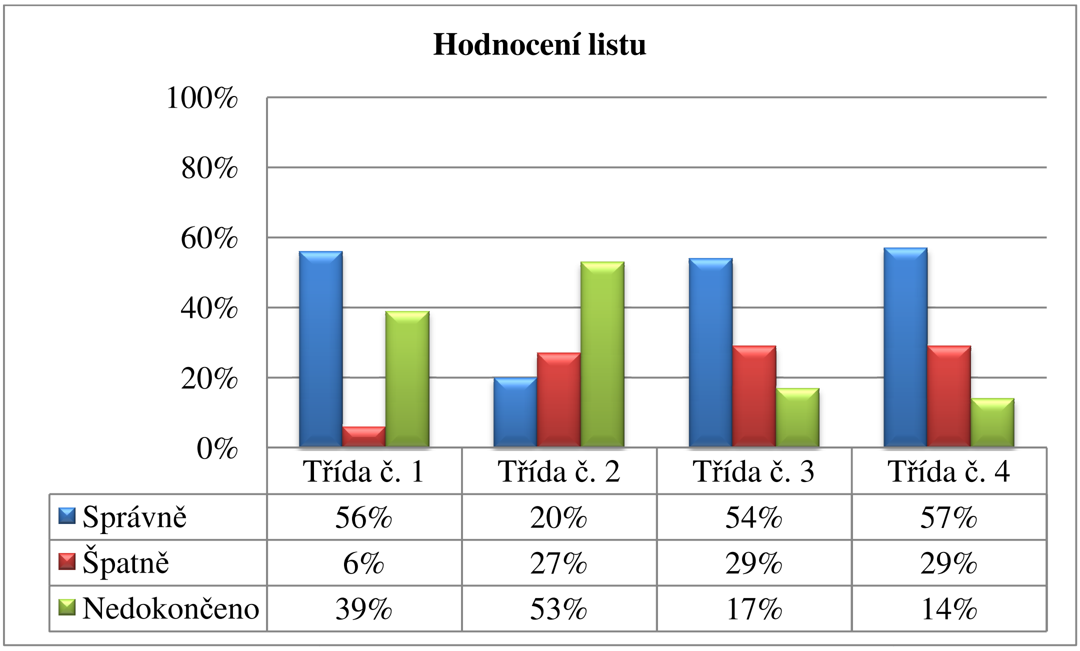
	Třída č. 1	Třída č. 2	Třída č. 3	Třída č. 4
Správně	39%	13%	50%	57%
Špatně	0%	20%	17%	24%
Nedokončeno	61%	67%	33%	19%

Graf 3: Hodnocení třetího cvičení.

Opravdu dopadlo nejhůře, jak si můžeme všimnout v tabulce. Zatímco v předchozím cvičení správně vyplnilo cvičení alespoň 55% žáků ze tří tříd, v tomto cvičení dosáhly 50% jen dvě třídy.

Hodnocení listu

V hodnocení listu, jak již bylo výše zmíněno, jsem se dívala na vypracovaný list jako na celek. Bylo tedy možné, že i když u některého žáka bylo nějaké cvičení hodnoceno jako špatně nebo nesplněno, celkově jsem list uznala za správný. Uznala jsem ho tak většinou z důvodu nepozorných chyb nebo jedné konkrétní, kvůli které jsem sice nemohla uznat cvičení, ale v souhrnném pohledu se zdála být malá.



	Třída č. 1	Třída č. 2	Třída č. 3	Třída č. 4
Správně	56%	20%	54%	57%
Špatně	6%	27%	29%	29%
Nedokončeno	39%	53%	17%	14%

Graf 4: Hodnocení pracovního listu pro sčítání zlomků v hudbě.

Z grafu jde vidět, že většina žáků z většiny tříd vyplnila správně pracovní list. Vyloženě špatně ho měla necelá třetina ze všech tříd a v nedokončenosti se zase třídy od sebe liší. První a druhá třída ho má více nedokončený než chybný a třetí a čtvrtá třída jej má chybný jen z přibližně jedné šestiny.

