Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Funkce jedné proměnné na střední škole

Diplomová práce

Autor: Bc. Pavla Hanzalová

Studijní program: N1101 Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy

Učitelství pro střední školy – hudební výchova

Vedoucí práce: Mgr. Bohumila Raisová

Hradec Králové 2013

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání diplomové práce

Autor: **Bc. Pavla Hanzalová**

Studijní program: N1101 Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy
Učitelství pro střední školy - hudební výchova

Název závěrečné práce: **Funkce jedné proměnné na střední škole**

Název závěrečné práce AJ: Function of one variable at high school

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Zpracovat problematiku funkcí jako učiva na SŠ, připravit didaktický materiál pro výuku funkcí, jejich grafů a vlastností pro zaktivizování žáků při výuce a upevňování znalostí získaných při výkladu. Navržené materiály vyzkoušet v praxi a posoudit jejich využitelnost a efektivitu. Literatura: učebnice a sbírky úloh pro SŠ, Hejný, Kuřina: Dítě, škole a matematika, RVP, Hejný a kol.: Teória vyučovania matematiky 2

Garantující pracoviště: Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta

Vedoucí práce: Mgr. Bohumila Raisová

Konzultant:

Oponent:

Datum zadání závěrečné práce: 25. 10. 2012

Datum odevzdání závěrečné práce:

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala (pod vedením vedoucí diplomové práce) samostatně a uvedla jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Hradci Králové dne…

……………………………..

Anotace

HANZALOVÁ, Pavla. *Funkce jedné proměnné na střední škole*. Hradec Králové, 2013. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce Bohumila Raisová. 90 s.

Diplomová práce se zabývá problematikou funkcí jako učiva na středních školách. Teoretická část se věnuje funkčnímu myšlení, jeho fylogenezi i ontogenezi, výuce funkcí na středních školách a aktivizujícím metodám, především didaktickým hrám. Blíže popisuje jednotlivé třídy funkcí a metodiku jejich výuky s využitím konstruktivistického přístupu. Praktickou část tvoří konkrétní návrhy na didaktické hry a tvořivé činnosti. Součástí jsou i komentáře z ověření v hodinách matematiky.

Klíčová slova: matematika, funkce jedné proměnné, didaktické hry.

Annotation

HANZALOVÁ, Pavla. *Function of one variable at high school*. Hradec Králové, 2013. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Bohumila Raisová. 90 p.

The Diploma Thesis deals with function of one variable as a curriculum at high schools. The theoretical part deals with functional thinking, the phylogenesis and ontogenesis, teaching of functions at high school and activating methods, especially didactical games. It describes in detail the various classes of functions and also their methodology of teaching using constructivist approach. The practical part consists of specific proposals for didactical games and creative activities. It also includes comments from verification in mathematics lessons.

Keywords: mathematics, function of one variable, didactical games.

Poděkování

Tímto děkuji vedoucí diplomové práce Mgr. Bohumile Raisové z Matematické katedry Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové, která mi velmi pomohla svými cennými radami a odborným vedením při konzultacích. Dále bych ráda poděkovala Bc. Kateřině Chroustové za věcné připomínky, zajímavé nápady a celkovou podporu.

Obsah

Úvod

„*Matematika bude užitečná, bude-li rozvíjet potřebné pracovní návyky žáků a studentů. Matematika může mít i ráz hry; neměla by být drezurou, ale tvořivou prací*.“ [1, s. 196]

„*Motivace je předpokladem zahájení procesu učení, představuje jeho úspěšný start. Může mít různé formy: od vhodně vedené diskuse o zajímavé problematice k dobře položené otázce či formulaci problému, k diskusi o životní strategii…, až např. k zajímavé úloze či podnětné hře*.“ [1, s. 129]

Důležitým prvkem při vyučování jakéhokoli předmětu je motivace. Existují dva druhy motivace – vnitřní a vnější. Vnější motivace je výsledkem působení vnějších podnětů. Proto může motivovat i učitel. Jeho role nespočívá pouze v hodnocení (což je jeden ze způsobů motivace žáka), ale i ve správném vedení výuky. Hodina by měla být pestrá, měla by zahrnovat aktivity, ve kterých se žák může realizovat, výklad by měl být srozumitelný. Učitel by ke každému tématu měl vhodně zvolit motivační úvod, který vzbudí u žáků zájem o dané téma. Tím může být např. zajímavý historický fakt nebo příklad, který s následně probíranou látkou souvisí. Po této části by měla být vedena diskuze s žáky, ve které již žáci sami mohou vyvozovat pro ně nové vztahy, vlastnosti, pravidla. Řešení různých problémů, tvořivá činnost, konstruování nových poznatků a společné diskuze jsou základem konstruktivistického přístupu, který se velmi vhodně dá v matematice uplatnit (více v [1, s. 194, 195]).

Funkce jedné proměnné se na středních školách většinou vykládají formálně. To znamená, že učitel žákům předloží předpis funkce a společně pomocí několika bodů odvodí její graf. Následuje seznam vlastností a mnoho příkladů na procvičování. Přitom tento tematický celek přímo nabízí propojení matematiky s jinými předměty a odvozování vlastností a pravidel na základě separovaných modelů samotnými žáky formou skupinové práce nebo třídní diskuze. Pro učitele je tento způsob náročnější, avšak žáky během hodiny aktivizuje, nutí je přemýšlet o podstatě daných problémů a u vyvozování nových poznatků si učitel ověří znalosti z předešlých hodin.

Cílem této práce je zpracovat problematiku výuky funkcí jedné proměnné na střední škole. Metodicky rozepsat výuku jednotlivých tříd funkcí s prvky konstruktivistického vyučování, kdy žáci sami odvozují známá pravidla na základě zkušeností a vedení učitele. Ten musí vhodně volit série příkladů tak, aby žáci k těmto pravidlům mohli dospět. Někdy je tato série příkladů přímo vypsaná, nebo k ní vedou slovní úlohy, případně je zmíněn postup na její tvorbu v metodické části.

První kapitola se zabývá fylogenezí a ontogenezí funkčního myšlení. Ukazuje se zde korespondence mezi těmito dvěma vývoji. Následuje kapitola, ve které popisuji tento tematický celek jako součást rámcově vzdělávacích programů – povinné učivo a očekávané výstupy žáka. Na to navazuje část, která popisuje všechny třídy funkcí probírané na středních školách a obsahuje i metodické pokyny s konstruktivistickým přístupem. Její součástí jsou i praktická cvičení, kde se vyskytují motivační úlohy využívající již zmiňované mezipředmětové vztahy nebo příklady separovaných modelů, na základě kterých je žák schopen odvodit základní vlastnosti. Další kapitola se zabývá aktivizačními metodami, především potom didaktickými hrami a brainstormingem.

V praktické části jsou vypracované didaktické hry a tvořivé aktivity pro jednotlivé tematické okruhy. Některé z nich byly vyzkoušeny v hodinách matematiky na Gymnáziu F. M. Pelcla v Rychnově nad Kněžnou. Dále obsahuje vyhodnocení těchto vyzkoušených aktivit a návrhy na jejich využití ve výuce, případně na jejich modifikace. Pracovní listy, hrací karty a další vytvořené pomůcky pro tyto aktivity tvoří přílohy této diplomové práce, kde je řadím podle typu her (resp. aktivit) na základě kapitoly 6.1. Pro přehlednost je přiložen i seznam těchto aktivit s ohledem na tematické celky. Součástí příloh je také CD s vypracovanými aplety v programech GEONExT a GeoGebra.

V textu se vyskytují poznámky pod čarou, které vysvětlují daný pojem nebo ho nějakým způsobem přibližují. Doslovné citace a matematické vzorce jsou označeny kurzívou. Pro přehlednost jsou také tučným písmem označeny významné pojmy nebo jména, definice jsou umístěny v rámečku.

1 Vývoj funkčního myšlení

1.1 Fylogeneze funkčního myšlení

Představy o závislostech dvou jevů vznikaly od pravěku. Lidé si postupně uvědomovali závislosti některých přírodních jevů – čím větší zvíře lovec uloví, tím více lidí se nají nebo čím větší bude oheň, tím více zahřeje. Je zřejmé, že z počátku šlo o práci s konkrétními jevy (reprezentanty funkcí), až později můžeme mluvit o obecném funkčním myšlení a o snaze vymezení a pojmenování těchto závislostí. [2, s. 238]

Cílem této kapitoly je stručně zachytit vývoj funkčního myšlení a matematického pojmu funkce převážně do úrovně učiva na střední škole s mírným přesahem do učiva vysokoškolského. Podrobnější informace je možné dohledat v odborné literatuře dějin matematiky (např. ucelený přehled fylogeneze funkčního myšlení v [3], souhrnné dějiny matematiky v [4]).

1.1.1 Starověk

Nejstarší částečně dochované matematické poznatky máme ze starověkých zemí: z Egypta, Mezopotámie, Indie a Číny. I mezi nimi můžeme najít základy funkčního myšlení a to ve smyslu vztahu mezi čísly a veličinami. V této době řešili převážně příklady spojené s praxí: např. daňové předpisy, stavebnictví, zemědělství, obchod nebo popis nebeské klenby. První matematické vyjádření těchto závislostí pocházejí z doby 2 000 až 1 000 před naším letopočtem z Babylónie. Jedná se o tabulky následujících funkcí: $n \to \frac{1}{n}$; $n \to n^2$; $n \to \sqrt{n}$; $n \to n^3$; $n \to \sqrt[3]{n}$; $n \to n^2 + n$; apod. Babylóňané byli jedni z prvních, kteří matematiku vyučovali na školách a zabývali se imanentními[1] problémy. Důležité je si uvědomit, že zprvu jde o zachycení jednotlivých diskrétních údajů, kterými se snažili popsat i spojitý děj. [3, s. 47]

Velkým pokrokem bylo právě uvědomění si rozdílu mezi diskrétní a spojitou veličinou, které můžeme sledovat v 6. – 5. století př. n. l. v antickém Řecku. Podle M. Hejného [2, s. 238] to dokazuje i fakt, že: „*Pythagoras dělí vědy na diskrétní (aritmetiku a hudbu)*

[1] Imanentní problémy jsou záměrně vysloveny a nepocházejí z praxe.

a spojité (geometrii a astronomii)." **Pythagorejci** zkoumali vztahy mezi různými fyzikálními veličinami (například v akustice závislost délky struny na výšce tónu). Existuje mnoho řeckých matematiků, jejichž práce přispěly k dalšímu vývoji funkčního myšlení. Jmenovala bych například **Zenona z Elea** (jeho aporie zasahují i do filozofie), **Hippia** (studium křivky kvadratrix) nebo **Archiméda** a **Pappa z Alexandrie** (studium spirál). Významnou osobností byl **Ptolemaios**, který v díle Almagest představuje funkci nazvanou chordála a další funkce (nejen jedné, ale i dvou a tří proměnných). Stále však neexistovaly ustálené symboly a zápisy. O jejich zavedení se částečně pokusil **Diofantos z Alexandrie**, jeho symbolika ale nebyla využívána. V tomto období stále nelze hovořit o obecné funkci nebo proměnné veličině (ta přichází až ve středověku). I přesto Řekové s funkcemi pracovali – hledali jejich vlastnosti, popisovali je tabulkou, slovním vyjádřením i graficky, určovali extrémy a řešili problémy, které se podobají dnešnímu integrování. [3, s. 47 – 48]

1.1.2 Středověk

Na řeckou matematiku navázali v 5. století Indové a následně Arabové, kteří velkým dílem přispěli hlavně v oboru trigonometrie. V jednom ze zachovaných děl můžeme najít i tabulky pro funkci sinus (oproti řecké tětivové trigonometrii jde již o polo-tětivovou, jak ji používáme dnes). V díle **al-Barrániho** (asi 858 – 929) můžeme nalézt tabulku kotangent s intervalem jednoho stupně. O pár let později matematik **Abu-I-Vafá** (940 – 997/8) vypočítal tabulky pro funkci sinus s intervalem 15 minut na správných osm desetinných míst a zavedl funkce sekans a kosekans (nebyly takto pojmenované, ale byly s nimi ekvivalentní). Významný byl také matematik **al-Bírúní** (973 – 1048), který přešel od mnoha separovaných modelů konkrétních křivek k univerzálnímu modelu všeobecné křivky a hledal její extrémy. [3, s. 49; 4, s. 64, 70, 71]

Kolem 12. až 14. století se funkční myšlení rozvíjí i v Evropě, a to na anglické (Oxford) a francouzské (Paříž) univerzitě. *„Mezi učenci se začíná vytvářet představa o zákonech přírody jako o zákonech funkčního typu a objevují se různé obecnější teorie změny veličiny jako funkce času."* [3, s. 49] Jeden z významných matematiků středověku v Evropě byl **Nicole Oresme** (asi 1323 – 1382) z Pařížské univerzity, který oproti soudobým učencům vyjadřoval veličiny a jejich závislosti geometricky. Funkční závislost potom popisoval slovním vyjádřením (pravidlem) nebo graficky. [3, s. 50]

1.1.3 Novověk

V 16. století **John Napier** (1550 – 1617) objevil logaritmy. Vycházel z již dříve známé korespondence mezi sčítáním členů aritmetické posloupnosti a násobením členů odpovídající geometrické posloupnosti (viz. kapitola 3.7 Př. 17), tuto závislost uvedl Michael Stifel ve své práci. Napierův logaritmus byl odlišný od dnes používaného a lze vyjádřit následujícím vztahem: $Nog(x) = 10^7 \cdot \log\left(\frac{10^7}{x}\right)$. Dekadický logaritmus zavedl v roce 1624 **Henry Briggs** (1561 – 1631). [3, s. 51]

Matematiku do té doby můžeme charakterizovat jako matematiku konstantních veličin, v 17. století však již můžeme hovořit o matematice proměnných veličin. S tímto novým náhledem se vývoj funkčního myšlení a celkově matematické analýzy velmi zrychlil. Na přelomu 17. a 18. století byl definován pojem funkce a následně vznikl diferenciální a integrální počet (jeho úplné počátky můžeme pozorovat již v antickém Řecku například u Eudoxa). V této době se funkcemi zabývalo velmi mnoho významných matematiků, proto vyjmenuji pouze některé z nich s ohledem na výuku funkcí na středních školách.

René Descartes (1596 – 1650) při studiu křivek evidoval funkční závislosti mezi dvěma proměnnými x a y pomocí rovnice. Zároveň popisuje, jak sestrojit graf bod po bodu. Svým dílem se však řadí spíše do analytické geometrie, kde je spolu s **Pierrem Fermatem** (1602 – 1665) považován za jejího zakladatele. [3, s. 53]

Dalšími důležitými jmény jsou **Isaac Newton** (1643 – 1727) a **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716). Společně jsou považováni za zakladatele matematické analýzy – diferenciálního a integrálního počtu. Oba matematici dospěli ke stejným závěrům jinými cestami. Newton problém řešil přes svoji metodu fluxí, která úzce souvisí se studiem nekonečných řad. Leibniz zavedl symboliku, která se používá dodnes (např. samotný pojem „funkce“). Stanovil pravidla diferenciace, i podmínky pro existenci extrémů funkce či inflexního bodu pomocí derivace. Úzce spolupracoval s **Johannem Bernoullim** (1667 – 1748), který poprvé v roce 1716 formuloval funkci jako funkci proměnné veličiny (ne jako dříve uváděnou funkci křivky). [4, s. 106 – 117]

Nově pojem funkce vymezil v roce 1748 **Leonhard Euler** (1707 – 1783), který ve svém díle nejprve definuje proměnnou a konstantní veličinu a následně i funkci: „*Funkce proměnné veličiny je analytický výraz sestavený jakýmkoliv způsobem z této proměnné veličiny a čísel nebo konstantních veličin.*“ (český překlad původní latinské definice převzatý z [3, s. 62])

Odklání se tedy od geometricko-kinematického pojetí i od vnímání funkce jako křivky a zavádí ji analyticky (ve formě algebraického výrazu nebo mocninné řady). To umožňuje provádění algebraických i infinitesimálních operací. Euler také již známé funkce klasifikuje a zavádí dnes asi nejčastěji používané označení $f(x)$. Zajímavé je i odlišné chápání spojitosti funkce, jako neměnného analytického vyjádření (tedy lomená funkce je podle něj spojitá, naopak absolutní hodnota je nespojitá). V roce 1755 svoji původní definici ještě zobecnil a zdůraznil tak vzájemnou závislost veličin při změně proměnných. [3, s. 62 – 65]

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij a **Peter Gustav L. Dirichlet** zavedli dnešní klasické pojetí funkce jako jednoznačného přiřazení. Později díky teorii množin **Richard Dedekind** vnímal funkci jako zobrazení jedné množiny do druhé. Dalšími matematiky, kteří významně přispěli zejména v oblasti infinitesimálního počtu, jsou například J. Fourier, G. Cantor, B. P. J. N. Bolzano, A. L. Cauchy, G. F. B. Riemann nebo K. T. W. Weierstrass. Záměrně uvádím pouze tato vybraná jména matematiků bez poznámek k jejich přínosu, protože mým cílem bylo zachytit vývoj vzhledem k učivu na středních školách a infinitesimální počet se na středních školách zpravidla neprobírá (není zahrnutý v rámcově vzdělávacím programu), nebo jen okrajově. [3, s. 67 – 73]

1.1.4 Shrnutí

Vývoj funkčního myšlení bychom tedy mohli shrnout do několika bodů (upraveno podle [2, s. 239 – 240]):

1. uvědomění si a evidování závislostí v přírodě (diskrétní vnímání i spojitých jevů)
2. využívání evidovaných údajů pro činnosti a předpovídání přírodních jevů
3. tabelování některých elementárních funkcí
4. uvědomění si rozdílu mezi diskrétním a spojitým jevem
5. zkoumání separovaných modelů
6. studování univerzálních obecných modelů
7. zavedení symboliky a pokusy o definování pojmů
8. rozvíjení infinitesimálního počtu
9. definování pojmu funkce
10. zevšeobecnění pojmu funkce.

1.2 Ontogeneze funkčního myšlení

Je zajímavé povšimnout si paralely mezi fylogenezí (kapitola 1.1) a ontogenezí funkčního myšlení. M. Hejný [2, s. 240] vymezuje základní tři etapy ontogeneze:

1. tvorba představy kvantitativních vazeb a kauzálních jevů na základě vlastních zkušeností
2. intuitivní využívání získaných zkušeností na řešení některých problémů
3. osvojení si systematické práce s funkcemi

Třetí etapa probíhá zpravidla na střední škole. Přitom práce s funkcemi má dvě strany, a to vnitřní (funkce jako matematické objekty) a vnější (využití funkcí v různých situacích, mezipředmětové vztahy). [2, s. 240]

Následující kapitola popisuje výuku funkcí jedné proměnné právě s ohledem na jednotlivé etapy ontogeneze. Snažím se zde využít zkušenosti žáků a separované modely, na základě kterých žáci vyvozují modely obecné.

2 Funkce jako učivo v rámcově vzdělávacích programech

Rámcový vzdělávací program (dále jen RVP) je kurikulární dokument státní úrovně, který vymezuje závazné rámce vzdělávání pro jeho jednotlivé etapy. Podle něj jsou pak tvořeny školní vzdělávací programy (dále jen ŠVP), které si vytváří samy školy. Podle ŠVP se potom uskutečňuje vzdělávání na dané škole. RVP vychází z nové strategie vzdělávání. Ta zdůrazňuje klíčové kompetence a uplatnění vědomostí a dovedností v praktickém životě. Očekávané výstupy, které jsou v RVP formulované, jsou závazné pro tvorbu ŠVP. [5]

RVP pro jednotlivé stupně vzdělávání byly schváleny a vydávány postupně pro mateřské (2005), základní (2005) a střední školy – zde pro gymnázia (2007) a ostatní střední školy SOŠ, SOU, VOŠ (ve čtyřech etapách v letech 2007 – 2010). Následně si jednotlivé školy utvořily své vlastní jedinečné ŠVP, podle kterých uskutečňují vzdělávání. [6]

Matematika spadá do vzdělávací oblasti „Matematika a její aplikace“. Důraz se zde klade na porozumění pojmům, vztahům, osvojení algoritmů, terminologie a symboliky. To vše by žák měl vhodně využívat při řešení různých úloh a problémů. Dbá se také na propojení s jinými obory lidské činnosti. V charakteristice vzdělávací oblasti je také doporučeno využívání výpočetní techniky (kalkulátory i vhodný počítačový software, případně výukový program) jako moderní technologie, která je užitečným pomocníkem matematiky.

2.1 Funkce na základní škole

V RVP pro základní vzdělání můžeme funkce najít v tematickém okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty. Ten je charakterizován v RVP ZV [7, s. 29]:

„…žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce.“

S náznaky funkčního myšlení se můžeme setkat již na prvním stupni základní školy (ačkoli J. Brant [8] uvádí, že jde hlavně o přípravu pro pochopení základních pojmů statistiky). Mezi očekávanými výstupy najdeme:

„žák

- *popisuje jednoduché závislosti z praktického života*
- *doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel*
- *čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy*“ [7, s. 23]

Na druhém stupni základní školy se již žáci setkávají s pojmem funkce, konkrétně s pravoúhlou soustavou souřadnic, přímou a nepřímou úměrností a lineární funkcí. Očekávanými výstupy jsou potom:

„žák

- *určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti*
- *vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem*
- *matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů*“ [7, s. 24]

Nejsou zde povinné kvadratické funkce (ani rovnice) a goniometrické funkce. Může se však stát, že škola tato témata do svých ŠVP zařadí [8]. Tento tematický okruh se v novém RVP pro základní vzdělání (verze platná od 2013) [9] nemění.

2.2 Funkce na střední škole

Zde vycházím z RVP pro gymnázia [5]. Funkcím je tu věnovaný tematický okruh Závislosti a funkční vztahy, kde mezi učivem nalezneme i posloupnosti. Učivem jsou v prvé řadě obecné poznatky o funkcích, kam se řadí samotný pojem funkce, definiční obor a obor hodnot, graf a vlastnosti funkce. Dále se probírají jednotlivé elementární funkce (lineární kvadratická, absolutní hodnota, lineární lomená, mocninné, druhá odmocnina, exponenciální, logaritmické, goniometrické funkce) a vztahy mezi nimi. Očekávané výstupy, které by žák měl ovládat, jsou:

„*žák*

- *načrtne grafy požadovaných funkcí (zadaných jednoduchým funkčním předpisem) a určí jejich vlastnosti*
- *formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí a posloupností*
- *využívá poznatky o funkcích při řešení rovnic a nerovnic, při určování kvantitativních vztahů*
- *aplikuje vztahy mezi hodnotami exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí a vztahy mezi těmito funkcemi*
- *modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí*
- *řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích /a posloupnostech/*
- *interpretuje z funkčního hlediska složené úrokování, aplikuje exponenciální funkci a geometrickou posloupnost ve finanční matematice*“ [5, s. 24]

3 Funkce jedné reálné proměnné na střední škole

Jednotlivé tematické okruhy jsou pojmenovány podle kapitol učebnice Matematika pro gymnázia – Funkce [9]. Dále je doplněn okruh: Goniometrické funkce (podle kapitoly č. 2 z [10] Goniometrie). Záměrně jsem vynechala celkové určování průběhu funkce, ačkoli se na některých středních školách objevuje. Jde totiž o určování vlastností funkcí s využitím látky, která není zahrnuta v RVP.

Každá kapitola obsahuje část, kde jsou teoreticky a metodicky popisovány jednotlivé třídy a vlastnosti funkcí. Na konci kapitoly je několik příkladů, které jsou motivační, tvořivé nebo typologicky odlišné od příkladů běžně se vyskytujících v učebnicích a sbírkách. Definice, které zde uvádím, jsou převzaty z Matematiky pro gymnázia [9] a [10]. Další příklady k jednotlivým tematickým okruhům je možné nalézt ve vypracovaných didaktických aktivitách a hrách. Přehled těchto aktivit podle tematických okruhů je v Příloze 1.

3.1 Funkce a její graf

Při zavádění pojmu funkce je vhodné nejprve žákům připomenout některé jim známé závislosti z matematiky, fyziky nebo z reálného života, vyjádřené předpisem, tabulkou nebo grafem. Jako příklady závislostí můžeme uvést vzorce pro výpočet obvodu a obsahu čtverce, objemu krychle, tabulku s naměřenými teplotami v určitých časových intervalech nebo graf záznamu EKG. Žáci by ze základní školy měli znát i přímou a nepřímou úměrnost. Je vhodné uvádět i příklady diskrétních závislostí, aby si žáci později uvědomili, že definiční obor nemusí být vždy zadán pouze intervalem, ale i výčtem prvků. Na těchto příkladech lze žákům ukázat, že y se mění v závislosti na x, a následně lze odvodit pravidlo, že vždy jednomu x odpovídá právě jedno y. Je vhodné zmínit, že pro jedno y však může existovat více x (např. Př. 1).

Funkce na množině $A \subset R$ je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina A se nazývá **definiční obor**.

Funkci můžeme definovat i pomocí zobrazení. Zobrazení množiny A do množiny B je předpis, který každému prvku $a \in A$ jednoznačeně přiřadí nějaký prvek $b \in B$. Funkci lze tedy chápat jako speciální případ zobrazení, kde $A \subset R$ a $B = R$. [9, s. 9,10]

Zápis funkce může vypadat například následovně:

$$f: y = 4x, \qquad x \in \langle 1; 3 \rangle \text{ (resp. } D_f = \langle 1; 3 \rangle\text{)}$$

tj.: označení funkce: předpis funkce, interval, ze kterého vybíráme proměnnou x (resp. definiční obor)

Příklad demonstruje funkci, která udává obvod čtverce v závislosti na jeho straně, kterou můžeme zadávat v rozmezí od 1 do 3 jednotek. Víme, že obvod se bude rovnat 4 cm, když jeho strana bude rovna 1 cm. Tento fakt můžeme jinak zapsat:

$f(1) = 4$ (slovně: hodnota funkce v bodě 1 je rovna 4)

obecně: $f(x_0) = y_0$ (slovně: hodnota funkce v bodě x_0 je rovna číslu y_0)

Místo označení hodnota funkce budeme užívat také termín **funkční hodnota**. Z toho je odvozen i jiný možný zápis funkce:

$$f(x) = 4x, \qquad x \in \langle 1; 3 \rangle$$

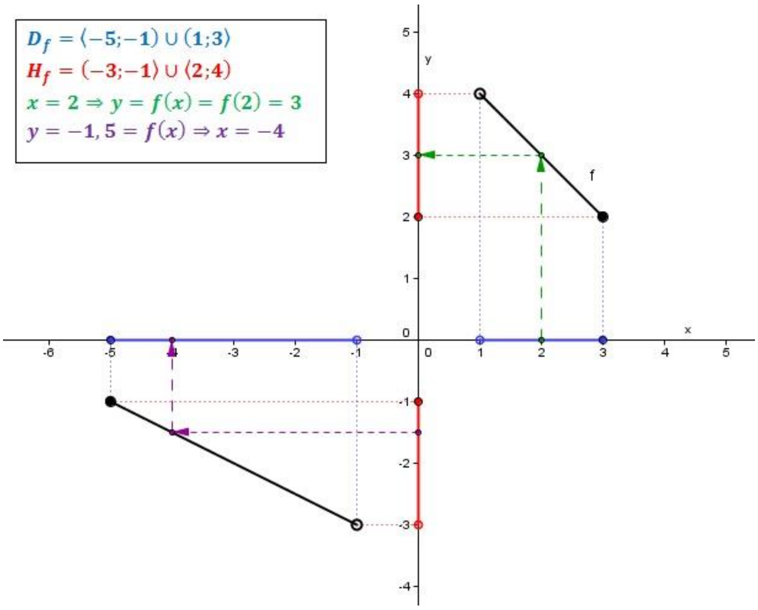
Jiný způsob vyjádření funkce je pomocí jejího grafu.

Graf funkce f ve zvolené soustavě souřadnic Oxy v rovině je množina všech bodů $X[x, f(x)]$, kde x patří do definičního oboru funkce f.

Žáci již ze základní školy mají o grafech určitou představu. Je však důležité, aby si uvědomili, co je pro graf funkce charakteristické. K tomu můžou sloužit výukové karty 1 - 8 (Příloha 2). Žáci mají za úkol vybrat grafy, které zobrazují funkce a vyřadit ty, které funkcemi nejsou. Vhodně se zde přitom dá využít znalostí žáků. Ke grafům funkcí se dají přiřadit nějaké závislosti z reálného života. Například zaznamenávání nějaké fyzikální veličiny jednou za určitou dobu (diskrétní graf 4), závislost výšky hladiny ve vodní nádrži v závislosti na čase (spojitý graf 6), závislost znaménka na čísle (graf 2) nebo závislost vlhkosti vzduchu, kdy přístroj měřil ve dvou různých, na sebe nenavazujících časových intervalech (graf 8). Pro graf 3 však žádná taková závislost neexistuje. Podle M. Hejného [2, s. 247] může žák právě v tomto případě argumentovat tím, že celý graf se dá pouze pootočit a pak již bude grafem funkce. Zde potřebujeme definici grafu funkce, kde je graf charakterizován jako množina bodů $X[x, f(x)]$, kde x patří do definičního oboru funkce f. Z našeho zadaného grafu můžeme tedy vyčíst definiční obor, který bude obsahovat pouze jeden prvek. Pro ten by měla existovat právě jedna funkční hodnota. Na grafu jich je však nekonečně mnoho. Proto to není graf funkce. Pokud by se s obrázkem pouze pootočilo, pojmenování os soustavy souřadnic by zůstalo stejné, tedy by se nic nezměnilo a graf by stále nebyl grafem funkce. Pokud bychom graf pootočili a zároveň přejmenovali osy soustavy souřadnic (tedy vyměnili osu o_x za osu o_y), potom by se nám ale změnil definiční obor na všechna reálná čísla, a ke každému z nich by existovala právě jedna funkční hodnota, tedy byl by to graf funkce. Tyto dva grafy však nemůžeme vzájemně zaměňovat. Poslední řešení zároveň nesplňuje žákům argument, že by funkce vznikla pouhým pootočením (což nezahrnuje přejmenování os).

Co vše tedy může žák z grafu funkce vyčíst (viz. obr. 1)? K jednotlivým hodnotám x můžeme získat jejich funkční hodnotu $y = f(x)$ jako druhou souřadnici bodu $X[x, y]$. Analogicky k funkčním hodnotám získáme hodnoty x jako první souřadnice bodů $X[x, y]$ (zde jich může existovat i nekonečně mnoho). Definiční obor vyčteme pomocí sestrojení kolmých průmětů všech bodů grafu na osu o_x. Také můžeme vyčíst i množinu všech funkčních hodnot, kterých funkce nabývá: s využitím kolmých průmětů všech bodů grafu na osu o_y (pokud jsou žáci zvídaví, sami se začnou ptát, co můžeme vyčíst z osy o_y, někteří na to přijdou sami, ostatním se musí pomoci určováním jednotlivých funkčních hodnot). Množinu všech funkčních hodnot, které funkce f v daném definičním oboru nabývá, nazveme oborem hodnot funkce f. Značíme ho symbolem H_f.

Obor hodnot funkce f je množina všech $y \in R$, ke kterým existuje aspoň jedno x z definičního oboru funkce f tak, že $y = f(x)$.



Obrázek 1: Čtení z grafu funkce

Cvičení:

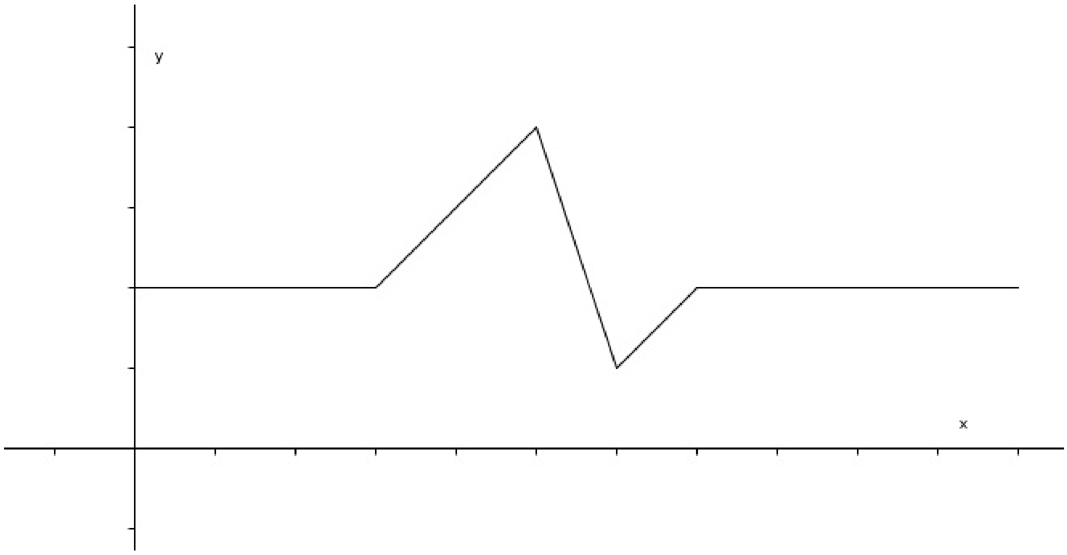
Př. 1: Načrtněte graf, který ilustruje následující situaci:

a) Teploměr zapisuje naměřenou teplotu každou hodinu. Petra zajímal průběh teploty v den 1. dubna. Hodnoty od půlnoci až do šesti do rána byly stejné, a to 5 °C. Následně každou hodinu teplota vzrostla o dva stupně až do desíti hodin (včetně). Potom však začalo pršet a teplota v jedenáct hodin klesla až do dvanácti na 11 °C. V jednu odpoledne déšť ustal a začalo svítit slunce. To způsobilo opět oteplení. V jednu hodinu bylo již 12 °C, a následně do tří hodin vždy teplota vzrostla o dva stupně. Potom teplota už pouze klesala vždy každou hodinu o jeden stupeň.

b) Cyklista vyjel na výlet v devět hodin ráno. První hodinu jel průměrnou rychlostí 13 km/h. Potom jeho průměrná rychlost kvůli náročnějšímu terénu klesla o 3 km/h. Přesně v poledne se cyklista zastavil v restauraci na oběd. Zde strávil celou hodinu, poté se opět vypravil na cestu. Jelikož už mu zbývala pouze čtvrtina cesty k cíli, nespěchal a jel tak rychle, aby tam dojel do tří hodin odpoledne. Zde si prohlédl místí zámek, nasvačil se a potom podle plánu nastoupil v pět do vlaku a hodinu jel domů.
(načrtněte graf závislosti dráhy cyklisty na uplynulém čase nebo závislosti průměrné rychlosti na uplynulém čase)

Př. 2: Určete definiční obory a obory funkcí na vybraných výukových kartách
(Příloha 2).

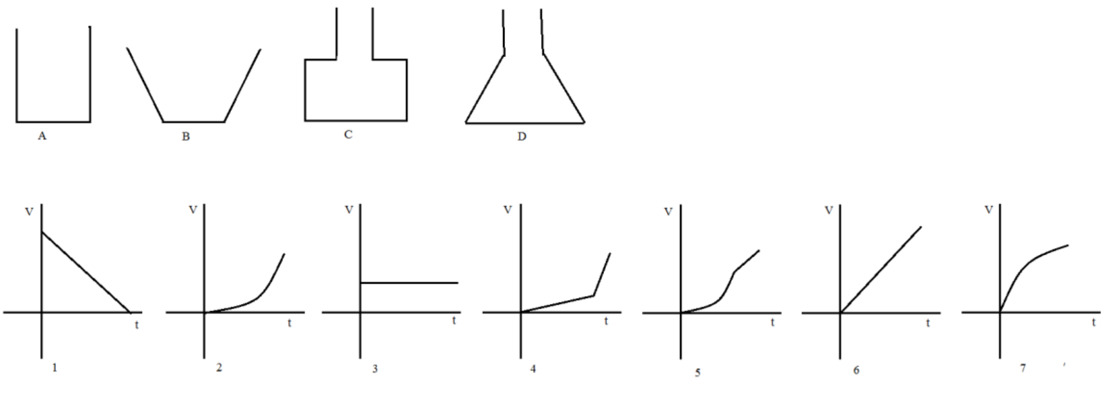
Př. 3: Navrhněte situaci, která by popisovala zadaný graf:
(možno využít i grafy z řešení Př. 1)



Obrázek 2: Graf funkce

Př. 4: Do grafu zaznamenejte průběh nějakého vašeho všedního dne. Využijte přitom tepovou frekvenci. Klidová tepová frekvence je 65 – 75 tepů za minutu, maximální tepová frekvence při velké zátěži může být až 214 tepů za minutu. Ke grafu připište komentář, kde činnosti během dne popíšete.

Př. 5: Do prázdných nádob různých tvarů napouštíme vodu. Přítok vody je rovnoměrný, neměnný. V obrázku 3 přiřaďte k nádobám grafy závislostí objemu vody v nádobě na čase. Ke grafům, které zůstanou nepřiřazené, navrhněte (pokud to lze) tvar nádoby.

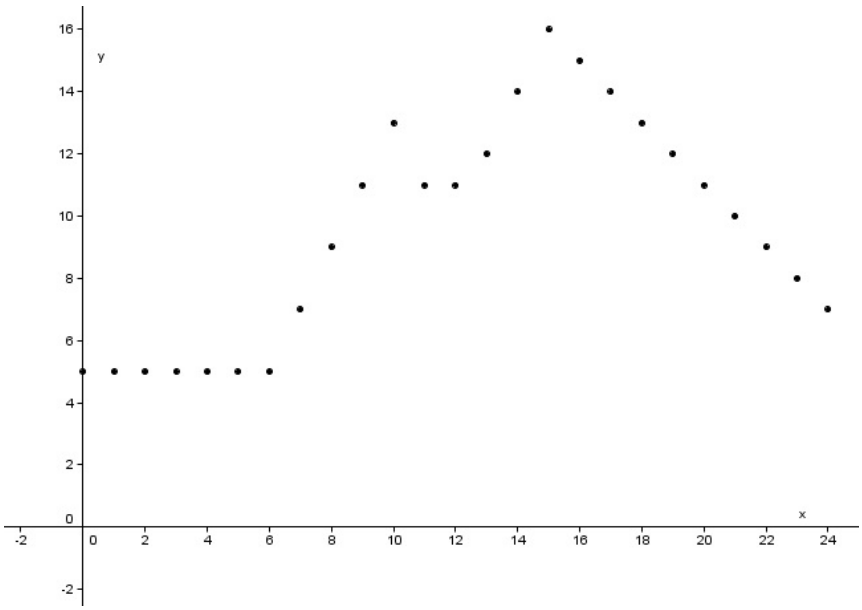


Obrázek 3: Nádoby

Řešení:

Př. 1:

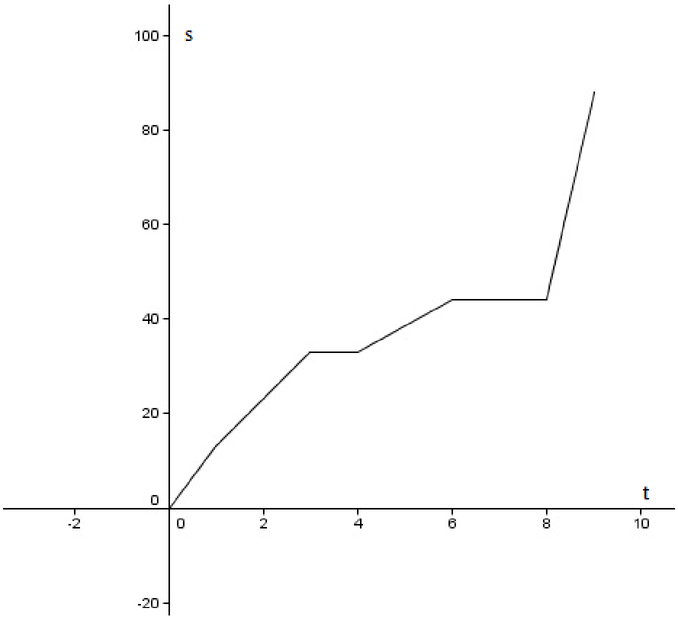
a) Graf na obrázku 6 se skládá z jednotlivých bodů, podle toho, jaká teplota byla v danou hodinu naměřena. Pokud by žáci sestrojili graf spojitý, vyjadřoval by přibližnou změnu teploty během dne (teplota se nemůže měnit skokově, proto je možné uvažovat i toto řešení).



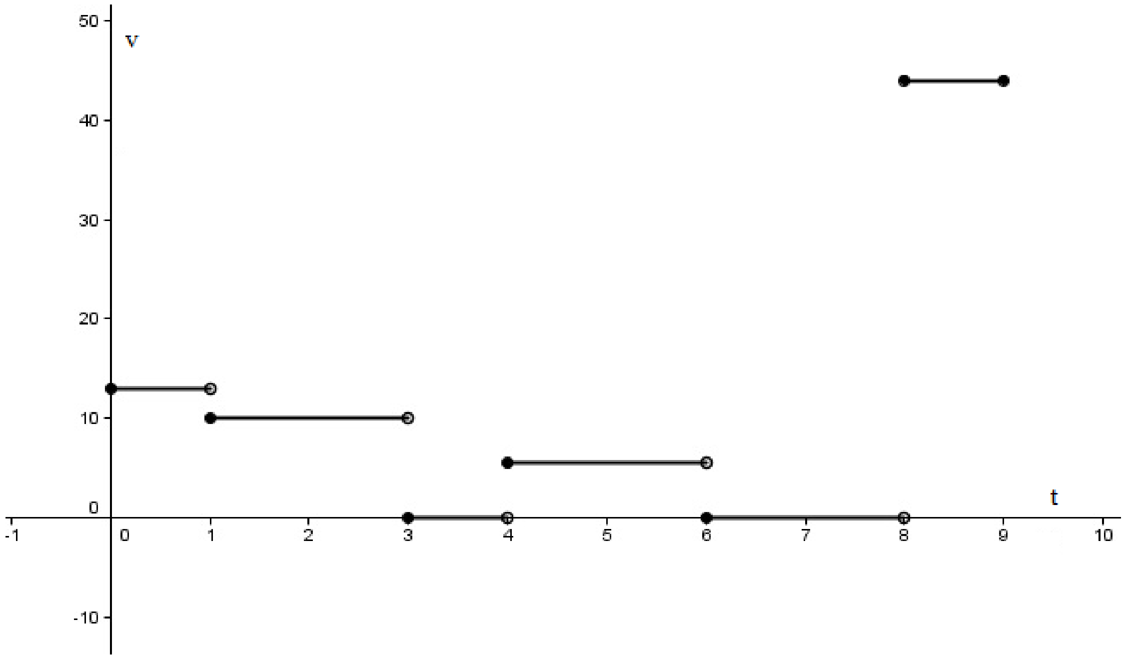
Obrázek 4: Graf teplot naměřených během dne

b) Možností řešení je více kvůli záměrně nespecifikovanému zadání. Každý žák může popisovat jinou závislost, mít jinak vyřešené popisky na osách. K tomuto příkladu se hodí diskuze se žáky a porovnání jejich různých řešení. Zde uvádím dva grafy, které situaci odpovídají:

První graf (obr. 4) popisuje závislost ujeté dráhy cyklisty (v kilometrech) na čase (v hodinách). Graf začíná pro hodnotu času rovnou nule, tedy nezohledňuje reálnou dobu. Podobně by vypadal i graf zohledňující danou hodinu s tím rozdílem, že by jeho první bod byl [9; 0], definiční obor by se tedy změnil z nynějšího $\langle 0; 9\rangle$ na $\langle 9; 18\rangle$, obor hodnot by zůstal stejný.



Obrázek 5: Graf závislosti dráhy na čase



Obrázek 6: Graf závislosti průměrné rychlosti na čase

Př. 2: viz. Příloha 2 (určit dle obrázku)

Př. 3: V této úloze je prostor pro tvořivost a fantazii žáka. Záměrně nejsou na osách uvedeny jednotky, aby si je žák zvolil a přizpůsobil vymyšlené situaci. Graf může znázorňovat množství vody v nádrži v závislosti na čase, cenu benzínu během roku, nebo vyjadřovat míru nadšení jedince pro nějakou činnost během dne atd.

Př. 4: Opět jde o tvořivou úlohu, kde záleží na individualitě žáka.

Př. 5: Dvojice: A6, B7, C4, D5. K prvnímu grafu nelze vytvořit takovou nádobu, podle grafu voda nepřitéká, ale odtéká, dokud není nádoba prázdná. Druhému grafu by odpovídal tvar podobný jako na v případě B, pouze by se nerozšiřoval, nýbrž zužoval. Třetí graf znázorňuje situaci, kdy je nádoba již plná a voda v ní tedy nepřibývá.

3.2 Lineární funkce

S lineárními funkcemi mohou mít někteří žáci zkušenosti již ze základní školy, kde se probírá přímá úměrnost, někdy podle ŠVP i lineární funkce (s využitím pro řešení soustav rovnic).

