Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Informatika se zaměřením na vzdělávání
Matematika se zaměřením na vzdělávání

TVORBA KINEMATICKY VZNIKAJÍCÍCH KŘIVEK V GEOMETRICKÝCH PROGRAMECH

CREATION OF KINEMATICALLY GENERATED CURVES IN GEOMETRIC SOFTWARES

Bakalářská práce: 13–FP–KMD–004

Autor:
Radka SZILLEROVÁ

Podpis:
Szillerová

Vedoucí práce: Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
68	0	31	0	11	1 (CD)

V Liberci dne: 24. 04. 2013

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2010/2011**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Radka Szillerová**
Osobní číslo:	**P09001132**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obory:	**Informatika se zaměřením na vzdělávání** **Matematika se zaměřením na vzdělávání**
Název tématu:	**Tvorba kinematicky vznikajících křivek v geometrických programech**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

Cílem bakalářské práce je vytvoření přehledu křivek, které vznikají kinematicky. Každou křivku graficky vykreslit, popsat rovnicí (parametrickou, explicitní či implicitní) a slovně okomentovat způsob jejího kinematického vytvoření. Text je možné doplnit stručnými poznámkami o historickém vzniku, případně o možném využití jednotlivých kinematicky vznikajících křivek. Vytvořit anomace vybraných křivek, popsaných v textu práce, v některém z dynamických geometrických freewarových programů (např. GeoGebra, Geonext, případně další). Vytvořené animace kinematicky vznikajících křivek odevzdat na CD v elektronické podobě. K sepsání této bakalářské práce se předpokládá znalost základů kinematické geometrie a diferenciální geometrie křivek, dále schopnost vyhledání zdrojů (též cizojazyčných) věnovaných problematice kinematicky vznikajících křivek, schopnost práce s internetem a s dynamickými geometrickými programy. Z důvodů dostupnosti je plánováno užití volně šiřitelných geometrických programů.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

HOHENWARTER, M. - PREINER, J.: GeoGebra nápověda 3.0. 2007.
MUSÍLEK, M.: Geonext - Open Source Software ve výuce matematiky a fyziky - 1. 2006.
OPAVA, Z.: Matematika kolem nás. Albatros, Praha 1989.
URBAN, A.: Deskriptivní geometrie I, II. SNTL, Praha 1967.
http://www.geogebra.org
http://www.geogebra.org/book/intro-en.pdf
http://www.geogebra.org/help/docuen.pdf
http://geonext.uni-bayreuth.de/

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **18. dubna 2011**
Termín odevzdání bakalářské práce: **27. dubna 2012**

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

L.S.

Technická univerzita v Liberci

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

dne

Čestné prohlášení

Název práce:	Tvorba kinematicky vznikajících křivek v geometrických programech
Jméno a příjmení autora:	Radka Szillerová
Osobní číslo:	P09001132

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má bakalářská práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucí bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložila elektronickou verzi mé bakalářské práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě, a že jsem uvedla všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 24. 04. 2013

Radka Szillerová

Radka Szillerová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat všem, kteří jakkoliv přispěli při zpracování mojí bakalářské práce. V první řadě mé největší poděkování patří Mgr. Daniele Bímové, Ph.D., vedoucí bakalářské práce, která mi byla po celou dobu nápomocna, za její obrovskou ochotu a trpělivost, cenné rady a připomínky při psaní této práce.

Dále bych chtěla poděkovat mé rodině a přátelům za podporu během studia.

Anotace:

V této bakalářské práci je uveden výčet několika kinematicky vznikajících křivek. Každá uvedená křivka je vytvořena pomocí dynamického geometrického programu GeoGebra nebo GEONExT. Všechny konstrukce jsou uloženy na přiloženém CD.

Práce zahrnuje krátké seznámení s historií geometrie a se základními pojmy týkajícími se kinematické geometrie. Následuje kapitola věnovaná některým pohybům, při nichž kinematické křivky vznikají. U každého pohybu je uveden popis jeho vzniku a ilustrativní obrázek. Důležitou součástí každé podkapitoly, věnované jednotlivému typu pohybu, je popis konstrukce kinematicky vznikající křivky v užitém geometrickém programu. V práci se také letmo seznamujeme s prostředími uvedených geometrických programů.