Můžeme z toho vyvodit, že pracovní list by mohl být využitelný, jelikož jej většina žáků pochopila a správně vypracovala. Tedy i hudební model má šanci uspět mezi žáky.

Vypracované pracovní listy jednotlivých tříd a žáků jsou uvedeny v příloze na CD.

2.5.3. Nejčastější chyby v hudebním modelu

Mezi nejčastější chyby patřilo přepisování not spojených tzv. trámcem (tedy dvě alespoň dvě noty osminové a nižší hodnoty spojené dohromady). Jelikož žáci si mysleli, že se jedná o jednu osminu a ne o dvě a více.

Např.  $= \frac{2}{8}$ a ne jen jedné.

Další častou chybou bylo zapisování not čtvrťových a nižší hodnoty s nevybarvenou hlavičkou, přitom by měla mít vždy vybarvenou.

Např.  má na obrázku správně vybarvenou hlavičku.

2.6. Zpětná vazba z výuky

Měla jsem možnost spolupracovat se dvěma vyučujícími, učitelem a učitelkou, rozhodla jsem se jim zaslat dotazník, abych od nich dostala zpětnou vazbu z výuky. Neberu jej jako diagnostickou metodu, ale spíše jako názor dvou učitelů, který má mnou navrženou strukturu.

2.6.1. Zpětná vazba vyučujících

Otázky v dotazníku jsem rozdělila do tří oblastí – metodická oblast, oblast náročnosti pro žáky, oblast využitelnosti ve výuce. Tyto oblasti považuji za klíčové k zjištění názoru učitelů. Celé znění dotazníku je uvedeno v příloze.

Metodická oblast

Je formulována otázkou s výběrem odpovědi. Na otázku jak byli spokojení s metodickým listem, oba vyučující vybrali odpověď: „*Výuka podle něj proběhla bez problému. Nic více jsem nepotřeboval/a.*".

Z této odpovědi je zřejmé, že metodický list je pro respondenty dostačující.

Oblast náročnost pro žáky

Je formulována otázkou s výběrem odpovědi a otevřenou otázkou.

Na otázku, jestli žáci zvládli vypracovat celý list za vyučovací hodinu, pan učitel vybral odpověď: „*Ano, ještě jsme stihli i další příklady.*". A paní učitelka: „*Ne, stihli jsme jen některé příklady.*".

Můžeme si u odpovědí všimnout, že jsou spíše protikladné. V jedné třídě se pracovní list stihnul a ještě zbyl čas a v druhé naopak ani žáci nestihli dodělat všechna cvičení. Z jakého důvodu to tak je by znovu potřebovalo delší šetření. Můžeme jen navrhnout možné důvody – rozdílná práce pedagoga s pracovními listy, úroveň žáků ve sčítání zlomků (jestliže ve třídě teprve zavedeme tento algoritmus, žákům bude trvat delší dobu vypracovat na něj cvičení), momentální situace ve třídě (zařazení výuky v rozvrhu, klima třídy) a další důvody. Vybrat z nich jeden konkrétní by byla pouhá spekulace.

Další otázkou bylo, s čím měli žáci největší problém a co jim naopak šlo nejlépe. Pan učitel odpověděl: „*1, nejdříve dělalo žákům problém si uvědomit délky not, 2, problém s třetím cvičením (bylo těžší, než první a druhé).*". Paní učitelka odpověděla: „*U dětí byla* *patrná neznalost not. Nedostatek zběhlosti se u některých projevilo nejistotou nebo ztrátou motivace úlohy řešit – potřebovaly další konzultaci a ujištění, že pracují správně.*".

U obou odpovědí je patrné, že žáci měli problém s délkami not. Dále se odpovědi liší, pan učitel vidí problém u svých žáků při vypracování posledního cvičení, které je opravdu náročnější než dřívější a paní učitelka zase ve ztrátě motivace úlohy řešit, a tedy většího nasazení pedagoga, který musel více žákům vysvětlovat jak dál, a motivovat je k další práci.