Vhodné je začít motivační úlohou, kterou zde uvádím ve cvičení jako příklad 6 (str. 28) i s rozborem uvedeným v řešení. V této úloze se žák seznámí s konkrétními předpisy a grafy lineárních funkcí na omezeném definičním oboru. Následuje příklad 7, kde je již lineární funkce na celém definičním oboru. U obou příkladů jsou další úkoly, které žáky navádějí na změny grafu přidáním různých koeficientů do předpisu. U příkladu 7 je možné, aby si situace navrhli žáci sami. Z obou příkladů by žáci měli odvodit obecný předpis lineární funkce i charakteristiky jejího grafu.

Lineární funkce je každá funkce na množině R (tj. funkce o definičním oboru R), která je dána ve tvaru

$$y = ax + b$$

kde a, b jsou reálná čísla.

Pokud některé z parametrů a, b nahradíme nulou, získáme speciální případy. Těmi jsou **konstantní funkce**, kde $a = 0$, tedy funkce ve tvaru $y = b$, nebo **přímá úměrnost**, kde $b = 0$, tedy funkce ve tvaru $y = ax$.

Grafem lineárních funkcí je **přímka**. K jeho sestrojení nám tedy stačí pouze dva body. Pro jejich získání si velmi často žáci dělají tabulku (obrázek 7), kde pro zjednodušení výpočtů dosazují za x i y nulu. V některých případech to žáci dělají automaticky a neuvědomují si, že mohou dosadit jakákoli čísla z definičního oboru. Při hodině matematiky ve čtvrtém ročníku nižšího gymnázia se stalo, že žákovi vyšel jiný graf funkce, než na tabuli. Argumentoval tím, že v tabulce měl jiná čísla. Tabulku měl vyplněnou správně, chyba spočívala ve špatném zanesení souřadnic těchto bodů. Způsob dosazování dvou nul do tabulky je také nevhodný u grafu přímé úměrnosti. V té samé třídě se v písemné práci se zadáním grafu přímé úměrnosti objevilo několik řešení, kde žáci vytvořili tabulku podle obrázku 7. Tím však získali dva shodné body. Protože nevěděli, kterými dvěma různými body mají přímku proložit, narýsovali ji náhodně.

x	0	
y		0

Obrázek 7: Tabulka pro získání bodů ke grafu lineární funkce

Již v motivačním příkladu je zahrnuta práce s grafem resp. s částí lineárního grafu. V jednotlivých úkolech žáci sami zjišťují, jak se mění graf v závislosti na parametrech a, b. Z této úlohy můžeme vycházet a odvodit všeobecná pravidla. Sami žáci by potom měli přijít na to, čím bude charakteristický graf funkce konstantní a graf přímé úměrnosti.

Součástí tohoto tematického celku je i seznámení žáků s funkcí klesající a rostoucí. V příkladech 6, 7 jsou zástupci obou typů funkcí (lze použít i výukové karty 9 - 12, které chceme rozdělit do dvou skupin podle toho, co mají společného). Můžeme se žáky tyto funkce porovnat, zjistit rozdíly v jejich předpisech i grafech, porovnat dvojice funkčních hodnot pro stejnou dvojici proměnných. Žáci by měli nejprve pochopit význam těchto pojmů na konkrétních příkladech a následně by měli sami přijít na obecné vyjádření.

Funkce f se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkce f se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Důležitý je i pojem rostoucí (resp. klesající) funkce v daném intervalu. K tomu použijeme obrázek grafu funkce, který na určitém intervalu roste, na jiném intervalu klesá (např. obrázek 2 str. 23). Žáci mají za úkol určit, zda jde o funkci rostoucí nebo klesající. Z grafu je čitelné, že nejde ani o jeden případ. Přesto však můžeme pomocí těchto pojmů popsat její průběh. Žáci někdy nevědí, zda interval, ve kterém funkce roste (resp. klesá) mají vyčíst z kolmého průmětu na osu o_x nebo o_y. Učitel může ukázat, co by se stalo, kdybychom zvolili špatnou variantu. Například u grafu funkce $f: y = |x|$ by dospěl k závěru, že na intervalu $\langle 0,\infty)$ je graf rostoucí i klesající zároveň.

Funkce f se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

S tímto pojmem by si měli žáci spojit rozdíl mezi konstantními a ostatními lineárními funkcemi. Dále je vhodné s žáky diskutovat, jaká specifika bude mít graf libovolné lineární funkce a zda funkce rostoucí (resp. klesající) je vždy prostá.

Lineární funkce využíváme k popisování reálných situací, k řešení soustav lineárních rovnic a nerovnic (kde rýsujeme více grafů do jedné soustavy souřadnic), později i v analytické geometrii.

Cvičení:

Př. 6: Cena jednoho kg mouky je 9 Kč. Přímo u mlynáře je možné nakoupit jakékoliv přesné množství za tuto cenu do 15 kg. Zakreslete graf závislosti ceny mouky na množství (zvolte vhodné jednotky na osy o_x a o_y) a zapište předpis funkce, která tuto závislost popisuje.

a) Z grafu vyčtěte, kolik bude zákazníka stát 5,5 kg mouky a kolik kg si zákazník koupí za 73 Kč.
b) Do stejné soustavy souřadnic narýsujte, jak by vypadal graf této situace, kdyby cena vzrostla o 10 Kč za zabalení k libovolnému množství mouky a opět zapište předpis. Jak se tento graf změnil oproti původnímu? Jaké následky by měla další změna ceny za balné?
c) Narýsujte graf a zapište předpis funkce charakterizující situaci, kdy se cena mouky zvýšila o 2 Kč (nepočítejte s balením). Jak se tento graf změnil oproti původnímu? Jaké následky by mělo snížení ceny mouky oproti původní ceně – svoji úvahu ověřte na příkladu.
d) Diskutujte, jak by se graf měnil při různých změnách ceny mouky a ceny za balné.

Př. 7: Maminka procvičuje se synem Petrem příklady. Petr dělá mamince naschvály a u každého výsledku změní znaménko: tedy záporná čísla převádí na kladná a obráceně. Nakreslete graf závislosti všech možných výsledků příkladů a Petrem vysloveného čísla, napište předpis funkce, která tuto situaci vystihuje.

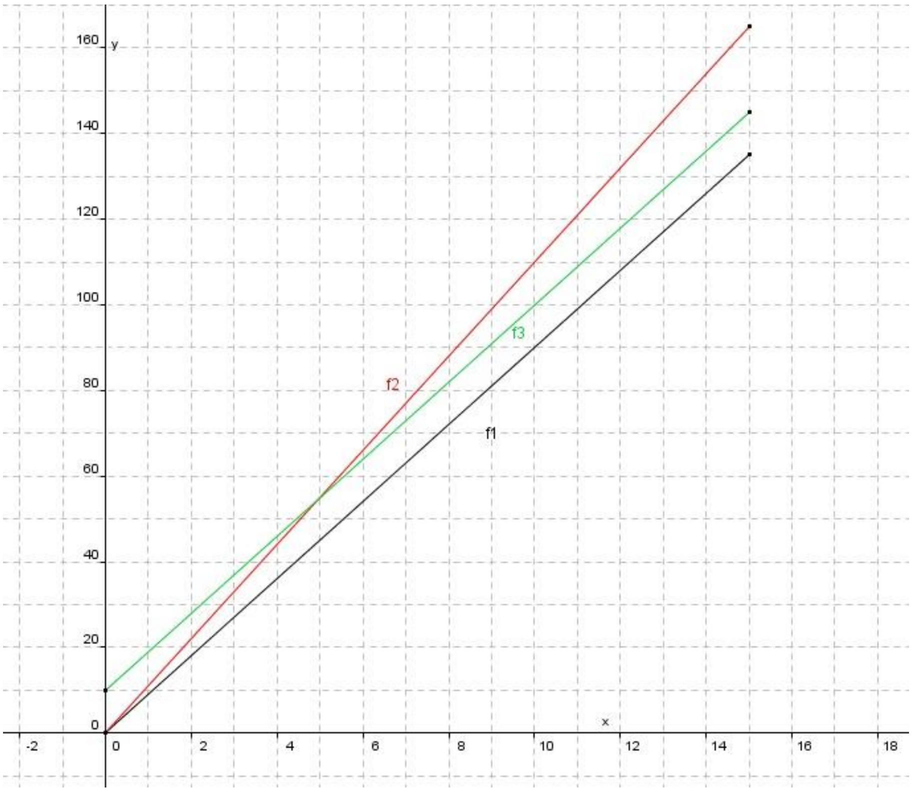
a) Jak by se graf a předpis funkce změnil, kdyby Petr násobil výsledek (-2)?
b) Jak by se graf a předpis funkce změnil, kdyby Petr k výsledku přičítal nějakou konstantu?
c) Jak by se graf a předpis funkce měnil, kdyby Petr výsledek násobil číslem a a k tomu přičetl číslo b.

Př. 8: Mobilní operátor nabízí dva tarify T150 a T0. Pro tarif T0 není nutné zaplatit měsíční paušál a za minutu telefonování zaplatíme 10 Kč. Pro tarif T150 musíme měsíčně zaplatit 150 Kč a za každou minutu telefonování zaplatíme 4 Kč. Určete, pro kolik provolaných minut měsíčně je výhodnější tarif T0. (převzato z [11])

Řešení:

Př. 6: Grafem funkce je úsečka z bodu $[0, 0]$ do bodu $[15, 135]$, kde na ose o_x je množství objednané mouky a na ose o_y je cena (jednotlivé kilogramy mohou symbolizovat centimetry na ose, cenu v korunách potom milimetry – graf černé barvy na obrázku 8).

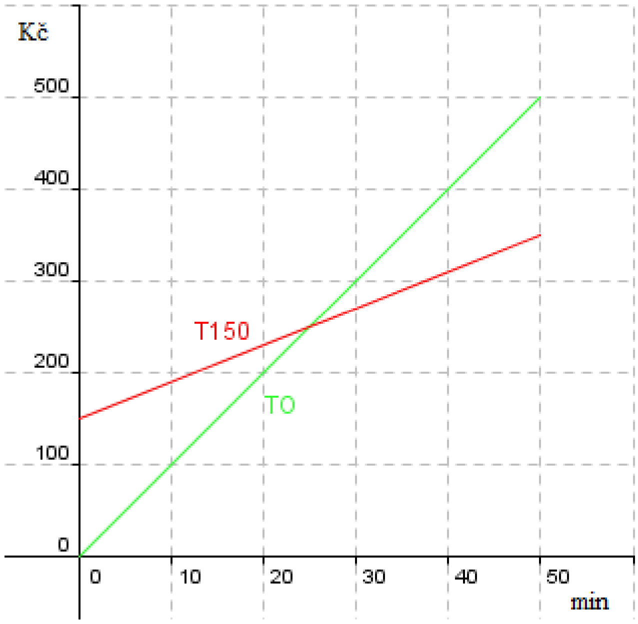
a) V této situaci dojde k posunutí grafu o 10 jednotek (milimetrů) výš (graf zelené barvy). Problémem je však zakázka na 0 kg mouky. Pro $x = 0$ bude funkční hodnota $f(0) = 10$. Což by znamenalo, že zákazník zaplatí za balné i v případě nulové objednávky. S žáky můžeme diskutovat, zda je to možné.
b) Zde graf bude více nakloněný, cena poroste rychleji (funkce červené barvy).
c) Graf bude stále rostoucí (není možné uvažovat zápornou cenu pro zákazníka), budou se měnit jednotlivé hodnoty. Graf se bude posunovat směrem nahoru (resp. dolů) podle ceny za zabalení a změna naklonění úsečky (tj. úhel s osou o_x) bude záviset na ceně zboží za 1 kg.



Obrázek 8: Grafy závislosti ceny na množství

Př. 7: Graf funkce je klesající na celém definičním oboru, jde o přímku procházející body například $[-2,2]$, $[3,-3]$. V dalších úkolech se opět jedná o posuny a naklonění původního grafu.

Př. 8: Oba grafy funkcí znázorníme do jedné soustavy souřadnic (viz. obr. 9). Grafy mají předpisy $T0: y = 10x$ a $T150: y = 4x + 150$. Výhodnější tarif je vždy ten, který má nižší hodnoty na ose s cenou. Tedy v intervalu $x \in \langle 0,25 \rangle$ je pro zákazníka výhodnější tarif T0, od 25 minut výš je výhodnější tarif T150.



Obrázek 9: Grafy funkcí TO a T150

3.3 Funkce s absolutními hodnotami

Tato kapitola již předpokládá teoretické znalosti pojmu **absolutní hodnota**. Je důležité s žáky tento pojem zopakovat:

Absolutní hodnota reálného čísla a je číslo $\|a\|$, pro které platí: je-li $a \geq 0$, je $\|a\| = a$; je-li $a < 0$, je $\|a\| = -a$.

Pro každé $a \in R$ je $|a| \geq 0$. Každému reálnému číslu je tedy jednoznačně přiřazena jeho absolutní hodnota, proto můžeme mluvit o funkci absolutní hodnoty s předpisem $y = |x|$. K této funkci je třeba sestrojit graf (Př. 9). To lze provést různými způsoby. V prvním způsobu vycházíme z grafu lineární funkce $y = x$ a s žáky diskutujeme o tom, kde a jak se hodnoty pro y změní a kde zůstanou shodné s touto funkcí. Žáci sami přijdou na to, že levá záporná část grafu se jakoby překlopí nad osu o_x. Ve druhém způsobu si na základě definice absolutní hodnoty rozdělíme definiční obor na dva disjunktní intervaly. V nich (pro každý zvlášť, opět podle definice) uvažujeme dva různé grafy lineárních funkcí: $f: y = x, x \in \langle 0,\infty)$ a $g: y = -x, x \in (-\infty, 0)$. Ty potom zakreslíme vždy v daném intervalu. Jejich sjednocením opět získáme graf funkce absolutní hodnota.

První způsob je vhodný pro úvodní příklad nebo pro absolutní hodnoty vložené v absolutní hodnotě, ne však pro předpisy funkcí, kde se vyskytuje součet nebo rozdíl různých absolutních hodnot. První způsob u žáků rozvíjí prostorovou představivost a celkově přispívá k pochopení některých souvislostí mezi všemi typy funkcí (například úloha 17[2]. v [2, s. 247]). Druhý způsob zase v mnohém připomíná způsoby řešení rovnic a nerovnic s absolutními hodnotami.

V této kapitole se žáci zároveň seznamují s dalšími typy funkcí jako je funkce sudá, lichá, zdola či shora omezená nebo funkce omezená. Také si definují intuitivně již známé pojmy maximum a minimum funkce. Pro vytyčení a upevnění těchto pojmů jsou opět vhodné výukové karty (13 – 16): žáci mají za úkol roztřídit grafy podle společných znaků – učitel musí karty vhodně zvolit tak, aby se grafy daly roztřídit jednoznačně. K této problematice je vhodnou aktivitou v hodině kreslení funkcí podle zadaných vlastností (viz. kap. 6.1.4).

Funkce f se nazývá **sudá**, právě tehdy když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D_f$ je také $-x \in D_f$.
2. Pro každé $x \in D_f$ je $f(-x) = f(x)$.

Funkce f se nazývá **lichá**, právě tehdy když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D_f$ je také $-x \in D_f$.
2. Pro každé $x \in D_f$ je $f(-x) = -f(x)$.

Sudost a lichost funkce lze jednoduše také určit z grafu. Žák by tento pojem měl odvodit buďto na základě zkušeností a návodů učitele právě z grafů sudých (resp. lichých) funkcí, nebo naopak vyvodí pravidla pro grafy těchto funkcí na základě jejich definice. Grafy sudých funkcí jsou souměrné podle osy o_y, grafy lichých funkcí podle počátku soustavy souřadnic.

[2] „Ak poznáte graf funkcie f, zostrojte graf funkcie a)$y = f(x) + a$; b) $y = f(x + a)$; c) $y = k \cdot f(x), k > 0$; d) $y = -f(x)$; e) $y = f(kx)$; f) $y = f(-x)$; g) $y = |f(x)|$.

Funkce f se nazývá **zdola omezená**, právě když existuje číslo d takové, že pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \geq d$.

Funkce f se nazývá **shora omezená**, právě když existuje číslo h takové, že pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \leq h$.

Funkce f se nazývá **omezená**, právě když je zdola omezená a zároveň shora omezená.

Opět je vhodné uvádět konkrétní příklady omezených funkcí: průměrná rychlost automobilu v závislosti na čase nebo teplota v závislosti na čase. S žáky by se mělo diskutovat, zda již znají nějaký konkrétní předpis omezené funkce (např. konstantní).

Říkáme, že funkce f má v bodě a **maximum**, právě když pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \leq f(a)$.

Říkáme, že funkce f má v bodě b **minimum**, právě když pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \geq f(b)$.

Ve cvičebnicích a učebnicích jsou v úvodní kapitole „Funkce a její graf“ zařazeny příklady, ve kterých se žáci setkávají se čtením údajů z grafů, mimo jiné se zde vyskytuje i úkol zjistit, pro která x je funkční hodnota nejvyšší (resp. nejnižší). Je vhodné podobnou úlohu zařadit i před vyslovením definic, aby si žáci nové pojmy spojili s něčím již známým.

Cvičení:

Př. 9: V kartézské soustavě souřadnic je dána úsečka s jedním bodem v počátku soustavy $P[0,0]$ a druhým bodem, který má souřadnice $Q[x,0]$. Nakreslete graf a zapište předpis závislosti délky úsečky na hodnotě x.

a) Jak by se změnil graf, když by se vždy k dané délce přičetlo číslo 2?

Řešení:

Př. 9: Předpis funkce je $f\colon y = |x|$, postup pro tvorbu grafu je popsán výše.

a) Zde jde o předpis $g\colon y = |x| + 2$.

3.4 Kvadratické funkce

Motivační úlohy jsou tvořeny pro již upravený tvar kvadratické funkce doplněním na čtverec, ze kterého se opět dají vyvodit posuny celého grafu rovnoběžně s osami. Můžeme také zadat sérii různých příkladů ve tvaru $g: y = k(x+l)^2 + m$, kde $k \in R\backslash\{0\}, l, m \in R$, ze kterých si opět žáci sami odvodí jednotlivé posuny původního grafu. K tomu je vhodné i využití počítačových programů (viz. kap. 4). V definici kvadratické funkce se však setkáme s jiným vyjádřením:

Kvadratická funkce je každá funkce na množině R (tj. o definičním oboru R) daná ve tvaru

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kde $a \in R\backslash\{0\}, b, c \in R$.

S tímto předpisem žáky seznámíme zadáním několika separovaných modelů, kde budou různé koeficienty a, b, c. Ty by měly zahrnovat i případy, kdy je a záporné číslo, b je rovno nule nebo c je rovno nule. Žáci načrtnou grafy svých zadaných funkcí a následuje diskuze ve třídě. Všem žákům vyjde parabola, pokaždé však umístěná jiným způsobem. Učitel má za úkol správně žáky navést na vyvození závislostí mezi různými koeficienty a, b, c a určitým umístěním grafu.

Grafem kvadratických funkcí je vždy **parabola**, která je souměrná podle osy rovnoběžné s osou o_y. Pokud je koeficient $a > 0$, jde o funkci zdola omezenou, minimum má ve vrcholu paraboly. Pokud je koeficient $a < 0$, jde o funkci shora omezenou a maximum má opět ve vrcholu paraboly. Pokud je $b = 0$ je graf souměrný podle osy o_y (funkce sudá), pokud je $c = 0$, prochází graf počátkem soustavy souřadnic.

Tvar kvadratické funkce z definice lze pomocí úpravy na čtverec převést na tvar, ze kterého můžeme vyčíst posuny po osách:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Potom vrchol paraboly má souřadnice $V\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$.

Grafy kvadratických funkcí se dají využít při řešení kvadratických nerovnic (podle grafu určíme, pro která x je funkční hodnota větší jak nula) nebo při soustavách rovnic a nerovnic, ve kterých se kvadratická funkce vyskytuje.

Cvičení:

Př. 10: Do kartézské soustavy souřadnic umístíme čtverec, jehož jeden vrchol je v počátku soustavy souřadné a druhý vrchol stejné strany čtverce má souřadnice $[x, 0]$. Napište funkci, která vyjadřuje závislost obsahu čtverce na x-ové souřadnici druhého vrcholu. Narýsujte graf této funkce.

a) Napište předpis funkce, která vyjadřuje závislost obsahu čtverce, jehož jedna strana má vrcholy o souřadnicích $A[2, 0], B[x, 0]$. Narýsujte graf této funkce.
b) Zapište předpis a narýsujte graf funkce, která vyjadřuje závislost obsahu obdélníku, který má poloviční obsah původního čtverce, na hodnotě x. Jak by se graf funkce změnil, kdyby obsah obdélníka byl dvojnásobný, nebo obecně k −násobný?

Př. 11: Hospodář chce vytvořit obdélníkovou ohradu pro ovce. K dispozici má 36 m pletiva. Jaké musí být rozměry obdélníku, aby ohrada ohraničovala co největší část pozemku?

Př. 12: Pomocí grafů kvadratických funkcí najděte taková $x \in N$, pro která bude platit:

$$x^2 + 6x + 13 < -x^2 - 4x + 3.$$

Tentýž příklad řešte i pro $x \in Z$ a $x \in R$.

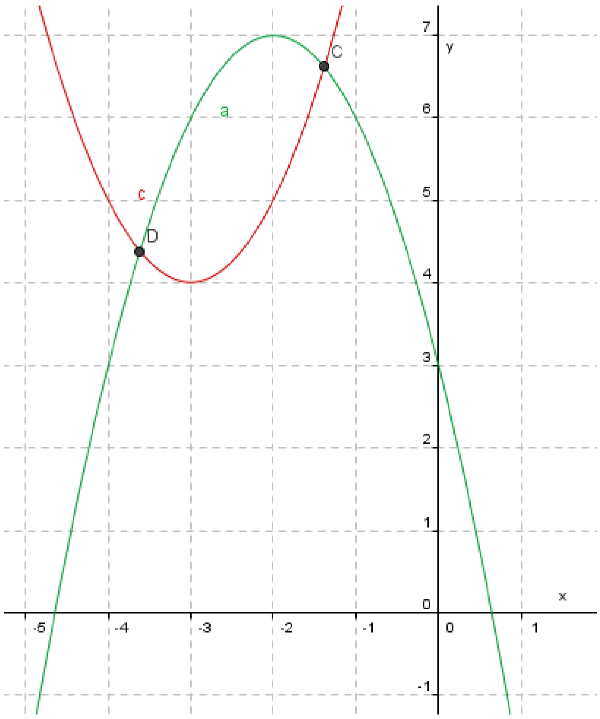
Řešení:

Př. 10: Jedná se o kvadratickou funkci $g: y = x^2$. Jejím grafem bude parabola s vrcholem v počátku soustavy souřadnic.

a) $g_2: y = (x - 2)^2$; celý graf funkce g se posune o -2 jednotky po ose o_x.
b) V prvním případě se původní graf „rozšíří“ (jedná se o funkci $g_3: y = \frac{1}{2}x^2$), ve druhém se naopak „zúží“ (jde o funkci $g_4: y = 2x^2$). Koeficient k tedy určuje, jak rychle bude v daném intervalu funkce klesat (resp. růst).

Př. 11: Obsah ohrady můžeme vyjádřit vztahem $S = x \cdot \frac{36-2x}{2}$, kde x je délka jedné strany obdélníka. Tuto závislost obsahu na délce jedné strany lze vyjádřit funkcí (po úpravě předchozího vztahu): $f\colon y = -x^2 + 18x$. Z této funkce hledáme její maximum. Narýsujeme tedy graf funkce (nebo je možné použít úpravu na čtverec a rovnou tak získat vrchol paraboly, tedy v tomto případě její maximum) a z něj vyčteme maximum, které je v bodě [9, 81]. Tedy délka jedné strany bude 9m, druhou stranu lze lehce dopočítat (také 9 m) a ohraničená plocha bude mít obsah 81 m^2.

Př. 12: Každou stranu nerovnice zapíšeme jako kvadratickou funkci:
$c\colon y = x^2 + 6x + 13$ a $a\colon y = -x^2 - 4x + 3$. K oběma funkcím narýsujeme grafy do jedné soustavy souřadnic. To vidíme na obrázku 11, kde body C a D vyznačují, kde se funkce rovnají. Mezi nimi se potom nachází body, které splňují danou nerovnost. Stačí pouze najít taková x z daného číselného oboru. Tedy pro $x \in N$ nemá rovnice řešení, pro $x \in Z$ je řešením množina $x = \{-3, -2\}$ a pro $x \in R$ je řešením interval $x \in (-3{,}62;\ -1{,}38)$.



Obrázek 10: Grafy k řešení nerovnice

3.5 Lineární lomené funkce

Žáci by již měli být seznámeni s funkcí nepřímá úměrnost, proto je vhodné použít nějaký příklad tohoto specifického případu lomené funkce jako motivační (např. [9, s. 75]).

Nepřímá úměrnost je každá funkce na množině $R \setminus \{0\}$ daná ve tvaru $y = \frac{k}{x}$, kde k je reálné číslo různé od nuly.

Grafem nepřímé úměrnosti je křivka, která se nazývá rovnoosá **hyperbola**. Žáci by měli sami přijít na to, jak se změní graf se změnou koeficientu k. První graf, se kterým by se žáci měli setkat je graf funkce $f: y = \frac{1}{x}$. Ten lze sestrojit na základě tabulky s dostatečným počtem různých hodnot pro x. Úkolem je zjistit, jak s využitím tohoto grafu můžeme získat graf funkce $g: y = \frac{2}{x}$. Žák by si měl uvědomit, že platí vztah $g(x) = 2f(x)$. Tedy nad každý bod grafu funkce f naneseme jeho vzdálenost od osy o_x. Žáci by opět měli být schopní vyjmenovat vlastnosti funkce nepřímá úměrnost.

Lineární lomená funkce je každá funkce na množině $R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, vyjádřená ve tvaru $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla, $c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$.

Nejprve žáci řeší lineární lomené funkce, kde jsou koeficienty $c = 1$ a $d = 0$. Zde jde zlomek částečně zkrátit a získáme tak funkci $t: y = a + \frac{b}{x}$. Její graf sestrojíme pomocí grafu nepřímé úměrnosti a jeho posunu po ose o_y. Na to by žáci měli přijít sami pomocí různých separovaných modelů lineárních lomených funkcí. K tomu slouží i stupňované úlohy (Př. 13), ve kterých žáci řeší nejprve jednodušší grafy funkcí a postupně přecházejí ke složitějším. Učitel by neměl rovnou vysvětlovat jednotlivé postupy, ale měl by být schopný poradit a navést žáka ke správnému řešení (například radou, že s předpisem funkce můžeme pracovat jako s výrazy, upravovat je). Postupně žáci přecházejí i ke složitějším předpisům funkcí, kde se vyskytují i koeficienty c, d. Zde budou pravděpodobně nejprve zkoušet graf sestrojit na základě tabulky, později by měli přijít na to, jak zjistí střed hyperboly. Předpokládá se zde znalost dělení mnohočlenu mnohočlenem.

Velmi častou chybou při určování vlastností lomených funkcí je tvrzení, že funkce je klesající (resp. rostoucí), protože „*graf funkce stále klesá*“. Žák v tomto případě ne zcela pochopil význam pojmu „klesající funkce“. Zde je potřeba pojem upřesnit: postupovat podle definice a dokázat, že ne pro všechna x z definičního oboru platí daná podmínka. Může to být způsobeno i tím, že toto je první z funkcí, která má bod nespojitosti (tedy jejím definičním oborem nemohou být všechna reálná čísla). Žák si tak pojem precizuje.

Součástí této kapitoly jsou i **racionální a polynomické funkce**. Racionální funkce je každá funkce ve tvaru $y = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, kde $m, n \in Z^+$, $a_m, \dots a_0, b_n, \dots b_0 \in R,\ b_n \neq 0$. Definičním oborem těchto funkcí jsou všechna reálná čísla, která nejsou řešením rovnice $b_n n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$. Polynomické funkce jsou speciálním případem racionálních, kde $b_n = b_{n-1} = \cdots = b_1 = 0, b_0 = 1$. Definičním oborem polynomické funkce jsou tedy všechna reálná čísla. Na základě těchto znalostí by žáci měli být schopni vyvodit rozdíly mezi grafy polynomických a racionálních funkcí, které polynomické nejsou. Žáci by měli poznat, že lineární i kvadratické funkce, které již znají, jsou speciálním případem polynomických funkcí a lineární lomené zase speciálním případem racionálních funkcí.

Cvičení:

Př. 13: Nakreslete grafy následujících funkcí a popište, co způsobí jednotlivé koeficienty:

a) $a: y = \frac{1}{x}$
b) $b: y = -\frac{1}{x}$
c) $c: y = \frac{2}{x}$
d) $d: y = \frac{1}{2x}$
e) $e: y = \frac{x+1}{x}$
f) $f: y = \frac{-2x-1}{x}$
g) $g: y = \frac{1}{x+1}$
h) $h: y = \frac{2}{-x-2}$

i) $i: y = \frac{x+2}{x+1}$

j) $j: y = \frac{5-2x}{x-1}$

<u>Řešení:</u>

<u>Př. 13:</u>

a) hyperbola se středem v počátku soustavy souřadné (pomocí bodů)

b) graf je souměrně sdružený s grafem funkce b

c) $c(x) = 2a(x)$ tedy nad každý bod grafu funkce a naneseme jeho vzdálenost od osy o_x

d) $d(x) = \frac{1}{2}a(x)$, tedy každý bod grafu funkce a posuneme o polovinu jeho vzdálenosti od osy o_x dolů

e) provedeme částečné dělení, na základě toho posuneme všechny body grafu funkce a o jednu jednotku směrem nahoru rovnoběžně s osou o_y

f) provedeme částečné dělení, na základě toho posuneme graf funkce b o dvě jednotky směrem dolů rovnoběžně s osou o_y

g) graf získáme z grafu funkce a posunutím o jednu jednotku ve směru záporné poloosy o_x

h) graf získáme z grafu funkce b posunutím o dvě jednotky ve směru kladné poloosy o_x

i) provedeme dělení dvojčlenu dvojčlenem, po dělení získáváme tvar $i: y = 1 + \frac{1}{x+1}$; tedy graf funkce g posuneme o jednu jednotku ve směru kladné poloosy o_y

j) po dělení dvojčlenu dvojčlenem získáme předpis $j: y = \frac{3}{x-1} - 2$, tedy sestrojíme funkci $j_1: y = \frac{3}{x}$, kterou posuneme o jednu jednotku ve směru kladné poloosy o_x a zároveň o dvě jednotky ve směru záporné poloosy o_y

3.6 Mocninné funkce

Pro tuto kapitolu je nutná znalost mocnin, proto je vhodné zařadit opakování teoretických pojmů (co je to mocněnec, mocnitel) a základních pravidel pro počítání s mocninami. Předpis mocninné funkce je následující: $g: y = x^n$ (napsat by ho měli na základě svých zkušeností a znalostí sami žáci).

Nejprve se začíná mocninnými funkcemi s přirozeným mocnitelem, tedy $n \in N$. Některé speciální případy těchto funkcí již žáci znají (lineární a kvadratické funkce). Sami by pomocí vhodně vybraných bodů měli odvodit grafy dalších funkcí společně s jejich vlastnostmi. Na základě jednotlivých příkladů si žáci uvědomí, že pokud je n liché číslo, pak obor hodnot tvoří všechna reálná čísla, naopak u n sudého je obor hodnot interval $\langle 0, \infty)$. Opět zde platí stejné posuny jako u kvadratických funkcí. Učitel by měl zadat sadu příkladů a nechat žáky, aby si na to přišli sami, případně ověřili své hypotézy.

Následují případy, kdy $n \in Z$, tedy mocninné funkce s celým exponentem. Je vhodné začít funkcí $g: y = a^0$. Je důležité si uvědomit, že výraz 0^0 není definován, tedy $a \neq 0$, což musíme zohlednit i v definičním oboru. Grafem této funkce potom bude přímka rovnoběžná s osou o_x, která prochází bodem $[1, 1]$ a v bodě $[0, 1]$ není definovaná. Nyní žáci začnou poznávat mocninné funkce s celým záporným exponentem. Zde je důležité zopakovat vztah $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. Není ho třeba žákům připomenout přímo, ale pomocí zadání funkce $f: y = x^{-1}$, kdy žáci zjistí, že jde o funkci nepřímé úměrnosti. To poznají i podle shodnosti grafů obou funkcí. Dále sami odvozují obecná pravidla pro grafy těchto funkcí na základě jednotlivých mocninných funkcí s $n \in Z^-$.

Jak víme, funkce f přiřazuje každému $x \in D_f$ právě jedno $y = f(x)$. Pokud budeme přiřazovat obráceně každému $y \in H_f$ všechna taková $x \in D_f$, mohou nastat dvě varianty. Například u lineárních funkcí (zadat žákům konkrétní předpis) vznikne nová funkce, jejíž definiční obor je obor hodnot původní funkce H_f. Druhou variantou mohou být například kvadratické funkce, kde pro $y \in H_f$ existují dvě $x \in D_f$ (až na vrchol paraboly), tedy nejde o jednoznačné přiřazení a nejedná se o funkci. Žáci by si měli vzpomenout na pojem prostá funkce. Následně bychom mohli definovat inverzní funkci.

Inverzní funkce k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí:

1. $D_{f^{-1}} = H_f$.
2. Každému $y \in D_{f^{-1}}$ je přiřazeno právě to $x \in D_f$, pro které je $f(x) = y$.

Na vztahy mezi funkcí f a její inverzní funkcí žáci přichází postupně na základě jednotlivých příkladů (Př. 15).

Dále se tato kapitola věnuje spíše počítání s mocninami s racionálním i iracionálním exponentem. Grafy funkcí se zde rýsují pouze pro funkce n-tá odmocnina z x.

Cvičení:

Př. 14: Napište předpis funkce, která vyjadřuje závislost objemu krychle na velikosti její hrany. Nakreslete graf této funkce.

Př. 15: Sestrojte graf funkce a do téže kartézské soustavy souřadnic i graf její inverzní funkce, určete předpis této funkce. Co mají všechny příklady společné?

a) $a: y = x$
b) $b: y = x - 1$
c) $c: y = 3x - 2; x \in \langle -1, 2 \rangle$
d) $d: y = x^2$
e) $e: y = x^2; x \in \langle 0, \infty)$
f) $f: y = x^3$

Řešení:

Př. 14: Předpis funkce je následující $g: y = x^3$.

Př. 15: Grafy funkcí g a její inverzní funkce g^{-1} sestrojené v téže kartézské soustavě souřadnic jsou souměrně sdruženy podle přímky $y = x$. $D_f = H_{f^{-1}}$ a zároveň $D_{f^{-1}} = H_f$.

a) $a^{-1}: y = x$
b) $b^{-1}: y = x + 1$
c) $c^{-1}: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}; x \in \langle -5, 4 \rangle$
d) d^{-1} není funkce

e) $e^{-1}: y = \sqrt{x}$

f) $f^{-1}: y = \sqrt[3]{x}$ pozor na definici n-té odmocniny, kde se definuje pouze z nezáporného čísla, avšak díky tomu, že funkce f je prostá na celém svém definičním oboru, můžeme uvažovat i třetí odmocninu ze záporného čísla

3.7 Exponenciální a logaritmické funkce

Zajímavým motivačním úkolem k exponenciálním funkcím je příklad poločasu rozpadu (Př. 16). Na tomto příkladu si žáci uvědomí rozdíl mezi lineární lomenou a exponenciální funkcí. Jejich grafy jsou si mírně podobné, ale exponenciální funkce jsou definované na celé množině reálných čísel. V příkladu 16 si žáci odvodí graf funkce nejprve na fyzikálním příkladu, potom na smyšlené situaci. Předpis funkce určují prvně u rostoucí funkce (předpis je bez zlomku a proto je pro žáky snadnější na něj přijít). Na základě této zkušenosti se snaží odvodit i předpis pro klesající exponenciální funkci z tohoto příkladu. Dále by měl učitel opět uvést několik příkladů různých exponenciálních funkcí, ze kterých by žáci vyvodili jejich základní vlastnosti. Bylo by vhodné, aby se mezi nimi vyskytoval i příklad, kdy je základ exponenciální funkce roven jedné.

Exponenciální funkce o základu a je funkce na množině R vyjádřená ve tvaru $y = a^x$, kde a je kladné číslo různé od 1.

Dalšími vhodnými příklady na exponenciální funkce jsou situace z reálného života, které se týkají finanční matematiky, hlavně složených úroků.

Před samotnou výukou logaritmických funkcí je potřeba zopakovat funkce inverzní. S logaritmy se žáci setkávají poprvé. Je poměrně složité najít vhodnou praktickou motivační úlohu. Zajímavé je srovnání se vztahem umocňování a odmocňování, které jsou také vzájemně inverzní funkce (příklad v [12]). Jako motivaci jsem pro žáky zvolila Př. 17, který předcházel vzniku logaritmů (více v kap. 1.1).

Logaritmická funkce o základu a je funkce, která je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$; a je libovolné kladné číslo různé od jedné.

Pro tuto funkci se volí speciální označení - $f: y = \log_a x$ (čteme: logaritmus x o základu a). Žáci nejprve pracují s grafy logaritmických funkcí, jako s inverzní k exponenciální funkci. Hledají a odvozují vlastnosti. Porovnávají funkční hodnoty pro různá $x \in D_f$. Až následně se seznamují s pojmem **logaritmus** a s pravidly jeho výpočtu a větami, které při výpočtu a hlavně později u logaritmických rovnic budou používat.

S logaritmy se v praxi můžeme setkat například v chemii při výpočtu pH (kontroluje se například u pitné vody), které je závislé na koncentraci vodíkových kationtů. K tomuto výpočtu se používá vztah: $pH = -\log(c_{H+})$.[13]

Pro obě třídy funkcí opět platí již známé posuny po osách, které by si žáci měli již sami uvědomovat.

<u>Cvičení:</u>

<u>Př. 16:</u> Narýsujte graf závislosti hmotnosti na poločase rozpadu. To je doba T, za kterou se počet jader nějakého radioaktivního prvku zmenší na polovinu. Počáteční hmotnost prvku je m (100%).[14]

a) Jak by vypadal graf, který znázorňuje v záporné poloose o_x minulost (tedy hodnota $x = -1$ je situace před jednou jednotkou poločasu rozpadu). Jakou hmotnost mělo těleso před 1 T?
b) Narýsujte graf, který by popisovat situaci, kde za jednotku času vzroste hmotnost tělesa o svůj dvojnásobek (uvažujte opět i situaci v minulém čase). Popište tuto situaci funkcí.
c) Popište funkcí i situaci v Př. 16a.

<u>Př. 17:</u> Zkuste přijít na to, jak využít následující tabulku pro zjednodušení násobení, stejně jako matematici v 15. století. Tabulku použijte na následující příklady:

a) $8 \cdot 32 =$
b) $32 \cdot 64 =$

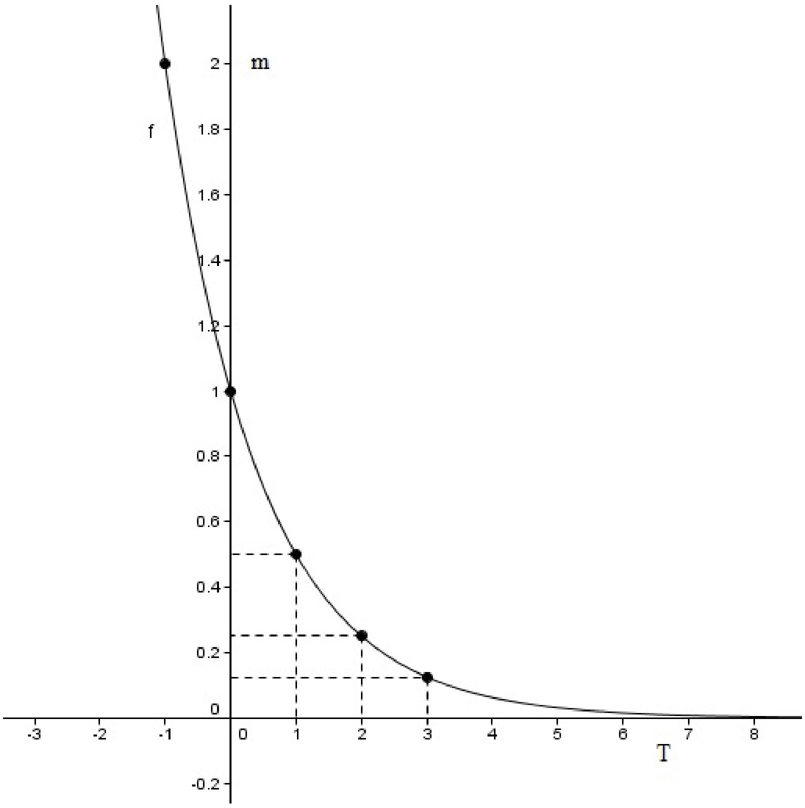
n	0	1	2	3	4	5	6	…
2^n	1	2	4	8	16	32	64	…

Obrázek 11: Tabulka závislosti aritmetické a geometrické posloupnosti

Řešení:

Př. 16: Počáteční hmotnost prvku je v grafu značena jako 1. Graf této situace by odpovídal obrázku 12, kde bychom uvažovali pouze $x \geq 0$.

a)



Obrázek 12: Graf exponenciální funkce

b) Tato funkce bude rostoucí, procházející bodem $[0, 1]$ a bude mít předpis $g: y = 2^x$.

c) Funkce f (viz. obr. 12) má předpis $f: y = \frac{1}{2}^x$.

Př. 17: Sčítání mezi čísly prvního řádku tabulky (obr. 11) odpovídá násobení čísel ve druhém řádku tabulky (čísla umístěná pod těmi ze sčítání). Například součtu $2 + 3 = 5$ odpovídá součin $4 \cdot 8 = 32$.

a) $8 \cdot 32$, to odpovídá součtu $3 + 5 = 8$, jehož výsledek odpovídá číslu 256

b) $32 \cdot 64$, to odpovídá součtu $5 + 6 = 11$, jehož výsledek odpovídá číslu 2048

3.8 Goniometrické funkce

V této kapitole předpokládám, že žáci již znají pojmy: radián, stupeň (a jejich vzájemný převodový vztah), obloukovou (resp. stupňovou) míru, jednotkovou kružnici. Tento tematický celek je vhodné uvést opakováním funkcí a jejich vlastností. Přitom učitel může zařadit i grafy, které navádějí na další typ funkcí (Příloha 1 – grafy 17, 18) a to jsou periodické funkce. Žáci se s nimi tak seznámí nejprve názorně a následně lépe pochopí definici.

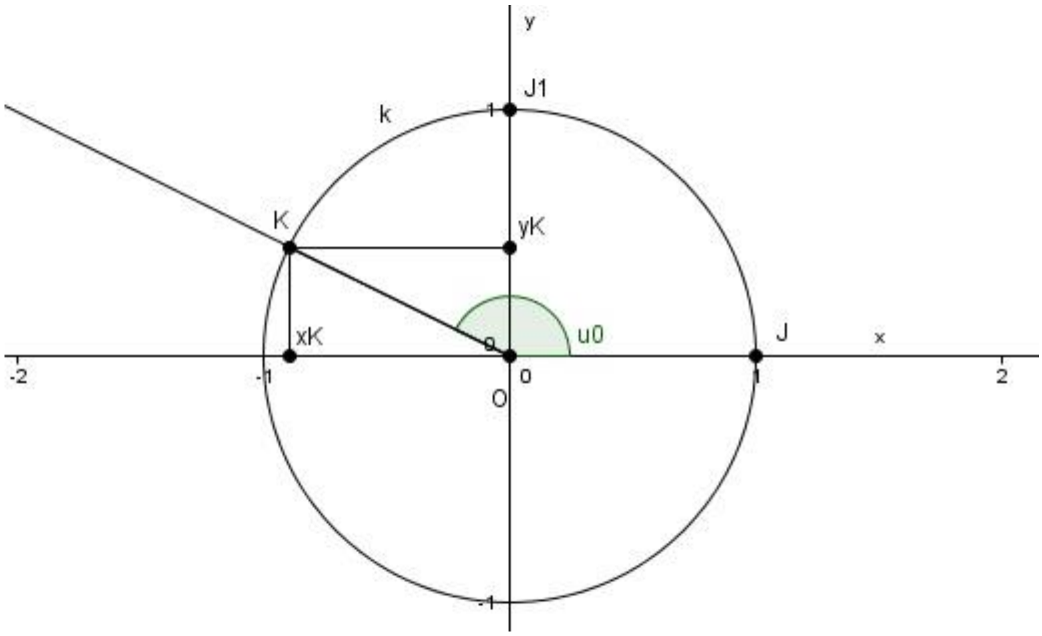
Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in Z$ platí následující podmínky:

a) je-li $x \in D_f$, pak $x + kp \in D_f$;

b) $f(x + kp) = f(x)$.

Číslo p se nazývá **perioda** funkce.

Nyní zavedeme goniometrické funkce pomocí jednotkové kružnice (viz. obr. 13). Využíváme přitom existenci právě jednoho orientovaného úhlu JOK, jehož počáteční rameno je OJ a jedna z velikostí tohoto úhlu je x radiánů. Na obrázku je základní velikost tohoto úhlu pojmenovaná u_0.



Obrázek 13: Definice funkcí sinus a kosinus pomocí jednotkové kružnice

Funkcí sinus se nazývá funkce na množině R, kterou je každému $x \in R$ přiřazeno číslo y_K.
Funkcí kosinus se nazývá funkce na množině R, kterou je každému $x \in R$ přiřazeno číslo x_K.