Klíčová slova:

GeoGebra, GEONExT, kinematická geometrie, neproměnná rovinná soustava, trajektorie pohybu, eliptický pohyb, kardioidický pohyb, konchoidální pohyb, pohyb kloubového antiparalelogramu, cyklické pohyby, úpatnice

Annotation:

In this bachelor thesis there is presented a list of several kinematically generated curves. Every mentioned curve is created by the usage of dynamic geometry software either GeoGebra or GEONExT. All the constructions are stored on the supplied CD.

The bachelor thesis includes a brief introduction of the history of geometry and a brief introduction of the basic concepts related to the kinematic geometry. Follows chapter devoted to several kinematic motions from which some kinematically generated curves arise. For each motion there is presented a description of its origin and an illustrative picture. An important part of each sub-chapter, dedicated to a particular type of motion, is a description of the construction of the kinematically generated curve in a used geometric program. The bachelor thesis also briefly acquainted with the environment of the specified geometric programs.

Key words:

GeoGebra, GEONExT, kinematic geometry, unchanging planar system, trajectory, elliptical motion, cardioidical motion, conchoidal motion, movement of the articulated antiparalelogram, cyclical motions, pedal curve

Obsah

Seznam ilustrací

Seznam zkratek

NRS - Neproměnná rovinná soustava

EHP- Elipsa či hyperbola nebo parabola

.ggb - Soubor vytvořený v programu GeoGebra

.gxt - Soubor vytvořený v programu GEONExT

Seznam užitých symbolů

$\equiv$	je totožné
$\not\equiv$	není totožné
$\in$	leží na (náleží)
$=$	rovnost
$<, >$	nerovnost
$\cap$	průnik
$\parallel$	rovnoběžnost
$\sphericalangle$	úhel
$\lvert AB \rvert$	velikost úsečky AB

Úvod

Kinematická geometrie je pravděpodobně pro mnoho lidí cizí pojem. V dnešní době se s tímto odvětvím geometrie setkáme především už jen při studiu na vysoké škole a to jen u některých oborů a většinou pouze v rámci nepovinných předmětů. Nevylučovala bych, že existují nějaké kroužky, kurzy nebo semináře pro zvídavé studenty či pro žáky, kteří mají o geometrii větší zájem než jejich spolužáci. Výše uvedená geometrie stojí určitě za pozornost a za zařazení do takovýchto kroužků. Může člověku pomoci při zlepšování jeho představivosti a při tvorbě různých křivek, které se pak využívají například ve strojírenství, architektuře a určitě i v dalších oborech.

S kinematicky vznikajícími křivkami se můžeme setkat i při hře. Pro vysvětlení, jak vlastně kinematicky vznikající křivky vypadají, je ideální hra zvaná INSPIRO. S touto hrou si hrají už malé děti a vytvářejí krásné obrazce pomocí ozubených koleček různých rozměrů a druhů. Touto hrou se dobře trénuje zručnost, protože správné vytvoření křivky je velice obtížné, jelikož ozubená kolečka občas poskočí jinam, než mají. Dětem vznikají krásné obrazce, o kterých ani netuší, že jsou to křivky, které mají své speciální názvy.

Cílem této práce je vytvořit přehled několika kinematicky vznikajících křivek a vykreslit jejich vznik pomocí animací, které budou přístupné na přiloženém CD. V textu práce se objeví pouze výsledné obrázky zkonstruovaných křivek doplněné o popis jejich vzniku. Konstrukce křivek budou vytvářeny v programech GEONExT a GeoGebra. Vše bude tvořeno pouze v rovině.

1. Střípky z historie geometrie

První počátky geometrie jako takové jsou zaznamenány už v 15. století př. n. l., kdy vznikl městský plán Nippuru, starého sumerského města v Mezopotámii. Plán je na svoji dobu neobyčejně pečlivě zakreslen na hliněné tabulce. I když i z 23. století př. n. l. byly zaznamenány základy zeměměřičství a snad i rýsování půdorysů. Doklady o znalosti rýsování v Egyptě pocházejí z období vlády Ramsese III. (kolem roku 1200 př. n. l). [1 s. 13]

Odtud pochází i název geometrie: gé – země a metref – měřiti.