Podle mého názoru by se tyto problémy daly minimalizovat častější prací s modelem délka tónu, potom by žáci uměli noty přepisovat do zlomků a nemuseli by kvůli tomu ztrácet motivaci řešit podobné úlohy.

Oblast využitelnosti ve výuce

Je formulována dvěma otázkami s výběrem odpovědí a jednou otevřenou otázkou.

Na první otázku, zda používají pracovní listy, oba vyučující vybrali shodnou odpověď: „*Ano, i když je používám jen zřídka, protože potřebuji spíše probrat učivo.*". Na druhou otázku, zda stíhají probrat učivo svého tematického plánu i s využitím pracovních listů, vybral pan učitel odpověď: „*Ano, nemívám s tím problém.*" a paní učitelka: „*Většinou ano.*".

Z výběru odpovědí se můžeme domnívat, že oba učitelé s pracovními listy pracují, a tedy pro ně tento způsob práce není ničím novým.

Na poslední otázku, jestli by uvítali pracovní listy i pro další oblasti matematiky odpověděl pan učitel: „*Tož proč ne ☺*" a paní učitelka: „*Určitě ano, protože nikdy není dost nových inspirací a možnost výběru z již hotových materiálů jistě usnadní práci každému učiteli.*".

Je tedy zřejmé, že vypracování pracovních listů a poskytnutí učitelům by oba uvítali.

Shrnutí

Z odpovědí obou respondentů se můžeme domnívat, že metodický list pro učitele, který měl vysvětlit pracovní list, byl dostačující. Zároveň v pracovním listě žákům dělal problém model délky not, ale jak již bylo řečeno, kdyby se využíval v hodinách častěji, tento problém by se zmírnil. A rozhodně by uvítali další pracovní listy, které by mohli používat ve vyučování.

2.6.2. Má zpětná vazba

Nejen učitelé byli ve výuce, sama jsem učila ve dvou třídách a v jedné s pomocí paní učitelky. Proto přikládám i svou zpětnou vazbu k výuce.

Prvním krokem bylo vytvoření pracovního listu. Musela jsem nejprve vymyslet propojení hudby a zlomků, tehdy jsem přišla na model délky tónu. Pracovní list jsem vypracovala během své souběžné praxe v zimním semestru 2. ročníku a ihned jsem měla možnost jej s žáky použít během výuky, jelikož jsem učila sčítání zlomků ve dvou sedmých třídách. Učila jsem je zároveň i hudební výchovu, proto jsem měla představu o jejich hudebních znalostech, a tedy do jaké míry musím zopakovat délky tónu.

Ve výuce jsem se nejprve věnovala opakování hudebních pojmů, pro některé žáky to bylo velmi jednoduché a pro jiné jakoby něco nového, z hudební výchovy si to nezapamatovali. Potom jsem jim rozdala pracovní list a společně jsme jej začali vypracovávat, aby věděli, jak mají postupovat. I tady se mezi sebou lišili žáci v míře pochopení způsobu práce. Po čase skoro všichni pochopili, jak pracovní list vypracovat a pustili se do samostatné práce. Já jsem procházela třídou a kontrolovala, jak jim vypracovávání jde a jestli někde nedělají zásadní chyby, popř. odpovídala na otázky a pomáhala žákům, kteří potřebovali.

Během hodiny jsem si všimla, že musím dbát na to, aby žáci, kteří jsou zběhlí v hudbě, opravdu příklady počítali a nejen psali výsledky. Také se mě žáci ptali, je-li to je ještě hodina matematiky, když pořád píší noty. Tato otázka mě pobavila a utvrdila v přesvědčení, že by se mělo častěji žákům ukazovat, že matematika neznamená jen čísla a učebnici, ale i popis reálného světa. Jestliže by brali takové pracovní listy jako samozřejmost, mohlo by je to vést k jejich vlastnímu uvažování nad aplikací matematiky a mohli by si díky tomu sami odpovědět na jedny z nejčastějších otázek: „Proč se to mám učit? K čemu mi to bude?“.