Pro tyto funkce se používají následující zápisy:

$$y = \sin x\,,$$
$$y = \cos x.$$

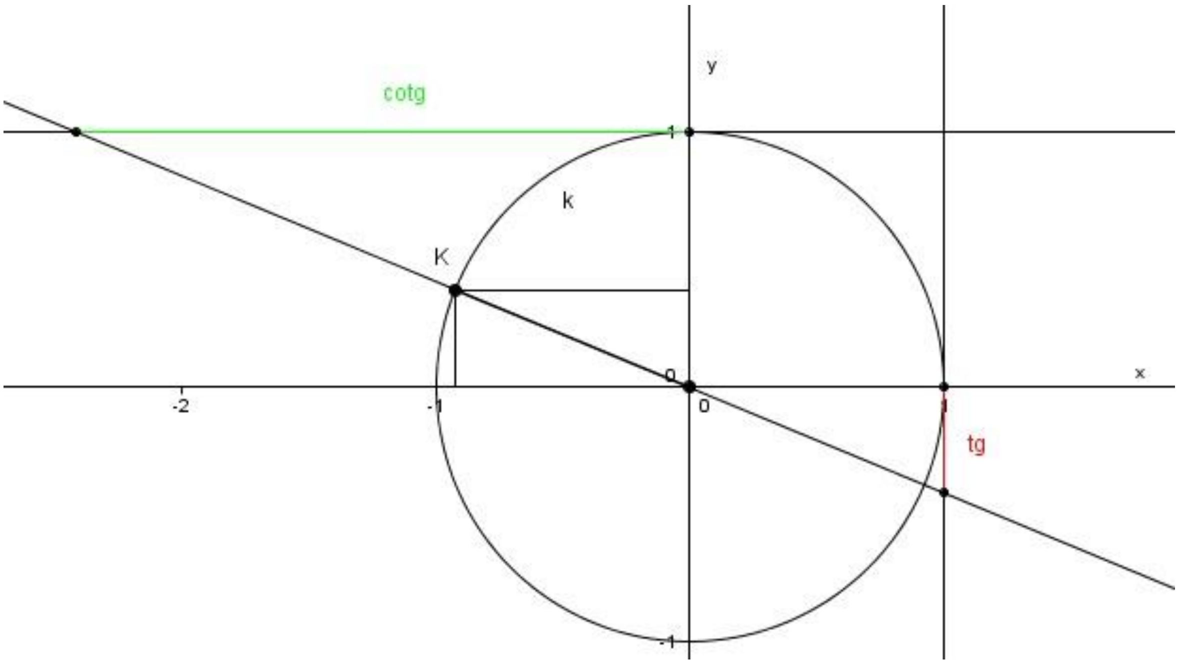
Další dvě goniometrické funkce zavedeme jako vztahy mezi již známými sinus a kosinus.

Funkce tangens je funkce daná ve tvaru $y = \frac{\sin x}{\cos x}$.
Funkce kotangens je funkce daná ve tvaru $y = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Místo zápisu v definici se častěji používají i následující:

$$y = \operatorname{tg} x\,,$$
$$y = \operatorname{cotg} x.$$

Kde najdeme tyto funkce na jednotkové kružnici pro daný bod je vidět na obrázku 14.



Obrázek 14: Definice funkcí tangens a kotangens pomocí jednotkové kružnice

Pro získání grafů pomocí jednotkové kružnice je vhodné použít dostupné aplety, které jsou dynamické, názorné a žákovi vhodně vysvětlují vznik grafů goniometrických funkcí (dostupné online např. [15]). Než však žákům představíme celé grafy, je vhodné s nimi zkusit alespoň část grafu sestrojit (Př. 18). Dále s nimi diskutovat, jak by graf vypadal celý a až následně použít již zmiňované aplety. Ke grafům přiřadíme názvy: **sinusoida**, **kosinusoida**, **tangentoida** a **kotangentoida**.

Dále opět žákům zadáváme různé předpisy goniometrických funkcí, pro které sestrojují jejich grafy. Úlohy by měli být řazené vzestupně podle náročnosti.

Cvičení:

Př. 18: Pomocí konstrukce určete přibližné hodnoty funkce sinus (resp. kosinus, tangens, kotangens) pro úhly 10 °, 20 °,… až 80°. Pomocí získaných údajů sestrojte graf funkce.

Řešení:

Př. 18: Narýsujeme úsečku AB o délce 10 cm (zvoleno, aby se dalo přesněji měřit a zároveň se nemusel složitě přepočítávat vztah). Nad ní sestrojíme Thaletovu kružnici. Úhloměrem vždy odměříme daný úhel ABX tak, že jedno jeho rameno bude úsečka AB, vrcholem bude bod B. Třetí bod C pravoúhlého trojúhelníka získáme jako průsečík Thaletovy kružnice a polopřímky CX. Hodnotu funkce sinus pro daný úhel je podíl délky strany AC a přepony (tedy 10 cm).

4 Využití počítače při výuce funkcí

V této kapitole naleznete některé běžně dostupné počítačové programy, které lze využít při výuce funkcí jedné proměnné na střední škole. Počítačové programy jsou výbornou pomůckou pro modelování grafů funkcí. Umožňují vložení parametrů, které se mohou libovolně měnit, což způsobí změnu grafu i předpisu funkce.

Informace o jednotlivých programech jsem čerpala z jejich oficiálních webových stránek [16; 17] a z vlastních zkušeností, které jsem získala při práci s jednotlivými programy.

4.1 Program MS Excel

MS Excel je dnes nejpoužívanější tabulkový procesor od firmy Microsoft. Nejčastěji se používá se pro vytváření tabulek a grafů. V tomto programu se můžeme setkat s pojmem „Funkce“. Zde je ale potřeba upozornit na to, že se nejedná o funkce, které lze zadávat pomocí předpisu a ze kterých potom můžeme vykreslit graf, ale různé finanční, statistické, logické a jiné předdefinované vzorce. Mezi těmito „Funkcemi“[3] můžeme najít i matematické funkce, které nám umožní různé aritmetické výpočty a vrátí nám jejich výsledek.

Pokud chceme v tomto programu vykreslovat graf funkce, musíme využít tabulku. Graf jde totiž vkládat, pouze pokud máme zadanou určitou oblast dat, nejde jej tedy zobrazit prostým zadáním předpisu funkce. Nejprve je nutné vytvořit tabulku hodnot pro x a pro funkční hodnotu v tomto bodě $f(x)$. Musíme zvolit vhodné rozestupy pro hodnoty x (jiné jsou potřeba pro lineární funkce, jiné pro kvadratické nebo lomené funkce), aby graf funkce byl co nejpřesnější (např. pro lineární funkce stačí čísla ve větších intervalech, pro kvadratické funkce je třeba okolo vrcholu paraboly volit čísla v menších intervalech). Přitom můžeme využívat vzorce, které se odkazují na hodnoty v jiných buňkách (relativní či absolutní odkazy) nebo vkládají různé podmíněné příkazy. Pokud chceme, aby grafem byla plynulá parabola (a ne jako na obrázku 16 – s. 54), musíme zvolit správný typ grafu – bodový graf s vyhlazenými spojnicemi.

[3] používám označení „Funkce“, aby bylo jasné, že jde o předdefinované vzorce v MS Excel

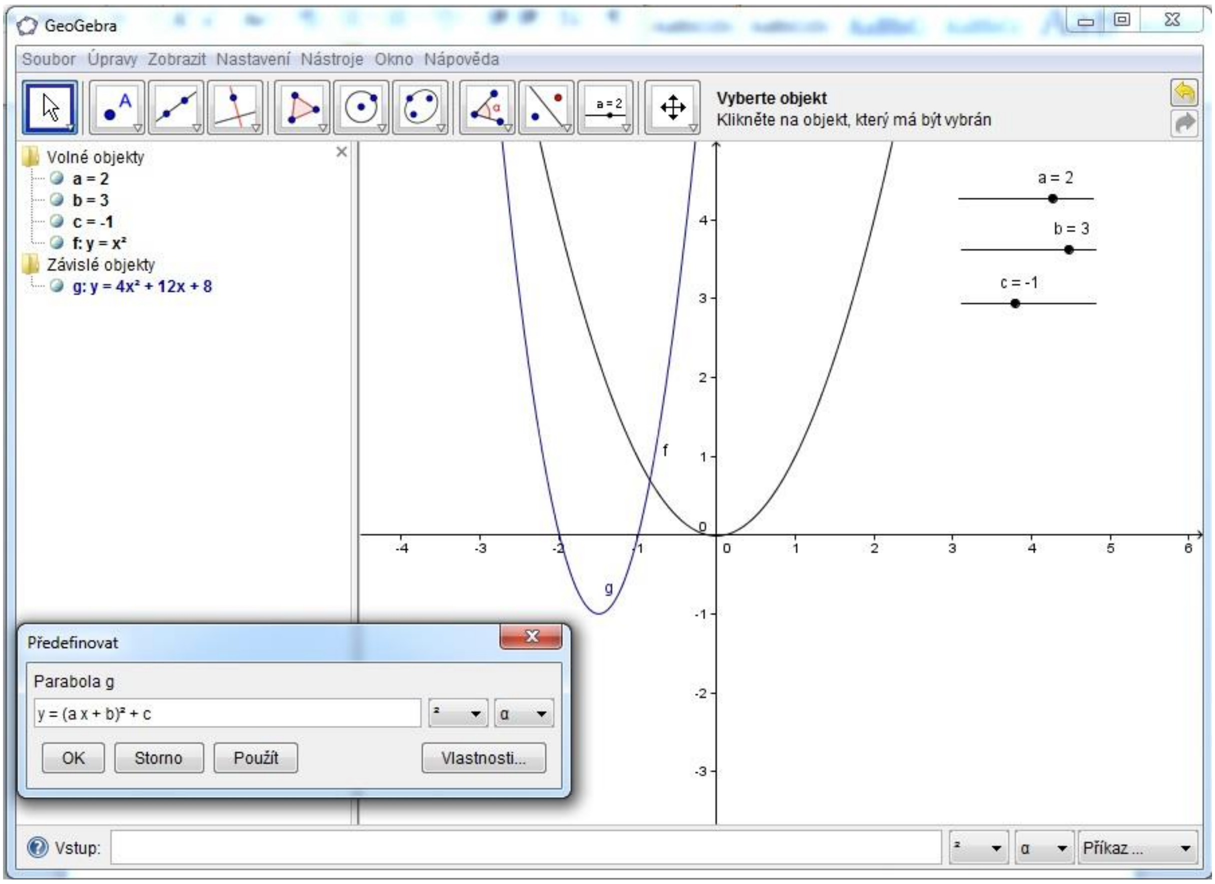
Výhodou tohoto programu může být právě uvedená tabulka hodnot, díky které žák vidí, že data získaná na základě předpisu funkce opravdu souhlasí se souřadnicemi v grafu.

4.2 Program GeoGebra

Základní informace o programu můžeme najít na oficiálních stránkách [16]: „*GeoGebra je volný a multiplatformní dynamický software pro všechny úrovně vzdělávání, poněvadž spojuje geometrii, algebru, tabulky, znázornění grafů, statistiku a infinitezimální počet, to vše v jednom balíčku. Tento program získal četná ocenění pro vzdělávací software v Evropě a USA.*“

Jde o dynamický matematický software, který je volně ke stažení nebo spuštění přímo v internetovém prohlížeči bez instalace. Umožňuje vytváření různých geometrických obrazců buď pomocí jejich „narýsování“ nebo zadáním jejich rovnice. S programem se člověk naučí intuitivně, případně může použít návod v českém jazyce dostupný na oficiálních webových stránkách programu.

Na obrázku 15 (ten zachycuje uživatelské prostředí programu GeoGebry) jsou vidět dvě okna. Jedno je algebraické, kde je každý zadaný prvek vyjádřen rovnicí, druhé je geometrické, kde jsou tyto prvky zobrazeny ve dvourozměrném prostoru. Obrazce, v našem případě funkce, lze zadávat buď pomocí tlačítek (ikony nahoře v okně, s popisky a popisem způsobu vložení) nebo pomocí rovnic napsaných do Vstupu (spodní část okna). Parametry je možné jednoduše vkládat pomocí „posuvníků“, kde táhnutím za bod lze jeho hodnotu snadno měnit. Ty najdeme mezi ikonami: na obrázku 15 jde o předposlední ikonu. U jednotlivých objektů lze měnit barvu, styl čáry, popis, atd.



Obrázek 15: Uživatelské prostředí programu GeoGebra

Na obrázku 15 je ukázka funkce g se třemi parametry (její zápis je možné přečíst v podokně „Předefinovat“), které, jak už bylo řešeno, můžeme měnit pomocí posuvníků (vpravo nahoře). Zároveň se nám změní graf funkce i předpis funkce (v algebraickém okně – u kvadratických funkcí zde nalezme vždy jen obecný zápis). Kromě toho je zde vložená i funkce f, která je nezávislá, tedy nebude se nikdy měnit (proto je řazena mezi volnými objekty).

Na oficiálních webových stránkách programu GeoGebra [16] lze také najít již vypracované výukové materiály (lze nalézt i materiály na výuku funkcí). Pomocí tohoto programu jsou vytvořeny veškeré obrázky grafů funkcí v celé diplomové práci.

4.3 Program Goenext

Geonext je podobně jako GeoGebra dynamický matematický software šířený pod GNU General Public License[4]. Je tedy volně ke stažení na internetu nebo se dá otevřít bez instalace na oficiálních webových stránkách [17]. Umožňuje vytváření geometrických konstrukcí pomocí jednoduchých konstrukčních nástrojů (obrázek 17 – s. 56). Ovládání je poměrně snadné, intuitivní.

Funkce se vkládají jednoduše (kliknutí na tlačítko Graf funkce a do nově otevřeného okna zadáte předpis funkce a potvrdíte). U funkcí typu *sin(x), log(x)* a podobných je nutné psát první písmeno velké, tedy „*Sin(x)*“ atd. Odmocnina se zadává pomocí zkratky „*Sqrt(x)*“, exponenciální funkce pomocí „*Exp(x)*“. Problém vzniká, pokud chceme zadat funkci s parametry. Protože v tomto programu neexistuje předdefinovaný posuvník pro měnění hodnoty parametru, musíme si jej sami vytvořit (postup čerpán z [19] viz. obr. 17). Potom stačí znát způsob zadávání parametrů ve funkcích a námi vytvořená aplikace bude fungovat. Pro studenty se mi zdá postup poměrně složitý na vysvětlování, ale pokud chceme použít výhradně Geonext, dají se funkce s parametry vykreslit.

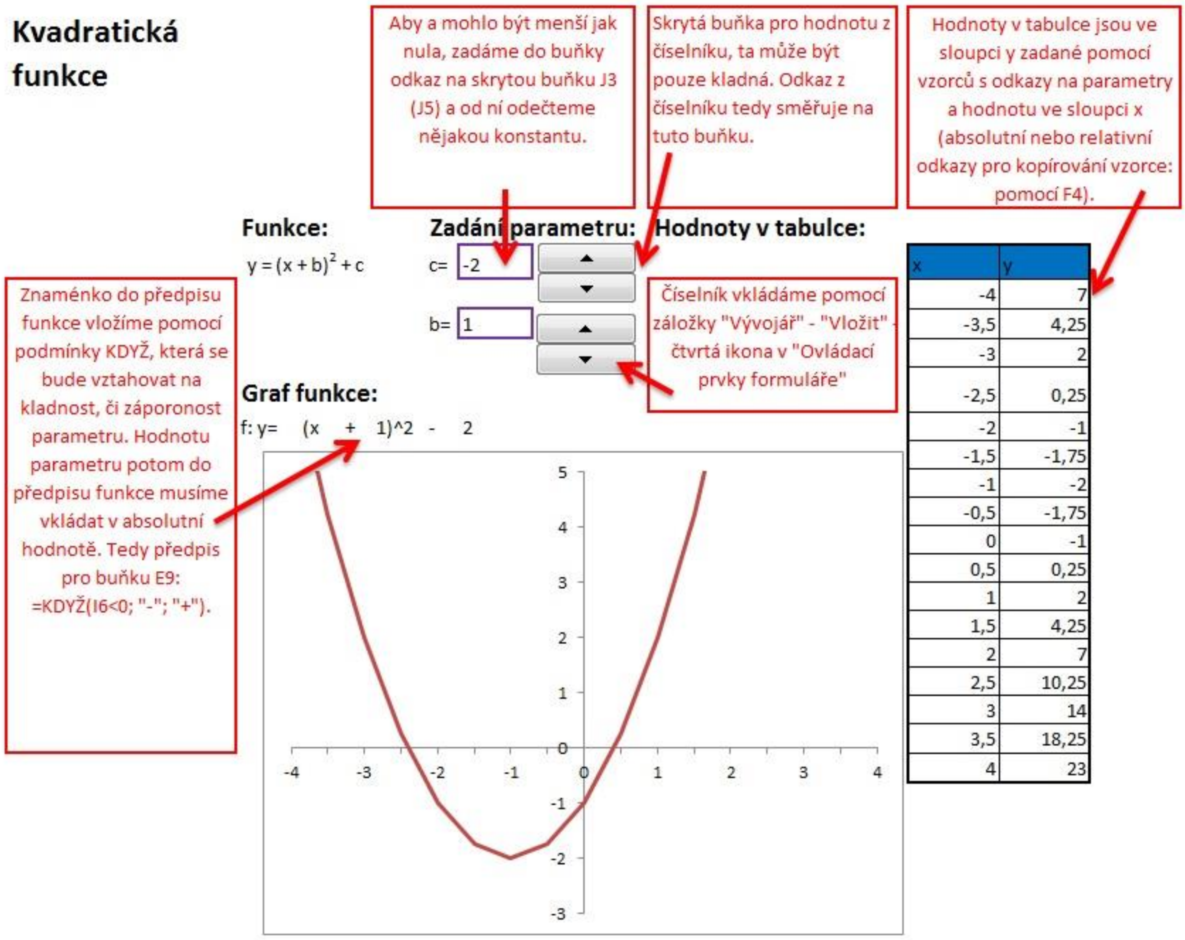
[4] *„Programy s touto licencí je možno používat volně, lze je modifikovat i šířit, ale pouze za předpokladu, že tento software bude šířen bezplatně (případně za distribuční náklady) s možností získat bezplatně zdrojové kódy. Toto opatření se vztahuje nejen na samotný software, ale i software, který na jeho základě vznikl.“* [18]

4.4 Návrhy na aktivitu

Využití programu MS Excel nebo GeoGebra (resp. Geonext).

<table>
<tr><th>Název:</th><th>Modelování funkcí v programu MS Excel</th></tr>
<tr><td>Potřeby:</td><td>Počítačová učebna, program MS Excel</td></tr>
<tr><td>Počet žáků
ve skupině:</td><td>1 (individuální práce)</td></tr>
<tr><td>Časová náročnost:</td><td>1 vyučovací hodina (matematika, informatika)</td></tr>
<tr><td>Cíle:</td><td>Upevnit používání vzorců a podmínek „KDYŽ“ v programu MS Excel
Představit praktické využití tohoto programu
Vytvořit aplikaci pro vykreslování základních funkcí a jejich posunů (pomocí parametrů)
Procvičit základní funkce a jejich posuny
Uvědomit si význam jednotlivých parametrů u různých typů funkcí (společné znaky)
Upravit rozhraní programu do určité estetické podoby</td></tr>
<tr><td>Potřebné znalosti:</td><td>Vkládání vzorců do buněk
Absolutní a relativní odkazy na buňky souboru
Ovládání podmínky „KDYŽ“
Vkládání grafů a jejich nastavení
Používání číselníku (není nutné, stačí hodnotu parametru doplňovat ručně)</td></tr>
<tr><td>Zadání úkolu:</td><td>V programu MS Excel vypracujte aplikaci, která bude zobrazovat grafy funkcí. Na výběr jsou tyto typy funkcí:
- lineární funkce
- lineární funkce s absolutní hodnotou
- kvadratická funkce
- lineární lomená funkce
Každá aplikace bude mít tyto části:
Nadpis, jméno žáka, předpis základní funkce (bez posunů)
Vypracované grafy, které reagují na změnu parametrů</td></tr>
</table>

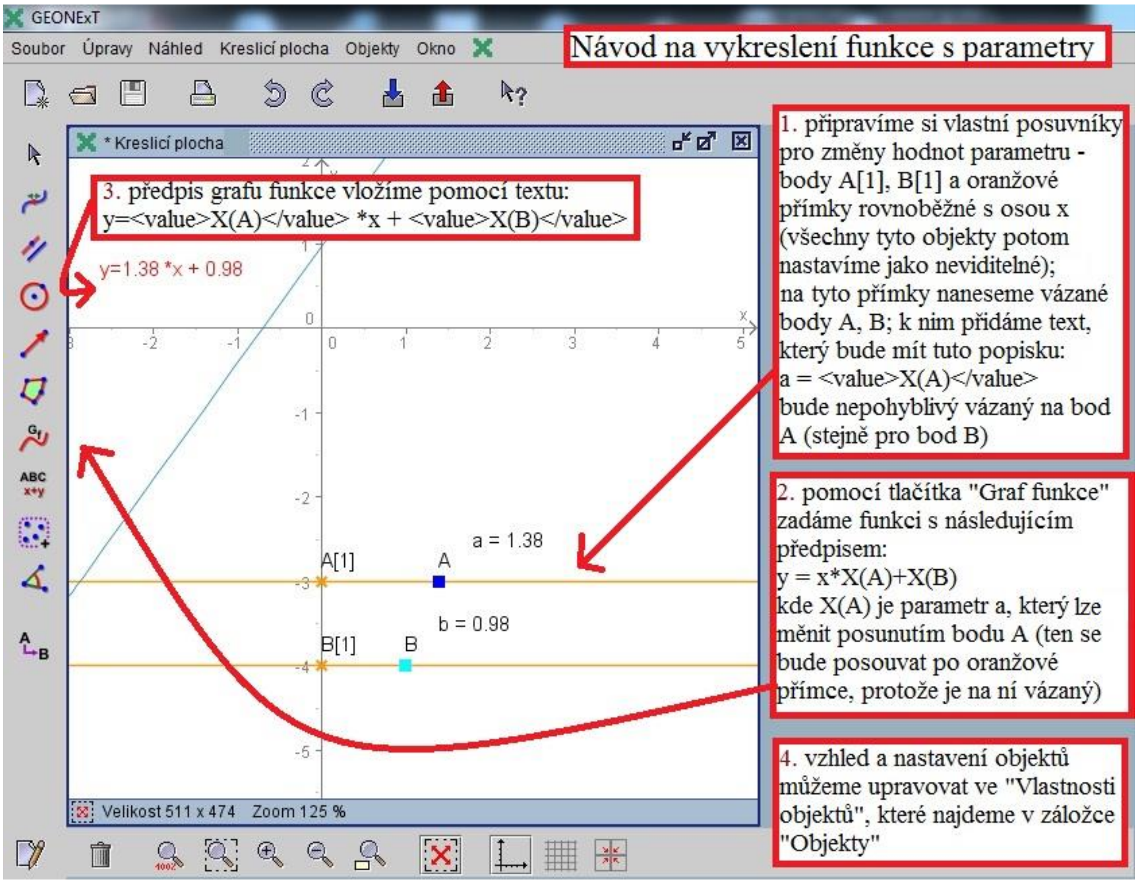
	(tj. zvlášť grafy pro tyto funkce – příklad na kvadratické: $f_1: y = a \cdot x^2$ $f_2: y = (x + b)^2$ $f_3: y = x^2 + c$ $f_4: y = (x + b)^2 + c$ $f_5: y = a \cdot (x + b)^2 + c$) 3. Předpis funkce se zvolenými parametry 4. Tabulka hodnot x a $f(x)$ s daty pro graf (tedy hodnoty se také mění se změnou parametrů) Upravte vzhled aplikace tak, aby vše bylo přehledné a estetické.
Hodnocení:	Žáci prezentují své aplikace a zároveň diskutují o významu parametrů (co přesně v grafu mění, zda tento princip funguje u všech typů grafů). Společně diskutují i o grafické stránce aplikace.
Poznámky:	Vypracované příklady jsou v přiloženém souboru Funkce.exe. Lineární lomenou funkci doporučuji přiřadit šikovnějším žákům. Zde je třeba ji rozdělit na dvě funkce (každá větev hyperboly má svoji), protože graf je vykreslován z tabulky a proto MS Excel nerozpozná, že definičním oborem funkce nejsou všechna reálná čísla (tedy graf prochází i bodem [0;0]). Podrobnější návod na tvorbu aplikace je popsán v následujícím obrázku 16. Tímto způsobem vzniká aplikace, kterou je možné využít při výuce (pouze jako příklad). Slouží pro názorný výklad změn grafů s určitým parametrem (koeficientem). Aplikaci je možné použít i jako kontrolu pro žáka, zda příklad vypracoval správně (při samostudiu).



Obrázek 16: Stručný návod na tvorbu aplikace v MS Excel

Název:	**Modelování funkcí v programu GeoGebra**
Potřeby:	Počítačová učebna, program GeoGebra
Počet žáků ve skupině:	1 (individuální práce)
Časová náročnost:	1 vyučovací hodina (matematika, informatika)
Cíle:	• Vytvořit aplikaci pro vykreslování základních funkcí a jejich posunů (pomocí parametrů) • Procvičit základní funkce a jejich posuny • Uvědomit si význam jednotlivých parametrů u různých typů funkcí (společné znaky) • Seznámit se s programem GeoGebra a jeho využitím
Potřebné znalosti:	• Vkládání funkcí do programu GeoGebra • Vkládání posuvníků

Zadání úkolu:	V programu GeoGebra vypracujte aplikaci, která bude zobrazovat grafy funkcí. Každá aplikace bude mít tyto části: 1. Nadpis, jméno žáka, předpis nebo název základní funkce (bez posunů) 2. Vypracovaný graf pro funkci s parametry, kde graf reaguje na změnu parametrů 3. Posuvníky pro změnu parametrů Upravte vzhled aplikace tak, aby vše bylo přehledné a estetické.
Hodnocení:	Žáci prezentují své aplikace a zároveň diskutují o významu parametrů (co přesně v grafu mění, zda tento princip funguje u všech typů grafů). Společně diskutují i o grafické stránce aplikace.
Modifikace:	Stejné zadání lze použít i při tvorbě v programu GeoNext. Zde je však postup mírně náročnější hlavně z důvodu absence vkládání číselníků. Postup pro tvorbu této aplikace můžete najít na obrázku 17. Vypracované aplikace jsou potom na přiloženém CD v souboru Funkce_GEONExT.
Poznámky:	Vypracované příklady jsou na přiloženém CD v souboru Funkce_GeoGebra. Zde je výhodou, že funkce se vykresluje podle předpisu, tedy není problém s lineární lomenou funkcí. Jde taktéž zadat i goniometrické či exponenciální a logaritmické funkce. Možné je využít i tabulku, kde můžeme sledovat, jak na sobě závisí souřadnice bodu ležícího na grafu funkce (souřadnice bodu $A[x(A); y(A)]$ napíšeme každou zvlášť do jednoho pole v tabulce, tam se nám zobrazí přesná číselná hodnota). Tímto způsobem vzniká aplikace, kterou je možné využít při výuce. Slouží pro názorný výklad změn grafů s určitým parametrem (koeficientem). Aplikaci je možné použít i jako kontrolu pro žáka, zda příklad vypracoval správně.



Obrázek 17: Uživatelské prostředí Geonextu a popis vkládání funkcí s parametry

5 Aktivizující metody ve výuce

Aktivita jako pedagogický pojem je podle Pedagogického slovníku [20, s. 19] používán pro činnosti, při nichž musí člověk projevit vyšší úroveň iniciativy, samostatnosti, musí vynaložit větší úsilí, postupovat energičtěji, být celkově efektivnější. Například přihlížení žáka při učitelově řešení úlohy na tabuli je nižší úroveň aktivity než žákovo samostatné řešení úlohy v sešitě.

Aktivita jako taková není cílem vzdělávání. Aktivizace žáků ve výchovně vzdělávacím procesu se zaměřuje především na rozvoj klíčových kompetencí a osobnosti žáka [21].

Aktivizující metody můžeme vymezit podle J. Maňáka, V. Švece [22, s. 105] jako „*postupy, které vedou výuku tak, aby se výchovně-vzdělávacích cílů dosahovalo hlavně na základě vlastní učební práce žáků, přičemž důraz se klade na myšlení a řešení problémů.*“ Zaměřují se na myšlenkovou a charakterovou samostatnost žáka, jeho zodpovědnost a tvořivost. Počítají se zájmem žáků a dávají jim možnost částečně ovlivňovat konkrétní cíle výuky a využívat individuálního učení. [20, s. 105 – 107]

Tvořivost je podle Pedagogického slovníku [20, s. 235] duševní schopnost, která vychází z poznávacích a motivačních procesů, v níž hraje důležitou roli inspirace, fantazie a intuice. Výsledkem tvoření jsou taková řešení, která jsou nejen správná, ale současně nová, nezvyklá, nečekaná pro společnost nebo daného jedince. Proces tvořivosti mívá několik etap, například přípravu, dozrávání nápadu, „osvícení“, kontrolu, opracování.

Aktivizující metody mohou dobře posloužit i jako **motivace**. M. Hejný a F. Kuřina [1, s. 129] uvádí různé formy motivace ve výuce – vhodně vedená diskuse o zajímavé problematice, dobře položená otázka či formulace problému, diskuse o životní strategii nebo zajímavé úlohy či podnětné hry. To vyplývá i ze samotné charakteristiky motivace. Tu můžeme podle Pedagogického slovníku [20, s. 122] definovat jako souhrn vnitřních i vnějších faktorů, které:

1. vzbuzují, aktivují, dodávají energii lidskému jednání a prožívání;
2. zaměřují toto jednání a prožívání určitým směrem;
3. řídí jeho průběh, způsob dosahování výsledků;

4. ovlivňují též způsob reagování jedince na své jednání a prožívání, jeho vztahy k ostatním lidem a ke světu.

Existují různá dělení aktivizujících metod. Jejich klasifikace je kvůli stále vznikajícím variantám a obměnám poměrně složitá. M. Jankovcová [23, s. 100] uvádí základní čtyři skupiny (diskusní, situační, inscenační metoda a hry). Podrobnější třídění uvádí J. Maňák [21], který metody řadí na základě jejich příbuznosti do následujících skupin:

a) diskuzní metody – sokratický rozhovor, diskuse
b) heuristické metody – metoda řešení problému, projektová metoda, brainstorming
c) situační metody
d) inscenační metody – metody dramatické výchovy
e) didaktické hry
f) práce s textem
g) mentální mapování – myšlenkové mapy
h) skupinové metody – práce ve dvojicích, malých skupinách, kooperativní učení

Aktivizující metody nemohou nahradit metody přímého sdělování učiva. Ty totiž vytvářejí soustavu základních vědomostí žáka (tedy soustavu fakt, pojmů, vzorců, pouček, definic, podstatných vztahů, apod.). Tvůrčí myšlení potřebuje tyto vědomosti jako základ, o který se žáci při samostatné práci mohou opírat. Zároveň se po absolventech středních škol požaduje tvořivost, iniciativa, přizpůsobivost a smysl pro kolektivní práci, tedy klíčové kompetence, které klasická informačně receptivní výuková metoda nerozvíjí. [23, s. 111]

Pokud chceme srovnávat efektivitu tradiční výuky a výuky s prvky aktivizujících metod, potom tradiční výuka se jeví lepší v dosažených vzdělávacích výsledcích, kdežto přístup netradiční více rozvíjí kreativitu, nezávislost, zvídavost žáků a i jejich pozitivní postoj k učení a škole. [22, s. 106]

5.1 Didaktické hry

Hru můžeme vymezit jako specifický typ aktivity člověka (ale lze ji nalézt i u některých živočichů). Nejvíce se projevuje v prvních vývojových fázích člověka, ale v jiných variantách ho doprovází celý život. Může nabývat různých projevů. V nich se odrážejí sociální vlivy, vlivy prostředí a schopnosti daného jedince. Didaktická hra zachovává většinu charakteristik klasické hry. Můžeme ji vymezit jako „*takovou seberealizační aktivitu jedinců nebo skupin, která svobodnou volbu, uplatnění zájmů, spontánnost a uvolnění přizpůsobuje pedagogickým cílům.*“ [22, s. 127]

Didaktická hra by měla podle E. Krejčové, M. Volfové [24, s. 6] splňovat následující kritéria. Měla by být lákavá a přitažlivá a odpovídat věkovým zvláštnostem a schopnostem žáka. Hra by měla zaměstnávat co nejvíce smyslů. Její pravidla musí být srozumitelná a neměla by se příliš často měnit. Nutné je předem hru dobře organizačně i materiálově zajistit. Na každou vyučovací hodinu není nutné vymýšlet jinou hru – žák si alespoň osvojí pravidla a zaměří se na samotný obsah hry. Hry se do vyučování nezařazují náhodně, ale měly by mít určitý cíl. Při realizaci by se měl zapojit celý kolektiv, každý žák by měl být někdy úspěšný (nebo jeho skupina) – pro tento účel mohou sloužit hry s prvky náhody, kdy má i slabší žák naději na vítězství.

Mezi didaktické hry můžeme zařadit i činnosti jako je manipulace s různými předměty, hračkami, simulace aktivit, hry s pravidly nebo společenské hry (často upravené známé dětské hry). Vzhledem k rozmanitosti aktivit je složité didaktické hry jednoznačně klasifikovat. Jak uvádí M. Jankovcová [23, s. 100], didaktické hry můžeme třídit podle mnoha hledisek. Např. podle doby trvání (krátkodobé a dlouhodobé), podle místa, kde se odehrávají (ve třídě nebo i mimo ni), podle druhu převládajících činností (osvojování vědomostí, intelektových či pohybových dovedností), podle toho, co se hodnotí (kvalita, kvantita nebo čas výkonu), atd. Mimo jiné můžeme hry třídit i z hlediska zařazení ve výchovně-vzdělávacím procesu na motivační, získávání nových znalostí a zkušeností a hry na upevňování znalostí. [25]

Některé didaktické hry mohou mít i podobu **soutěže** (tj. taková modifikace her, kde je výsledek posuzován s ohledem na pořadí všech účastníků, družstev). Zde je možné vhodně využít vzájemné konkurence mezi žáky (nedoporučuje se však podněcovat samoúčelná rivalita a vítězství za každou cenu). Důležitým faktorem při výběru soutěžní hry je možnost zapojení a možnost dobrého výsledku méně úspěšných žáků – hra by měla být vyvážená. K tomu je nutné vhodně zvolit soutěžní skupiny (vyrovnané tak, aby nevyhrávali stále stejní žáci) i samotný výběr hry (je možné vybrat hru s podílem náhody). Učitel by měl u žáků pěstovat smysl pro spravedlivou hru, respekt k výhercům a toleranci k poraženým. [25]

5.2 Brainstorming

Brainstorming (v překladu „bouře mozků“ nebo „útok na mozek“) je metoda zaměřená na vyhledávání nápadů k danému problému. Hlavním smyslem je tedy produkce co nejvíce nápadů a následně posouzení jejich užitečnosti. Jde o jednu z heuristických metod, které jsou založeny na nalézání a objevování. Jsou stavěny na potřebě žáka po něčem pátrat, orientovat se, řešit problémy formou „pokus a omyl“. [21; 22, s. 164]

Tato aktivita má několik fází, kterými by měla projít. Nejprve všechny účastníky seznámíme s pravidly. V případě většího počtu účastníků, vytvoříme skupiny (doporučují se skupiny po 7 až 12 lidech). V další fázi musíme vymezit problém, který chceme řešit (resp. téma). Poté začíná produkce nápadů. Zde existují dva přístupy - strukturovaný (kdy mají možnosti se vyjádřit postupně všichni žáci, ať mají nápad nebo ne) a v praxi rozšířenější nestrukturovaný (spontánní přístup, kdy kdokoli může vyslovit svůj návrh bez ohledu na pořadí). Při této fázi se všechny nápady zapisují tak, aby byly dobře viditelné. Po ukončení produkce nápadů se vyřadí duplicity a začnou se hodnotit. Zde se uplatňuje kritické myšlení. Někdy se také doporučuje nápady nechat „uležet“. [22, s. 165; 26, s. 40]

Pravidla brainstormingu

- podílí se každý člen skupiny
- nápady se vyjadřují co nejspontánněji
- je povoleno i „fantazírování“ (někdy se přímo vyžaduje)
- kritika je zakázána (hodnocení probíhá až v další fázi)
- zapisují se všechny nápady
- je povoleno nechat se inspirovat již vyslovenými nápady, obměňovat je

Existují i další varianty této metody. Jednou z nich je tzv. **brainwriting**, což je písemná forma brainstormingu. Nápady se tedy píší anonymně na velký papír nebo na malé lístky. Pokud chceme dále nápady třídit, doporučuje se použít právě jednotlivé oddělené cedulky, se kterými se potom lépe manipuluje. Tato varianta je vhodná pro účastníky, kteří nejsou na brainstorming zvyklí, popř. jsou ostýchaví. Druhou variantou je tzv. **paradoxní brainstorming**. Zde jde o sbírání takových nápadů, které by přispěly k tomu, aby byl daný problém neřešitelný. [22, s. 166; 26, s. 41]

6 Navrhované aktivity a didaktické hry

V této kapitole třídím vytvořené aktivity a hry pro přehlednost do následujících skupin:

1) Deskové hry
2) Karetní hry
3) Hry s tajenkou
4) Ostatní

První tři skupiny představují různé didaktické hry. Do čtvrté skupiny jsem zařadila aktivity jako například brainstorming (a jeho varianty). Využití počítače je i s aktivitami uvedeno v kapitole 4.

6.1 Obecná pravidla vypracovaných aktivit a didaktických her

V této části práce popisuji obecně jednotlivé aktivity a didaktické hry. Při soupisu didaktických her jsem se řídila strukturou, kterou uvádí M. Jankovcová [23, s. 101]:

a) Název hry (autor nebo původ, doba vzniku)
b) Potřebné pomůcky a případné nároky na úpravu (vybavení) prostředí
c) Stručná, výstižná, srozumitelná a jednoznačná pravidla obsahující cíl hry a způsob jejího ukončení
d) Pedagogický cíl a podrobné instrukce pro učitele
e) Promyšlený a co nejobjektivnější způsob hodnocení výsledků resp. průběhu (pokud to již jednoznačně nevyplývá z pravidel)
f) Varianty či možné modifikace hry a s tím popř. spojené změny hodnocení
g) Zvláštní poznámky
h) Hlavní námět pro diskusi se žáky, opěrné body pro její usměrňování a zasazení do rámce teoretického učiva

Nejdříve popisuji strukturu hry obecně, proto záměrně neuvádím bod d), který naleznete až u popisu vypracovaných aktivit spolu s poznámkami z ověření z praxe (kap. 6.2). Také jsem vynechala bod h) a to z toho důvodu, že ne u všech aktivit je vhodné diskutovat se žáky. Pokud je diskuze možná, je uvedena v pravidlech či poznámkách.

Pravidla ke hrám, které v předchozích podkapitolách uvádím, lze najít v mnoha různých knižních publikacích nebo na webových stránkách. Zde je formuluji vlastními slovy. Inspirací pro výběr aktivit mi byly následující dvě knihy:

E. Krejčová, M. Volfová: *Didaktické hry v matematice*

Tato kniha je spižírnou matematických her převážně pro první stupeň základní školy. Dá se zde ale čerpat i pro vyšší ročníky. Můžeme zde najít například „*Domino*“ (s. 14), „*Deskové hry*“ (s. 39), „*Matematické loto*“ (s. 52). Nechala jsem se odtud inspirovat také „*Šifrovanou*“ (s. 38), „*Tangramem*“ (s. 64) – inspirace pro aktivitu tvorby obrázků z grafů funkcí a „*Quadrominem*“ (s. 65), které připomíná rébus Čtverce. [24]

R. Portmannová: *Hry pro tvořivé myšlení*

V této knize můžeme nalézt aktivity převážně pro skupinovou práci. Jsou tu návody na aktivity, jako jsou „*Tajné písmo*“ (s. 81) nebo „*Křížovky*“ (s. 84) – opět šifrování a tajenky. Tato kniha byla hlavním inspiračním zdrojem pro tzv. brainstorming a negativní brainstorming (s. 40 a 41). [26]

6.1.1 Deskové hry

Název:	**Bludiště**
Potřeby:	Složená hrací plocha (nebo malý hrací plán s legendou), šestistěnná kostka, figurka pro každého hráče
Počet žáků ve skupině:	2 (max. 3)
Časová náročnost:	10 – 20 minut
Pravidla hry:	Hráči ve skupině se vždy postupně střídají. Na začátku tahu hráč hodí kostkou, na hrací ploše posune figurku (ta začíná na políčku START) o tolik polí, kolik byla hodnota na kostce. Přečte si úkol a splní ho (resp. otázku a odpoví na ni). Pokud ho nesplní, nebo odpoví špatně, vrací se na start nebo zpět na „záchytná“ pole (pole bez otázky, označena jinou barvou). Hra končí tehdy, když se jeden hráč dostane až na políčko CÍL (nemusí přesně na něj, stačí hodit číslo, kterým by se posunul jako by za něj).

Hodnocení:	Žáci soutěží ve skupinách, lze tedy vyhlásit vítěze skupiny. Zopakovat příklady, na které se žáci často ptali, které nevěděli.
Poznámky:	Žáci nemusí dostat přímo hrací plán, ale mohou si ho vytvořit sami podle následujícího postupu: 1. velký hrací plán – žákům se rozdají nastříhané čtverce z tvrdšího papíru; na ty každý (nebo ve skupině společně) vymyslí otázky či úkoly; následně se čtverce s úkoly srovnají a slepí tak, aby bylo jednoznačně vidět, kudy se může a nemůže projít 2. malý hrací plán s legendou – žákům se rozdají čísla, ke kterým vymyslí úkoly nebo otázky, ty se zkompletují a nakopírují či promítnou

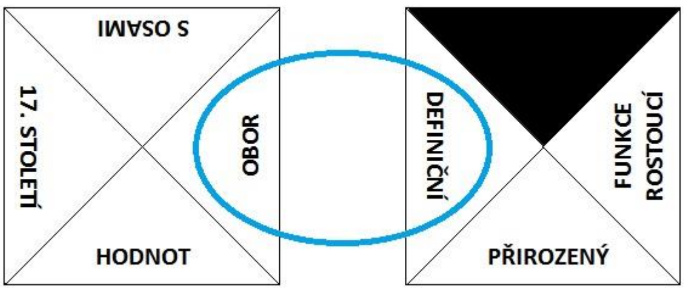
Název:	**Člověče, nezlob se!**
Potřeby:	Složená hrací plocha (nebo malý hrací plán s legendou), šestistěnná kostka, 4 stejné figurky pro každého hráče
Počet žáků ve skupině:	2 (max. 4)
Časová náročnost:	10 – 20 minut
Pravidla hry:	Na začátku hry si každý hráč své čtyři figurky stejné barvy umístí na osamocená pole (k jeho barvě). Začínající hráč hází kostkou (pokud není žádná jeho figurka na cestě po hracím plánu, může házet třikrát). Pokud padne šestka, posune jednu figurku na začátek své cesty (na tomto poli hráč dané barvy nemusí odpovídat na otázku) a hází znovu. Číslo, které padne, udává počet políček, o které se figurka posune. Vždy když padne šestka, může hráč házet ještě jednou. Po hodu kostkou posune tedy figurku o daný počet políček (směr posunu figurek je naznačen šipkami). Na poli, kde se zastaví, musí správně zodpovědět otázku (resp. vypočítat příklad). Pokud odpoví špatně, vrátí se na předchozí pozici. Při posunu figurky se může stát, že je políčko již obsazené. V tomto případě pokud hráč správně odpoví

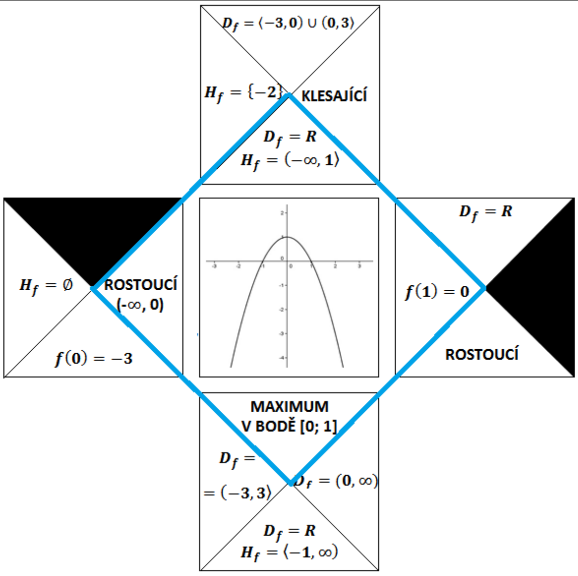
	(resp. vyřeší úkol), figurka, která stála na tomto políčku, musí být přesunuta zpět na počáteční pozici. Po ukončení tahu pokračuje další hráč sedící po levé straně. Cílem je přemístit všechny své figurky z původního stanoviště na políčka označena písmeny s odpovídající barvou.
Hodnocení:	Hra závisí trochu na štěstí při hodu kostkou. Jde spíše o zábavnou formu opakování. Můžeme vyhlásit vítěze skupiny.
Poznámky:	Malý hrací plán má tu výhodu, že k němu lehce můžeme mít několik legend s různými příklady i typově odlišnými. Není také tolik náročný na přípravu. Legendy lze kombinovat i s hrou Bludiště.