Nejvýznamnější vliv na rozvoj matematiky mělo bezesporu starověké Řecko. Doklady se zachovaly jen z doby mladší než 4. století př. n. l., ale vyplývá z nich, že matematika se stává vědou. Výsledky prací řeckých matematiků ovlivnily vývoj matematiky po dobu mnoha staletí. Euklides z Alexandrie (asi 365 – 300 př. n. l) svým dílem Stoicheia (Základy) shrnul a uspořádal doposud známé geometrické poznatky. Zpracování bylo tak vynikající, že se ještě před několika lety stalo podkladem nebo vzorem pro zpracování školních učebnic geometrie. [2 s. 10]

Ona první historicky doložená definice křivky se skrývá v Eukleidově druhé definici - *Čára pak délka bez šířky*. I když nejde pochopitelně o exaktně přesnou definici (neboť není řečeno, co je to délka a co je to šířka), je zde intuitivně velmi dobře vystižena vlastnost, kterou se křivka odlišuje od rovinných útvarů. Přímo z druhé definice nelze sice přímo říci, jaký typ čáry má Eukleides na mysli, ale je zřejmé, že nemíní přímku nýbrž křivku, protože přímka je definována následně v definici čtvrté - *Přímá jest čára, která svými body táhne se rovně*. Pojetí křivky upřesňuje také definice třetí - *Hranicemi čáry jsou body*, z níž plyne, že je na ni pohlíženo jako na objekt konečný, ohraničený dvěma body. Eukleides v podstatě definuje úsečku nikoliv přímku, ale s tím, že tuto úsečku můžeme dle potřeby libovolně prodloužit. Vyhýbá se tím pojmu nekonečno.

V úvodních postulátech říká:

1. *Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.*

2. *A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.*

Kružnice je poněkud skrytě zavedena v definici kruhu:

15. Kruh jest útvar rovinný, objímaný jedinou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu uvnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.

16. Středem pak kruhu zove se ten bod.

V jiném českém překladu, který však zůstal jen v rukopise (překlad první knihy Eukleidových Základů od Josefa Smolíka), je tato definice uvedena v trochu jiném znění, kde se přímo termín kružnice vyskytuje:

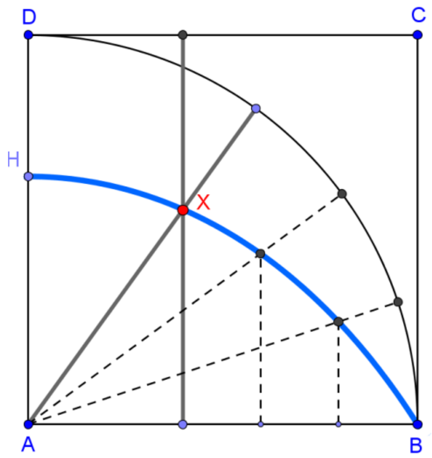
15. Kruh jest obrazec plochý, omezený jedinou čarou, řečenou kružnice; od této veškeré přímky vedené k témuž bodu uvnitř kruhu ležícímu jsou si rovny.

16. Bod ten zove se střed kruhu.

První studovaná křivka po kružnici a po přímce byla transcendentní **Hippiova kvadratrix**. V 5. století př. n. l. popsal Hippias z Elidu křivku, kterou lze užít k trisekci úhlu (proto ji můžeme v literatuře najít také pod názvem Hippiova trisektris). Později ji Deinostratos aplikoval k řešení kvadratury kruhu a odtud dostala svůj nynější název.

Hippias převedl problém dělení úhlu na problém dělení úsečky. V dnešní terminologii můžeme jeho definici kvadratrix vyjádřit následovně:

Uvažujme čtverec $ABCD$ (viz obrázek 1) a dva pohyby takové, že:



Obrázek 1: Hippiova kvadratrix – Trisekce úhlu

(1) úsečka AB se otáčí kolem bodu A (proti směru hodinových ručiček),

(2) úsečka BC se posouvá ve směru vektoru $\overrightarrow{CD}$,

(3) oba pohyby jsou rovnoměrné a ve stejný okamžik začnou i skončí,

pak průsečík X pohybujících se úseček AB a BC opíše křivku z bodu B do bodu H. [3 s. 40- 41]

Další křivky, které se objevují po Hippiově kvadratrix, jsou kuželosečky. Okolnosti kolem jejich původu nejsou úplně jasné. Kuželosečkami se nebudeme zabývat podrobněji. Nejvýznamnější spis o kuželosečkách je dílo řecké matematiky – „O kuželosečkách“ pocházející od Apollónia. Sestává se z 8 knih, z nichž první čtyři se dochovali v řečtině, další tři v arabském překladu a poslední byla ztracena. Podkladem pro jeho práci se stali Euklidovy Základy.