Z hodin, které jsem během své praxe učila, mi tato připadala jako jedna z nejzábavnějších. Nejen proto, že jsem měla možnost si ji celou vymyslet sama, ale také protože jsem viděla, jak někteří žáci, které matematika moc nebavila, najednou ožili a ptali se mě, jak to mají vypočítat a jak si mají s cvičeními poradit.

Proto bych hodnotila využití takového pracovního listu kladně. Myslím si, že by se dal využívat ve výuce nebo třeba jen vybrat jako cvičení v matematických rozcvičkách na začátku výuky.

Závěr

Své tři dílčí cíle jsem naplnila postupně jak v teoretické, tak v empirické části. V teoretické části jsem se věnovala převážně metodice zlomků jako složitému tématu a jeho zařazení v Doporučených učebních osnovách předmětů Čj, Aj a M pro základní školy. Zároveň jsem se v této části věnovala matematickým a hudebním modelům, na jejichž základě jsem vytvořila pracovní listy.

V empirické části jsem se hlavně věnovala pracovním listům pro porovnávání, sčítání a násobení zlomků v hudbě. Každý pracovní list je uveden metodickým listem pro učitele, který vysvětluje učiteli, jak s pracovním listem zacházet a jak podle něj naplánovat výuku. Zároveň se u každého nachází i výsledky cvičení.

Pracovní list pro sčítání zlomků v hudbě jsem vyzkoušela ve čtyřech třídách, základní rozbor každé třídy a vypracovaných listů od žáků je též uveden v empirické části. Na těchto třídách demonstruji, že pracovní list, a tedy i hudební model, by měl být využitelný ve výuce. Nejde zde o výzkum, ale pouze o ověření u menšího počtu respondentů.

Můj hlavní cíl, tedy svou prací celkově ukázat způsob nahlížení, který by žákům ukázal, že matematika popisuje reálný svět a jak toho docílit, je těžko měřitelný. Ale i tak se přikláním k myšlence, že i tento cíl jsem splnila. Vzhledem k tomu, kolik jsem se sama naučila tvorbou pracovních listů, a to nejen z učiva zlomků, ale i z hudební výchovy, myslím si, že kdyby se na konkrétní učivo podíval podobným způsobem i jiný pedagog, našel by nové způsoby, jak látku žákům předat a samotného by ho to posunulo dál.

A právě tento jiný způsob uvažování vidím jako svůj hlavní cíl. Ukázat učitelům, jak jinak se na matematiku podívat a probudit v nich zájem se něco nového dozvědět a mít radost z nových postupů, kterými žáky mohou motivovat k zájmu o matematiku.

Hodiny matematiky by se tak mohly stát praktickými hodinami, kde žáci budou objevovat propojenost poznatků a zkoušet v nich pochopit svět kolem sebe.

Seznam použité literatury a použitých zdrojů

1. *Doporučené učební osnovy předmětů Čj, Aj a M pro základní školy* [online], [cit. dne 2. 3. 2013], dostupné z WWW: < http://nuv.cz/file/189>, 2011.
2. *Upravený RVP ZV se zapracovanými změnami* [online], [cit. dne 7. 3. 2013], dostupné z WWW: <http://nuv.cz/file/318>
3. AUBIN, Jean-Pierre: O motivaci v matematice (seriál), *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 32(3): 154—163, 1987.
4. FONTANA David: *Psychologie ve školní praxi*, Portál, Praha 2010, ISBN 978-80-7367-725-1.
5. HALL Rachel W.; KREŠIMIR Josić: Matematika hudebních nástrojů, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 47(1): 37-49, 2002.
6. HEJNÝ Milan: *Teória vyučovania matematiky 2*, Slovenské pedagogické nakladetel´stvo, Bratislava, 1988, ISBN 80-08-00014-7.
7. JANOUŠEK Ivo: *ABC akustiky pro hudební praxi*, Supraphon, Praha, 1979.
8. KLAPIL Pavel: Akustika v učitelském studiu hudební výchovy*,* LUSKA Jiří (ed.) *Interdisciplinární výzkum hudební kultury. Sborník přednášek a tezí*, Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2012, Pp. 96 – 109.
9. SYROVÝ Václav: *Hudební akustika*, Akademie múzických umění v Praze, Praha, 2008, ISBN 978-80-7331-127-8.
10. VYŠÍN Jan: Co dělat, aby vyučování matematice bylo užitečné?, *Jednota českých matematiků a fyziků*, 26(5): 285-288, 1981.
11. ZENKL Luděk: *ABC hudební nauky*, Editio Bärenreiter Praha, Praha, 2007, ISBN 80-86385-21-3.
12. *Ukázka modelu délky tónu*, [online], [cit. 10. 4. 2013], dostupné z WWW: < http://www.philtulga.com/pie.html>
13. *Ukázka modelu výška tónu*, [online], [cit. 10. 4. 2013], dostupné z WWW: < http://www.philtulga.com/fractionbars.html>
14. *Ukázka zakreslení alikvotních tónů*, [online], [cit. 10. 4. 2013], dostupné z WWW: < http://www.philtulga.com/harmonics.html>