6.1.2 Karetní hry

Název:	**Černý Petr**
Potřeby:	Hrací karty
Počet žáků ve skupině:	Minimálně 3 (max. 5)
Časová náročnost:	10 – 15 minut
Pravidla hry:	Karty se rovnoměrně rozdají mezi hráče. Hra probíhá po směru hodinových ručiček. Nejprve si každý hráč zkontroluje, zda již nemá nějaké dvojice karet, které patří k sobě. Tyto dvojice k sobě přiřadí a dá je bokem. První hraje hráč s nejmenším počtem karet (nebo určený). Ten tahá od druhého hráče (ve směru hod. ručiček) jednu libovolnou kartu. Zkontroluje si, zda nevytvoří novou dvojici, kterou by mohl dát stranou. Potom hraje další hráč (ten, kterému byla odebrána karta). Hra probíhá stále dokola, dokud nezbyde pouze jedna karta, která nemá dvojici (černý Petr). Cílem je získat co nejvíce dvojic a zároveň neskončit s černým Petrem v ruce.
Hodnocení:	Hra je o náhodě a znalostech ne o rychlosti, proto mají šanci vyhrát i slabší žáci.

Poznámky:	Čím více žáků ve skupině je, tím je hra delší, protože je menší pravděpodobnost, že se dvojice sejdou u jednoho hráče. Zároveň zde velkou roli hraje náhoda, proto se může čas hry prodloužit nebo zkrátit (různě u různých družstev).

Název:	**Čtverce**
Potřeby:	Hrací karty
Počet žáků ve skupině:	Individuální nebo 2 (max 4)
Časová náročnost:	5 - 15 minut
Zadání úkolu:	Zamíchané karty poskládejte do obdélníku. Dbejte přitom následujících pokynů (podle jednotlivých variant). **1. varianta** Každá karta je rozdělena na čtyři části. V každé části (trojúhelníku) je pojem, graf, vzorec, funkce, apod. (dále jen obsah). Obdélník sestavte tak, aby obsah z trojúhelníků různých čtverců k sobě patřil. Jako příklad zde slouží čtverce, které po složení dávají smysluplné sousloví (viz. obr. 18).  **Obrázek 18: Přikládání čtverců - 1. varianta**
	2. varianta Zde jsou dva typy karet. Některé jsou rozděleny na čtyři části (jako v předchozí variantě), jiné jsou nedělené. Obdélník sestavte tak, aby se tyto typy karet pravidelně šachovitě střídaly a přitom pojem v neděleném čtverci nějakým způsobem souvisel s pojmy v přilehlých trojúhelnících. Jako příklad zde slouží čtverce s grafem funkce a jejími vlastnostmi (viz. obr. 19).

	 **Obrázek 19: Přikládání čtverců - 2. varianta**
Hodnocení:	Lze vyhlásit nejrychlejší skupinu, která úspěšně rébus složila. Také můžeme klasifikovat ty žáky, kteří rébus složí do určitého, předem uvedeného časového limitu.
Poznámky:	Jednodušší verze této hry mají nakloněný text tak, aby bylo na první pohled jasné, jaká hrana karty je spodní (jakým směrem je karta natočená). Toto je téměř nutné u 2. varianty tohoto rébusu.

Název:	**Domino**
Potřeby:	Hrací karty, dostatečný prostor pro skládání
Počet žáků ve skupině:	Individuální nebo 2 (max. 3)
Časová náročnost:	5 – 15 minut
Pravidla hry:	Cílem je poskládat hrací karty ve správném pořadí v co nejkratším čase. Na začátku hry je třeba stanovit si počáteční podmínky: např. všechny karty obrázkem dolů, můžete otáčet více karet zároveň, apod. Soutěžit se může ve skupinách (kde jednotliví členové spolupracují) nebo individuálně (každý skládá sám, soutěží se ve třídě). Přitom se přikládají dvojice tak, aby odpovídající přiložené části k sobě patřily (dávaly dohromady příklad a řešení, předpis funkce a graf, apod.)

	Je důležité uvědomit si odlišnosti od klasické dětské hry domino. Zde je totiž ve většině případů pouze jedna možnost přiložení karty. Protože se průběh hry liší a cílem je ve skupině poskládat všechny karty za sebe – vítězí celá skupina, ne pouze jeden hráč.
Hodnocení:	Vyhlášení nejrychlejšího žáka. Kontrola a vysvětlení pořadí jednotlivých karet.
Poznámky:	Zde se nabízí možnost ohodnocení aktivity známkou při splnění úkolu do určitého časového intervalu.

Název:	**Kvarteto**
Potřeby:	Hrací karty
Počet žáků ve skupině:	Minimálně 3 (max. 5)
Časová náročnost:	10 – 20 minut
Pravidla hry:	Karty vždy tvoří k sobě patřící čtveřice – např.: název, předpis, graf a vlastnosti funkce. Nejprve se po jedné rozdají všechny karty hráčům. Hráč, který začíná, si vybere libovolného spoluhráče a ptá se ho, zda má určitou kartu (viz. Poznámky - s. 69). Pokud ji spoluhráč má, odevzdá ji začínajícímu a ten se ptá libovolně znova, pokud ji spoluhráč nemá, pokračuje stejným způsobem on. Důležité je, že hráč se smí ptát pouze na karty kvarteta, z něhož má alespoň jednu kartu v ruce. Pokud kterýkoli z hráčů složí kvarteto, položí všechny čtyři karty bokem. Ty mu již nikdo nemůže vzít a znamenají jeden bod.
Hodnocení:	Tato hra je velmi taktická. Důležité je její sledování a pamatování si přesunů karet. Zde budou mít výhodu žáci s dobrou pamětí. Po ukončení aktivity zjistíme výherce v jednotlivých skupinách.
Modifikace aktivity:	Pokud ve výuce není dostatek času, lze tyto karty využít pro skládání čtveřic (která skupina čtveřice vytvoří rychleji). Karty mohou také sloužit pro vytvoření čtyřčlenných skupin (každému žákovi rozdám jednu kartu, žáci, kteří vlastní karty patřící k sobě se musí najít). Tyto skupiny mohou být náhodně,

	nebo předem promyšlené (podle toho musí učitel přizpůsobit rozdávání karet).
Poznámky:	Hráč, který je na tahu, musí správně a jednoznačně specifikovat kartu, kterou chce. Například: „*Máš kartu, kde jsou vlastnosti funkce* $y = x^2$*, tedy: parabola, definičním oborem jsou všechna reálná čísla, obor hodnot jsou kladná reálná čísla, minimum je v bodě [0;0]?*“ Nestačí pouze říct, že chce vlastnosti kvadratické funkce. Vlastnosti nemusí vyjmenovat všechny, ale podle nich spoluhráč musí poznat, že jde právě o jeho kartu.

Název:	**Lotto**
Potřeby:	Hrací plán a karty
Počet žáků ve skupině:	Minimálně 2 (max. 4)
Časová náročnost:	5 – 15 minut
Pravidla hry:	Na hrací plán přikládejte karty tak, aby tvořily logické dvojice s jedním políčkem plánu. Pokládejte je takovým způsobem, aby tato dvojice nebyla vidět. Po vyplnění celého plánu vznikne obrázek nebo tajenka.
Hodnocení:	Učitel na první pohled pozná, zda žáci přikládají pomocí logických dvojic, nebo jen skládají obrázek, či tajenku. Zároveň si žáci sami zkontrolují správnost řešení (vidí dobře nebo špatně poskládaný obrázek, tajenku). Opět je možné soutěžení mezi skupinami ve třídě.

Název:	**Pexeso**
Potřeby:	Karty pexesa
Počet žáků ve skupině:	2 (max. 3)
Časová náročnost:	5 – 15 minut
Pravidla hry:	Na začátku hry jsou všechny karty rozmístěny na stole obrázky (textem) dolů. Hráči se postupně po tahu střídají. V jednom tahu

	hráč otočí dvě karty pexesa. Pokud tvoří k sobě patřící dvojici, vezme si je a otáčí další dvě. Pokud dvojici netvoří, vrátí je obrázkem dolů na jejich původní místo a hraje další hráč. Cílem je nasbírat co největší počet kartiček. Hra končí vyčerpáním všech otočených karet.
Hodnocení:	Žáci soutěží ve skupinách, lze tedy vyhlásit vždy výherce v jednotlivých skupinách. Doporučuji zkontrolovat dvojice, u složitějších dvojic požadovat i vysvětlení.
Modifikace aktivity:	Druhá varianta této hry je určena pro celou třídu. Na začátku hry se rozdají jednotlivé karty pexesa po třídě (každému studentovi jedna karta). Cílem je v tichosti najít spolužáka, který má druhou kartu ze dvojice. Na závěr dohromady všichni zkontrolují, zda jsou všechny dvojice správné (i se zdůvodněním). Kladným prvkem této aktivity je i pohyb, který aktivizuje žáky při hodině.
Poznámky:	Jako karty pexesa můžeme použít i dvojice karet z jiných her. Počet karet ve hře můžeme vždy přizpůsobit podle situace v hodině.

6.1.3 Hry s tajenkou

Název:	**Abeceda**
Potřeby:	Kartičky s předpisy funkcí
Počet žáků ve skupině:	1 (individuální) nebo podle rozhodnutí učitele ve skupinách, lze práce v celé třídě
Časová náročnost:	5 - 20 minut
Zadání úkolu:	Nakreslete grafy funkcí, které jsou zadány na rozdaných kartách (vždy funkce ze stejné karty do jedné soustavy souřadné). Zvýrazněte dané funkce v jejich zadaném definičním oboru nebo oboru hodnot. Zvýrazněný objekt znázorňuje písmeno (bez diakritiky). Určete ho. Písmena mohou být pootočená. Z písmen ze všech karet sestavte tajenku. Některá písmena by se díky jejich pootočení mohla vzájemně zaměnit, proto je potřeba dodat tato pravidla:

	1. písmeno O má nejméně dvě osy souměrnosti (tím ho odlišíme od písmena D) 2. písmeno Z má pomocnou čárku (viz. obr. 20), čímž se liší od písmena N  **Obrázek 20: Písmena Z a W** 3. písmeno W je složeno ze dvou posunutých jednoduchých V, čímž se vyhneme možné záměně s písmenem M
Hodnocení:	Je možné soutěžit, která skupina dříve rozluští tajnou zprávu. Ve třídě navrhnout jiné předpisy funkcí pro určená písmena.
Poznámky:	Žáci mohou vyzkoušet, zda dokáží tímto způsobem „zašifrovat“ slovo, či zprávu pro druhou skupinu. Procvičí si tím předpisy funkcí, které musí dobře ovládat, aby je z nákresu grafu určili.

Název:	**Slova**
Potřeby:	Pracovní list se zadáním
Počet žáků ve skupině:	1 (individuální) nebo podle rozhodnutí učitele ve skupinách
Časová náročnost:	15 - 20 minut
Zadání úkolu:	Nakreslete grafy funkcí, které jsou zadány, do jedné soustavy souřadné. Zvýrazněte dané funkce v jejich zadaném definičním oboru nebo oboru hodnot. Zvýrazněný objekt znázorňuje tajenku (slovo). Pro práci ve skupině kreslete grafy na průhlednou folii (nutné stejné měřítko na soustavě souřadné). Ve skupině si mezi sebou jednotliví členové rozdělí předpisy funkcí a mohou samostatně pracovat. Na závěr potom své výsledky dají dohromady (folie přiloží na sebe) a získají tak výslednou tajenku.

Modifikace aktivity:	Tuto aktivitu je možné provést s využitím počítačových programů pro vykreslování funkcí. Žáci napíší zadané funkce do programu, který grafy vykreslí. Potom už jen zbývá zvýraznit definiční obory (resp. obory hodnot).
Hodnocení:	Je možné soutěžit, která skupina dříve rozluští tajnou zprávu. Tyto úkoly jsou většinou složitější, proto je někdy velkým úspěchem, když se žáci propracují ke správnému výsledku (obzvlášť když mají funkce sami vykreslovat).
Poznámky:	Šikovnější žáci mohou zkusit zašifrovat slovo pomocí předpisů funkcí v jedné soustavě souřadné.

6.1.4 Ostatní

Název:	**Malování obrázků pomocí funkcí**
Potřeby:	Žádné
Počet žáků ve skupině:	1 (individuální) nebo podle rozhodnutí učitele
Časová náročnost:	5 - 15 minut
Zadání úkolu:	Namalujte obrázek složený pouze z grafů elementárních funkcí.
Hodnocení:	Obrázky žáků můžeme někde vystavit, udělat si malou třídní galerii. Na jednotlivých obrázcích můžeme poznávat grafy elementárních funkcí, odlišovat je jinou barvou, diskutovat o jejich vlastnostech.
Poznámky:	V případě zájmu žáků a dostatku čase je možné jednotlivé obrázky nakreslit pomocí počítačového programu (např. GeoGebra). K tomu je potřeba návrh obrázku umístěného do soustavy souřadnic a vyčíst z něj předpisy funkcí, které se budou do programu zadávat, i s definičními obory. Obrázky se také dají nakreslit pomocí aplikace Malování, která je součástí programového vybavení operačního systému Windows.

Název:	**Modelování grafů pomocí drátu**
Potřeby:	Drát (na čištění vodních dýmek) nebo průhledná folie, papír s narýsovanou soustavou souřadnic
Počet žáků ve skupině:	1 (individuální práce)
Časová náročnost:	10 minut
Zadání úkolu:	Z drátu vytvarujte graf zadané funkce. Potom se zaměřte na další příklady funkcí a pomocí posunů správně umístěte již vytvarovaný graf. Složitější příklady pište do sešitu, modelujte pomocí drátu a výsledný graf opět zakreslete do sešitu. Návrhy na zadání funkcí pro kvadratickou funkci: $f_1: y = x^2$ $f_2: y = x^2 + 2$ $f_3: y = x^2 - 3$ $f_4: y = (x-1)^2$ $f_5: y = (x+3)^2$ $f_6: y = 2x^2$ $f_7: y = \frac{1}{2}x^2$ $f_8: y = (x-2)^2 + 1$ $f_9: y = (x+1)^2 - 3$ $f_{10}: y = (x-1)^2 - 2$
Hodnocení:	Učitel na první pohled vidí, zda žák chápe posuny grafů. Je to tedy zpětná vazba pro učitele. Při kreslení složitějších grafů do sešitu také může učitel zjistit, zda žákovi dělá problém graf zakreslit, ačkoli posuny chápe.
Modifikace aktivity:	Kreslení a práce s grafy na průhledné fólii: Zadání práce je prakticky totožné jako u modelování pomocí drátu. Výhodou je větší přesnost. Je tedy možné si všímat i průsečíků s osami. Je možné vypomoci si křivítkem.
Poznámky:	Je důležité vybrat správnou tvrdost drátu. Některé jsou totiž příliš měkké a špatně se s nimi pracuje.

Název:	**Vytváření funkcí za určitých podmínek**
Potřeby:	Karty s vlastnostmi funkcí
Počet žáků ve skupině:	3 (možné je spolupracovat i v celé třídě)
Časová náročnost:	10 minut
Zadání úkolu:	Tahejte karty s vlastnostmi funkcí (libovolné množství, záleží na úrovni žáků). Vždy předem řekněte, zda tuto vlastnost funkce má mít, nebo zda ji nesmí mít. Potom uvažujte, jestli taková funkce existuje, pokud ano, nakreslete její graf. Společně diskutujte nad různými možnostmi nebo nad doplňujícími otázkami. Návrhy na doplňující otázky: „*Existuje více takových funkcí?*“ „*V čem budou graficky řešení shodná, podobná nebo rozdílná?*“ „*Je řešením nějaká z elementárních funkcí (dokažte)?*“ „*Jakou podmínku bychom museli přidat, aby úloha neměla řešení?*“ „*Jaké jiné vlastnosti (kromě vytažených) funkce má?*“
Hodnocení:	Tato aktivita může sloužit jako zpětná vazba pro učitele, který si ověří, zda žáci rozumí jednotlivým vlastnostem funkcí. Pokud se pracuje ve skupinách, lze je bodově ohodnotit vždy za každý vyřešený problém.
Poznámky:	Tato aktivita je vhodná pro tzv. brainstorming (resp. paradoxní brainstorming). Žáci mohou říkat různé nápady, ty se napíší na tabuli a společně se potom diskutuje o jejich efektivitě. Pokud se žáci stydí nápady říkat, mohou je psát na papír a ten potom anonymně odevzdat učiteli. Pravidla brainstormingu jsou uvedena v kapitole 5.2.

6.2 Vypracované aktivity s komentářem z ověření v praxi

Většina navržených aktivit a didaktických her byla odzkoušena v praxi na gymnáziu. Některé jsem využila již ve čtvrtém ročníku nižšího gymnázia, další potom v různých ročnících vyššího gymnázia, a to během výuky klasických hodin matematiky, volitelné matematiky (maturitní ročníky) a nepovinné matematiky, kterou navštěvují žáci různých tříd vyššího gymnázia dobrovolně mimo rozvrh.

Při ověřování jsem sledovala hlavně přiměřenost časového limitu hry (resp. potřebný časový interval pro průběh hry), dotazy žáků vznesené k pravidlům či průběhu aktivity, různé herní situace a reakce žáků i eventuální připomínky a návrhy žáků ke hře nebo jejím částem. Zde již nepopisuji pravidla hry ani způsob hodnocení. To je vždy uvedeno u obecného popisu hry v kapitole 6.1. V této kapitole uvádím pouze hry a aktivity, které byly vyzkoušeny v hodinách matematiky. Ostatní vypracované materiály je možné najít v Seznamu her a aktivit (dělení podle tematických celků Příloha 1) a v přílohách.

Některé vytvořené karty k určitým didaktickým hrám je možné použít i pro jiné typy her (např. lze po malých úpravách vzájemně zaměňovat karty z Černého Petra, Pexesa nebo Domina). V tabulkách uvádím pouze primární zařazení, to ovšem nevylučuje i jiné využití.

Karty, které jsem během praxe používala, jsem nechala zalaminovat. Během práce s nimi se proto neponičily. Při jejich využívání během her jsem si všimla, že je důležité, aby karty nebyly ze zadní strany průhledné (to je nutné hlavně u společenských her, ve kterých hraje každý hráč sám za sebe, např. Černý Petr nebo Kvarteto).

6.2.1 Deskové hry

Název:	**Funkce - opakování**
Zařazení hry:	Bludiště – velký hrací plán
Příloha č.:	3
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 15 minut
Cíle:	• žák svými slovy vysvětlí základní pojmy týkající se učiva funkcí jedné proměnné • žák určí definiční obor a obor hodnot zadané funkce • žák načrtne graf zadané funkce
Poznámky z praxe:	Časovou náročnost je u tohoto typu hry velmi složité určit. Velmi závisí na individuálních znalostech žáků (pokud se v problematice funkcí dobře orientují, má průběh hry poměrně rychlý spád). Ve třídě je potom rozdíl mezi skupinami, které již mají dohráno a skupinami, které stále hrají. Pro tuto možnost je vhodné zadat hotovým skupinám práci na vlastní hře. Žáky více bavila právě tvorba vlastního hracího plánu a hra na něm.

6.2.2 Karetní hry

Název:	**Kvadratické funkce a jejich grafy**
Zařazení hry:	Černý Petr
Příloha č.:	8
Obtížnost:	1 – 2 – 3 – **4** – 5
Časová náročnost:	10 - 15 minut (včetně seznámení s kartami a s pravidly)
Cíle:	• žák přiřadí odpovídající graf a předpis funkce
Poznámky z praxe:	V hodině jsem nejprve rozdala karty (bez černého Petra) do předem náhodně vytvořených skupin a zadala úkol, kdy skupiny měly co nejrychleji přiřadit dvojice karet k sobě. Vzhledem k časové tísni a náročnosti se v řešení občas vyskytovaly chybné dvojice. Společně jsme potom dvojice překontrolovali. Až následně probíhala samotná hra Černý Petr.

	Žáci při hře dávali mnohem větší pozor na skládání dvojic a chyby se zde již neobjevovaly. Myslím si, že před samotnou hrou je zde velmi důležité upozornit žáky na podobné předpisy funkcí a jejich grafy. Bez upozornění lehce dojde k chybnému přiřazení, které (pokud nebude včas odhaleno) zkomplikuje průběh celé hry.

Název:	**Klíčová slova**
Zařazení hry:	Čtverce (1. varianta)
Příloha č.:	9
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 8 minut
Cíle:	• žák vysvětlí klíčová slova spojená s funkcemi
Poznámky z praxe:	Tato hra se v praxi setkala s velkým úspěchem. Žáky velmi zaujala a sami vyžadovali další podobnou aktivitu. U tohoto rébusu je důležité žáky upozornit, že černá pole nejsou pouze na kraji budovaného obdélníku. Během skládání jsem si také všimla několika omylů, kterých se žáci dopouštěli pravidelně. Prvním z nich byla dvojice P. Dirichlet a 17. století, kdy žáci neznají toto jméno a 17. století je jediný pojem, který k tomuto jménu lze logicky přiřadit (přitom oba trojúhelníky jsou bez dvojic). Dalším mylným přiřazením bylo často spojení „Definiční obor“, kdy slovo obor se na kartách vyskytuje dvakrát. Existuje však pouze jedno přiřazení tak, aby bylo možné vytvořit i sousloví „Obor hodnot“. Do třetice se objevovala i méně častá chybná dvojice „Logaritmus“ a předpis logaritmické rostoucí funkce. Všechny skupiny však při skládání rébusu tyto nesprávně přiřazené dvojice zrušily a karty zařadily na správné místo. Tato aktivita není příliš časově náročná, proto bych ji zařadila do první fáze výuky, kde bych tímto způsobem zopakovala základní klíčová slova, která by žáci měli umět vysvětlit.

Název:	**Určování vlastností z grafu funkce**
Zařazení hry:	Čtverce (2. varianta)
Příloha č.:	11
Obtížnost:	1 – **2** – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 8 minut
Cíle:	• žák přiřadí vlastnosti funkcí ke správnému grafu funkce
Poznámky z praxe:	Tento rébus většina skupin žáků složila bez větších problémů. Je však potřeba dobře vysvětlit způsob skládání čtverců (odlišný oproti předchozí variantě). Vhodně mi přitom posloužilo porovnání s šachovnicí (čtverce s grafy a vlastnostmi se střídají stejně jako bílá a černá pole na šachovnici). Žáci tak rychle pochopí základní princip skládání rébusu a mohou se tak rovnou věnovat samotnému řešení.

Název:	**Vlastnosti funkcí a jejich matematický zápis**
Zařazení hry:	Domino
Příloha č.:	12
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 8 minut
Cíle:	• žák porozumí matematickému zápisu vlastností • žák přiřadí k vlastnosti funkce odpovídající matematický zápis
Poznámky z praxe:	Tuto aktivitu jsem aplikovala v praxi v předmětu Nepovinná matematika. Byl zde vidět velký rozdíl u žáků od různých učitelů – někteří se v matematickém zápise orientovali, jiní s ním měli problémy. U této hry je třeba, aby žáci znali kvantifikátory a matematický zápis dokázali nejen přečíst, ale i pochopit jeho význam a najít odpovídající ekvivalent mezi vlastnostmi funkcí. Ačkoli počet karet domina není velký, je tato hra dosti náročná, a proto je vhodnější její řešení ve skupinách.

Název:	**Grafy goniometrických funkcí**
Zařazení hry:	Domino
Příloha č.:	14
Obtížnost:	1 – 2 – 3 – 4 – **5**
Časová náročnost:	7 – 10 minut
Cíle:	• žák přiřadí odpovídající graf k předpisu funkce
Poznámky z praxe:	Tato aktivita je poměrně složitá hlavně kvůli množství karet, které obsahuje. Jsou možná dvě správná řešení (některé předpisy goniometrických funkcí mají stejný graf). Pro využití ve výuce bych vybrala pouze některé karty, které na sebe navazují. Hra by potom nezabrala tolik času a celkově by měla rychlejší spád.

Název:	**Opakování funkcí, jejich grafů a vlastností**
Zařazení hry:	Kvarteto
Příloha č.:	15
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 10 minut
Cíle:	• žák klasifikuje probrané elementární funkce • žák shrne základní vlastnosti elementárních funkcí • žák přiřadí grafy k odpovídajícím předpisům funkcí
Poznámky z praxe:	V hodině jsem tuto aktivitu nehrála s žáky jako klasické kvarteto, ale nechala je ve skupinách přiřazovat karty do čtveřic. Tento způsob využití karet je mnohem méně časově náročný, ale také u něj žáci vidí všechny karty před sebou a nejsou nuceni je pomocí znalostí odvozovat. Během průběhu aktivity bylo vidět, kteří z žáků si jednotlivé pojmy (vlastnosti, grafy, předpisy a typy elementárních funkcí) mezi sebou spojují rychle (automaticky nebo pomocí odvozování na základě svých znalostí) a kteří pomaleji. Žáci neměli problém pochopit zadání úkolu. Aktivita proběhla poměrně rychle – vzhledem k zjednodušené variantě (i se zadáním, rozdáním karet a společnou kontrolou trvala necelých pět minut).

Název:	**Souřadnice bodů**
Zařazení hry:	Lotto
Příloha č.:	16
Obtížnost:	**1** – 2 – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	2 – 5 minut
Cíle:	• žák rozlišuje body s různými souřadnicemi v rovině
Poznámky z praxe:	Tato hra je určena pro nižší ročníky (druhý stupeň základní školy nebo nižší gymnázium). Je zaměřena na souřadnice bodů a jejich znázornění v kartézské soustavě souřadnic v rovině. Někteří žáci nejprve zkoušeli poskládat obrázek bez pomocí desky s body. To se jim však nedařilo (šlo to velmi pomalu a těžko oproti ostatním, co zvolili postup dle pokynů). Ve třídě, kde jsem hru zařadila, velmi brzy žáci přišli na to, že výhodnější bude skládání pomocí příkladů. S nimi žáci neměli žádný problém. Souřadnice bodů určovali bez problému. Pozor si museli dávat pouze na správné umístění karty (občas ji špatně pootočili a obrázek tak nevycházel). Hra tedy slouží spíše pro upevnění učiva o souřadnicích bodů, pro opakování ve vyšších ročnících je příliš jednoduchá.

6.2.3 Hry s tajenkou

Název:	**Abeceda - lineární s absolutní hodnotou**
Zařazení hry:	Abeceda
Příloha č.:	20
Obtížnost:	1 – 2 – **3** – 4 – 5
Časová náročnost:	3 – 8 minut
Cíle:	• žák načrtne graf lineární funkce v zadaném definičním oboru nebo oboru hodnot
Poznámky z praxe:	Tuto aktivitu jsem použila pro rychlé zopakování lineárních funkcí v kvartě na nižším gymnáziu (zde jsem volila písmena tak, aby předpisy neobsahovaly absolutní hodnotu). Kvůli nižšímu ročníku jsem také přizpůsobila předpisy, kde je daný pouze

	definiční obor. Při použití vypracovaných předpisů pro písmena je potřeba ve třídě zdůraznit, že funkce nejsou omezené pouze v definičním oboru, ale u některých je omezení dané na oboru hodnot. Také mají někteří žáci problém se zakreslováním grafů. Opět je nutné všechny řádně seznámit s tím, že veškeré funkce z jednoho lístečku (obdélníku, vyznačené části) se mají zakreslit do jedné soustavy souřadnic (ne každý zvlášť). Také se vyskytl problém, kdy žák nerozpoznal písmeno. Je pravda, že ne všechna písmena jsou přesně zobrazena, jsou však jednoznačná (podle pravidel je lze odlišit). Před řešením těchto úloh musíme tedy žáky seznámit s tím, jak by písmena mohla vypadat, že mohou být různě pootočená a jak podobná písmena rozlišit.

Název:	**Lineární**
Zařazení hry:	Slova
Příloha č.:	22
Obtížnost:	1 – 2 – 3 – 4 – **5**
Časová náročnost:	5 – 10 minut
Cíle:	• žák načrtne grafy lineárních funkcí s absolutní hodnotou
Poznámky z praxe:	Pracovní list dostal během hodiny výjimečně nadaný žák, který byl s počítáním příkladů napřed. Během hodiny nestihl tuto aktivitu dokončit, přesto bylo vidět, že v něm vzbudila pozornost. Protože neměl k dispozici počítač (pro usnadnění vykreslování grafů) musel všechno črtat tužkou na zadaný pracovní list. Bylo zřetelně vidět, že začal těmi jednoduššími funkcemi (konstantními). Tato aktivita je bez použití počítače velmi náročná, proto se běžně do hodiny nehodí. Učitel ji může použít právě jako práci pro výjimečně nadaného žáka nebo jako dobrovolný ohodnocený domácí úkol.

Název:	**Klíčová slova**
Zařazení hry:	Osmisměrka – není uvedena v obecných pravidlech
Příloha č.:	33
Obtížnost:	1 – **2** – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	3 - 6 minut
Cíle:	• žák vyjádří vlastními slovy základní pojmy spojené s funkcemi
Poznámky z praxe:	Tuto aktivitu jsem použila v hodině nepovinné matematiky jako úvodní a motivační úkol. Žáci všechna klíčová slova a s nimi i tajenku odhalili velmi rychle. Myslím si, že tato aktivita je i vzhledem k časové nenáročnosti vhodná do úvodní části hodiny pro motivaci a aktivizaci žáků. Zároveň je to zajímavá forma opakování klíčových slov, kdy učitel má možnost zeptat se na jakýkoli z nalezených pojmů podrobněji a spolu se žáky tak zopakovat jeho význam.

6.2.4 Ostatní

Název:	**Malování obrázků pomocí funkcí**
Zařazení hry:	Malování obrázků pomocí funkcí
Příloha č.:	27, 28
Obtížnost:	**1** – 2 – 3 – 4 – 5
Časová náročnost:	5 – 10 minut
Cíle:	• žák aplikuje znalosti o funkcích • žák diskutuje o grafech funkcí
Poznámky z praxe:	Nejprve jsem v hodině žákům ukázala panáčky (Příloha č. 27), jejichž tělíčka byla znázorněna pomocí několika funkcí. První úkol byl rozpoznat tyto funkce, umístit panáčka do soustavy souřadné a určit předpisy těchto funkcí. U každého obrázku je možné určit více variant (zvolit různé funkce i různé umístění v soustavě souřadnic). Společně jsme tyto varianty rozebrali. Následně měli žáci za úkol načrtnout nějaký obrázek tak, aby v něm bylo použito různých grafů funkcí (obrázek neměl

	obsahovat část, která by nebyla funkcí – kromě povolené hlavičky u panáčků podle vzoru). Některé z obrázků žáků jsou v Příloze č. 28. Společně jsme potom zpětně opět poznávali grafy elementárních funkcí.

Název:	**Vytváření funkcí za určitých podmínek**
Zařazení hry:	Vytváření funkcí za určitých podmínek (brainstorming)
Příloha č.:	29
Obtížnost:	1 – 2 – 3 – **4** – 5
Časová náročnost:	5 – 10 minut
Cíle:	• žák aplikuje své znalosti o vlastnostech funkcí a jejich grafech • žák diskutuje o různých možnostech řešení problému • žák navrhuje další možná kritéria ke znemožnění řešení dané úlohy • žák zhodnotí a zdůvodní návrhy řešení • žák vyvodí obecné rovnice funkcí s danými vlastnostmi
Poznámky z praxe:	V této aktivitě se předpokládá poměrně dobrá znalost vlastností funkcí a to i vyčtení vlastností z grafu funkce. Žáci rychle pochopili zadání úkolu. Společně jsme náhodně losovali vlastnosti a snažili se najít takové předpisy funkcí, které by jim odpovídali. Často se stalo, že předpis byl složitější, proto mi stačil příklad takového grafu funkce (šikovnější žáci našli i předpis). Mezi zajímavé příklady patřily například funkce, které jsou sudé i liché, nebo funkce omezené bez lokálních extrémů. Pravidelně se stávalo to, že když žáci našli nějaké řešení, spokojili se s ním a neměli tendence hledat další jiné možné. Proto jsem použila i metodu paradoxního brainstormingu (viz. kap. 5.2), která žáky velmi zaujala a ve třídě se rozpoutala diskuze ohledně navrhovaných řešení. Tato aktivita je pro učitele poměrně náročná, protože musí udržet kázeň během diskuze, hodnotit správnost návrhů a dávat nové podněty k diskutování.

Závěr

V RVP je jeden z cílů vzdělávání[5] osvojení si stanovené úrovně klíčových kompetencí (tj. soubor vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot, které jsou důležité pro osobní rozvoj jedince, jeho aktivní zapojení do společnosti a budoucí uplatnění v životě). Žák přitom musí dokázat využívat je v osobním, občanském i profesním životě. Přímo RVP doporučuje uplatňovat postupy a metody podporující tvořivé myšlení, pohotovost a samostatnost žáků, využívat diferencovanou výuku a nové organizační formy.

V této práci jsou připraveny didaktické materiály, které učiteli umožní využívat nové organizační formy výuky a naplňovat tak klíčové kompetence stanovené v RVP. Je zde uveden historický kontext, který může sloužit jako motivace k prohloubení zájmu žáků o dané téma. Součástí jsou také návrhy na motivační příklady a příklady odstupňované podle jejich složitosti, na jejichž základě (a na základě dosavadních znalostí) žáci objevují nové poznatky, o kterých spolu s učitelem diskutují. K upevňování těchto poznatků slouží didaktické hry a další aktivizační metody. Ze zkušeností s těmito hrami v praxi mohu potvrdit, že tyto hry žáky baví. S přidáním soutěžních prvků k těmto aktivitám se zvýšila i motivace žáků. Tyto materiály lze dále upravovat a na jejich základě si vytvořit nové pro jiné tematické celky.

Funkce na střední škole jsou vhodné téma pro využití počítačové techniky v hodinách matematiky. Pomocí počítačových programů můžeme vizualizovat zákonitosti mezi předpisy funkcí a jejich grafy. Pomocí apletů lze názorně ukázat například vznik grafů goniometrických funkcí, které jsou spíše teoretické, než na základě praktických znalostí.

Na základě této diplomové práce bych ráda v rámci možného dalšího studia vypracovala interaktivní programy: pomocné aplety pro výuku funkcí, interaktivní hry (buďto formou interaktivních tabulí nebo webové stránky).

---

[5] RVP vytyčuje tyto cíle vzdělání:
1. vybavit žáky klíčovými kompetencemi na úrovni, kterou předpokládá RVP;
2. vybavit žáky širokým vzdělanostním základem na úrovni, kterou popisuje RVP;
3. připravit žáky k celoživotnímu učení, profesnímu, občanskému i osobnímu uplatnění. [5, s. 8]

Seznam obrázků

Všechny obrázky byly vytvořeny jako podklady pro tuto diplomovou práci v programech GeoGebra a Malování.

Seznam použité literatury

[1] HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 232 s. ISBN 978-80-7367-397-0.

[2] HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989, 554 s. ISBN 80-08-00014-7.

[3] KOPÁČKOVÁ, Alena. Fylogeneze pojmu funkce. In: BEČVÁŘ, Jindřich a Eduard FUCHS. *Matematika v proměnách věků*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 46 - 80. Dějiny matematiky, svazek 16. ISBN 80-7196-218-X.

[4] STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. 1. vyd. Praha: Orbis, 1963, 250 s.

[5] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. 100 s. [cit. 2013-03-21]. Dostupné z WWW: <http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf>. ISBN 978-80-87000-11-3.

[6] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. 126 s. [cit. 2013-03-21]. Dostupné z WWW: <http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf>.

[7] BRANT, Jiří. Pojetí vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace v RVP ZV - aktualizovaná verze. *Metodický portál: Články* [online]. 29. 01. 2008, [cit. 2013-04-23]. Dostupný z WWW: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/1930/POJETI-VZDELAVACI-OBLASTI-MATEMATIKA-A-JEJI-APLIKACE-V-RVP-ZV---AKTUALIZOVANA-VERZE.html>. ISSN 1802-4785.

[8] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání: úplné znění upraveného RVP ZV s barevně vyznačenými změnami.* [online]. Praha: MŠMT, 2013. 126 s. [cit. 2013-03-21]. Dostupné z WWW: <http://www.msmt.cz/file/26996/ >.

[9] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: funkce*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 168 s. ISBN 978-80-7196-356-8.

[10] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: goniometrie*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2002, 139 s. ISBN 80-7196-203-1.

[11] Funkce. KATEDRA DIDAKTIKY MATEMATIKY MFF UK. *Portál středoškolské matematiky* [online]. Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, © 2011 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/

[12] KRYNICKÝ, Martin. Logaritmus. *Matematika SŠ.realisticky.cz* [online]. © 2010, aktualizováno: 24. 2. 2013 18:07 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/02%20FunkFu%20a%20rovnice/09%20Exponencialn%C3%AD%20a%20logaritmick%C3%A9%20funkce%20a%20rovnice/11%20Logaritmus.pdf

[13] pH - definice, vzorce. *Aristoteles* [online]. 09.11. 2007 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://www.aristoteles.cz/chemie/ph/ph-vzorce-definice.php

[14] ŠTOREK, Pavel. Poločas rozpadu. *Galaktis: Moderní vzdělávání* [online]. 21. 8. 2009 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://galaktis.cz/clanek/polocas-rozpadu/

[15] MOTYČKOVÁ, Marie. *Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole* [online]. Praha, © 2006 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/index.html. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce RNDr. Jarmila Robová, CSc.

[16] *GeoGebra* [online]. International GeoGebra Institute, © 2013 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/cms/cs/

[17] *GEONExT* [online]. Bayreuth: Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik, Universität Bayreuth, [2007] [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://geonext.uni-bayreuth.de/

[18] DOSTÁL, Jiří. *Výukové programy*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2011, 67 s. ISBN 978-80-244-2782-9.

[19] MARKUS, Frischholz. Parameter linearer Funktionen mit GEONExT. *Lehrer-online: Unterrichten mit digitalen Medien* [online]. 13.04.2007 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://www.lehrer-online.de/lineare-funktionen-parameter.php

[20] PRŮCHA, Jan, Jiří MAREŠ a Eliška WALTEROVÁ. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 1995, 292 s. ISBN 80-7178-029-4.

[21] MAŇÁK, Josef. Aktivizující výukové metody. In: *Metodický portál RVP* [online]. 2011 [cit. 2013-04-21]. Dostupné z: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/14483/aktivizujici-vyukove-metody.html/>. ISSN 1802-4785.

[22] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003, 219 s. ISBN 80-7315-039-5.

[23] JANKOVCOVÁ, Marie, Jiří KOUDELA a Jiří PRŮCHA. *Aktivizující metody v pedagogické praxi středních škol*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, 152 s. ISBN 80-04-23209-4.

[24] KREJČOVÁ, Eva a Marta VOLFOVÁ. *Didaktické hry v matematice*. Hradec Králové: Gaudeamus, 1994, 109 s. ISBN 80-7041-960-1.

[25] SOCHOROVÁ, Libuše. Didaktická hra a její význam ve vyučování. *Metodický portál: Články* [online]. 26. 10. 2011, [cit. 2013-04-23]. Dostupný z WWW: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/z/13271/DIDAKTICKA-HRA-A-JEJI-VYZNAM-VE-VYUCOVANI.html>. ISSN 1802-4785.

[26] PORTMANN, Rosemarie. *Hry pro tvořivé myšlení*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2004, 118 s. ISBN 80-7178-876-7.

[27] HRUŠKA, Miroslav. *Státní maturita z matematiky v testových úlohách včetně řešení*. 1. vyd. Olomouc: Rubico, 2012, 190 s. ISBN 978-80-7346-149-2.

[28] ODVÁRKO, Oldřich a Jana ŘEPOVÁ. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť: 2. část*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 2009, 142 s. ISBN 978-80-7196-042-3.

[29] ODVÁRKO, Oldřich a Jana ŘEPOVÁ. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť: 3. část*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 200 s. ISBN 80-7196-039-X.

[30] ODVÁRKO, Oldřich. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia: goniometrie*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2005, 44 s. ISBN 80-7196-306-2.

[31] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 2001, 303 s. ISBN 80-7196-099-3.

Přílohy

1. Seznam aktivit podle tematických okruhů
2. Výukové karty
3. Funkce – opakování (Bludiště)
4. Malý hrací plán (Bludiště)
5. Malý hrací plán (Člověče, nezlob se)
6. Definiční obory a obory hodnot (Bludiště, Člověče)
7. Lineární lomené funkce (Bludiště, Člověče)
8. Kvadratické funkce a jejich grafy (Černý Petr)
9. Klíčová slova (Čtverce)
10. Vzájemně zaměnitelné grafy (Čtverce)
11. Určování vlastností z grafu funkce (Čtverce)
12. Vlastnosti funkcí a jejich matematický zápis (Domino)
13. Lineární funkce zadané dvěma body (Domino)
14. Grafy goniometrických funkcí (Domino)
15. Opakování funkcí, jejich grafů a vlastností (Kvarteto)
16. Souřadnice bodů (Lotto)
17. Vrcholy parabol (Lotto)
18. Mocniny – opakování (Pexeso)
19. Grafy funkcí (Pexeso)
20. Abeceda1 (Abeceda)
21. Abeceda2 (Abeceda)
22. Lineární (Slova)
23. Matematika (Slova)
24. Exp (Slova)
25. Log (Slova)
26. Funkce (Slova)
27. Malování obrázků pomocí funkcí – předlohy pro žáky
28. Malování obrázků pomocí funkcí – práce žáků
29. Vytváření funkcí za určitých podmínek (Brainstorming)
30. Definiční obory a obory hodnot (Šifra podle klíče)

31. Pojmy (Osmisměrka)

K práci je přiloženo CD s vypracovanými aplety v programech GEONExT a GeoGebra, zpracované grafy funkcí v programu MS Excel, text diplomové práce v PDF formátu a jednotlivé vypracované didaktické hry a aktivity ve vyšší kvalitě[6] v PDF formátu.

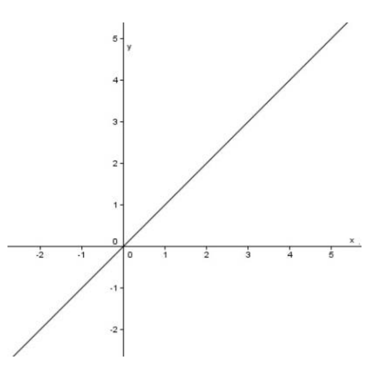
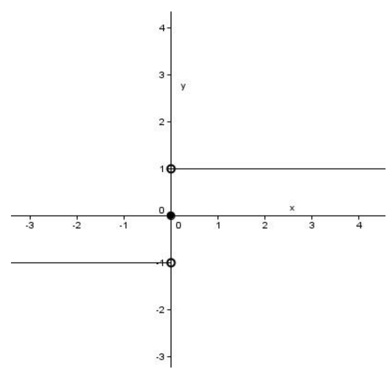
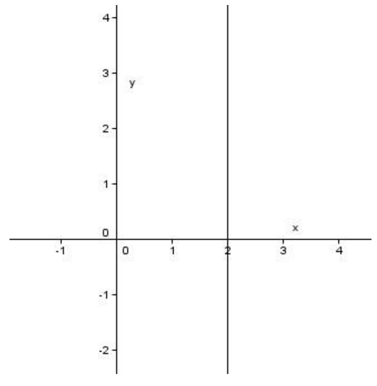
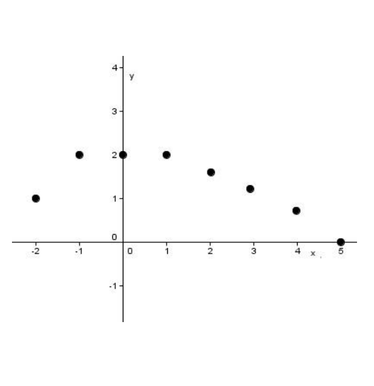
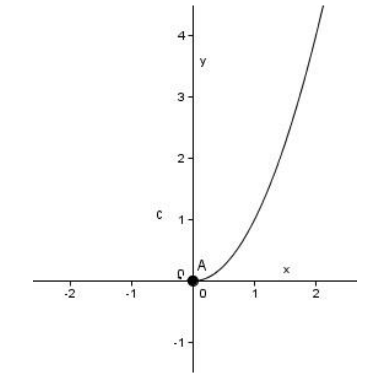
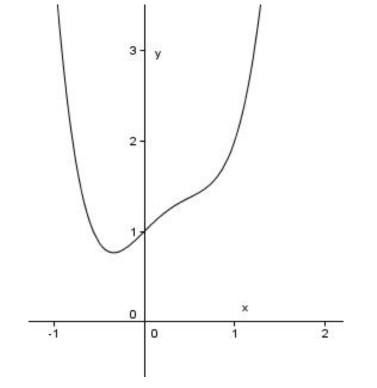
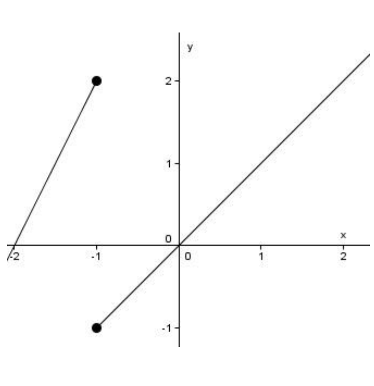
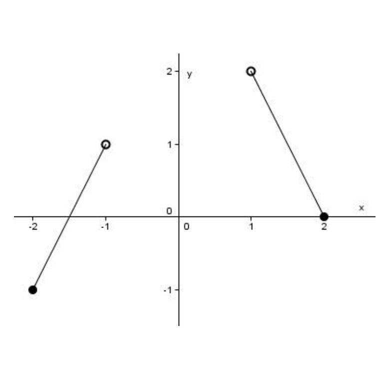
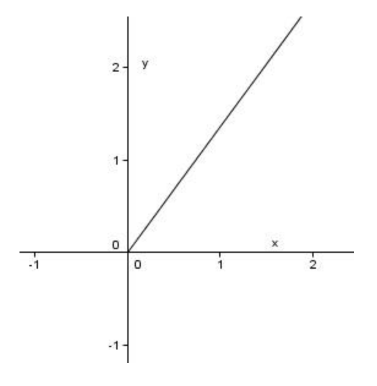
[6] Kvalita vypracovaných her v některých přílohách diplomové práce je nižší kvůli zmenšení velikosti s ohledem na stanovené okraje.