Z Eutokiových komentářů k Archimédovu dílu „O kouli a válci“ užil ve 2. století př. n. l. Diokles k nalezení dvou středních geometrických úměrných křivku, která dostala název **kisoida**. Nikomedes pak popsal křivku, kterou původně nazval **kochloida**. Teprve později dostala zřejmě název **konchoida** – Proklos (5. stol.).

Dalším významným matematikem, který se též mimo jiné věnoval zkoumání křivek, byl Archimédes ze Syrakus. Napsal dílo „O spirálách“. V tomto díle byla Archimédem poprvé studována (asi kolem roku 225 př. n. l.) křivka nazývaná Archimédova spirála. [3 s. 49-56]

V dnešní době se objevují i podklady pro vznik prostorových kinematicky vznikajících křivek, ale těmi se tato práce nezabývá, a proto tato část bude vynechána.

2. Základní pojmy

Zde představíme základní pojmy kinematické geometrie v rovině, které budeme používat při výkladu dalších kapitol této práce.

2.1. Křivka

2.1.1. Zavedení pojmu křivka

Křivku pokládáme za nekonečnou množinu bodů, jejichž poloha závisí na jediném parametru.

2.1.2. Klasifikace křivek

Křivky klasifikujeme z různých hledisek. Jedním možným rozdělením je na **rovinné a prostorové křivky** (zabývat se budeme pouze rovinnými křivkami). *Křivka je rovinná, jestliže všechny její body leží v jediné rovině* (v opačném případě se jedná o prostorovou křivku). [4 s. 7]

Dalším možným hlediskem dělení je, zda je křivka **otevřená** či **uzavřená**. Jestliže má křivka koncové body, tzn. počáteční bod je různý od koncového, pak ji nazveme otevřenou křivkou – obrázek 2a). Jestliže počáteční a koncový bod jsou totožné, pak křivku nazveme uzavřenou – obrázek 2b).

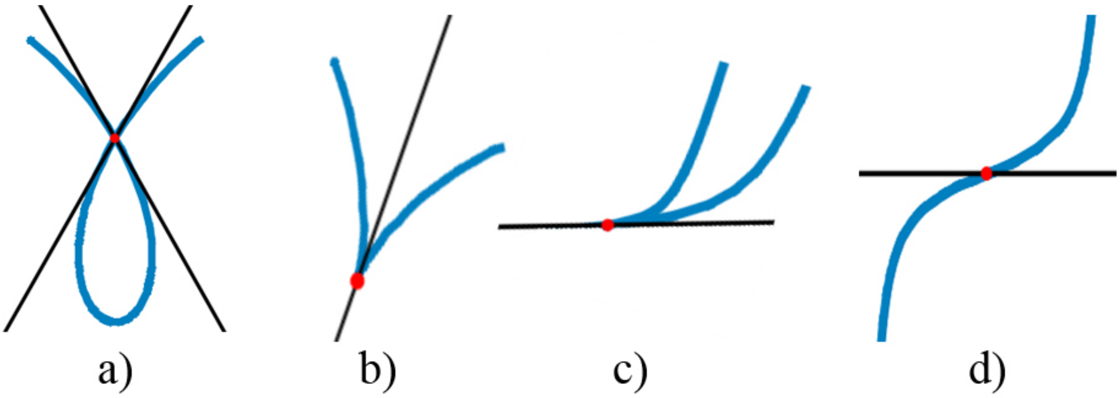
a) b)

Obrázek 2: Otevřená a uzavřená křivka

2.1.3. Klasifikace bodů křivky

Bod, ve kterém má křivka jedinou tečnu určenou jediným nenulovým vektorem, nazýváme **regulární bod** (v tomto bodě existuje první derivace křivky a je vždy nenulová); v opačném případě nazveme bod **singulární**.

Různé typy singulárních bodů jsou zakresleny na obrázku 3. Bod zobrazený na obr. 3a) se nazývá ***uzlový*** bod (jsou v něm sestrojeny dvě tečny k jedné křivce), body na obr. 3b) a 3c) jsou ***body vratu 1. a 2. druhu*** (nejsou v nich tečny sestrojeny jednoznačně, resp. tečný vektor je v nich nulový). Vyznačený bod na obr. 3d) je ***inflexní bod***.