Seznam citovaných obrázků, tabulek a grafů

Obrázky

Obr. 1: *Základní hodnoty a tvary not*, ZENKL Luděk: *ABC hudební nauky*, Editio Bärenreiter Praha, Praha, 2007, ISBN 80-86385-21-3, str. 15.

Obr. 2: *Alikvotní řada tónů*, [cit. 5. 1. 2013], dostupné z WWW:

<http://audio.tutsplus.com/tutorials/music-theory/quick-tip-the-overtone-series/>.

Obr. 3: *Koláčový model pro sčítání zlomků*, vlastní.

Obr. 4: *Tyčový model pro sčítání zlomků*, vlastní.

Obr. 5: *Model dělení čokolády pro sčítání zlomků*, vlastní.

Obr. 6: *Model délky tónu na internetu*, [cit. 10. 4. 2013], dostupné z WWW:

< http://www.philtulga.com/pie.html>

Obr. 7: *Model délky tónu na internetu – vyplněný* [cit. 10. 4. 2013], dostupné z WWW:

< http://www.philtulga.com/pie.html>

Obr. 8: *Model výšky tónu na internetu* [cit. 10. 4. 2013], dostupné z WWW:

< http://www.philtulga.com/fractionbars.html>

Obr. 9: *Model výšky tónu – alikvotní řada zakreslená sinusoidou* [cit. 10. 4. 2013], dostupné z WWW:

< http://www.philtulga.com/harmonics.html>

Obr. 10: *Model výšky tónu – alikvotní řada zakreslená barevným válcem* [cit. 10. 4. 2013], dostupné z WWW:

< http://www.philtulga.com/harmonics.html>

Tabulky

Grafy

Seznam příloh

Příloha 1: *Otázky ke zpětné vazbě pracovního listu pro učitele.*

Příloha 2: *Vyhodnocení pracovních listů.*

Příloha 1: Otázky ke zpětné vazbě pracovního listu pro učitele

Otázky jsou řazeny do tří oblastí – oblast metodiky, oblast náročnosti pro žáky, oblast využitelnost ve výuce. U otázek s výběrem odpovědí označte pro Vás nejvhodnější odpověď a u otevřených otázek napište odpověď slovně. Děkuji za vypracování.

Metodická oblast

Jak jste byl spokojený s metodickým listem?

a) Výuka podle něj proběhla bez problému. Nic více jsem nepotřeboval/a.
b) Doplnil bych tam údaje. (*Jestliže zvolíte tuto odpověď, doplňte jaké.*)
c) Připadal mi nedostačující. (*Jestliže zvolíte tuto odpověď, doplňte proč.*)
d) Jiná možnost (*Napište jaká.*)

Oblast náročnosti pro žáky

Zvládli žáci vypracovat celý list za vyučovací hodinu?

a) Ano, ještě jsme stihli další příklady.
b) Ano, vyšlo to přesně na vyučovací hodinu.
c) Ne, stihli jsme jen některé příklady.