Příloha č. 1

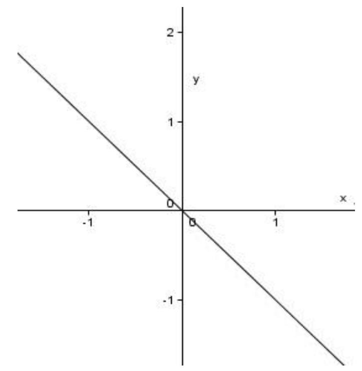
1. Funkce a její graf + vlastnosti funkce		
Určování vlastností z grafu funkce	Čtverce	Příloha č. 11
Souřadnice bodů	Lotto	Příloha č. 16
Vlastnosti funkcí a jejich matematický zápis	Domino	Příloha č. 12
Vytváření funkcí za určitých podmínek	Brainstorming	Příloha č. 29
Definiční obory a obory hodnot	Šifra podle klíče	Příloha č. 30
Definiční obory a obory hodnot	Bludiště (Člověče)	Příloha č. 6
2. Lineární funkce		
Lineární funkce zadané dvěma body	Domino	Příloha č. 13
Lineární	Slova	Příloha č. 22
3. Funkce s absolutními hodnotami		
Matematika	Slova	Příloha č. 23
Abeceda 1	Abeceda	Příloha č. 20
4. Kvadratické funkce		
Kvadratické funkce a jejich grafy	Černý Petr	Příloha č. 8
Vrcholy parabol	Lotto	Příloha č. 17
5. Lineární lomené funkce		
Lineární lomené funkce	Bludiště	Příloha č. 7
6. Mocninné funkce		
Mocniny - opakování	Pexeso	Příloha č. 18
7. Exponenciální a logaritmické funkce		
Exp	Slova	Příloha č. 24
Log	Slova	Příloha č. 25
8. Goniometrické funkce		
Grafy goniometrických funkcí	Domino	Příloha č. 14
Vzájemně zaměnitelné grafy	Čtverce	Příloha č. 10
9. Opakování funkcí		
Grafy funkcí	Pexeso	Příloha č. 19
Klíčová slova*	Čtverce	Příloha č. 9
Opakování funkcí, jejich grafů a vlastností	Kvarteto	Příloha č. 15
Funkce - opakování	Bludiště	Příloha č. 3
Funkce *	Slova	Příloha č. 26
Pojmy*	Osmisměrka	Příloha č. 31
10. Aktivity, které lze využít pro všechny tematické okruhy		
Abeceda 2	Abeceda	Příloha č. 21
Malování obrázků pomocí funkcí		Příloha č. 27, 28
Modelování drátem	Modelování drátem	
Vykreslování grafů funkcí	Využití PC	Kapitola 4

* v těchto aktivitách není třeba znalost goniometrických funkcí

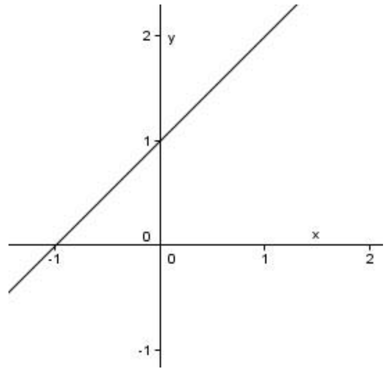
Příloha č. 2

1	2	3
		
4	5	6
		
7	8	9
		

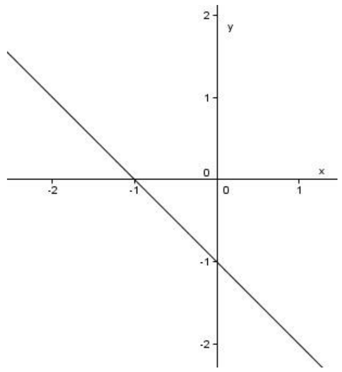
10



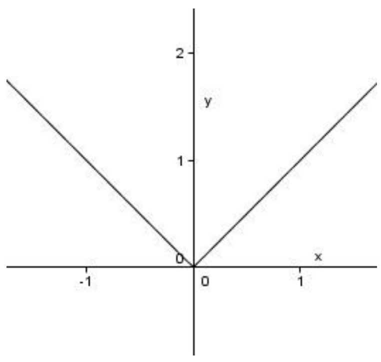
11



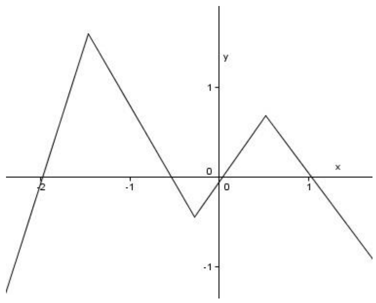
12



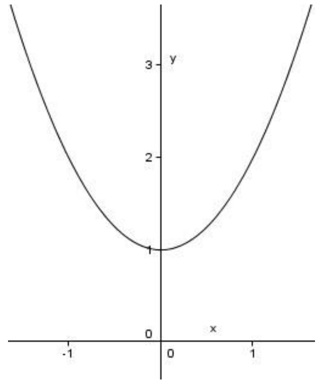
13



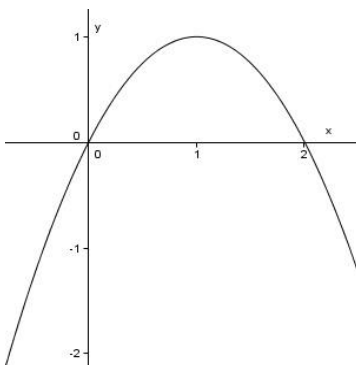
14



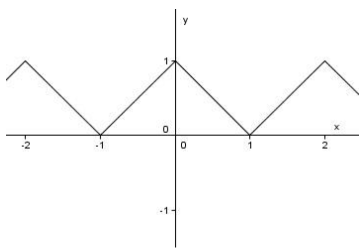
15



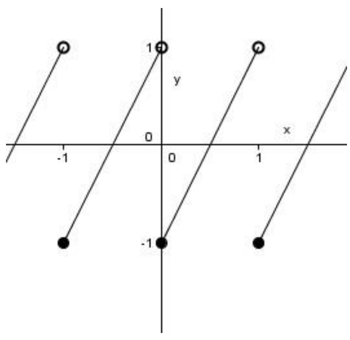
16



17



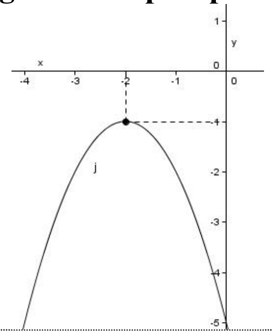
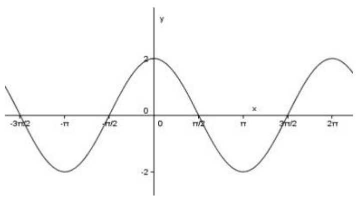
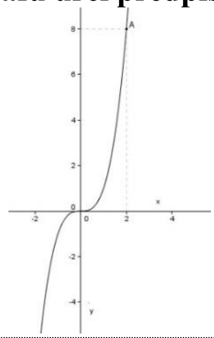
18



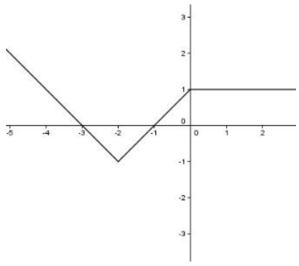
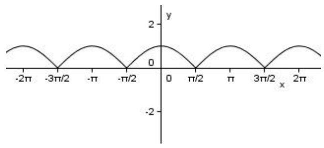
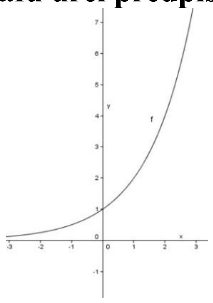
Příloha č. 3

U následujících listů odstříhejte nadbytečné okraje a slepte je dohromady podle jejich umístění (popisek vždy nad částí hrací plochy).

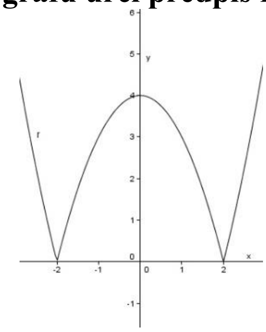
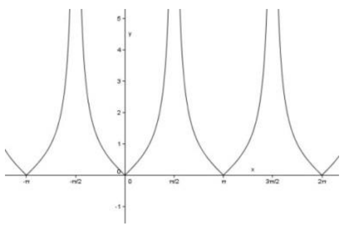
1. nahoře vlevo

START	Načrtni graf funkce: $\boldsymbol{f: y = x^2 - 4}$	**Z grafu urči předpis fce:** 
Vysvětli pojem „sudá funkce“ a uveď příklad.	**Uveď tři příklady lineární lomené funkce** **(stačí předpis).**	**Urči definiční obor a obor hodnot funkce:** $\boldsymbol{b: y = \frac{3}{x-3}}$
Napište předpis funkce podle jejího grafu: 	**Načrtni graf funkce:** $\boldsymbol{g: y = 3x - 2}$	**Vysvětli pojem „inflexní bod“ a uveď příklad funkce, kde se tento jev vyskytuje.**
Načrtni graf funkce: $\boldsymbol{h: y = 2 \cdot cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$	**Co je grafem kvadratické funkce?**	**Z grafu urči předpis fce:** 

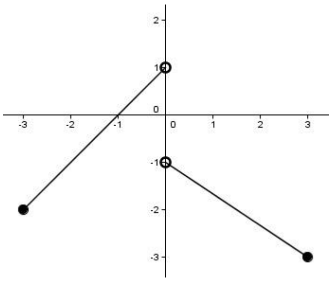
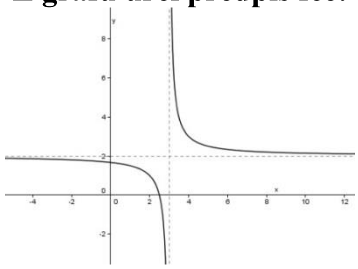
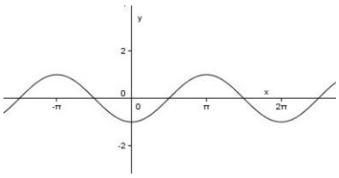
2. dole vlevo

Načrtni graf funkce: $b\!: y = \lvert\lvert x-2\rvert-2\rvert$	**Z grafu urči monotónnost funkce:** 	
Načrtni tři příklady lichých funkcí.	**Co je grafem lineární lomené funkce?**	**Z grafu urči předpis fce:** 
Z grafu urči předpis fce: 	**<u>Bludiště Funkce opakování</u>**	**Načrtni tři grafy zdola omezených funkcí.**
Načrtni graf funkce: $w\!: y = \dfrac{1}{x+1} - 2$	**Vysvětli pojem „lichá funkce“ a uveď příklad.**	**Načrtni tři libovolné periodické funkce.**

3. nahoře vpravo

Vysvětli pojem „rostoucí funkce“ a uveď příklad.	**Z grafu urči předpis fce:** 	**Vysvětli, co v předpisu funkce $j: y = a \cdot \sin x - b$ způsobují parametry a, b a ukaž na dvou příkladech.**
Vysvětli pojem „asymptota“ a uveď příklad funkce, kde se vyskytuje.	**Načrtni tři příklady sudých funkcí.**	**Načrtni graf funkce: $k: y = (x+2)^3 - 1$**
Urči definiční obor a obor hodnot funkce: $r: y = 2 \cdot 3^x - 3$	**Vysvětli pojem „omezená funkce“ a uveď příklad.**	**Urči průsečíky funkce $l: y = (x-3)^2 - 1$ s osami.**
Z grafu urči předpis fce: 	**Urči monotónnost funkce $v: y = \frac{-1}{x}$.**	**Vysvětli, co v předpisu funkce $s: y = c \cdot x^2$ způsobuje parametr c a ukaž na třech příkladech.**

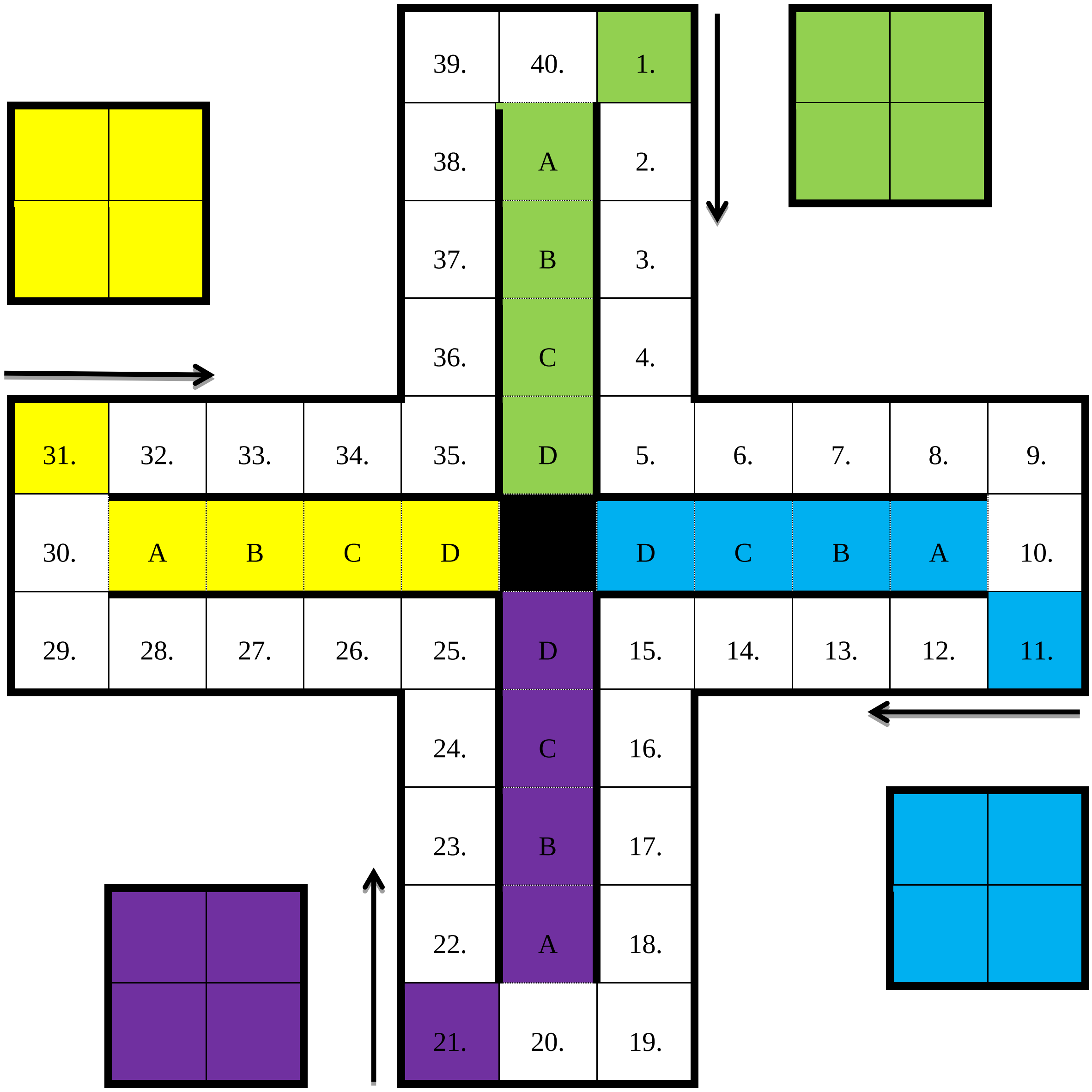
4. dole vpravo

Načrtni tři grafy shora omezených funkcí.	**Z grafu urči monotónnost funkce:** 	**Vysvětli pojem „klesající funkce“ a uveď příklad.**
	Načrtni graf funkce: $\boldsymbol{q}: \boldsymbol{y = b^x}$ **kde** $\boldsymbol{0 < b < 1}$	**Z grafu urči předpis fce:** 
Napiš tři příklady kvadratických funkcí s vrcholy mimo osy soustavy souřadné a načrtni k nim grafy.	**Napiš předpisy tří funkcí, které mají jiný definiční obor než R.**	**Načrtni graf funkce:** $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2}$
Z grafu urči předpis fce: (alespoň dvě varianty) 	**Vyjmenuj 5 vlastností funkce:** $\boldsymbol{m}: \boldsymbol{y = \log_a x}$ **kde** $\boldsymbol{a > 1}$	***<u>CÍL</u>***

Příloha č. 4

START	**1.**	**22.**	**23.**	**24.**	**25.**
3.	**2.**	**21.**	**28.**	**27.**	**26.**
4.	**5.**	**20.**	**29.**	**36.**	**37.**
7.	**6.**	**19.**	**30.**	**35.**	**38.**
8.	**9.**	**18.**	**31.**	**34.**	**39.**
11.	**10.**	**17.**	**32.**	**33.**	**40.**
12.		**16.**	**43.**	**42.**	**41.**
13.	**14.**	**15.**	**44.**	**45.**	**CÍL**

Příloha č. 5


39.
40.
1.
38.
A
2.
37.
B
3.
36.
C
4.
31.
32.
33.
34.
35.
D
5.
6.
7.
8.
9.
30.
A
B
C
D
D
C
B
A
10.
29.
28.
27.
26.
25.
D
15.
14.
13.
12.
11.
24.
C
16.
23.
B
17.
22.
A
18.
21.
20.
19.

Příloha č. 6

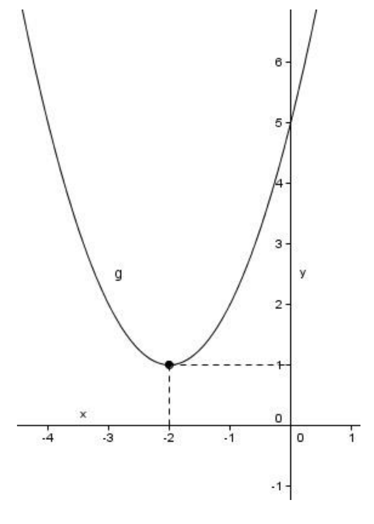
1.	$f: y = \frac{1}{x}$	(D_f)	24.	$f: y = \frac{2}{x-3} + 2$	(H_f)
2.	$f: y = x^2 - 3x$	(D_f)	25.	$f: y = \frac{2x+7}{x+3}$	(H_f)
3.	$f: y = ln(x^2 - 1)$	(D_f)	26.	$f: y = ln(x+2)$	(H_f)
4.	$f: y = \frac{3}{x^2 + 5x + 6}$	(D_f)	27.	$f: y = \lvert x-2 \rvert - 3$	(H_f)
5.	$f: y = 2^{x+1}$	(D_f)	28.	$f: y = x^4 + 5$	(H_f)
6.	$f: y = sin(x+\pi)$	(D_f)	29.	$f: y = sin2x$	(H_f)
7.	$f: y = \frac{3}{x+2} - 1$	(D_f)	30.	$f: y = x^2 - 2x + 4$	(H_f)
8.	$f: y = \frac{-x}{x-1}$	(D_f)	31.	$f: y = tgx$	(H_f)
9.	$f: y = \sqrt{x+3}$	(D_f)	32.	$f: y = \lvert x^3 - 1 \rvert - 2$	(H_f)
10.	$f: y = tg\, x$	(D_f)	33.	$f: y = \left\lvert \frac{1}{x-3} \right\rvert + 1$	$(D_f;\ H_f)$
11.	$f: y = \frac{1}{x^2 + x}$	(D_f)	34.	$f: y = x^2 + 4x + 4$	$(D_f;\ H_f)$
12.	$f: y = \frac{1-x}{x^2+4}$	(D_f)	35.	$f: y = x^2 + 4x + 8$	$(D_f;\ H_f)$
13.	$f: y = 4x^3 + 2$	(D_f)	36.	$f: y = 3cosx$	$(D_f;\ H_f)$
14.	$f: y = \sqrt{2-x}$	(D_f)	37.	$f: y = -x^2 + 6x + 7$	$(D_f;\ H_f)$
15.	$f: y = cotg\, x$	(D_f)	38.	$f: y = 4sinx$	$(D_f;\ H_f)$
16.	$f: y = log_{0,5}(x-2)$	(D_f)	39.	$f: y = 4^{x+2}$	$(D_f;\ H_f)$
17.	$f: y = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	(D_f)	40.	$f: y = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$	$(D_f;\ H_f)$
18.	$f: y = \lvert 2x - 3 \rvert$	(H_f)	41. (A)	$f: y = \frac{1-x}{x-2}$	$(D_f;\ H_f)$
19.	$f: y = \sqrt{x}$	(H_f)	42. (B)	$f: y = \frac{2x}{x-1}$	$(D_f;\ H_f)$
20.	$f: y = \frac{1}{x}$	(H_f)	43. (C)	$f: y = \frac{-2x-1}{x+2}$	$(D_f;\ H_f)$
21.	$f: y = (x-3)^2 + 4$	(H_f)	44. (D)	$f: y = \frac{2x+7}{x+3}$	$(D_f;\ H_f)$
22.	$f: y = \frac{1}{x+2}$	(H_f)	45.	$f: y = \frac{2-3x}{x}$	$(D_f;\ H_f)$
23.	$f: y = x^3 + 2$	(H_f)			

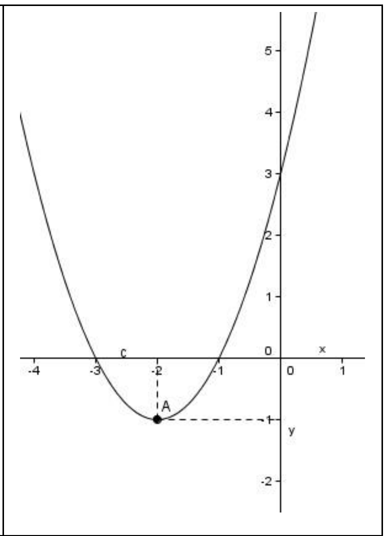
Příloha č. 7

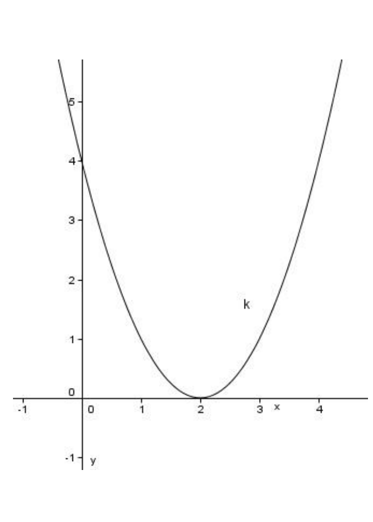
1.	$f: y = \frac{1}{x}$	(D_f)	24.	$f: y = \frac{3}{x} + 4$	(D_f, H_f)
2.	$f: y = \frac{4}{x+3}$	(D_f)	25.	$f: y = \frac{1}{x-1} + 2$	(D_f, H_f)
3.	$f: y = -\frac{1}{x}$	(D_f)	26.	$f: y = \frac{1}{x+3} - 6$	(D_f, H_f)
4.	$f: y = \frac{2-5x}{x-7}$	(D_f)	27.	$f: y = \frac{2x+7}{x+3}$	(D_f, H_f)
5.	$f: y = \frac{1+3x}{x+3}$	(D_f)	28.	$f: y = \frac{x-5}{x-3}$	(D_f, H_f)
6.	$f: y = \frac{2-3x}{2x-3}$	(D_f)	29.	$f: y = \frac{-x-3}{x+1}$	(D_f, H_f)
7.	$f: y = \frac{3-3x}{5x+2}$	(D_f)	30.	$f: y = -\frac{1}{x}$	(graf)
8.	$f: y = \frac{2-3x}{x}$	(D_f)	31.	$f: y = \frac{2}{x}$	(graf)
9.	$f: y = \left\lvert\frac{3}{x-3}\right\rvert - 1$	(D_f)	32.	$f: y = \frac{1}{x} - 2$	(graf)
10.	$f: y = \left\lvert\frac{1}{x+2}\right\rvert + 1$	(D_f)	33.	$f: y = \frac{1}{x-2}$	(graf)
11.	$f: y = \frac{1}{x} + 2$	(H_f)	34.	$f: y = \frac{1}{x+2}$	(graf)
12.	$f: y = \frac{3}{x} - 3$	(H_f)	35.	$f: y = \frac{1}{x-2} - 1$	(graf)
13.	$f: y = \frac{-2}{x+1} - 1$	(H_f)	36.	$f: y = \frac{1}{x+1} + 1$	(graf)
14.	$f: y = \left\lvert\frac{4}{x+2}\right\rvert$	(H_f)	37.	$f: y = \frac{2x}{x-1}$	(graf)
15.	$f: y = -\frac{1}{x} - 1$	(H_f)	38.	$f: y = \frac{-2x-1}{x+2}$	(graf)
16.	$f: y = \frac{1}{x}$	(H_f)	39.	$f: y = \frac{x}{x+1}$	(graf)
17.	$f: y = \frac{3}{x+2} - 1$	(H_f)	40.	$f: y \left\lvert = -\left\lvert\frac{1}{x+1}\right\rvert\right\rvert$	(graf)
18.	$f: y = -\left\lvert\frac{2}{x+2}\right\rvert + 1$	(H_f)	41. (A)	$f: y = -\left\lvert\frac{1}{x+1}\right\rvert + 3$	(graf)
19.	$f: y = \left\lvert\frac{1}{x+3}\right\rvert - 2$	(H_f)	42. (B)	$f: y = \left\lvert\frac{1}{x-3}\right\rvert + 1$	(graf)
20.	$f: y = \frac{-x-2}{x+4}$	(H_f)	43. (C)	$f: y = \left\lvert\frac{1}{x+2}\right\rvert - 1$	(graf)
21.	$f: y = \frac{5}{x}$	(D_f, H_f)	44. (D)	$f: y = -\left\lvert\frac{1}{x-1}\right\rvert + 2$	(graf)
22.	$f: y = \frac{2}{x+2}$	(D_f, H_f)	45.	$f: y = \left\lvert\frac{2}{x}\right\rvert - 2$	(graf)
23.	$f: y = \frac{3}{x-3}$	(D_f, H_f)			

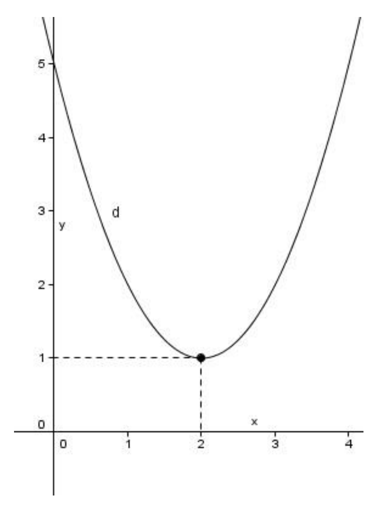
ČERNÝ PETR

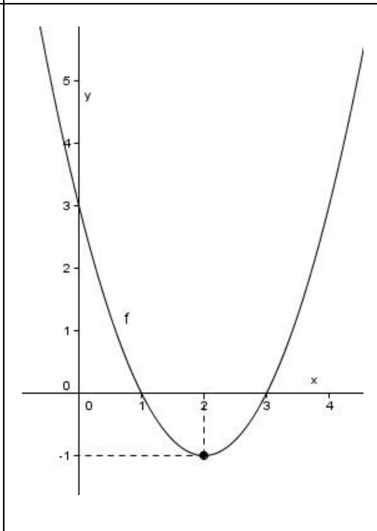
Opakování kvadratických funkcí a jejich grafů

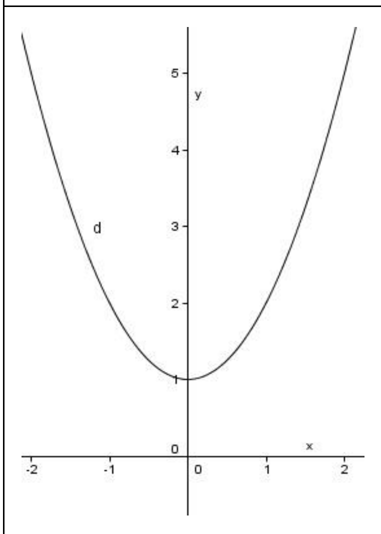


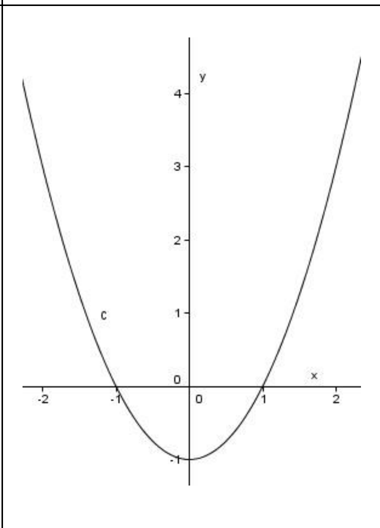


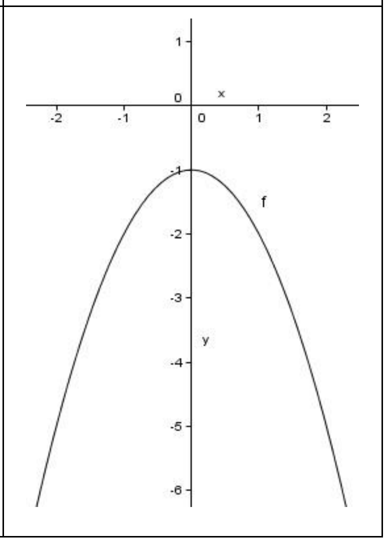


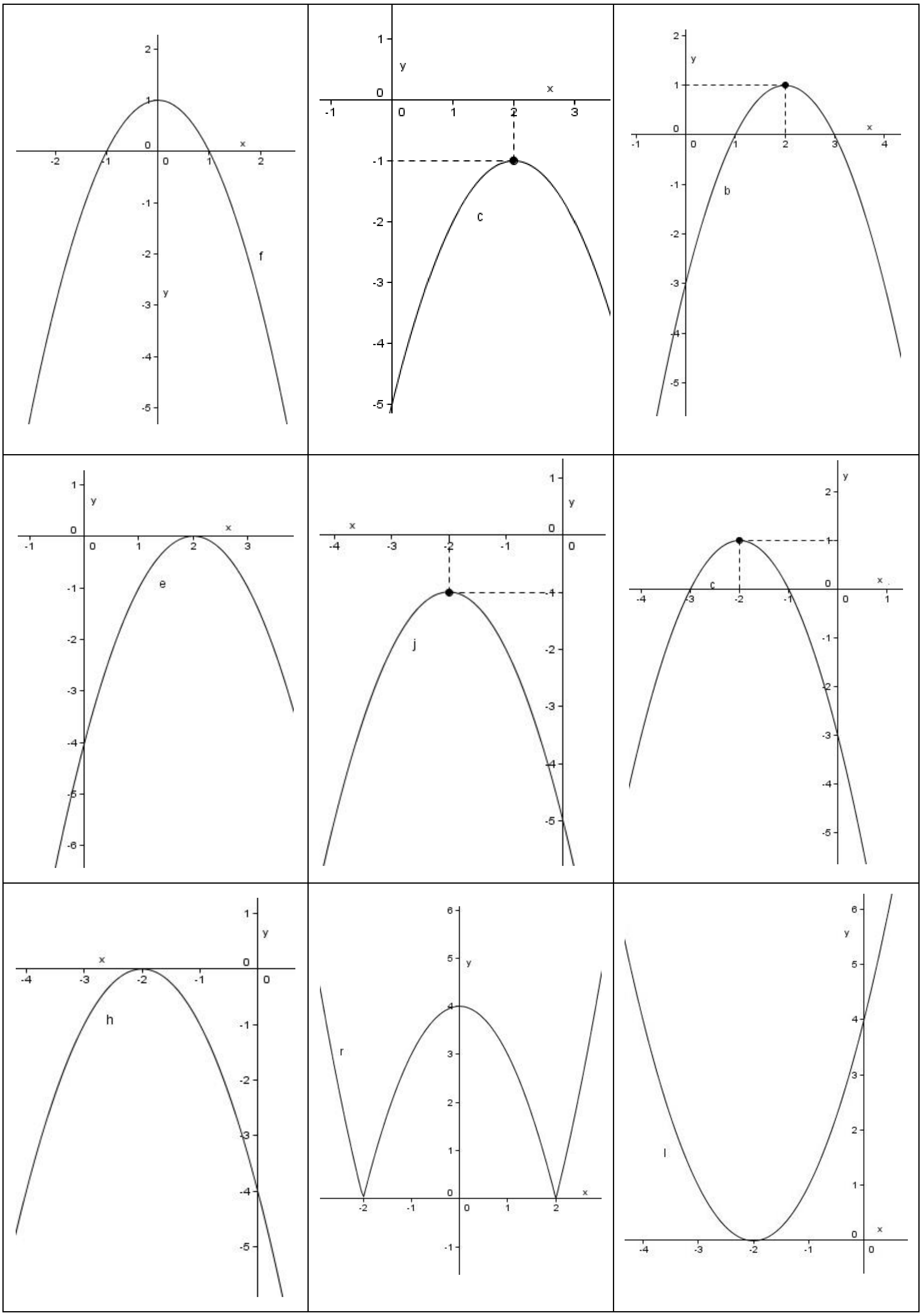








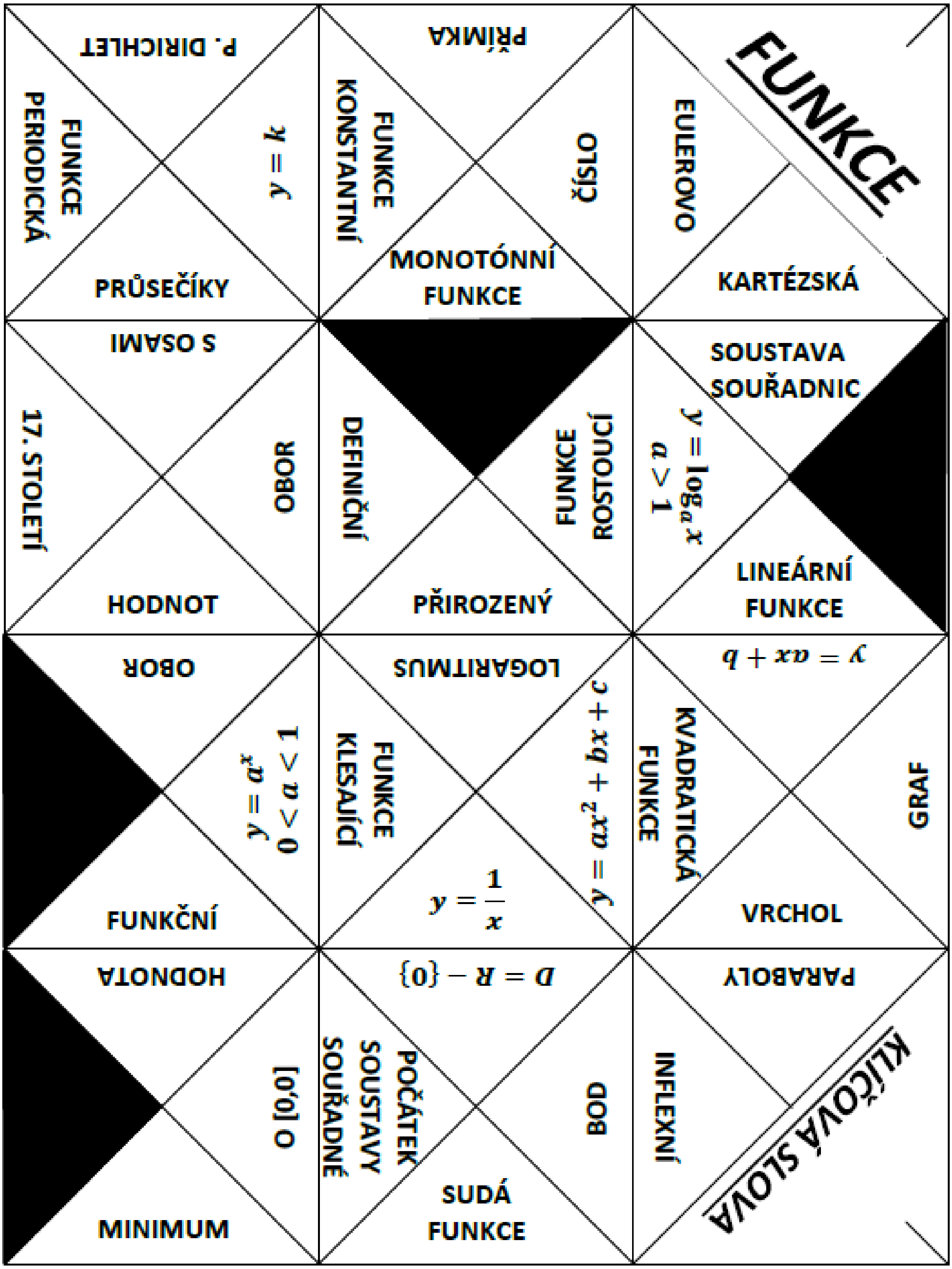



f
c
b
e
j
c
h
r
l

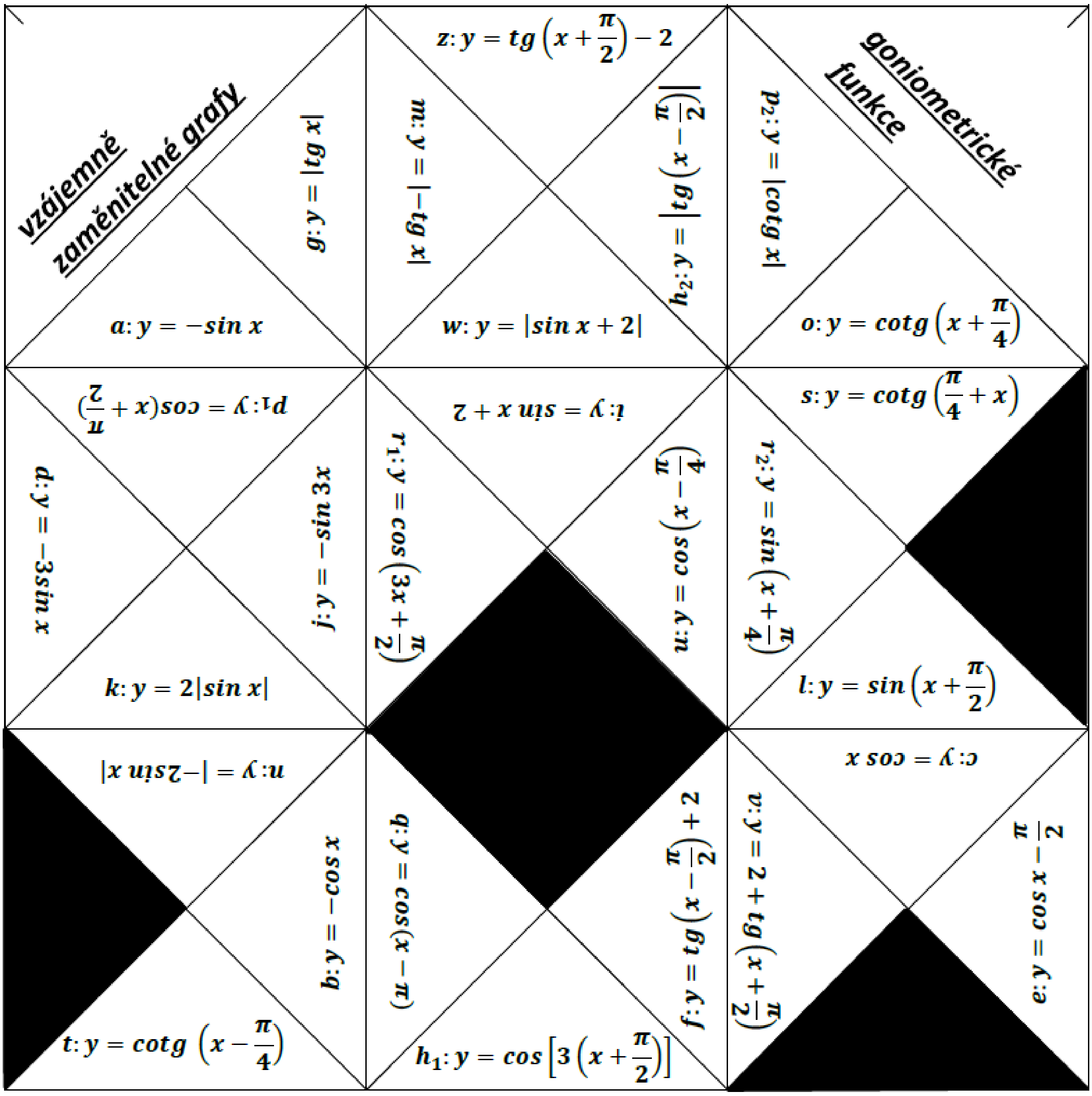
$y = (x-2)^2 + 1$	$y = (x+2)^2 - 1$	$y = (x-2)^2 - 1$
$y = (x+2)^2$	$y = x^2 + 1$	$y = x^2 - 1$
$y = (x-2)^2$	$y = -(x+2)^2 + 1$	$y = -(x-2)^2 + 1$

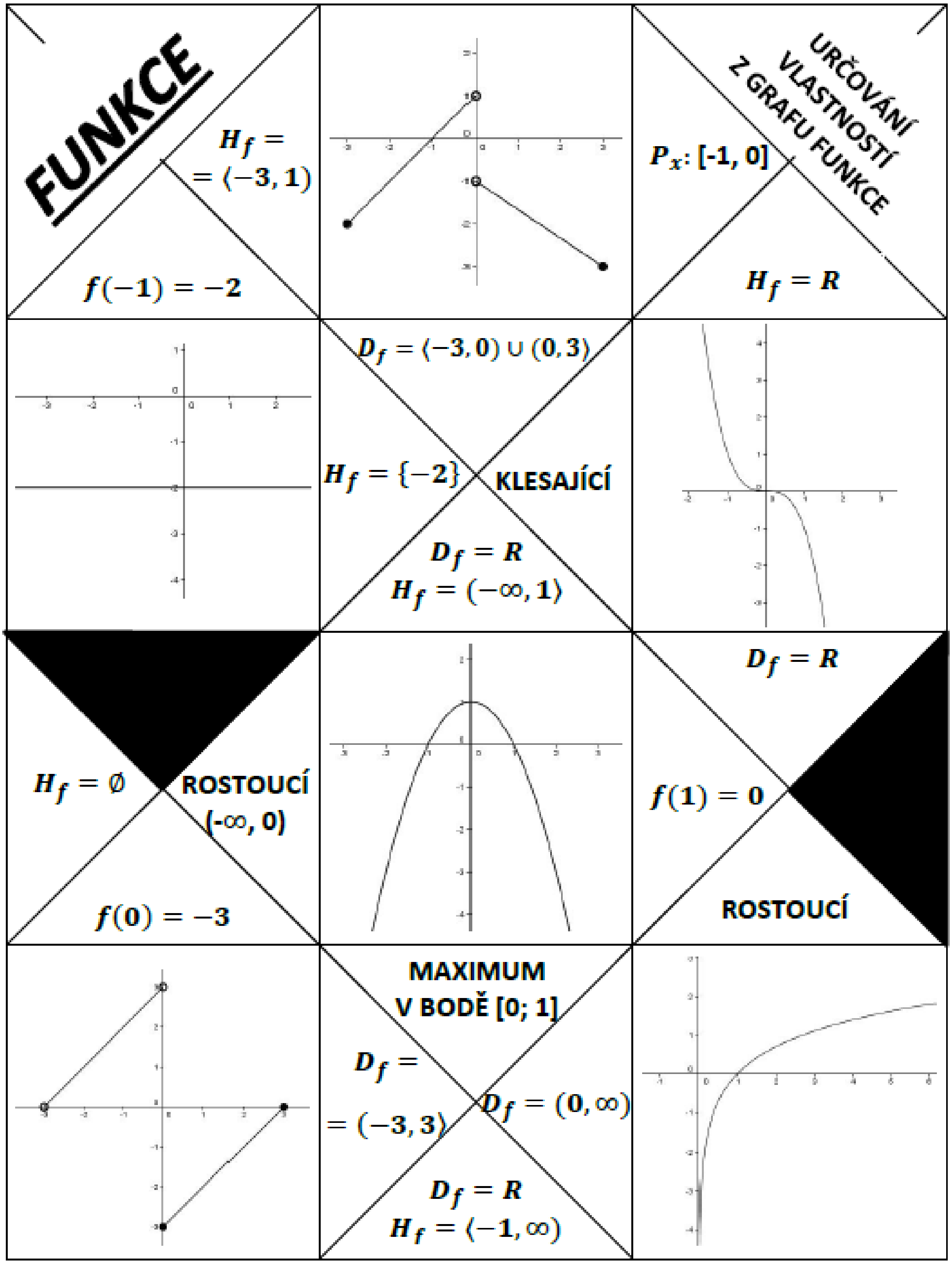
$\boldsymbol{y = -(x+2)^2 - 1}$	$\boldsymbol{y = -(x-2)^2 - 1}$	$\boldsymbol{y = -(x+2)^2}$
$\boldsymbol{y = -(x-2)^2}$	$\boldsymbol{y = -x^2 + 1}$	$\boldsymbol{y = -x^2 - 1}$
$\boldsymbol{y = (x+2)^2 + 1}$		