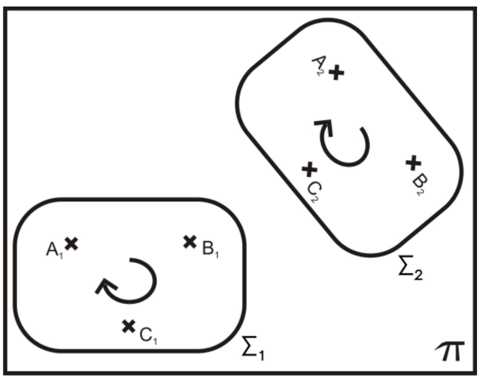


Obrázek 3: Typy singulárních bodů

2.2. Neproměnná rovinná soustava

Kinematická geometrie v rovině se zabývá konstrukcemi a vlastnostmi křivek vznikajících při pohybu tzv. neproměnné rovinné soustavy. Přitom **neproměnnou rovinnou soustavou** (dále jen NRS) rozumíme rovinné pole, které je jako neproměnný celek podrobeno pohybu.

Rovinné pole značí souhrn všech bodů v rovině. A jelikož lze každý rovinný útvar definovat jako množinu bodů v rovině, můžeme pod pojem rovinné pole zahrnout všechny útvary dané roviny. Ještě upřesníme, co je to neproměnný celek.



Obrázek 4: Pohyb NRS

Na obrázku 4. vidíme dvě různé polohy Σ_1 a Σ_2 pohybujícího se rovinného pole Σ po pevné rovině π. Bodům A_1, B_1, C_1, … první polohy Σ_1 pole Σ jsou přiřazeny body A_2, B_2, C_2, … druhé polohy Σ_2 pole Σ. Aby bylo pole Σ při pohybu neproměnné, musí se vzdálenost jakýchkoliv dvou bodů v Σ_1 rovnat vzdálenosti odpovídajících bodů v Σ_2 (čili $|A_1B_1| = |A_2B_2|$, atd.). Z toho vyplývá, že dva odpovídající si trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ ve dvou polohách Σ_1 a Σ_2 rovinného pole Σ jsou shodné a mají stejnou orientaci (orientace je v obrázku vyznačena šipkou). [4 s. 242]

2.2.1. Trajektorie pohybu

Kinematická geometrie v rovině se zabývá konstrukcemi a geometrickými vlastnostmi rovinných útvarů (bodů, přímek, křivek, atd.) vznikajících při pohybu NRS. Tzn. věnuje se mimo jiné křivkám, které při pohybu vytvoří body NRS Σ. Pohybuje-li se NRS Σ po pevné rovině π, pak její body opisují v rovině π křivky, které nazýváme **trajektoriemi pohybu**. Ne však všechny body NRS musí nutně opisovat křivku – např. při rotaci je střed rotace neměnný, a tak opisuje bod; při translaci opisuje bod přímku. [5 s. 4]

2.2.2. Určení pohybu NRS

Je-li v pevné rovině π dána libovolná poloha Σ_1 pohybující se soustavy Σ, pak její další poloha Σ_2 je jednoznačně určena, známe-li přemístěnou polohu A_2B_2 libovolné úsečky A_1B_1 polohy Σ_1. Vzhledem ke skutečnosti, že uvedené tvrzení platí pro každou polohu pohybující se soustavy Σ, získáváme větu základního významu. [4 s. 242]

Věta

Pohyb nepromĕnné soustavy Σ je určen, známe-li trajektorie τ_A a τ_B dvou bodů A, B nenulové úsečky AB.

Zdůvodnění je jednoduché. Z trajektorií se můžeme dozvědět polohy bodů A a B v každém čase a dle výše popsané věty je každá poloha jednoznačně určena.

2.2.3. Elementární pohyby

Posouvání směrem $\boldsymbol{s}$ je určeno přímkovými trajektoriemi τ_A, τ_B, kde $\boldsymbol{s} \parallel \tau_A \parallel \tau_B$ a základní polohou $A_0 \in \tau_A$, $B_0 \in \tau_B$ bodů A, B soustavy Σ. Vektorem $\boldsymbol{s}$ je určeno **posunutí soustavy Σ**.