S čím měli největší problém, co jim naopak nejvíce šlo?

Oblast využitelnosti ve výuce

Používáte podobné pracovní listy ve výuce?

a) Ano, myslím si, že žáci potom mají větší zájem o matematiku a více vidí, že popisuje reálný svět.
b) Ano, i když je používám jen zřídka, protože potřebuji spíše probrat učivo.
c) Ne, plně mi postačují učebnice a sbírky.
d) Ne, žáky to jen zmate a potom neumí spočítat klasické příklady.
e) Jiná možnost (*Napište jaká.*)

Stíháte probrat učivo svého tematického plánu i s využitím pracovních listů?

a) Ano, nemívám s tím problém.
b) Většinou ano.
c) Ne, s pracovními listy potom nestíhám.
d) Jiná možnost (*Napište jaká.*)

Uvítal byste pracovní listy i pro další oblasti matematiky?

Příloha 2: Vyhodnocení pracovních listů

Každá třída a každý žák byl zvlášť vyhodnocen. Hodnotila jsem, jestli správně přepsal žák noty do zlomků (resp. zlomky na noty) a zda-li správně sečetl zlomky. Tyto dva údaje jsem sjednotila a rozhodla, je-li celé cvičení správně, nebo ne. Tady jsem kladla větší důraz na správnost přepsání not, spíše jsem cvičení uznala, i když měl žák špatně sečtené zlomky. List celkem jsem uznala, pokud v celkovém měřítku byl pracovní list dobře vypracovaný z hudebního hlediska, např. chyby, které plynou z nepozornosti, pro mě nebyly zásadní, i když žáci měli díky nim špatný výsledek, cvičení jsem uznala.

Označení: jednička znamená správně vyřešené, nula špatně vyřešené cvičení či list celkem a pomlka nedodělané cvičení, popř. list celkem.

Třída číslo jedna

Žák	**1. cvičení**	Přepis zlomků na noty	Správně sečteno	**2. cvičení**	Přepis not na zlomky	Správně Sečteno	**3. cvičení**	Přepis not na zlomky	Správně Sečteno	**List celkem**
1	**1**	1	1	**1**	1	1	**-**	-	-	**1**
2	**1**	1	1	**1**	-	1	**-**	-	-	**1**
3	**1**	1	1	**1**	1	1	**-**	-	1	**1**
4	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**
5	**1**	1	1	**1**	1	0	**1**	1	1	**1**
6	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	0	**1**
7	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**
8	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
9	**1**	1	1	**1**	1	0	**1**	1	0	**1**
10	**1**	1	-	**1**	1	-	**1**	1	0	**1**
11	**1**	1	1	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**
12	**-**	1	-	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**
13	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**	-	-	**-**
14	**-**	1	-	**-**	-	-	**1**	-	-	**-**
15	**1**	1	1	**1**	1	0	**-**	1	-	**1**
16	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**	-	-	**-**
17	**1**	1	1	**0**	1	0	**-**	1	-	**0**
18	**1**	1	1	**-**	-	-	**-**	-	-	**-**

Třída číslo dva

Žák	**1. cvičení**	Přepis zlomků na noty	Správně sečteno	**2. cvičení**	Přepis not na zlomky	Správně Sečteno	**3. cvičení**	Přepis not na zlomky	Správně Sečteno	**List celkem**
1	**1**	1	1	**0**	0	1	**0**	0	1	**0**
2	**1**	1	1	**0**	0	1	**-**	-	-	**0**
3	**1**	1	1	**1**	1	1	**-**	-	-	**1**
4	**1**	1	1	**0**	0	1	**0**	0	-	**0**
5	**1**	1	0	**-**	-	-	**-**	-	-	**-**
6	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**	-	-	**-**
7	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**	-	-	**-**
8	**1**	1	1	**-**	-	-	**-**	-	-	**-**
9	**1**	1	1	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**
10	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**	-	-	**-**
11	**-**	1	-	**1**	1	1	**1**	-	1	**1**
12	**-**	1	-	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**
13	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**
14	**1**	1	-	**-**	-	-	**-**	-	-	**-**
15	**1**	1	1	**0**	0	1	**0**	0	1	**0**