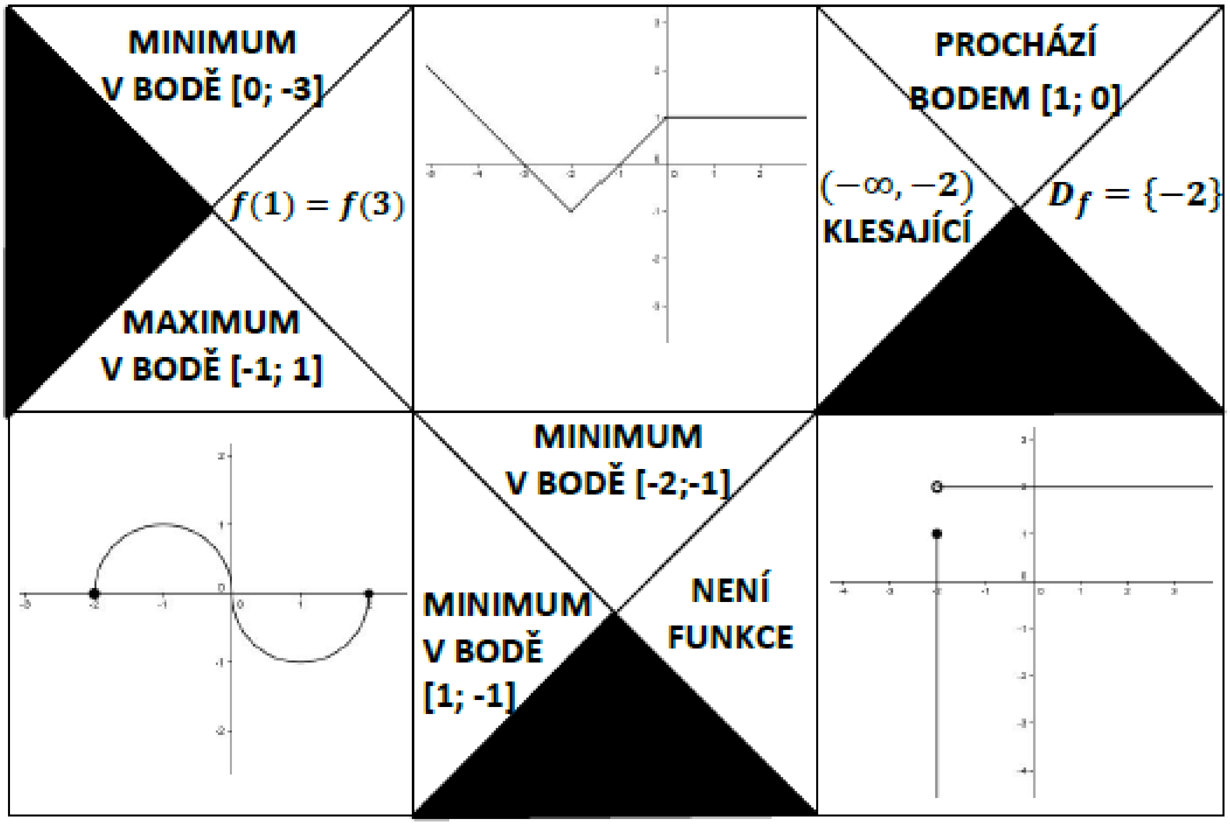
Příloha č. 9


FUNKCE
P. DIRICHLET
FUNKCE PERIODICKÁ
$y = k$
PRŮSEČÍKY
PŘÍMKA
FUNKCE KONSTANTNÍ
ČÍSLO
MONOTÓNNÍ FUNKCE
EULEROVO
KARTÉZSKÁ
S OSAMI
17. STOLETÍ
OBOR
HODNOT
DEFINIČNÍ
FUNKCE ROSTOUCÍ
PŘIROZENÝ
SOUSTAVA SOUŘADNIC
$y = \log_a x$ $a > 1$
LINEÁRNÍ FUNKCE
OBOR
$y = a^x$ $0 < a < 1$
FUNKČNÍ
LOGARITMUS
FUNKCE KLESAJÍCÍ
$y = ax^2 + bx + c$
$y = \frac{1}{x}$
$y = ax + b$
KVADRATICKÁ FUNKCE
GRAF
VRCHOL
HODNOTA
O [0,0]
MINIMUM
$D = R - \{0\}$
POČÁTEK SOUSTAVY SOUŘADNÉ
BOD
SUDÁ FUNKCE
PARABOLY
INFLEXNÍ
KLÍČOVÁ SLOVA

Příloha č. 10

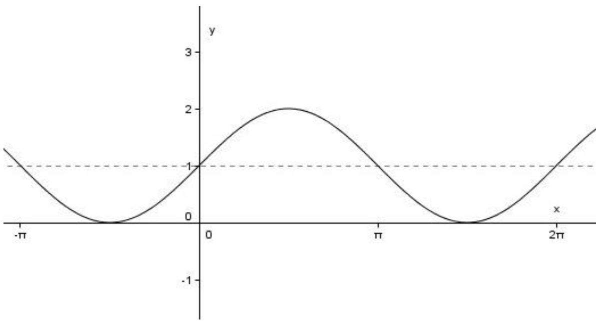
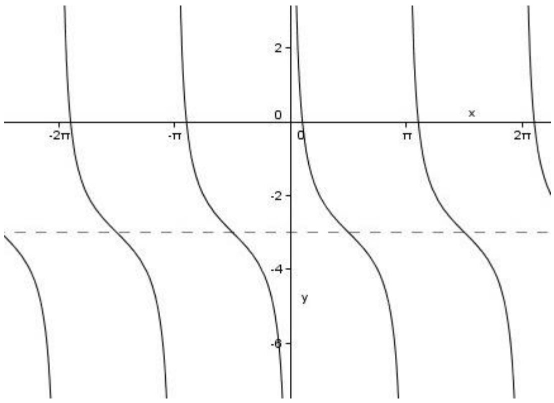
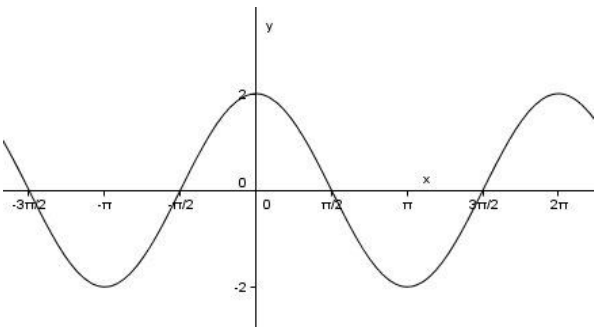

vzájemně zaměnitelné grafy
goniometrické funkce
$z: y = tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2$
$g: y = |tg\, x|$
$m: y = |-tg\, x|$
$h_2: y = \left|tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$
$p_2: y = |cotg\, x|$
$a: y = -sin\, x$
$w: y = |sin\, x + 2|$
$o: y = cotg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
$p_1: y = cos(x + \frac{\pi}{2})$
$i: y = sin\, x + 2$
$s: y = cotg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$
$d: y = -3sin\, x$
$j: y = -sin\, 3x$
$r_1: y = cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$
$u: y = cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
$r_2: y = sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
$k: y = 2|sin\, x|$
$l: y = sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
$n: y = |-2sin\, x|$
$c: y = cos\, x$
$b: y = -cos\, x$
$q: y = cos(x - \pi)$
$f: y = tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$
$v: y = 2 + tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
$e: y = cos\, x - \frac{\pi}{2}$
$t: y = cotg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
$h_1: y = cos\left[3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

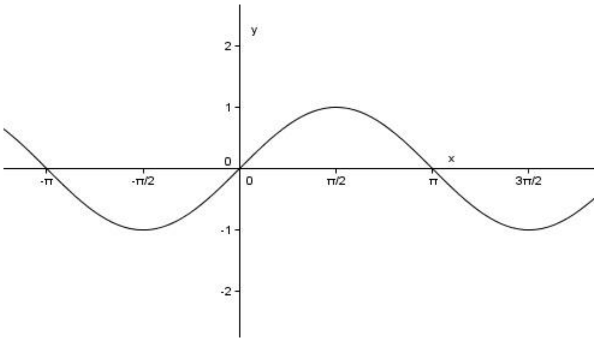
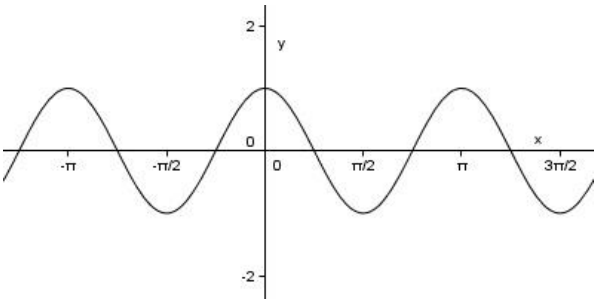
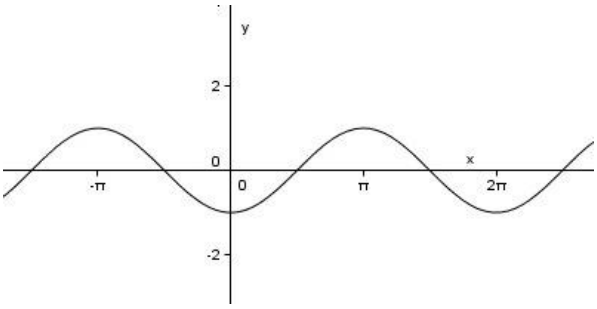
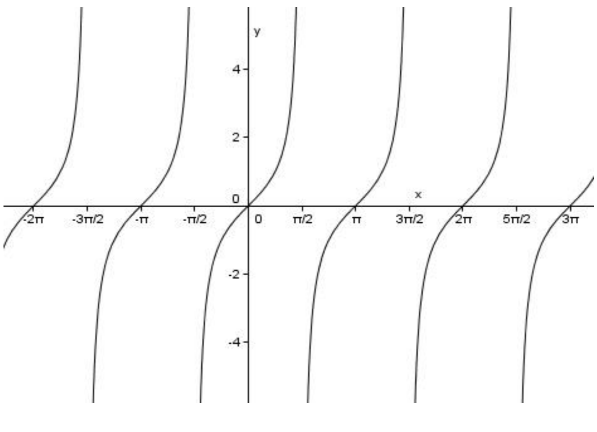

FUNKCE
$H_f =$
$= \langle -3, 1)$
$f(-1) = -2$
URČOVÁNÍ
VLASTNOSTÍ
Z GRAFU FUNKCE
P_x: [-1, 0]
$H_f = R$
$D_f = \langle -3, 0) \cup (0, 3\rangle$
$H_f = \{-2\}$
KLESAJÍCÍ
$D_f = R$
$H_f = (-\infty, 1\rangle$
$H_f = \emptyset$
ROSTOUCÍ
(-∞, 0)
$f(0) = -3$
$D_f = R$
$f(1) = 0$
ROSTOUCÍ
MAXIMUM
V BODĚ [0; 1]
$D_f =$
$= (-3, 3\rangle$
$D_f = (0, \infty)$
$D_f = R$
$H_f = \langle -1, \infty)$

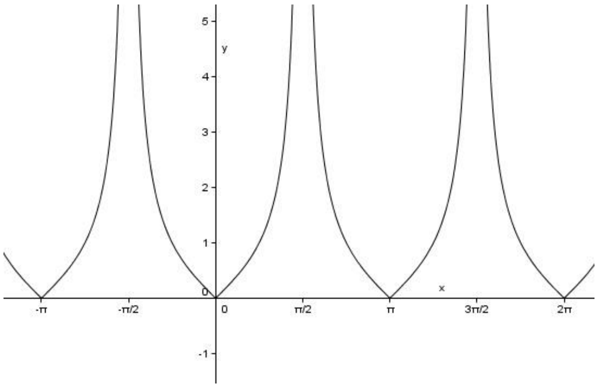
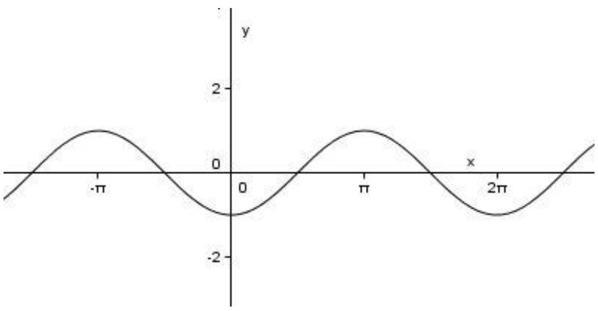
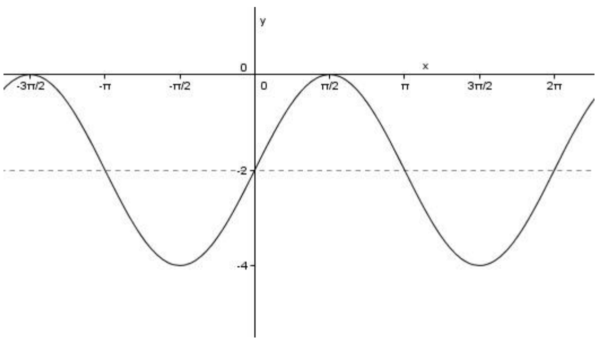
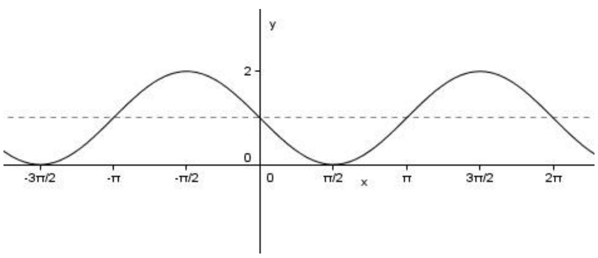

MINIMUM
V BODĚ [0; -3]
$f(1) = f(3)$
MAXIMUM
V BODĚ [-1; 1]
PROCHÁZÍ
BODEM [1; 0]
$(-\infty, -2)$
KLESAJÍCÍ
$D_f = \{-2\}$
MINIMUM
V BODĚ [-2;-1]
MINIMUM
V BODĚ
[1; -1]
NENÍ
FUNKCE

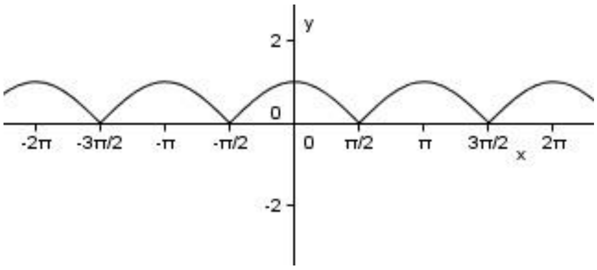
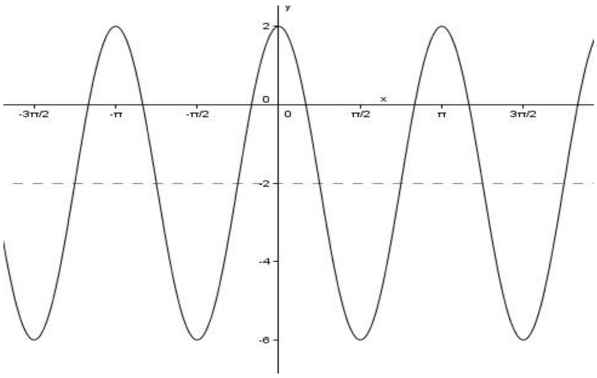
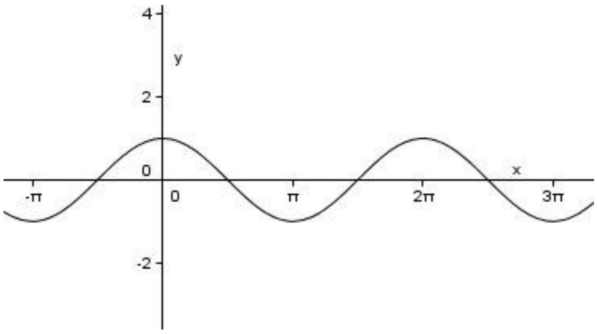
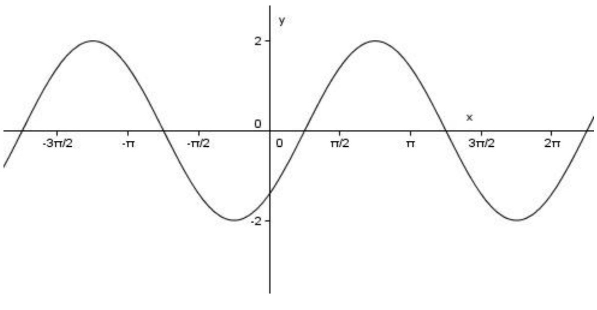
Vlastnosti funkcí a jejich matematický zápis	**SUDÁ**	$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$ $\exists(-\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{D_f}$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x})$	**MAXIMUM**
$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$ $\exists \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{D_f}$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$	**ROSTOUCÍ**	$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}$: $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$	**MINIMUM**
$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$ $\exists \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{D_f}$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$	**KLESAJÍCÍ**	$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}$: $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$	**LICHÁ**
$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$ $\exists(-\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{D_f}$: $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	**KONSTANTNÍ**	$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$	**SHORA OMEZENÁ**
$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$ $\exists \boldsymbol{d} \in \boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{d}$	**PROSTÁ**	$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{D_f}$: $\boldsymbol{x_1} \neq \boldsymbol{x_2} \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})$	**ZDOLA OMEZENÁ**
$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$ $\exists \boldsymbol{d} \in \boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{d}$			

DOMINO Lineární funkce	$f: y = x$	**A [-1; -1]** **B [2; 2]**	$j: y = \frac{1}{2}x$
P [1; $\frac{1}{2}$] **Q [4; 2]**	$d: y = x + 3$	**X [1; 4]** **Y [-3; 0]**	$h: y = 2x$
K [0; 0] **L [2; 4]**	$l: y = x + \frac{1}{2}$	**U [0; $\frac{1}{2}$]** **V [1; $\frac{3}{2}$]**	$e: y = -x$
C [1; -1] **D [-5; 5]**	$c: y = x - 2$	**R [0; -2]** **S [2; 0]**	$g: y = 3x$
E [0; 0] **F [2; 6]**	$i: y = 4$	**M [3; 4]** **N [-2; 4]**	$b: y = 4x - 2$
I [0; -2] **J [3; 10]**	$t: y = -x - 2$	**G [2; -4]** **H [-2; 0]**	$m: y = -2$

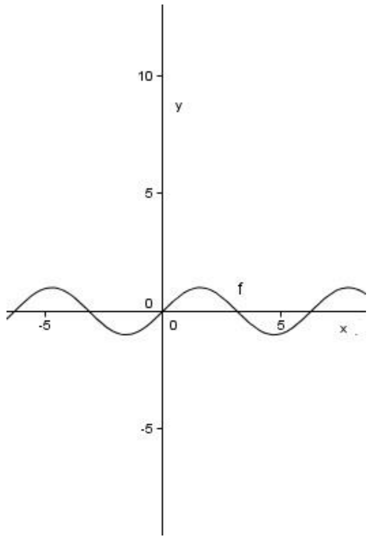
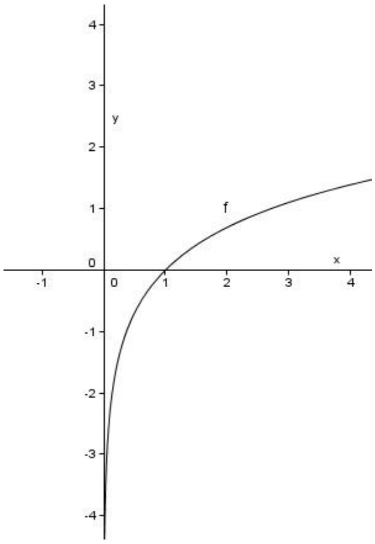
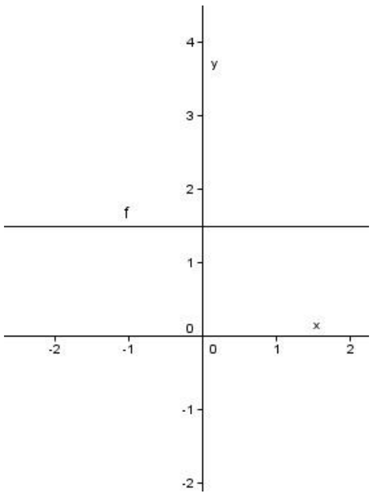
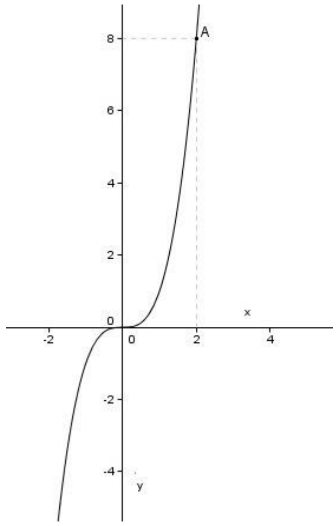
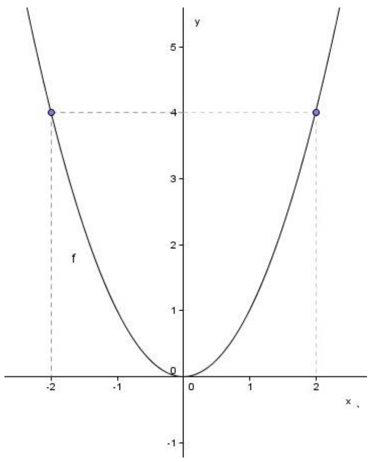
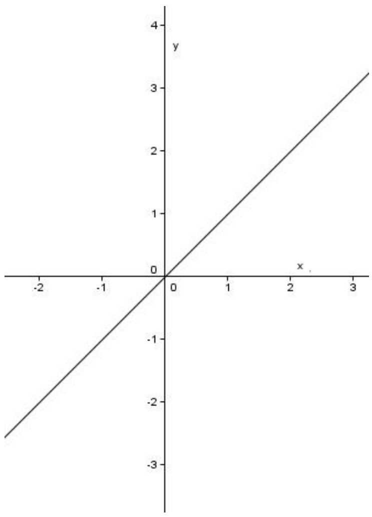
GRAFY GONIOMETRICKÝC H FUNKCÍ	$\boldsymbol{f: y = \sin x + 1}$
	$\boldsymbol{m: y = \mathrm{cotg}\, x - 3}$
	$\boldsymbol{e: y = 2\cos x}$
	$\boldsymbol{g: y = \sin x}$

	$\boldsymbol{k}\colon \boldsymbol{y = \cos(2x)}$
	$\boldsymbol{s}\colon \boldsymbol{y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$
	$\boldsymbol{b}\colon \boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$
	$\boldsymbol{p}\colon \boldsymbol{y = \lvert \mathrm{tg}\, x \rvert}$

	$\boldsymbol{i}: \boldsymbol{y = -\cos x}$
	$\boldsymbol{h}: \boldsymbol{y = 2 \cdot \sin x - 2}$
	$\boldsymbol{q}: \boldsymbol{y = -\sin x + 1}$
	$\boldsymbol{d}: \boldsymbol{y = \lvert\cos x\rvert}$

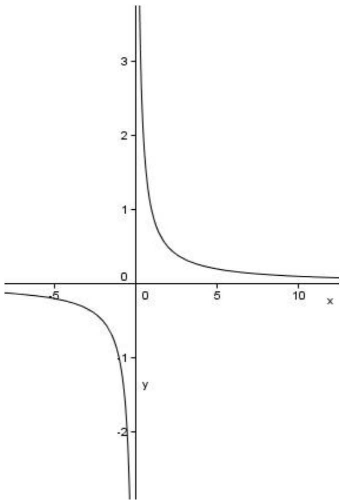
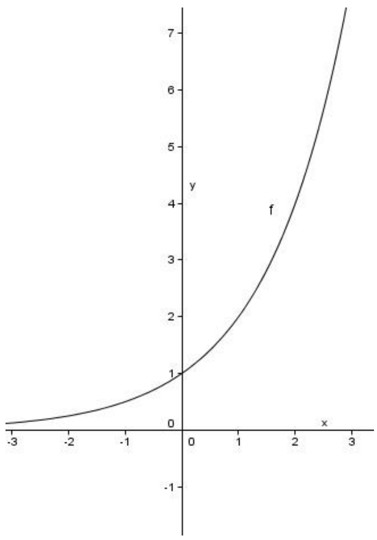
	$c: y = 4 \cdot cos\ (2x) - 2$
	$t: y = \cos x$
	$n: y = 2 \cdot sin\ \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
	$v: y = x \cdot \sin x$

Příloha č. 15

Sbírejte do čtveřice vždy odpovídající karty s grafem, předpisem funkce, typem funkce a jejími vlastnostmi.	***Opakování funkcí, jejich grafů a vlastností.***	
		
		goniometrická funkce (sinusoida)

kvadratická funkce	lineární funkce	konstantní (lineární) funkce
lineární lomená funkce	kubická (mocninná) funkce	logaritmická funkce
exponenciální funkce	$y = x$	$y = x^2$

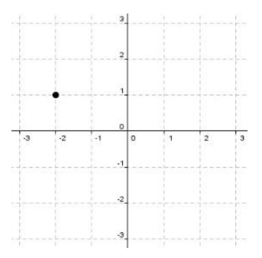
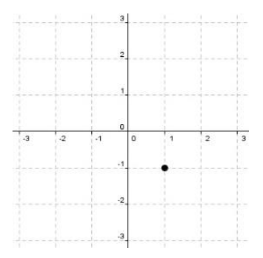
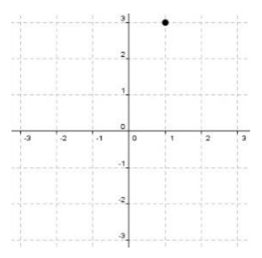
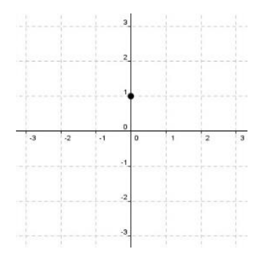
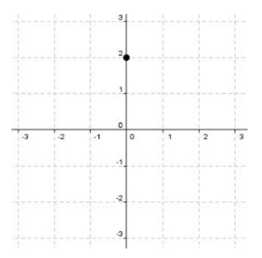
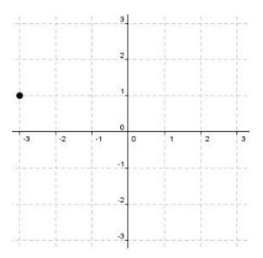
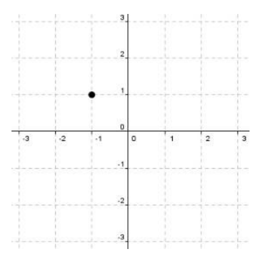
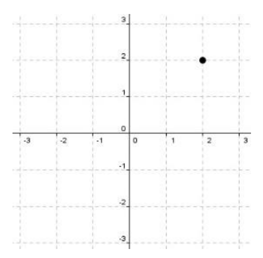
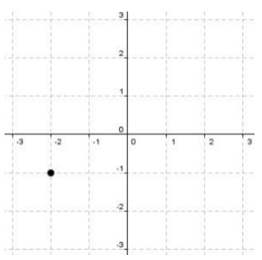
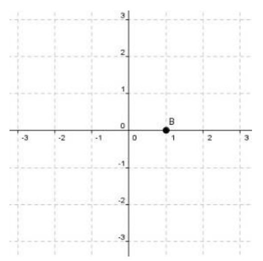
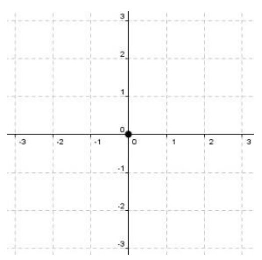
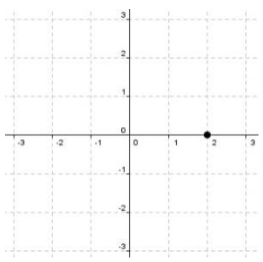
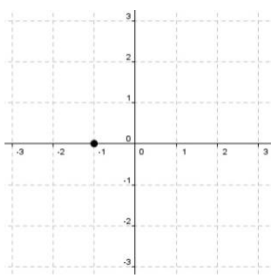
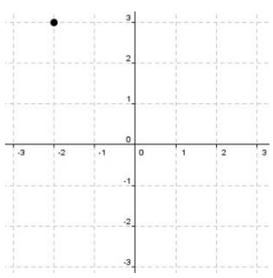
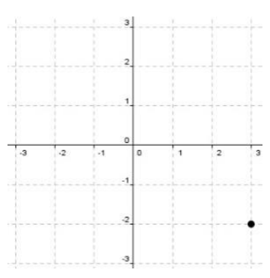
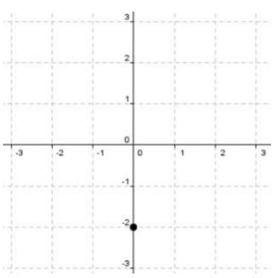
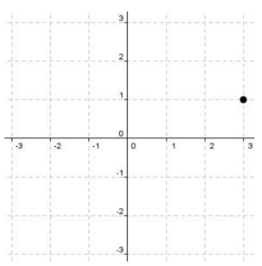
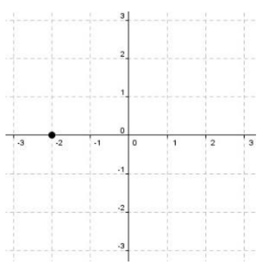
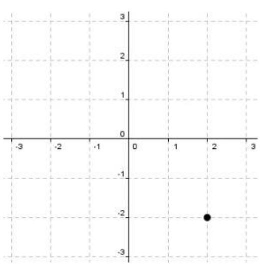
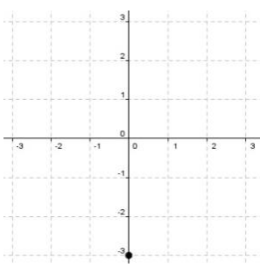
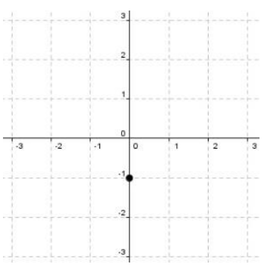
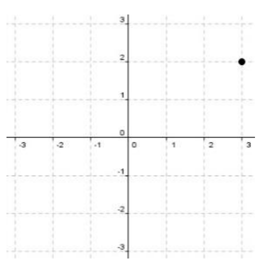
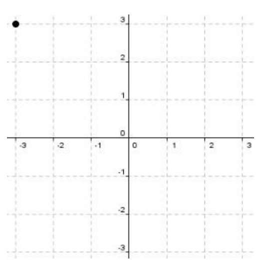
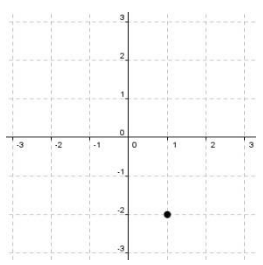
$y = k$	$y = \frac{1}{x}$	$y = x^3$
$y = \log x$	$y = 2^x$	$y = \sin x$
$D_f = R$ $H_f = \langle 0,\infty)$ sudá parabola minimum [0,0]	$D_f = R$ $H_f = R$ lichá rostoucí přímka prochází počátkem	$D_f = R$ $H_f = \{k\}$ sudá přímka

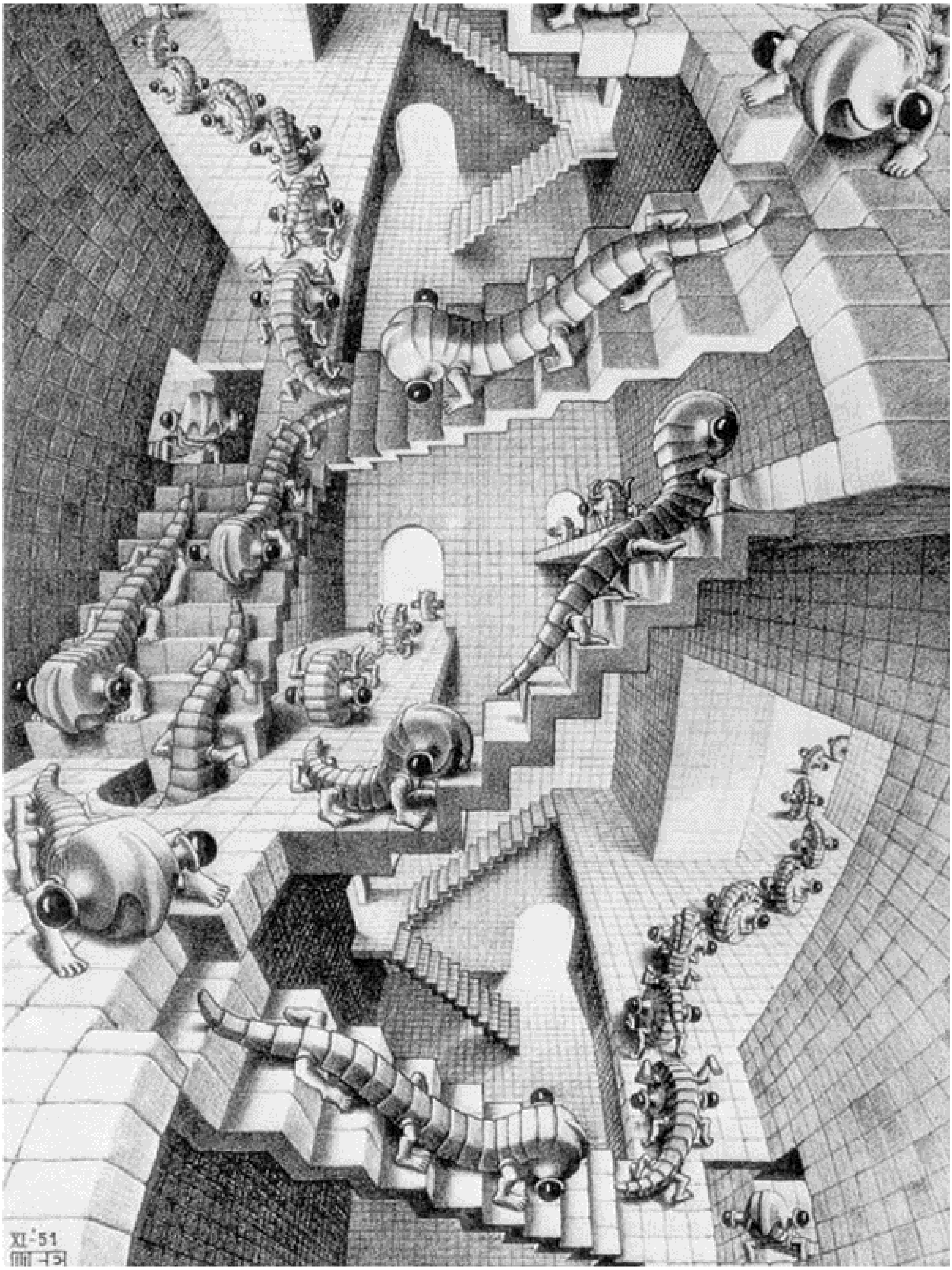
<table>
<tr>
<td>$D_f = R - \{0\}$
$H_f = R - \{0\}$
lichá
hyperbola</td>
<td>$D_f = R$
$H_f = R$
lichá
rostoucí
inflexní bod [0,0]
mocninná křivka</td>
<td>$D_f = (0, \infty)$
$H_f = R$
P_x [1,0]
rostoucí
logaritmická
křivka</td>
</tr>
<tr>
<td>$D_f = R$
$H_f = (0, \infty)$
P_y [0,1]
rostoucí
exponenciální
křivka</td>
<td>$D_f = R$
$H_f = \langle -1,1 \rangle$
lichá
periodická
sinusoida</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Příloha č. 16

List se souřadnicemi bodů nalepte (vytiskněte) na druhou stranu listu s obrázkem. Následně jej rozstříhejte podle vyznačených čar. List se znázorněnými body v kartézských soustavách souřadných nestříhejte. Na něj přikládejte vystříhané karty s odpovídajícími souřadnicemi.

[0;1]	[1;3]	[1;-1]	[-2;1]
[2;2]	[-1;1]	[-3;1]	[0;2]
[2;0]	[0;0]	[1;0]	[-2;-1]
[0;-2]	[3;-2]	[-2;3]	[-1;0]
[0;-3]	[2;-2]	[-2;0]	[3;1]
[1;-2]	[-3;3]	[3;2]	[0;-1]


XI-'51

Příloha č. 17

B	**O**	**K**	**D**
D	**S**	**R**	**E**
É	**Z**	**I**	**M**
R	**A**	**T**	**O**

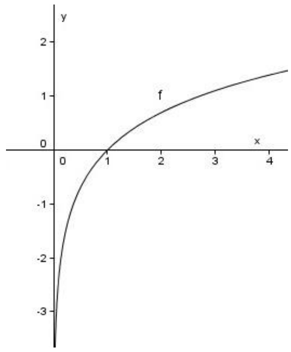
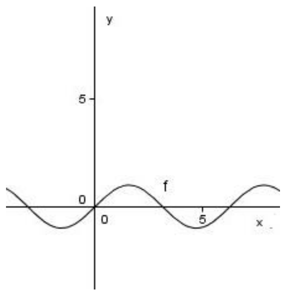
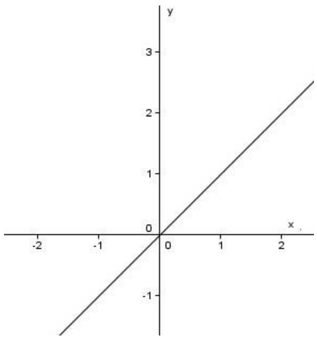
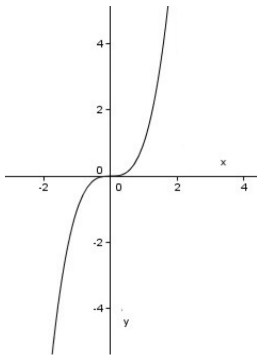
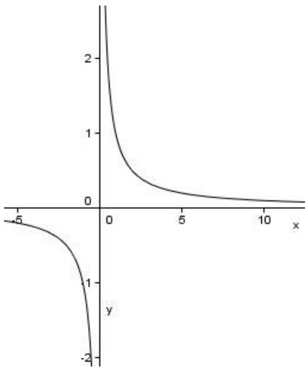
Tuto stránku nalepte (vytiskněte) na druhou stranu následujícího listu. Poté rozstříhejte. Poslední list se zadáním nechte nerozstříhaný (na něj žáci pokládají vytvořené karty).

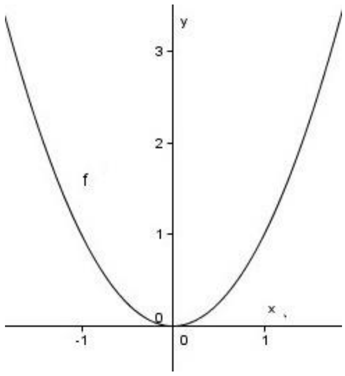
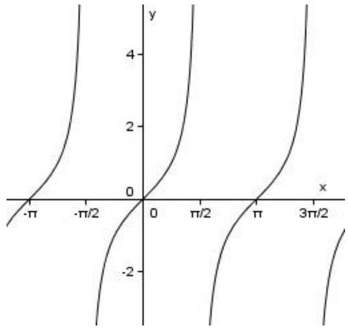
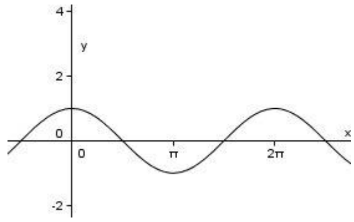
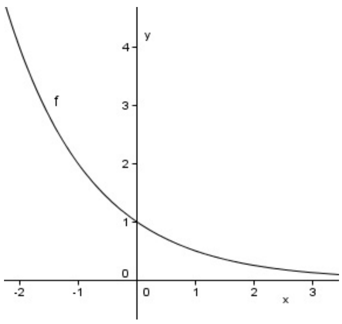
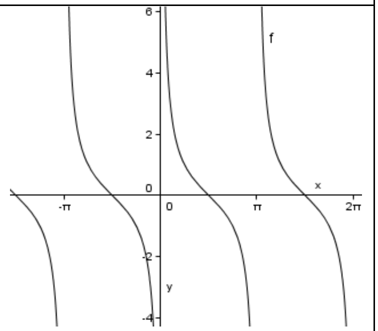
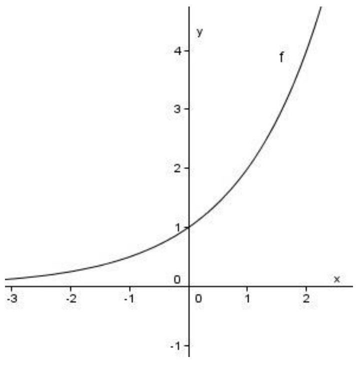
$y = x^2 - 4x + 7$	$y = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$	$y = x^2 + 4x + 4$	$y = -x^2 - 3x - 2$
$y = x^2 + 2x - 1$	$y = 4x^2 + 4x - 1$	$y = x^2 - x + \frac{1}{2}$	$y = x^2 - 6x + 7$
$y = x^2 + x$	$y = 4x^2 - 4x + 3$	$y = -x^2 + 6x - 9$	$y = x^2 - 8x + 16$
$y = -x^2 - 2x + 1$	$y = -x^2 - x - \frac{1}{4}$	$y = x^2 + x + \frac{5}{4}$	$y = -x^2 + 2x + 1$

[2; 3]	$\left[\frac{1}{3};0\right]$	**[-2, 0]**	$\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right]$
[-1; -2]	$\left[-\frac{1}{2};-2\right]$	$\left[\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right]$	**[3; -2]**
$\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{2};2\right]$	**[3; 0]**	**[4; 0]**
[-1; 2]	$\left[-\frac{1}{2};0\right]$	$\left[-\frac{1}{2};1\right]$	**[1; 2]**

Přiřaďte předpis kvadratické funkce k bodu, který odpovídá vrcholu paraboly v grafu této funkce. Potom přečtěte písmena po sloupcích a získáte tajenku. K té se snažte vyhledat nějaké základní informace týkající se matematiky.

Pexeso	Přiřazujte vzájemně ekvivalentní výrazy a určete číselné obory pro jednotlivé proměnné, pro které daný vztah bude platit.	$\sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$	a
$\left(\sqrt[r]{a}\right)^s$	$\sqrt[r]{a^s}$	$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}$	$\sqrt[rs]{a}$
$a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{a^m}$	$a^r \cdot a^s$	a^{r+s}
$\frac{a^r}{a^s}$	a^{r-s}	$(a^r)^s$	a^{rs}
$(ab)^n$	$a^n \cdot b^n$	a^0	1

Pexeso - grafy funkcí -		
$\boldsymbol{y = ln(x)}$		$\boldsymbol{y = sin(x)}$
	$\boldsymbol{y = x}$	
$\boldsymbol{y = x^3}$		$\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$

	$y = x^2$	
$y = tg(x)$		$y = cos(x)$
	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	
$y = cotg(x)$		$y = 2^x$

Příloha č. 20

Abeceda pomocí grafů lineárních funkcí s absolutní hodnotou:

A:

$f: y = -\|x\| + 2;$ $H_f = \langle 0; 2\rangle$ $g: y = 1;$ $D_g = \langle -1; 1\rangle$	$a: y = 0;$ $D_a = \langle -3; -1\rangle$ $b: y = -\|2x + 4\| + 2;$ $H_b = \langle -2; 2\rangle$
$i: y = -\|2x - 4\| + 2;$ $H_i = \langle -2; 2\rangle$ $j: y = 0;$ $D_j = \langle 1,3\rangle$	$l: y = -\|x\|;$ $H_l = \langle -3; 0\rangle$ $m: y = -2;$ $D_m = \langle -2; 2\rangle$

B:

$f: y = \|-\|x\| + 2\| - 3;$ $H_f = \langle -3; 1\rangle$ $g: y = -1;$ $D_g = \langle -4; 4\rangle$	$a: y = 0;$ $D_a = \langle -1; 1\rangle$ $b: y = -\|2x\| + 2;$ $D_b = \langle -2; -1\rangle$ $c: y = -2;$ $D_c = \langle -2; 0\rangle$ $d: y = -2x - 2;$ $H_d = \langle -2; 0\rangle$
$i: y = -\|-\|2x\| + 2\| + 3;$ $H_i = \langle 1; 3\rangle$ $j: y = 1;$ $D_j = \langle -2; 2\rangle$	$l: y = -\|-\|2x\| + 2\| + 2;$ $H_l = \langle 0; 2\rangle$ $m: y = 0;$ $D_m = \langle -2; 2\rangle$

C:

$f: y = -\|x\| + 3;$ $D_f = \langle -2; 1\rangle$ $g: y = \|x\| - 1;$ $D_g = \langle -2; 1\rangle$	$a: y = -\|x - 1\|;$ $D_a = \langle 0; \frac{3}{2}\rangle$ $b: y = \|x - 1\| - 2;$ $D_b = \langle 0; \frac{3}{2}\rangle$
$i: y = -\|x\|;$ $D_i = \langle -2; 1\rangle$ $j: y = \|x\| - 4;$ $D_j = \langle -2; 1\rangle$	$l: y = \|x\| - 2;$ $H_l = \langle -1; 0\rangle$ $m: y = -\left\|\frac{1}{2}x\right\| + 1;$ $H_m = \langle 0; 1\rangle$

D:

$i: y = -\|x\| + 1;$ $D_i = \langle -1; 2\rangle$ $j: y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3};$ $D_j = \langle -1; 2\rangle$	$l: y = -\|2x - 4\| + 2;$ $D_l = \langle 0; 3\rangle$ $m: y = \frac{2}{3}x - 2;$ $H_m = \langle -2; 0\rangle$
$f: y = 1;$ $D_f = \langle -2; 2\rangle$ $g: y = -1;$ $D_g = \langle -1; 1\rangle$ $h: y = \|2x\| - 3;$ $H_h = \langle -1; 1\rangle$	$a: y = 0;$ $D_a = \langle -2; 2\rangle$ $b: y = \|x\| - 2;$ $H_b = \langle -1; 0\rangle$ $c: y = -1;$ $D_c = \langle -1; 1\rangle$

E:

$f: y = -\|x\| + 3;$ $H_f = \langle 1; 3\rangle$ $g: y = -\|x + 2\| + 1;$ $H_g = \langle -1; 1\rangle$ $h: y = -\|x + 4\| - 1;$ $D_h = \langle -4; -2\rangle$	$a: y = \|x\|;$ $H_a = \langle 0; 1\rangle$ $b: y = \|x + 1\| - 1;$ $H_b = \langle -1; 0\rangle$ $c: y = -x + 2;$ $D_c = \langle 0; 1\rangle$

$i: y = -\lvert x\rvert;$ $j: y = -\lvert x-2\rvert + 2;$ $k: y = -x - 4;$	$H_i = \langle -2; 0\rangle$ $D_j = \langle 0; 4\rangle$ $H_k = \langle -4; -2\rangle$	$l: y = \lvert x-1\rvert;$ $m: y = \lvert x-2\rvert - 1;$ $n: y = x + 1;$	$H_l = \langle 0; 1\rangle$ $D_m = \langle 1; 3\rangle$ $H_n = \langle 1; 2\rangle$

F:

$f: y = -\lvert x\rvert;$ $g: y = -\lvert x-1\rvert + 1;$	$H_f = \langle -1; 0\rangle$ $H_g = \langle 0; 1\rangle$	$a: y = \lvert x+1\rvert - 1;$ $b: y = \lvert x+3\rvert - 3;$	$H_a = \langle -1; 1\rangle$ $D_b = \langle -5; -1\rangle$

G:

$f: y = -\lvert x\rvert + 4;$ $g: y = 2;$ $h: y = \lvert x\rvert;$	$D_f = \langle -2; 1\rangle$ $D_g = \langle 0; 2\rangle$ $H_h = \langle 0; 2\rangle$	$a: y = \lvert x-2\rvert;$ $b: y = -\lvert x-2\rvert + 4;$ $c: y = 2;$	$H_a = \langle 0; 2\rangle$ $D_b = \langle 0; 3\rangle$ $D_c = \langle 2; 4\rangle$

H:

$f: y = \lvert x\rvert;$ $g: y = \lvert x+1\rvert - 1;$ $h: y = x + 2;$	$H_f = \langle 0; 1\rangle$ $D_g = \langle -1; 0\rangle$ $D_h = \langle -2; 0\rangle$	$a: y = \lvert x\rvert;$ $b: y = -\lvert x\rvert;$ $c: y = -x + 2;$	$H_a = \langle 0; 1\rangle$ $D_b = \langle 0; 1\rangle$ $D_c = \langle 0; 2\rangle$
$i: y = -\lvert 4x\rvert + 4;$ $j: y = -2;$	$H_i = \langle -4; 0\rangle$ $D_j = \langle -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\rangle$	$l: y = \lvert 4x\rvert - 2;$ $m: y = 2;$	$H_l = \langle 1; 2\rangle$ $D_m = \langle -1; 1\rangle$

I:

$f: y = \lvert 2x-1\rvert;$	$D_f = \langle 0; 2\rangle$	$a: y = \lvert x-3\rvert - 2;$	$D_a = \langle 0; 3\rangle$
$i: y = \lvert 4x\rvert - 2;$	$D_i = \langle 1; 2\rangle$	$m: y = \lvert x+2\rvert - 1;$	$D_m = \langle 1; 4\rangle$

J:

$f: y = \lvert x\rvert - 2;$ $g: y = -4(x-2);$	$H_f = \langle -2; 0\rangle$ $H_g = \langle 0; 4\rangle$	$a: y = -\left\lvert \frac{1}{4}x\right\rvert + 1;$ $b: y = 2(x-4);$ $c: y = -2;$	$H_a = \langle 0; 1\rangle$ $H_b = \langle -2; 0\rangle$ $D_c = \langle 0; 3\rangle$

K:

$f: y = \lvert x\rvert;$ $g: y = 0;$	$H_f = \langle 0; 2\rangle$ $D_g = \langle -2; 2\rangle$	$a: y = \lvert x-2\rvert + 2;$ $b: y = 2;$	$H_a = \langle 2; 4\rangle$ $D_b = \langle 0; 4\rangle$
$i: y = -\lvert x\rvert - 1;$ $j: y = -1;$	$H_i = \langle -3; -1\rangle$ $D_j = \langle -2; 2\rangle$	$l: y = -\lvert 2x-1\rvert;$ $m: y = 0;$	$H_l = \langle -3; 0\rangle$ $D_m = \langle -1; 2\rangle$

L:

$f: y = \lvert x\rvert;$ $D_f = \langle -4; 2\rangle$	$a: y = \lvert x+1\rvert - 2;$ $D_a = \langle -4; 1\rangle$
$i: y = \lvert x-2\rvert + 1;$ $D_i = \langle 0; 3\rangle$	$m: y = -\lvert x+2\rvert - 1;$ $D_m = \langle -3; 0\rangle$

M:

$f: y = -\big\lvert \lvert x\rvert - 1\big\rvert + 2;$ $H_f = \langle 0; 2\rangle$	$a: y = -\big\lvert \lvert 2x-2\rvert - 2\big\rvert + 4;$ $H_a = \langle 0; 4\rangle$
$i: y = \big\lvert \lvert x\rvert - 1\big\rvert - 2;$ $H_i = \langle -2; 0\rangle$	$m: y = -\big\lvert \lvert 2x+2\rvert - 2\big\rvert + 2;$ $H_m = \langle -2; 2\rangle$

N:

$f: y = -\big\lvert \lvert 4x\rvert - 4\big\rvert;$ $D_f = \langle -2; 1\rangle$	$a: y = \big\lvert \lvert 5x\rvert - 5\big\rvert - 5;$ $D_a = \langle -1; 2\rangle$
$i: y = \big\lvert \lvert 4x\rvert - 4\big\rvert;$ $D_i = \langle -1; 2\rangle$	$m: y = \big\lvert \lvert 6x\rvert - 6\big\rvert;$ $D_m = \langle -1; 2\rangle$

O:

$f: y = -\lvert x\rvert + 4;$ $H_f = \langle 2; 3\rangle$ $g: y = \lvert x\rvert;$ $H_g = \langle 1; 2\rangle$ $h: y = 1;$ $D_h = \langle -1; 1\rangle$ $e: y = 3;$ $D_e = \langle -1; 1\rangle$	$a: y = -\lvert x\rvert + 3;$ $H_a = \langle 2; 3\rangle$ $b: y = \lvert x+1\rvert - 1;$ $H_b = \langle -1; 0\rangle$ $c: y = 2x;$ $D_c = \langle 0; 1\rangle$ $d: y = 2x + 4;$ $D_d = \langle -2; -1\rangle$
$i: y = -\lvert x\rvert + 2;$ $H_i = \langle 1; 2\rangle$ $j: y = \lvert x-1\rvert - 2;$ $H_j = \langle -2; -1\rangle$ $k: y = -2x - 1;$ $D_k = \langle -1; 0\rangle$ $l: y = -2x + 3;$ $D_l = \langle 1; 2\rangle$	$l: y = -\lvert x\rvert;$ $H_l = \langle -2; -1\rangle$ $m: y = \lvert x\rvert - 4;$ $H_m = \langle -3; -2\rangle$ $n: y = -1;$ $D_n = \langle -1; 1\rangle$ $o: y = -3;$ $D_o = \langle -1; 1\rangle$

P:

$f: y = -\lvert x\rvert;$ $H_f = \langle -2; 0\rangle$ $g: y = -2;$ $D_g = \langle -2; 5\rangle$	$a: y = \lvert x\rvert;$ $H_a = \langle 0; 1\rangle$ $b: y = 1;$ $D_b = \langle -3; 1\rangle$
$i: y = -\lvert 2x\rvert + 2;$ $H_i = \langle 0; 2\rangle$ $j: y = 0;$ $D_j = \langle -1; 3\rangle$	$l: y = \lvert 2x\rvert - 1;$ $H_l = \langle -1; 1\rangle$ $m: y = 1;$ $D_m = \langle -3; 1\rangle$

Q:

$l\colon y=-\lvert x\rvert;$ $m\colon y=\lvert x\rvert-4;$ $n\colon y=-1;$ $o\colon y=-3;$ $p\colon y=x-3;$	$H_l=\langle -2;-1\rangle$ $H_m=\langle -3;-2\rangle$ $D_n=\langle -1;1\rangle$ $D_o=\langle -1;1\rangle$ $D_p=\langle 1;2\rangle$	$a\colon y=-\lvert x\rvert+3;$ $b\colon y=\lvert x+1\rvert-1;$ $c\colon y=2x;$ $d\colon y=2x+4;$ $e\colon y=-x-1;$	$H_a=\langle 2;3\rangle$ $H_b=\langle -1;0\rangle$ $D_c=\langle 0;1\rangle$ $D_d=\langle -2;-1\rangle$ $D_e=\langle -1;0\rangle$

R:

$f\colon y=-\lvert 2x\rvert;$ $g\colon y=-2;$ $h\colon y=-2x-4;$	$D_f=\langle -2;1\rangle$ $D_g=\langle -1;1\rangle$ $D_h=\langle -1;0\rangle$	$a\colon y=-2x;$ $b\colon y=-\lvert 2x-2\rvert+2;$ $c\colon y=0;$	$H_a=\langle -2;0\rangle$ $D_b=\langle -1;2\rangle$ $D_c=\langle 0;2\rangle$
$i\colon y=-\big\lvert\lvert x\rvert-2\big\rvert;$ $j\colon y=0;$	$D_i=\langle -4;2\rangle$ $D_j=\langle -4;2\rangle$	$l\colon y=\big\lvert\lvert x\rvert-2\big\rvert;$ $m\colon y=0;$	$D_l=\langle -2;4\rangle$ $D_m=\langle -2;4\rangle$

S:

$f\colon y=-\lvert x-1\rvert+3;$ $g\colon y=\lvert x-1\rvert-1;$ $h\colon y=-x+2;$	$H_f=\langle 2;3\rangle$ $H_g=\langle -1;0\rangle$ $D_h=\langle 0;2\rangle$	$a\colon y=-\lvert x\rvert;$ $b\colon y=\lvert x\rvert-4;$ $c\colon y=-x-2;$	$H_a=\langle -1;0\rangle$ $D_b=\langle -1;1\rangle$ $H_c=\langle -4;-3\rangle$

T:

$f\colon y=-\lvert x-1\rvert+1;$ $g\colon y=-x+2;$	$D_f=\langle -2;2\rangle$ $H_g=\langle 1;2\rangle$	$a\colon y=\lvert x+1\rvert;$ $b\colon y=\lvert x\rvert-1;$	$D_a=\langle -2;2\rangle$ $D_b=\langle -1;0\rangle$
$i\colon y=-\lvert x\rvert+2;$ $j\colon y=-\lvert x+1\rvert+3;$	$D_i=\langle -3;1\rangle$ $D_j=\langle -1;0\rangle$	$l\colon y=\lvert x\rvert+1;$ $m\colon y=-\lvert x\rvert+1;$	$D_l=\langle -2;1\rangle$ $D_m=\langle -1;0\rangle$

U:

$f\colon y=\left\lvert\frac{1}{2}x\right\rvert;$ $g\colon y=\lvert 3x\rvert-5;$	$H_f=\langle 0;1\rangle$ $H_g=\langle 1;4\rangle$	$a\colon y=\left\lvert\frac{1}{2}x\right\rvert+2;$ $b\colon y=\lvert 3x\rvert-3;$	$D_a=\langle -2;2\rangle$ $H_b=\langle 3;6\rangle$
$i\colon y=\frac{1}{2}\lvert x+2\rvert+2;$ $j\colon y=3\lvert x+2\rvert-3;$	$D_i=\langle -4;0\rangle$ $H_j=\langle 3;6\rangle$	$l\colon y=\left\lvert-\frac{1}{2}x\right\rvert;$ $m\colon y=\lvert -3x\rvert-5;$	$D_l=\langle -2;2\rangle$ $H_m=\langle 1;4\rangle$

V:

$f\colon y=\lvert 2x\rvert;$	$H_f=\langle 0;4\rangle$	$a\colon y=\lvert 2x+2\rvert-2;$	$H_a=\langle -2;2\rangle$
$i\colon y=\lvert 3x\rvert-2;$	$H_i=\langle -2;1\rangle$	$m\colon y=\lvert 3x-6\rvert+1;$	$D_m=\langle 1;3\rangle$

W:

$f: y = \lvert 2x+2 \rvert;$ $g: y = \lvert 2x-2 \rvert;$	$H_f = \langle 0; 4 \rangle$ $H_g = \langle 0; 4 \rangle$	$a: y = \lvert 2x-2 \rvert;$ $b: y = \lvert 2x-6 \rvert;$	$D_a = \langle -1; 3 \rangle$ $H_b = \langle 0; 4 \rangle$

X:

$f: y = \lvert 2x+2 \rvert;$ $g: y = \lvert 2x-2 \rvert;$	$D_f = \langle -1; 1 \rangle$ $D_g = \langle -1; 1 \rangle$	$a: y = \lvert 2x \rvert - 1;$ $b: y = -\lvert 2x \rvert - 1;$	$D_a = \langle -1; 1 \rangle$ $H_b = \langle -3; -1 \rangle$

Y:

$f: y = \lvert 2x \rvert + 1;$ $g: y = 2x + 1;$	$H_f = \langle 1; 3 \rangle$ $D_g = \langle -1; 0 \rangle$	$a: y = \lvert x-3 \rvert + 3;$ $b: y = 3(x-2);$	$H_a = \langle 3; 4 \rangle$ $D_b = \langle 2; 3 \rangle$

Z:

$f: y = -\big\lvert \lvert 2x \rvert - 4 \big\rvert;$ $g: y = x - 1;$	$D_f = \langle -3; 1 \rangle$ $H_g = \langle -3; -1 \rangle$	$a: y = \big\lvert \lvert 2x \rvert - 4 \big\rvert - 4;$ $b: y = 2x - 4;$	$D_a = \langle -1; 3 \rangle$ $H_b = \langle -3; -1 \rangle$

Příloha č. 21

A:

$f\colon y = -x^2 + 4;$ $g\colon y = 2;$	$H_f = \langle 0; 4\rangle$ $D_g = \langle -2; 2\rangle$	$a\colon y = \log_{0,5} x\,;$ $b\colon y = \log_{10} x\,;$ $c\colon y = -1;$	$H_a = \langle -2; 0\rangle$ $H_b = \langle -2; 0\rangle$ $D_c = \langle 0{,}5; 2\rangle$
$i\colon y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x;$ $j\colon y = -2^x;$ $k\colon y = -3;$	$H_i = \langle -5; 1\rangle$ $H_j = \langle -5; 1\rangle$ $D_k = \langle -2; 2\rangle$	$l\colon y = -\frac{1}{x};$ $m\colon y = \frac{1}{x+2} - 4;$ $n\colon y = -x;$	$H_l = \langle -4; -\frac{1}{4}\rangle$ $H_m = \langle -\frac{7}{2}; 0\rangle$ $H_n = \langle -3; -1\rangle$

B:

$f\colon y = (x-1)^2 - 1;$ $g\colon y = 0;$ $h\colon y = (x+1)^2 - 1;$	$H_f = \langle -1; 0\rangle$ $H_g = \langle -1; 0\rangle$ $D_h = \langle -2; 2\rangle$	$a\colon y = x^5;$ $b\colon y = (x+1)^5 - 1;$ $c\colon y = x;$	$D_a = \langle 0; 1\rangle$ $H_b = \langle -1; 0\rangle$ $D_c = \langle -1; 1\rangle$

C:

$f\colon y = x^2 - 4;$ $g\colon y = -x^2 + 4;$	$D_f = \langle -2; 1\rangle$ $D_g = \langle -2; 1\rangle$	$a\colon y = -(x-1)^4 + 1;$ $b\colon y = (x-1)^4 - 1;$	$H_a = \langle 0; 1\rangle$ $H_b = \langle -\frac{1}{2}; 0\rangle$

D:

$f\colon y = -x^2 + 2;$ $g\colon y = x^2;$ $h\colon y = 4x;$	$D_f = \langle 0; 1\rangle$ $D_g = \langle 0; 1\rangle$ $H_h = \langle 0; 2\rangle$	$a\colon y = -x^6 + 2;$ $b\colon y = 1;$	$H_a = \langle 1; 2\rangle$ $D_b = \langle -1; 1\rangle$
$i\colon y = \left(\frac{1}{2}\right)^x;$ $j\colon y = -x + 2;$	$D_i = \langle -2; 2\rangle$ $H_j = \langle 0; 4\rangle$	$l\colon y = \frac{1}{x};$ $m\colon y = -x - 6;$	$D_l = \langle -6; -\frac{1}{6}\rangle$ $H_m = \langle -6; 0\rangle$

E:

$f\colon y = -x^2 + 1;$ $g\colon y = -3;$ $h\colon y = \frac{1}{x};$	$H_f = \langle -3; -5\rangle$ $D_g = \langle -2; 2\rangle$ $H_h = \langle -3; -5\rangle$	$a\colon y = 2x^3;$ $b\colon y = -2(x+1)^2;$ $c\colon y = -1;$	$H_a = \langle -2; -1\rangle$ $H_b = \langle -2; -1\rangle$ $D_c = \langle -2; 0\rangle$
$i\colon y = \frac{1}{x};$ $j\colon y = \frac{1}{x-1};$ $k\colon y = \frac{1}{x+1};$ $l\colon y = 4;$	$H_i = \langle 3; 4\rangle$ $H_j = \langle 3; 4\rangle$ $D_k = \langle 3; 4\rangle$ $D_l = \langle -1; 1\rangle$	$l\colon y = 2^x;$ $m\colon y = 2^x + 1;$ $n\colon y = 2^x + 2;$ $o\colon y = 4(x+4);$	$D_l = \langle -4; -2\rangle$ $D_m = \langle -4; -2\rangle$ $D_n = \langle -4; -2\rangle$ $H_o = \langle 0; 2\rangle$

F:

$f\colon y = 2^x;$ $g\colon y = 2^x - 1;$ $h\colon y = 4;$	$H_f = \langle 4; 5\rangle$ $H_g = \langle 4; 5\rangle$ $D_h = \langle 2; 4\rangle$	$a\colon y = x^3 - 4;$ $b\colon y = (x-1)^3 - 4;$ $c\colon y = 4;$	$H_a = \langle 4; 5\rangle$ $H_b = \langle 4; 5\rangle$ $D_c = \langle 2; 4\rangle$

G:

$f: y = x^2 - 2;$ $g: y = -x^2 + 2;$ $h: y = -1;$	$H_f = \langle -2; 3\rangle$ $H_g = \langle -2; 3\rangle$ $D_h = \langle 0; 1\rangle$	$a: y = 2sinx;$ $b: y = -sinx;$ $c: y = 0;$	$D_a = \langle 0; \frac{3\pi}{4}\rangle$ $H_b = \langle 0; \pi\rangle$ $D_c = \langle \frac{\pi}{2}; \pi\rangle$

H:

$f: y = lnx;$ $g: y = \frac{1}{x};$ $h: y = -3;$	$H_f = \langle -2; -4\rangle$ $H_g = \langle -2; -4\rangle$ $D_h = \langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\rangle$	$a: y = \left\|\frac{1}{x}\right\|;$ $b: y = 3;$	$H_a = \langle 2; 4\rangle$ $D_b = \langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\rangle$

I:

$f: y = x^3 - 2;$	$H_f = \langle 2; 4\rangle$	$a: y = lnx + 3;$	$H_a = \langle -1; 1\rangle$
$i: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2};$	$H_i = \langle 5; 7\rangle$	$l: y = \frac{1}{x} - 2;$	$H_l = \langle 0; 2\rangle$

J:

$f: y = (x+2)^2 - 1;$	$D_f = \langle -3; 0\rangle$	$a: y = x^3;$ $b: y = -x^3;$	$H_a = \langle 0; 4\rangle$ $D_b = \langle -1; 0\rangle$

K:

$f: y = (x+2)^2;$ $g: y = 0;$	$H_f = \langle 0; 1\rangle$ $D_g = \langle 1; 3\rangle$	$a: y = tg\,x;$ $b: y = -tgx;$ $c: y = 0;$	$D_a = \langle 0; \frac{\pi}{4}\rangle$ $D_b = \langle -\frac{\pi}{4}; 0\rangle$ $D_c = \langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\rangle$
$i: y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x};$ $j: y = 3^x;$ $k: y = 2x + 1;$	$H_i = \langle 1; 3\rangle$ $D_j = \langle 0; 2\rangle$ $H_k = \langle 0; 3\rangle$	$l: y = \frac{1}{x};$ $m: y = lnx + 1;$ $n: y = 3x - 2;$	$D_l = \langle 1; 3\rangle$ $H_m = \langle 1; 2\rangle$ $H_n = \langle 0; 2\rangle$

L:

$f: y = lnx;$ $g: y = -4;$	$H_f = \langle -4; -2\rangle$ $D_g = \langle 0; 1\rangle$	$a: y = 2^x;$ $b: y = 2;$	$H_a = \langle 2; 5\rangle$ $D_b = \langle 1; 3\rangle$
$i: y = x^5;$ $j: y = 1;$	$H_i = \langle 1; 3\rangle$ $D_j = \langle 1; 3\rangle$	$l: y = x^7;$ $m: y = -1;$	$H_l = \langle -3; -1\rangle$ $D_m = \langle -3; -1\rangle$

M:

$f: y = -(x-2)^2 + 3;$ $g: y = -(x+2)^2 + 3;$	$D_f = \langle 0; 3\rangle$ $D_g = \langle -3; 0\rangle$	$l: y = -\|x^2 - 1\| + 1;$	$H_l = \langle -2; 1\rangle$

N:

$f: y = x^2;$ $g: y = 4(x+3);$	$H_f = \langle 0; 4\rangle$ $D_g = \langle -3; -2\rangle$	$a: y = -\frac{1}{x};$ $b: y = 3\vert x-2\vert - 4;$	$H_a = \langle -4; -1\rangle$ $H_b = \langle -4; -1\rangle$

O:

$f: y = sinx;$ $g: y = cosx;$	$D_f = \langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\rangle$ $D_g = \langle \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\rangle$	$a: y = (x+2)^2;$ $b: y = -(x+2)^2 + 2;$	$D_a = \langle -3; -1\rangle$ $D_b = \langle -3; -1\rangle$
$i: y = sinx;$ $j: y = -sinx;$	$D_i = \langle 0; \pi\rangle$ $D_j = \langle 0; \pi\rangle$	$l: y = -x^4;$ $m: y = x^4 - 2;$	$H_l = \langle -1; 0\rangle$ $H_m = \langle -2; -1\rangle$

P:

$f: y = -(x+3)^2;$ $g: y = -1;$	$H_f = \langle 0; 1\rangle$ $D_g = \langle -4; 0\rangle$	$a: y = (x-2)^2 + 1;$ $b: y = 2;$	$H_a = \langle 1; 2\rangle$ $D_b = \langle -1; 3\rangle$
$i: y = sinx;$ $j: y = 0;$	$D_i = \langle 0; \pi\rangle$ $D_j = \langle 0; 2\pi\rangle$	$l: y = x^5;$ $m: y = -x^5;$ $n: y = 1;$	$H_l = \langle 0; 1\rangle$ $D_m = \langle -1; 0\rangle$ $D_n = \langle -3; 1\rangle$

Q:

$f: y = -x^4;$ $g: y = x^4 - 2;$ $h: y = -x - 1;$	$H_f = \langle -1; 0\rangle$ $H_g = \langle -2; -1\rangle$ $D_h = \langle 0; 1\rangle$	$a: y = -(x-2)^2 + 3;$ $b: y = (x-2)^2 + 1;$ $c: y = -x + 4;$	$H_a = \langle 2; 3\rangle$ $H_b = \langle 1; 2\rangle$ $D_c = \langle 2; 3\rangle$

R:

$f: y = x;$ $g: y = (x-2)^2;$ $h: y = 1;$	$H_f = \langle 0; 1\rangle$ $H_g = \langle 0; 1\rangle$ $D_h = \langle 0; 3\rangle$	$a: y = \vert cosx\vert;$ $b: y = 0;$	$D_a = \langle -\frac{\pi}{2}; \pi\rangle$ $D_b = \langle -\frac{\pi}{2}; \pi\rangle$
$i: y = \vert sinx\vert;$ $j: y = 0;$	$D_i = \langle 0; \frac{3\pi}{2}\rangle$ $D_j = \langle 0; \frac{3\pi}{2}\rangle$	$l: y = -\vert(x-1)^2 - 1\vert;$ $m: y = 0;$	$D_l = \langle -1; 2\rangle$ $D_m = \langle -1; 2\rangle$

S:

$f: y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right);$	$D_f = \langle 0; 2\pi\rangle$	$a: y = sinx;$ $b: y = -\vert sinx\vert;$ $c: y = -sinx;$	$D_a = \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ $D_b = \langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\rangle$ $D_c = \langle 0; 2\pi\rangle$
$i: y = x^2;$ $j: y = -(x-2)^2 + 2;$	$H_i = \langle 0; 1\rangle$ $H_j = \langle 1; 2\rangle$	$l: y = -x^4 + 2;$ $m: y = x^4 - 2;$ $n: y = -x;$	$H_l = \langle 1; 2\rangle$ $H_m = \langle -2; -1\rangle$ $D_n = \langle -1; 1\rangle$

T:

$f: y = x^3;$ $H_f = \langle 2; 4\rangle$ $g: y = 4;$ $D_g = \langle 1; 3\rangle$	$a: y = lnx;$ $H_a = \langle -3; -1\rangle$ $b: y = -1;$ $D_b = \langle -1; 2\rangle$
$i: y = x^4;$ $H_i = \langle 2; 4\rangle$ $j: y = 4;$ $D_j = \langle 1; 3\rangle$	$l: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x;$ $H_l = \langle 2; 5\rangle$ $m: y = 5;$ $D_m = \langle -3; -1\rangle$

U:

$f: y = x^3;$ $H_f = \langle 0; 2\rangle$ $g: y = -x^3;$ $H_g = \langle 0; 2\rangle$	$a: y = -3sinx;$ $D_a = \langle 0; \pi\rangle$
$i: y = x^4;$ $H_i = \langle 0; 3\rangle$	$l: y = 3\left[cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right];$ $D_l = \langle 0; \pi\rangle$

V:

$f: y = \lvert 3cosx\rvert;$ $D_f = \langle 0; \pi\rangle$	$a: y = \log_2 x;$ $H_a = \langle -3; 0\rangle$ $b: y = 2^{(x-1)} - 1;$ $D_b = \langle -2; 1\rangle$
$i: y = \left\lvert 2sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\rvert;$ $D_i = \langle 0; \pi\rangle$	$l: y = x^3;$ $H_l = \langle 1; 4\rangle$ $m: y = -3x + 4;$ $D_m = \langle 0; 1\rangle$

W:

$f: y = 2sinx;$ $D_f = \langle 0; \pi\rangle$ $g: y = -2cosx;$ $D_g = \langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\rangle$	$a: y = (x + 1)^2;$ $H_a = \langle 0; 4\rangle$ $b: y = (x - 1)^2;$ $D_b = \langle -1; 3\rangle$

X:

$f: y = sinx;$ $D_f = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$ $g: y = -sinx;$ $D_g = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$	$a: y = x^2;$ $H_a = \langle 0; 2\rangle$ $b: y = -x^2;$ $H_b = \langle -2; 0\rangle$

Y:

$f: y = x^3;$ $H_f = \langle -1; 0\rangle$ $g: y = -x^3;$ $H_g = \langle -1; 0\rangle$ $h: y = 2x;$ $D_h = \langle 0; 1\rangle$	$a: y = x^2;$ $H_a = \langle 0; 1\rangle$ $b: y = 2x;$ $D_b = \langle -1; 0\rangle$

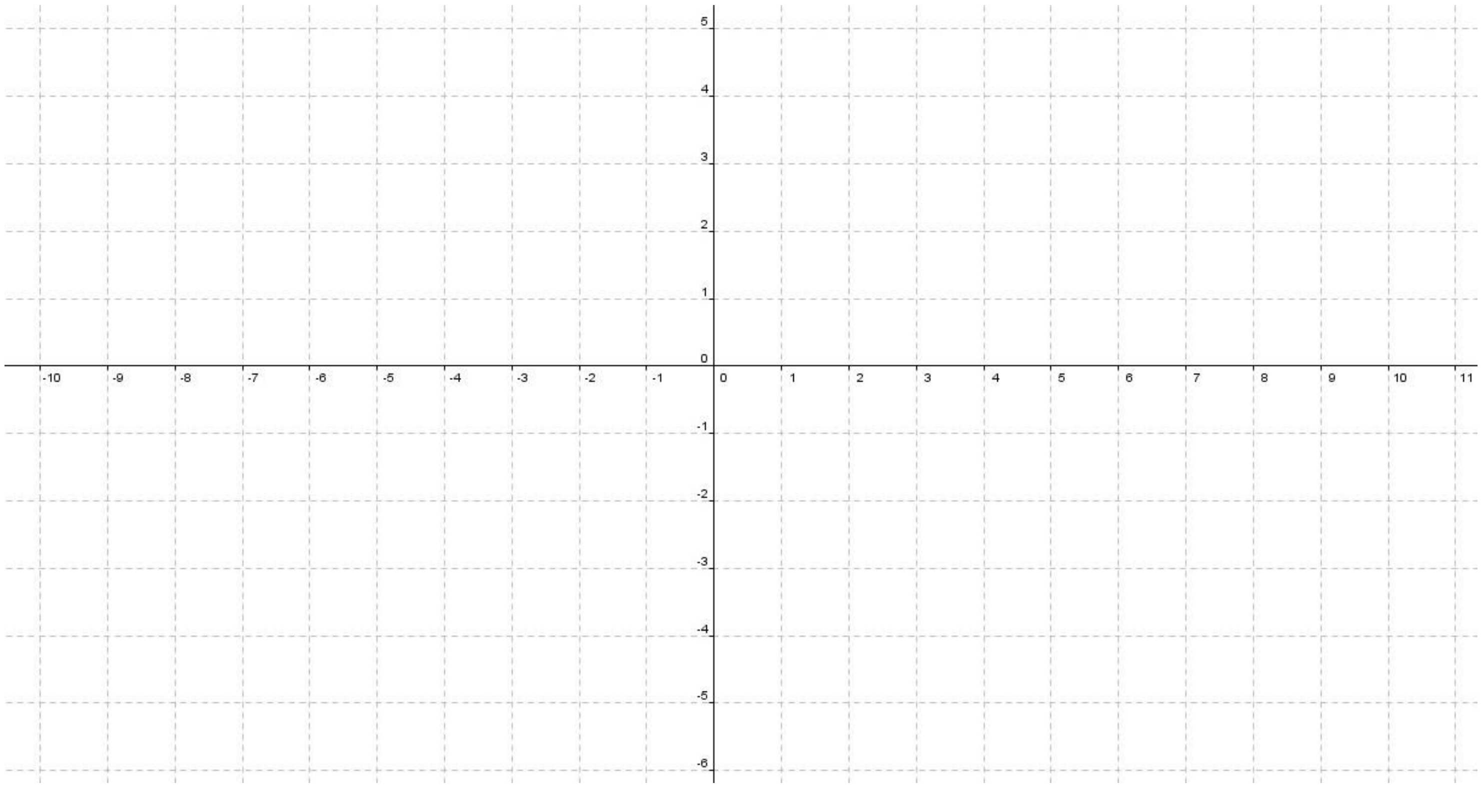
Z:

$f: y = 2x;$ $D_f = \langle -1; 1\rangle$ $g: y = x^2 - 1;$ $H_g = \langle -2; -1\rangle$ $h: y = x^2 + 1;$ $H_h = \langle 1; 2\rangle$ $i: y = 0;$ $D_i = \langle -1; 1\rangle$	$a: y = \lvert x^3\rvert + 2;$ $H_a = \langle 2; 3\rangle$ $b: y = -\lvert x^3\rvert - 2;$ $D_b = \langle -1; 1\rangle$ $c: y = 3x;$ $H_c = \langle -3; 3\rangle$ $d: y = 0;$ $D_d = \langle -1; 1\rangle$

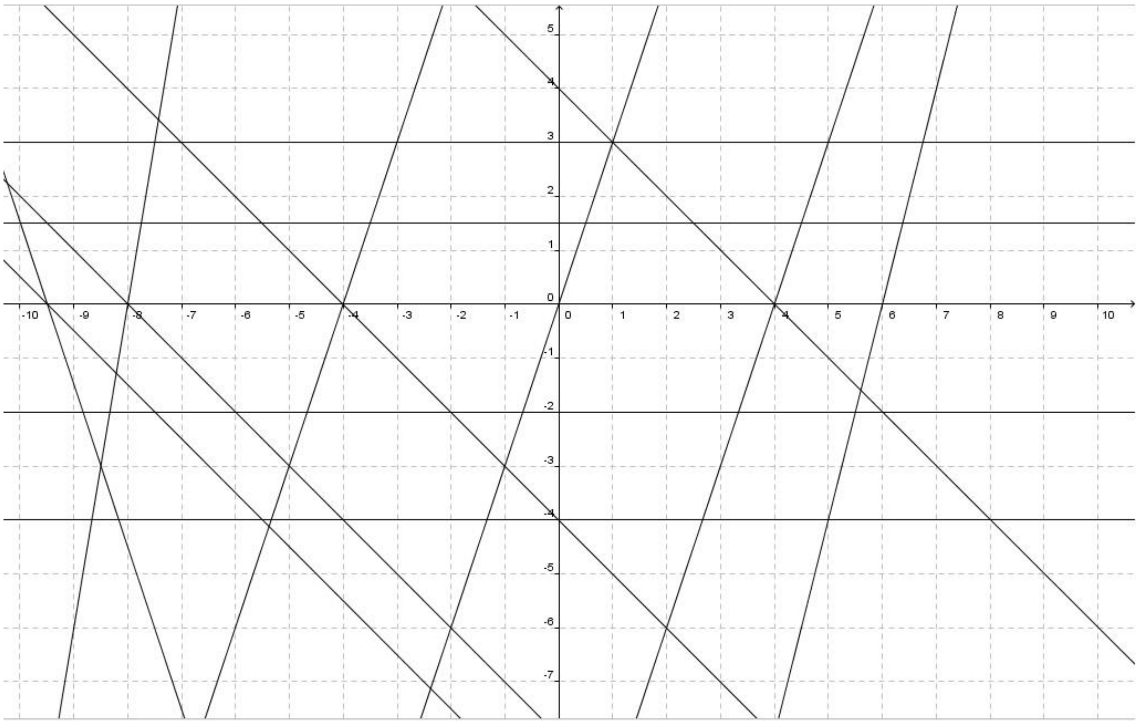
Příloha č. 22

Pracovní list:

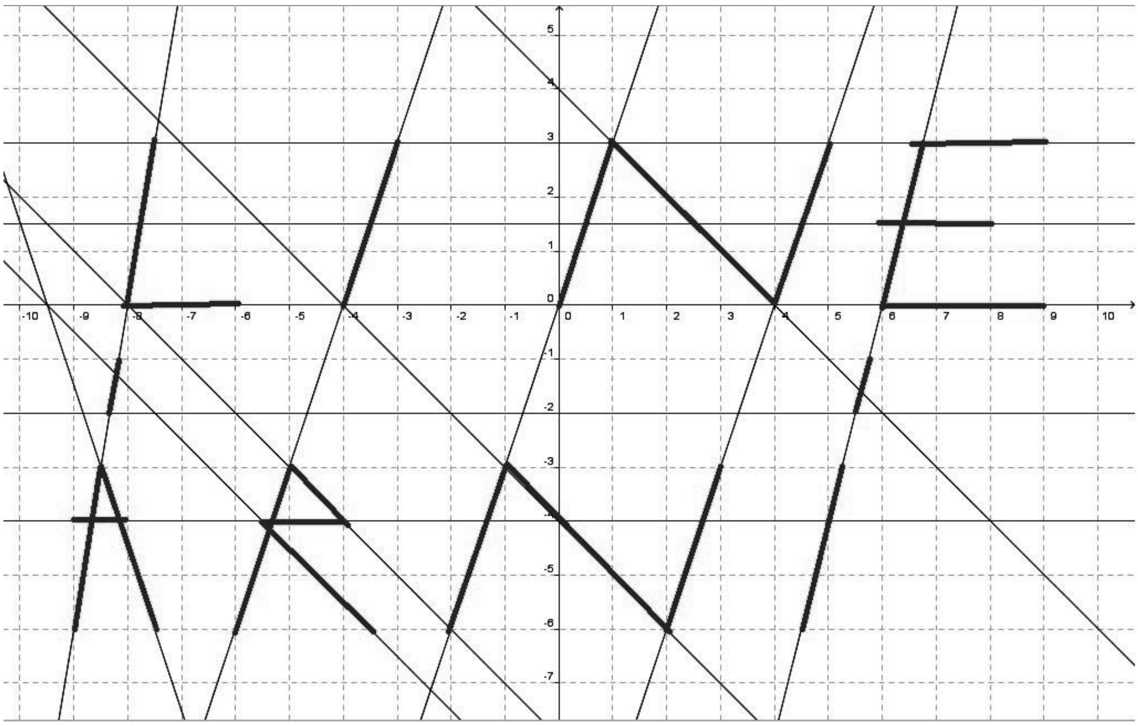
$f: y = -x + 4$	$D_f = \langle 1,4 \rangle$	$m: y = 3(x-4)$	$D_m = \langle 2,3 \rangle \cup \langle 4,5 \rangle$
$g: y = -x - 4$	$D_g = \langle -1,2 \rangle$	$n: y = -(x+8) - \frac{3}{2}$	$H_n = \langle -5,-4 \rangle$
$h: y = 3(x+4)$	$D_h = \langle -6,-5 \rangle \cup \langle -4,-3 \rangle$	$o: y = 4(x-6)$	$H_o = \langle -6,-3 \rangle \cup \langle -2,-1 \rangle \cup \langle 0,3 \rangle$
$i: y = 3x$	$D_i = \langle -2,-1 \rangle \cup \langle 0,1 \rangle$	$p: y = -4$	$D_p = \langle -9,-8 \rangle \cup \langle -\frac{11}{2},-4 \rangle$
$j: y = 0$	$D_j = \langle -8,-6 \rangle \cup \langle 6,9 \rangle$	$q: y = -x - 8$	$D_q = \langle -5,-4 \rangle$
$k: y = \frac{3}{2}$	$D_k = \langle 6,8 \rangle$	$r: y = -3(x + \frac{19}{2})$	$H_r = \langle -6,-3 \rangle$
$l: y = 3$	$D_l = \langle \frac{13}{2}, 9 \rangle$	$t: y = 6(x+8)$	$H_t = \langle -6,-3 \rangle \cup \langle -2,-1 \rangle \cup \langle 0,3 \rangle$



Řešení:



5
4
3
2
1
0
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7

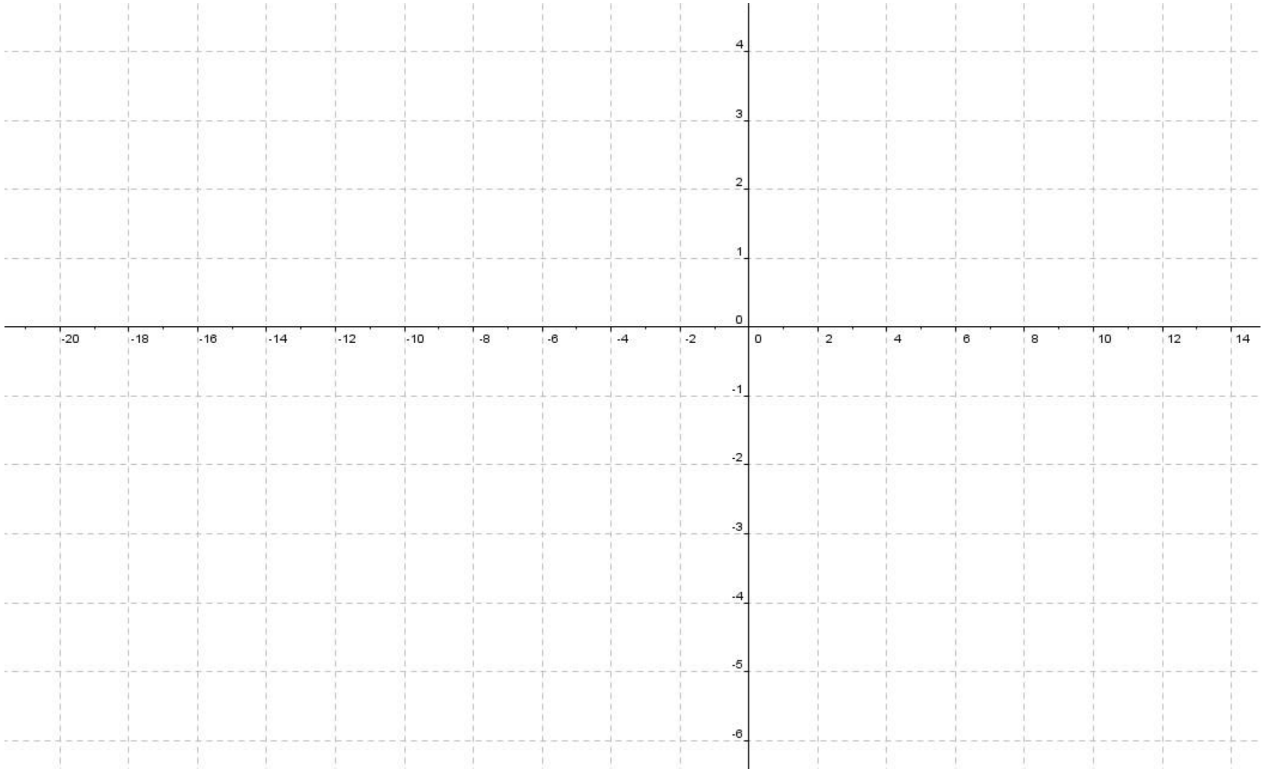


5
4
3
2
1
0
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7

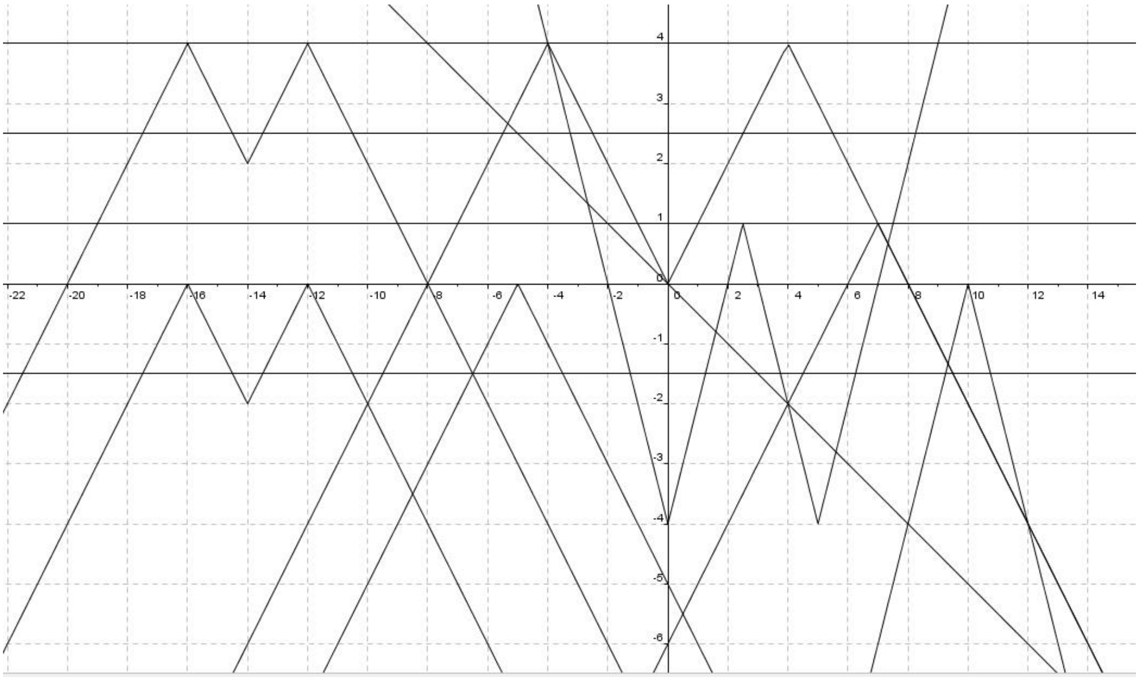
Příloha č. 23

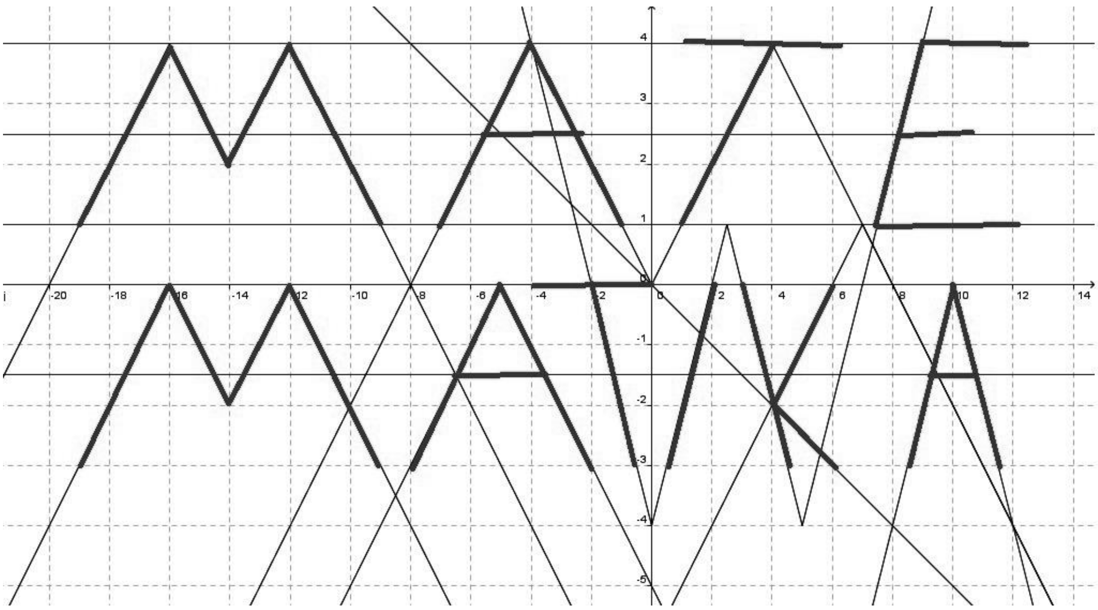
$f: y = \frac{5}{2}$	$D_f = \langle -\frac{11}{2}, -\frac{5}{2} \rangle \cup \langle 8,12 \rangle$
$g: y = -2\lvert x-10 \rvert$	$D_g = \langle \frac{17}{2}, \frac{23}{2} \rangle$
$h: y = -\big\lvert \lvert x+14 \rvert - 2 \big\rvert + 4$	$D_h = \langle -19, -9 \rangle$
$i: y = -\big\lvert \lvert x+14 \rvert - 2 \big\rvert$	$D_i = \langle -19, -9 \rangle$
$j: y = 0$	$D_j = \langle -12, -7 \rangle \cup \langle 8, 13 \rangle$
$k: y = -\frac{1}{2}x$	$D_k = \langle 4,6 \rangle$
$l: y = 1$	$D_l = \langle \frac{15}{2}, 13 \rangle$
$m: y = -\lvert x+5 \rvert$	$D_m = \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 10, 14 \rangle$
$n: y = -\big\lvert \lvert x \rvert - 4 \big\rvert + 4$	$D_n = \langle -7, -1 \rangle \cup \langle 1, 4 \rangle$
$o: y = \big\lvert \lvert 2x-5 \rvert - 5 \big\rvert - 4$	$D_o = \langle -2, -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle \cup \langle 3, \frac{9}{2} \rangle$
$p: y = -\lvert x-7 \rvert + 1$	$D_p = \langle 4, 6 \rangle$
$q: y = 4$	$D_q = \langle 1,7 \rangle \cup \langle 9, 13 \rangle$
$r: y = -\frac{3}{2}$	$D_r = \langle -12, -9 \rangle \cup \langle 9, 12 \rangle$

Pracovní list:



Řešení:





Příloha č. 24

Pracovní list:

$f: y = 2^{x-4}$ $D_f = \langle 2; 5 \rangle$

$g: y = 2^{x}$ $D_g = \langle -5; 1 \rangle$

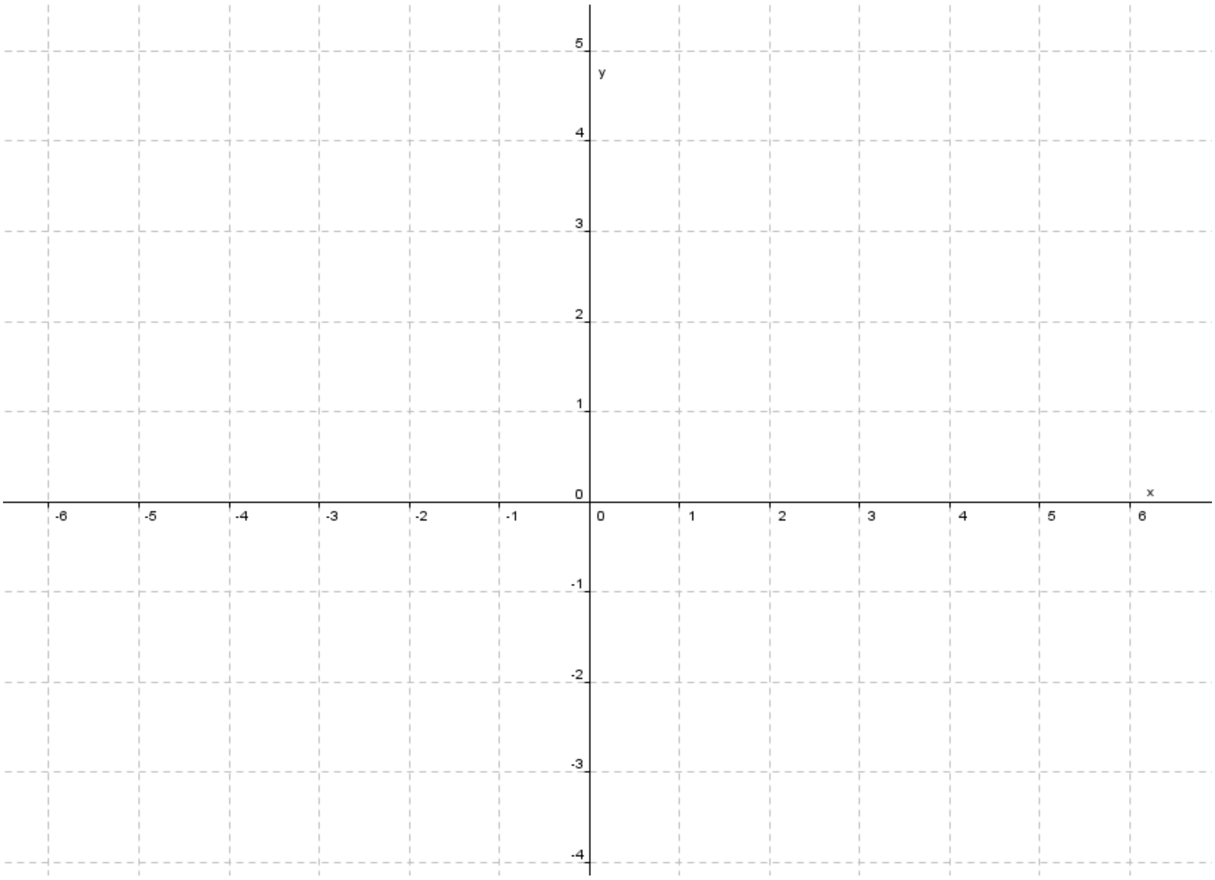
$h: y = \frac{1}{2}^{x}$ $D_h = \langle -1; 2 \rangle$

$i: y = 3^{x-2} - 3$ $D_i = \langle -5; -1 \rangle$

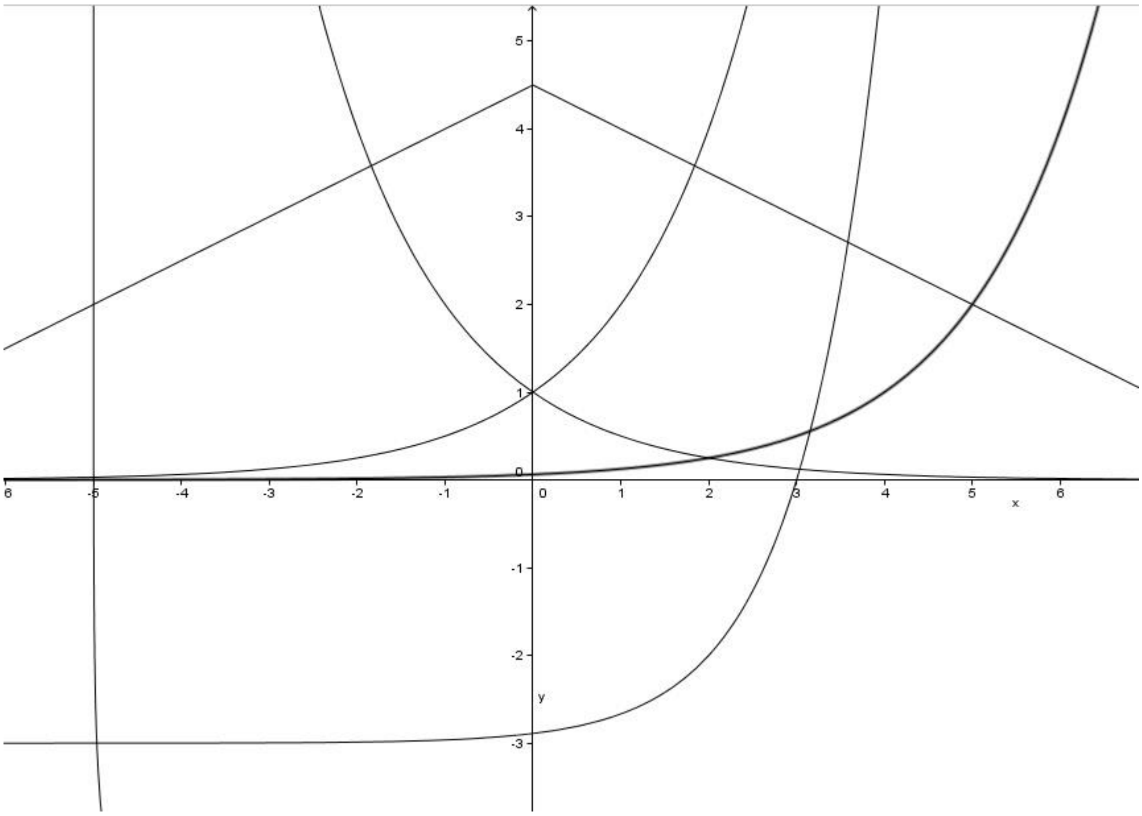
$j: y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 5) - 6$ $H_j = \langle -3; 3 \rangle$

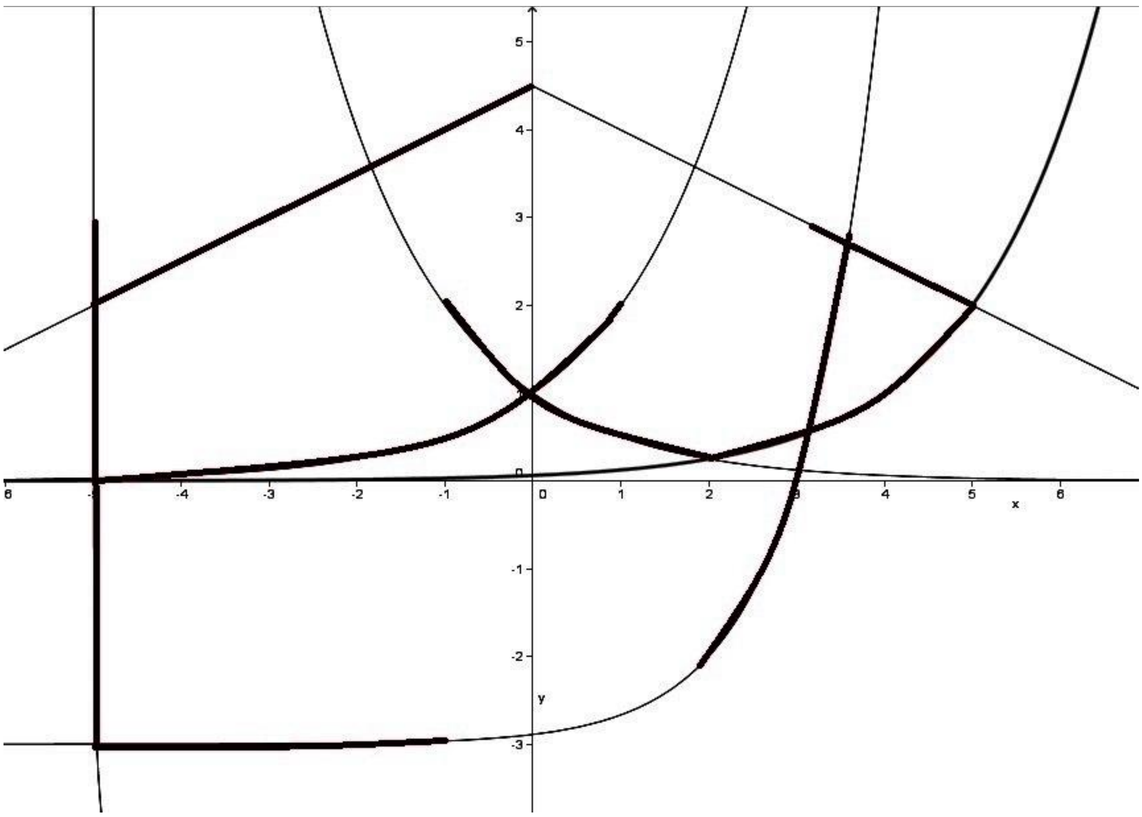
$k: y = -\left|\frac{x}{2}\right| + \frac{9}{2}$ $D_k = \langle -5; 0 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$

$l: y = 3^{x-2} - 3$ $H_l = \langle -2; 3 \rangle$



Řešení:





Příloha č. 25

Pracovní list:

$a: y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\right|$ $\quad D_a = \langle 1; 5\rangle \quad H_a = \langle 0; \frac{17}{4}\rangle$

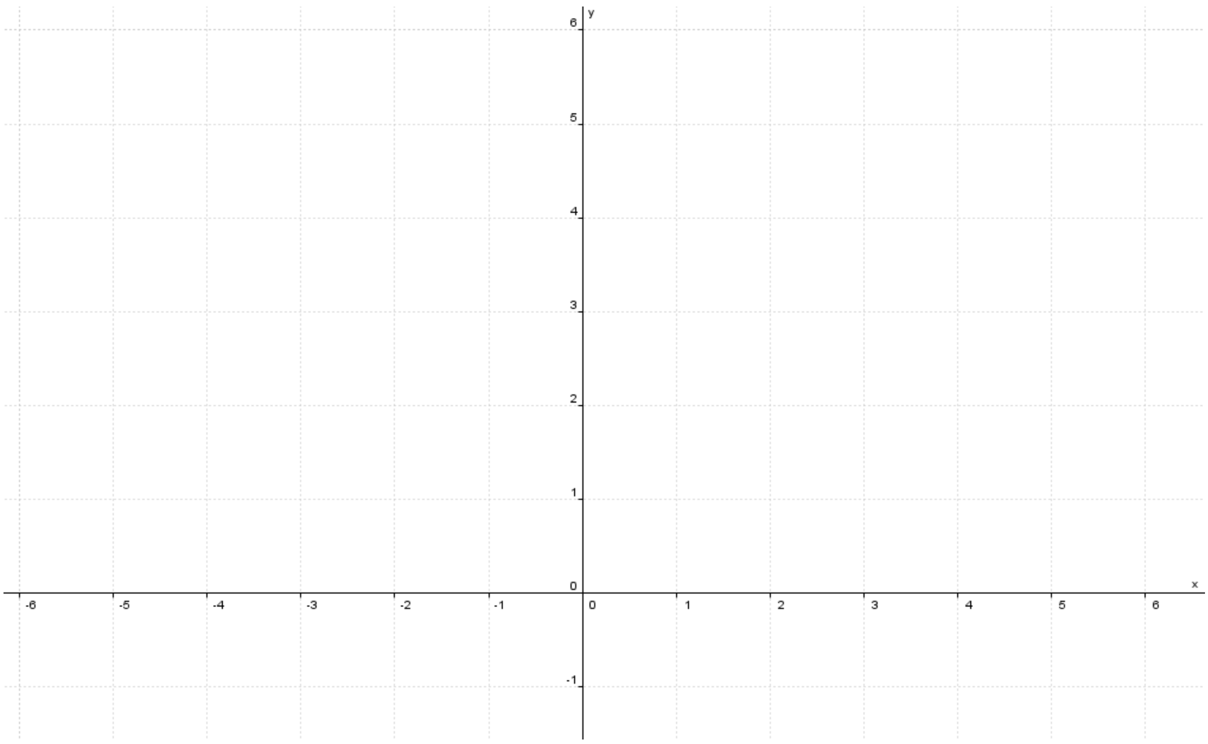
$b: y = 2$ $\quad D_b = \langle 3; 5\rangle$

$c: y = y = \log_3(x+3) + 3$ $\quad D_c = \langle 1; 5\rangle$

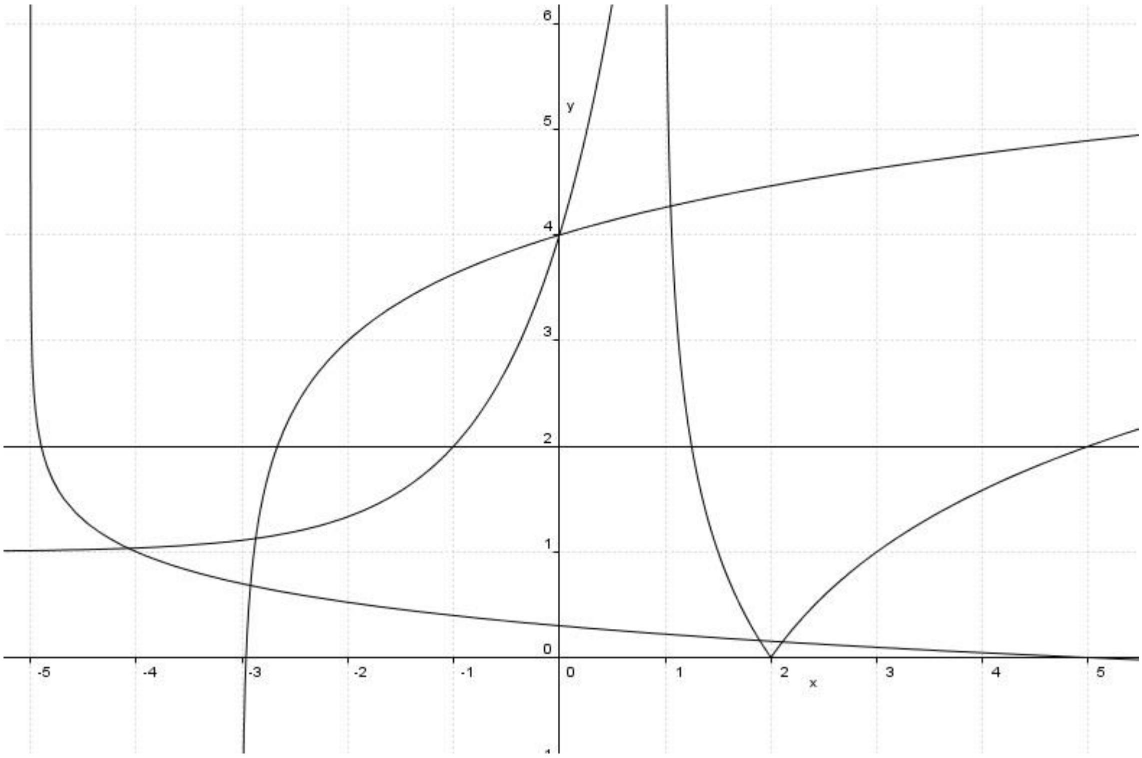
$d: y = -\log(x+5) + 1$ $\quad H_d = \langle \frac{1}{4}; 6\rangle$

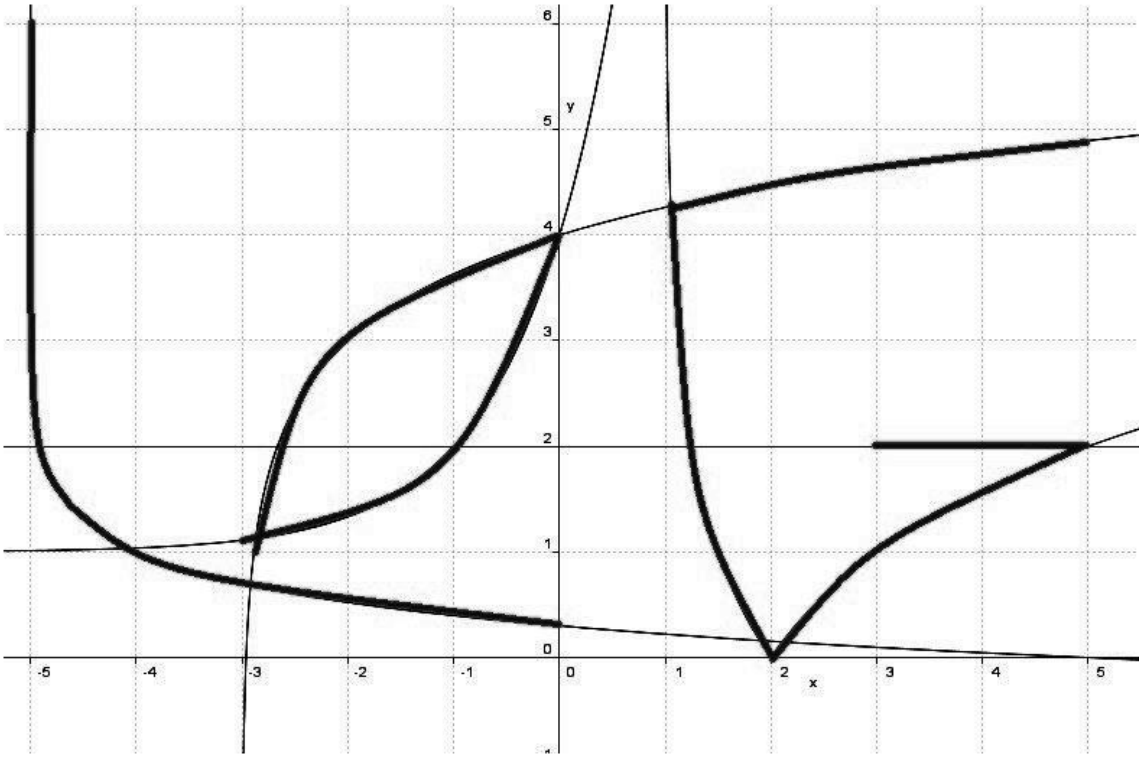
$e: y = 3^{x+1} + 1$ $\quad D_e = \langle -3; 0\rangle$

$f: y = y = \log_3(x+3) + 3$ $\quad H_f = \langle 1; 4\rangle$



Řešení:

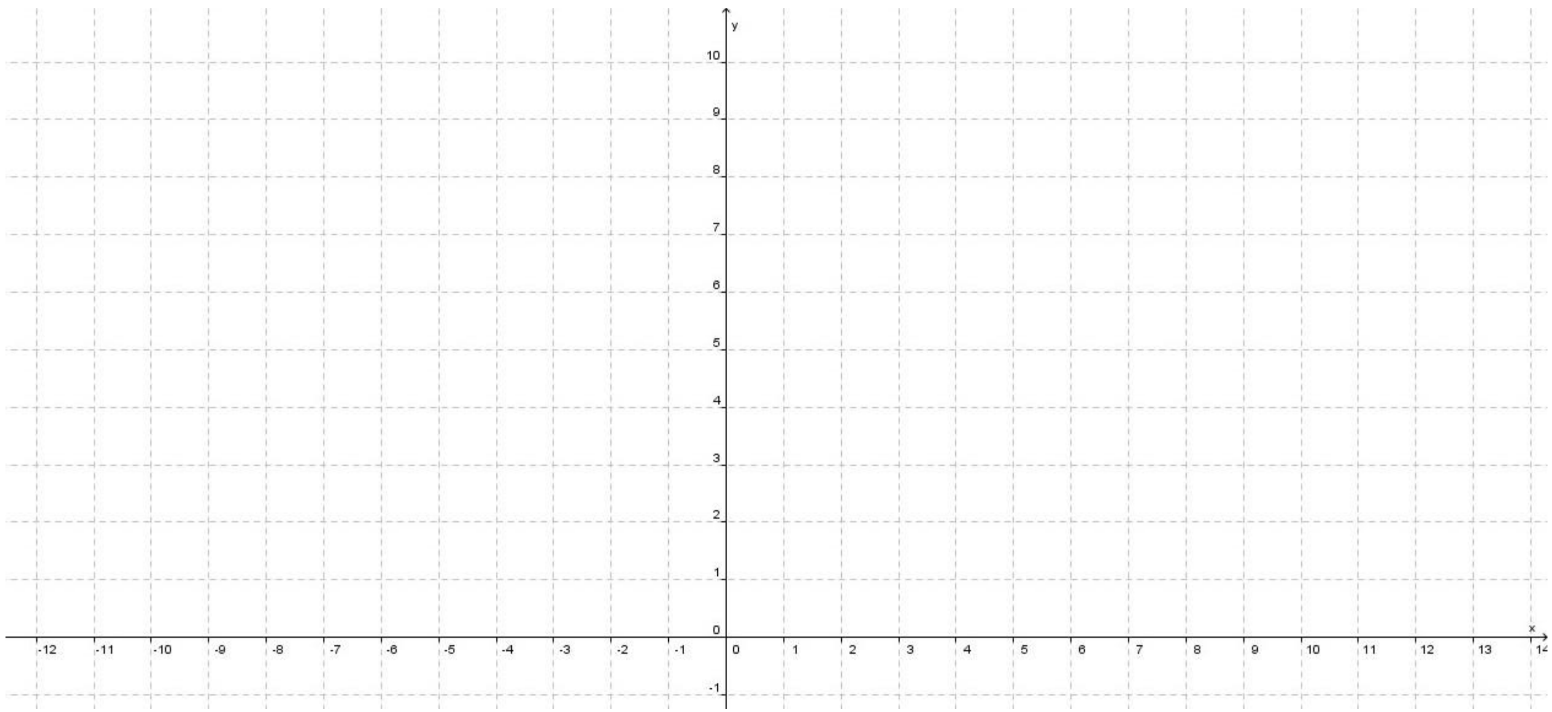




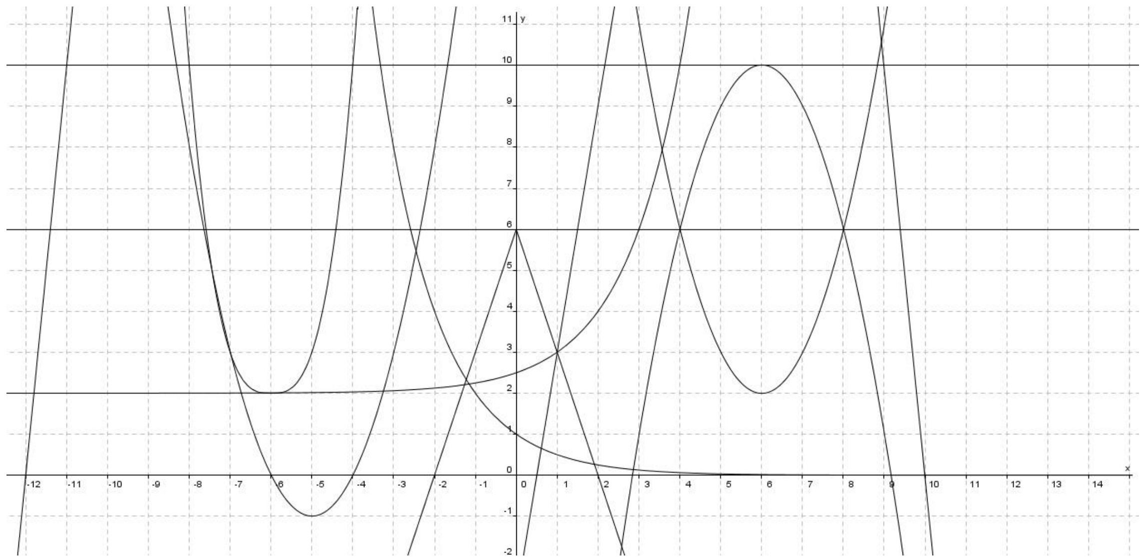
Příloha č. 26

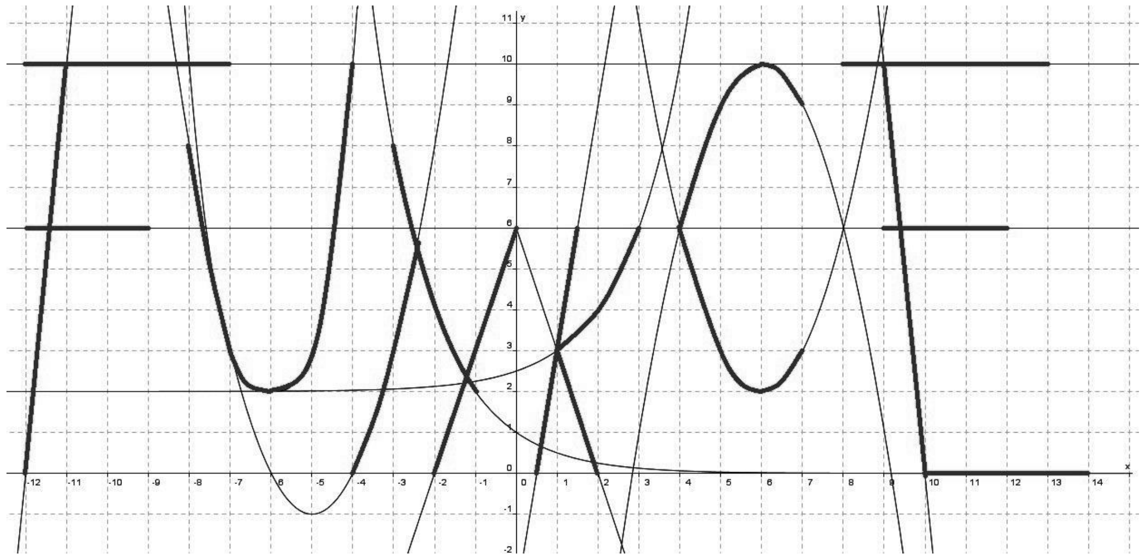
$f: y = 10(x + 12)$	$D_f = \langle -11, -10 \rangle$	$l: y = -(x-6)^2 + 10$	$D_l = \langle 4, 7 \rangle$
$g: y = 10(-x + 10)$	$D_g = \langle 9, 10 \rangle$	$m: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$D_m = \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 10,\ 14 \rangle$
$h: y = -\lvert 3x \rvert + 6$	$D_h = \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle$	$n: y = (x+5)^2 - 1$	$D_n = \langle -8, -7 \rangle \cup \langle -4, -\frac{5}{2} \rangle$
$i: y = 2^{x-1} + 2$	$D_i = \langle 1, 3 \rangle$	$o: y = \lvert (x+7)^3 \rvert + 2$	$D_o = \langle -7, -4 \rangle$
$j: y = 10$	$D_j = \langle -12, -7 \rangle \cup \langle 8, 13 \rangle$	$p: y = (x-6)^2 + 2$	$D_p = \langle 4, 7 \rangle$
$k: y = 6x - 3$	$D_k = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$q: y = 6$	$D_q = \langle -12, -9 \rangle \cup \langle 9, 12 \rangle$

<u>Pracovní list:</u>

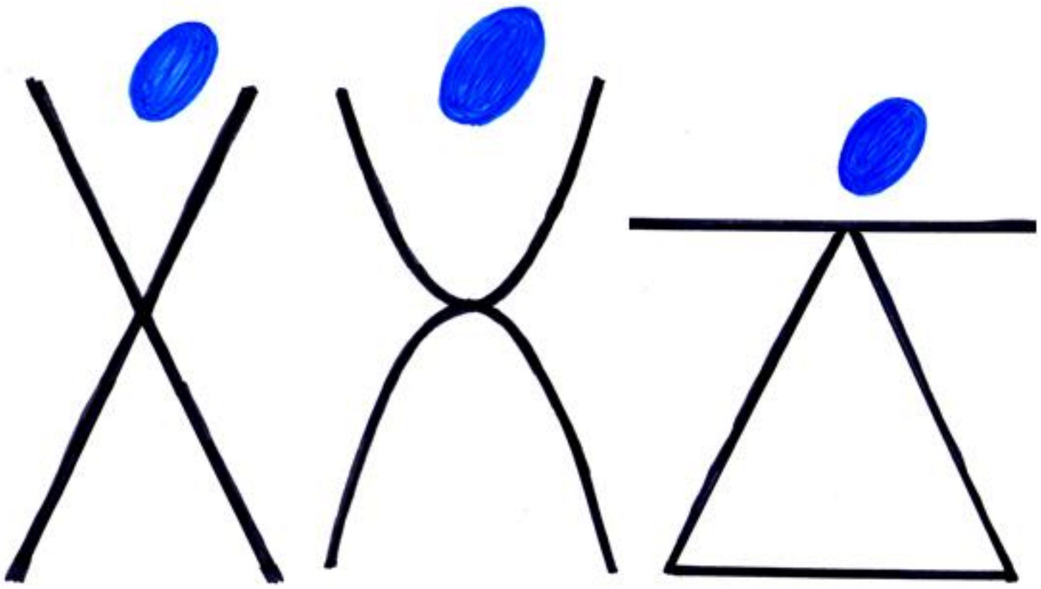


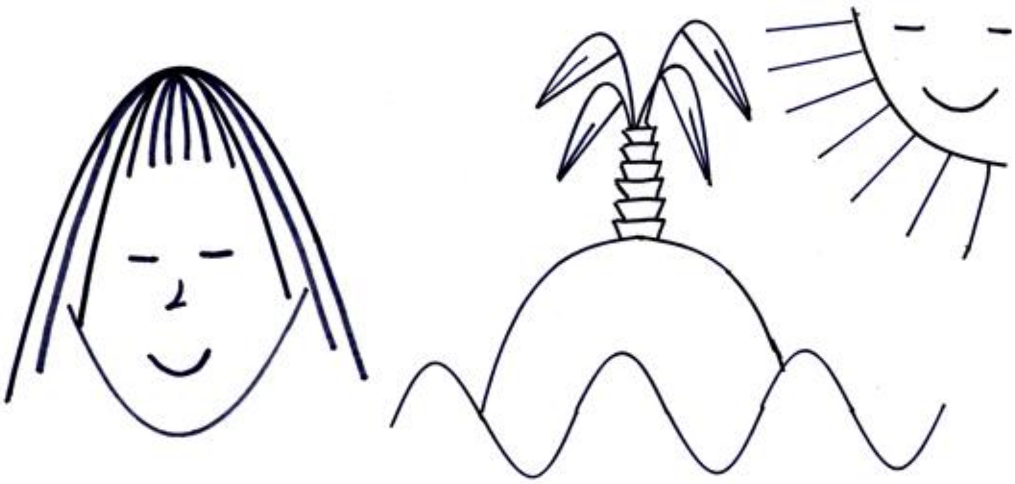
Řešení:



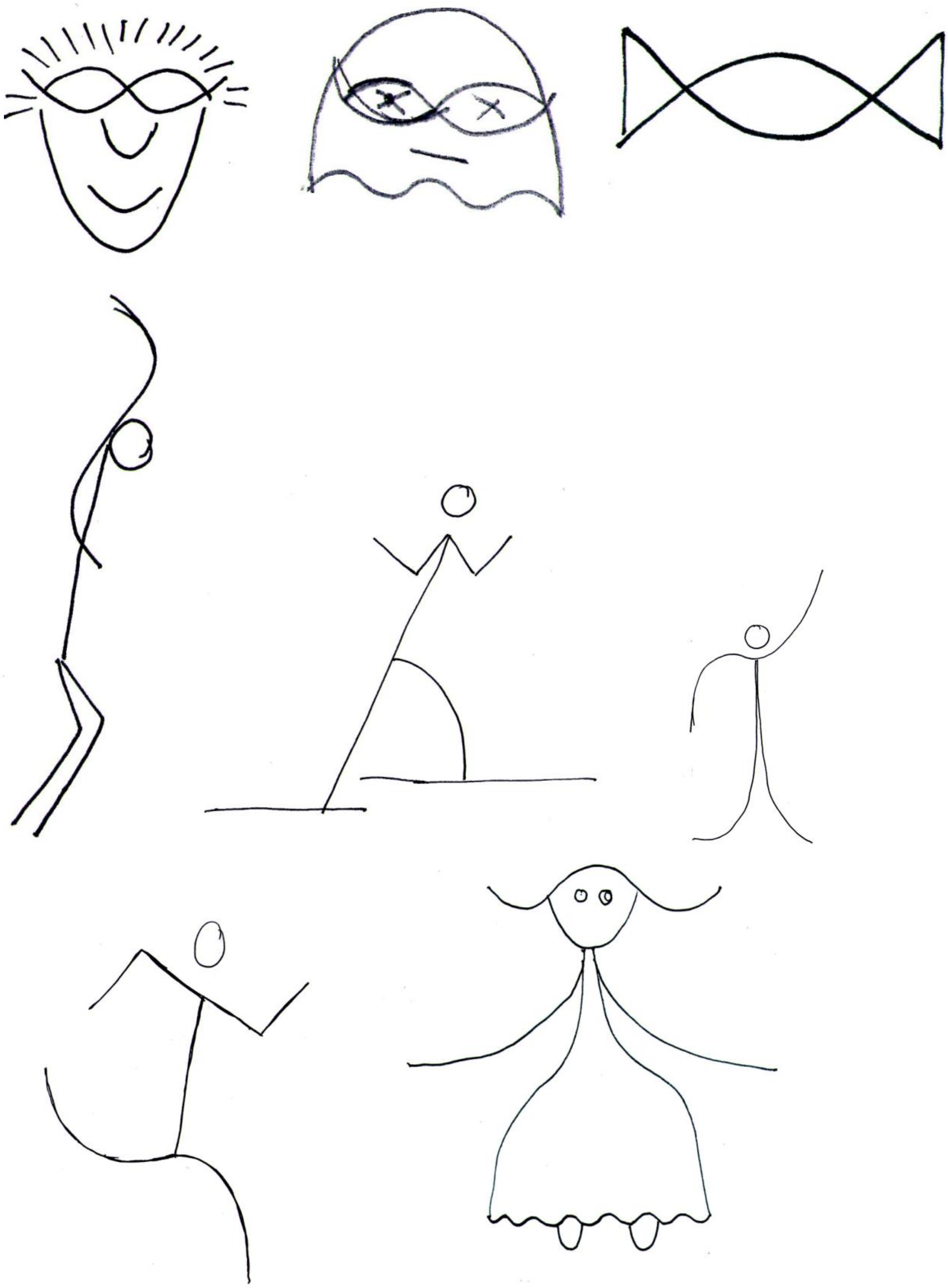


Příloha č. 27





Příloha č. 28



PRŮSEČÍK S OSOU X	**BOD [0; 0]**
PRŮSEČÍK S OSOU Y	**BOD [0; 1]**
VÍCE PRŮSEČÍKŮ S OSOU X	**BOD [1; 0]**
VÍCE PRŮSEČÍKŮ S OSOU Y	**INFLEXNÍ BOD**
MINIMUM	**MAXIMUM**
$\mathbf{D_f = R}$	$\mathbf{H_f = R}$
D_f = (…; …)	**H_f = (…; …)**
KONKÁVNÍ NA URČITÉM INTERVALU	**SUDÁ**

KONVEXNÍ NA URČITÉM INTERVALU	**LICHÁ**
KONSTANTNÍ NA URČITÉM INTERVALU	**SPOJITÁ**
KLESAJÍCÍ NA URČITÉM INTERVALU	**OMEZENÁ**
ROSTOUCÍ NA URČITÉM INTERVALU	**KLESAJÍCÍ**
ZDOLA OMEZENÁ	**SHORA OMEZENÁ**
PERIODICKÁ	**ROSTOUCÍ**
KONSTANTNÍ	**Zadání: Určete, zda je možné nakreslit graf, který má a nemá dané vlastnosti. Pokud ano, zkuste načrtnout příklad takového grafu.**

Příloha č. 30

Určete definiční obor a obor hodnot u jednotlivých funkcí, najděte v tabulce příslušné souřadnice a doplňte prázdnou tabulku písmeny (podle umístění původní funkce). Následně zkuste dešifrovat text tak, aby Vám vyšel konec citátu.

Matematika je umění dávat……………………………………………………… (tajenka). J. H. Poincaré

Klíč:

H_f \ D_f	$(-\infty; 0)$	$R - \{0\}$	$(0; \infty)$	$(-2, \infty)$	R
R	A	B	C	D	E
$(-\infty; 0)$	F	G	H	I	J
$(0; \infty)$	K	L	M	N	O
$\langle -2; \infty)$	P	Q	R	S	T
$\langle 2; \infty)$ nebo $(2; \infty)$	U	V	X	Y	Z

Tabulka s umístěním fcí:

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
j_1	j_2	j_3	j_4	j_5

Tabulka s písmeny:

Zadání funkcí:

$f_1: y = |\ln(x+2) + 3| - 2$
$f_2: y = \log(-x) + 3$
$f_3: y = \log_{0,5}(-x) - 2$
$f_4: y = -|\log(x+2)|$
$f_5: y = \left|\frac{3}{x}\right| + 2$
$g_1: y = |x^3 - 3| - 2$
$g_2: y = -|x^2 - 2|$
$g_3: y = |\log x - 2|$
$g_4: y = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$
$g_5: y = -\frac{1}{2}x - 2$
$h_1: y = 3x + 1$
$h_2: y = |-\log x - 3|$
$h_3: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$h_4: y = |\ln(x+2) - 4|$
$h_5: y = \ln x + 5$

$i_1: y = -|-x^3 + 2|$
$i_2: y = (x+1)^3 - 2$
$i_3: y = |x^2 - 4| + 2$
$i_4: y = |\ln(x+2)| + 2$
$i_5: y = x^5 - 7$
$j_1: y = \left|\log_{\frac{2}{3}}(x+2)\right|$
$j_2: y = |\ln(x+2) + 5|$
$j_3: y = \left|\frac{1}{x}\right|$
$j_4: y = |\log x + 4|$
$j_5: y = |\log x|$

Příloha č. 31

Osmisměrka:

Najděte a poškrtejte 17 pojmů, které souvisí s funkcemi a jejich grafy. Z nepoškrtaných písmen sestavte tajenku.

I	N	F	L	E	X	N	Í	B	O	D
P	P	Ř	Í	M	K	A	C	Ř	E	D
A	R	T	Í	M	N	Í	Í	E	A	Ž
L	O	M	S	E	O	N	J	B	L	L
O	S	U	M	T	I	R	A	G	O	L
B	T	M	A	F	S	Á	S	M	B	Á
R	O	I	X	A	U	E	E	J	A	T
E	U	N	I	R	D	N	L	E	R	S
P	C	I	M	G	Á	I	K	V	A	O
Y	Í	M	U	Í	CH	L	CH	C	P	R
H	Y	B	M	Á	A	Y	S	O	E	P

Nalezená slova:

Nejkrásnější chvíle v životě matematika jsou ty po dokončení důkazu, avšak pouze ………………………………………………………………………… (viz. tajenka).

<u>Řešení:</u>

Nalezená slova: osy, graf, funkce, sudá, klesající, lomená, logaritmus, rostoucí, lineární, lichá, maximum, minimum, inflexní bod, prostá, parabola, hyperbola, přímka

Tajenka: …předtím, než se objeví chyba.