Třída číslo tři

Žák	**1. cvičení**	Přepis zlomků na noty	Správně sečteno	**2. cvičení**	Přepis not na zlomky	Správně Sečteno	**3. cvičení**	Přepis not na zlomky	Správně Sečteno	**List celkem**
1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**
2	**1**	1	0	**1**	1	0	**-**	1	-	**1**
3	**1**	1	0	**1**	1	0	**0**	1	0	**0**
4	**1**	1	1	**1**	1	0	**1**	1	1	**1**
5	**1**	1	0	**1**	1	0	**1**	1	0	**1**
6	**1**	1	0	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**
7	**1**	1	1	**1**	1	1	**-**	-	-	**1**
8	**1**	1	1	**-**	1	-	**-**	-	-	**-**
9	**1**	1	1	**0**	1	0	**0**	0	0	**0**
10	**1**	1	1	**-**	0	-	**-**	-	-	**-**
11	**1**	1	0	**0**	1	0	**-**	-	-	**0**
12	**1**	1	0	**0**	0	0	**-**	-	-	**0**
13	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**
14	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**
15	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**
16	**1**	1	0	**1**	1	0	**1**	1	1	**1**
17	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**
18	**1**	1	0	**1**	1	1	**1**	1	0	**1**
19	**1**	1	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
20	**1**	1	0	**0**	1	0	**0**	1	0	**0**
21	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1	0	**1**
22	**1**	1	0	**1**	1	0	**1**	1	1	**1**
23	**1**	1	0	**0**	0	0	**0**	0	-	**0**
24	**-**	1	-	**-**	0	-	**-**	-	-	**-**

Třída číslo čtyři

Žák	**1. cvičení**	Přepis zlomků na noty	Správně sečteno	**2. cvičení**	Přepis not na zlomky	Správně Sečteno	**3. cvičení**	Přepis not na zlomky	Správně Sečteno	**List celkem**
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
3	**0**	**0**	**1**	**-**	**0**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
4	**1**	**-**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**-**	**1**
5	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
6	**1**	**1**	**1**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
7	**1**	**1**	**1**	**-**	**0**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**
8	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**-**	**0**	**0**	**0**	**0**
9	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**-**	**-**	**-**	**0**
10	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
11	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-**	**0**	**0**	**0**	**0**
12	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
13	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
14	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**-**	**1**	**1**
15	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
16	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
17	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**-**	**0**
18	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
19	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**-**	**1**	**1**
20	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
21	**1**	**1**	**0**	**0**	**-**	**0**	**0**	**-**	**0**	**0**

Anotace

Jméno a příjmení:	Marcela Lehotská
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Tomáš Zdráhal CSc.
Rok obhajoby:	2013

Název práce:	Jak se stát lepším učitelem matematiky
Název v angličtině:	How to become a better teacher of mathematics
Anotace práce:	Tato práce se věnuje zlomkům. Teoretická část je zaměřena na jejich zakreslení pomocí matematických a hudebních modelů. Jádrem práce je empirická část, ve které jsou demonstrovány hudební modely zlomků v pracovních listech. Myšlenka celé práce, že matematika popisuje reálný svět, je zachycena prostřednictvím těchto hudebních modelů.
Klíčová slova:	Didaktika matematiky, hudba, zlomky, modely zlomků.
Anotace v angličtině:	The present thesis deals with fractions. The theoretical part is focused on their representation by means of mathematical and musical models. The core of the thesis is constituted by the empirical part where the musical fraction models are demonstrated in a series of worksheets. The leading topic of the thesis is that mathematics describes the real world which is captured with the aid of the given musical models.
Klíčová slova v angličtině:	Didactics of mathematics, music, fractions, fraction models.

Přílohy vázané v práci:	CD ROM
Rozsah práce:	73 stran
Jazyk práce:	Český jazyk