Otáčení kolem bodu S je určeno dvěma soustřednými kružnicemi τ_A $(S, r = |SA_0|)$, τ_B $(S, r = |SB_0|)$, tj. trajektoriemi bodů A, B soustavy Σ. Orientovaným úhlem otočení ω je pak určeno **otočení soustavy Σ.**

Označme Σ_1, Σ_2 dvě různé polohy soustavy Σ. Poloha Σ_2 mohla vzniknout z polohy Σ_1 jakýmkoliv, třeba i velmi složitým pohybem, přesto však platí následující věta. [6 s. 115]

1. základní věta kinematické geometrie

Jsou-li Σ_1 *a* Σ_2 *dvě různé polohy pohybující se neproměnné rovinné soustavy* Σ, *existuje vždy otáčení či posunutí, které přemísťuje polohu* Σ_1 *v polohu* Σ_2.

2.2.4. Okamžitý střed otáčení

Jsou-li Σ_1 a Σ_2 dvě polohy NRS Σ, pak osy úseček A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, … procházejí pevným bodem S (může být nevlastní).

V každém okamžiku pohybu procházejí normály, sestrojené k trajektoriím, pevným bodem (může být i nevlastní). Tento pevný bod se nazývá okamžitý střed otáčení. [5 s. 5]

Definice:

Bod S se nazývá ***okamžitý střed otáčení*** *nebo také* ***okamžitý pól*** *(příslušný poloze* Σ_i, $i = 1, 2, \ldots$, *pohybující se neproměnné rovinné soustavy).*

Poznámka: V dalším textu vyloučíme z našich úvah dva elementární pohyby – rotaci a rovnoběžné posunutí, u nichž všechny okamžité středy otáčení splynou v jediném bodě vlastním (u rotace) nebo nevlastním (u rovnoběžného posunutí).

2.2.5. Pevná a hybná polodie

Nyní zavedeme pojmy pevné a hybné polodie.

Definice:

Množina všech okamžitých středů otáčení pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ *se nazývá* ***pevná polodie p****.*

Definice:

Množina všech bodů soustavy Σ, *které se při jejím pohybu stanou okamžitými středy otáčení, se nazývá* ***hybná polodie h****.*

Poznámka: Ve všech obrázcích vložených v dalších kapitolách práce značí červená barva hybnou polodii a modrá barva polodii pevnou.

2.2.6. Odvalování hybné polodie po pevné polodii

V dané rovině π mějme dánu pevnou polodii p a dále v ní mějme dánu hybnou polodii h pohybující se NRS Σ. Pohyb soustavy Σ je definován tzv. **odvalováním hybné polodie h po pevné polodii p.** Přičemž odvalování polodie h po polodii p je takový pohyb, při němž se polodie h stále dotýká polodie p a při němž nedochází k prokluzování, resp. smýkání polodie h po polodii p.

Věta

V každé poloze $\Sigma_i, i = 1, 2, \ldots$, pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ se příslušná poloha h_i hybné polodie h dotýká pevné polodie p v okamžitém středu otáčení S_i.

Věta

Nechť Σ_1 a Σ_2 jsou dvě různé polohy pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ a nechť h_1 a h_2 jsou příslušné polohy hybné polodie h, které se dotýkají pevné polodie p v okamžitých středech otáčení S_1 a S_2. Je-li $A_1 \in h_1$ bod, který se po přemístění polohy Σ_1 do polohy Σ_2 stane okamžitým středem otáčení S_2, pak délka oblouku S_1S_2 (měřená na pevné polodii p) se rovná délce oblouku S_1A_1 (měřené na poloze h_1 hybné polodie h).

Význam polodií pro pohyb je uveden ve 2. základní větě kinematické geometrie.

2. základní věta kinematické geometrie

Každý pohyb (různý od rotace a translace) neproměnné rovinné soustavy Σ lze převést na odvalování hybné polodie h po pevné polodii p.

Obráceně, *odvalováním libovolné křivky h po libovolné křivce p (různé od nevlastní přímky) je dán pohyb (různý od rotace a translace) neproměnné rovinné soustavy Σ pevně spjatý s křivkou h.*

Poznámka: Leží-li bod A na hybné polodii h, pak po odvalení po pevné polodii p do jisté polohy h_i hybné polodie h bude bod A_i okamžitým středem otáčení, tj. společným dotykovým bodem polohy h_i hybné polodie h a pevné polodie p. V tomto případě má trajektorie τ_A v bodě A_i **bod vratu**. Tečna trajektorie τ_A v bodě A_i je společnou normálou polohy h_i hybné polodie h a pevné polodie p v bodě A_i.

2.2.7. Vratné pohyby

Ve všech dosavadních úvahách jsme pro jednoduchost předpokládali, že NRS Σ (nyní ji označíme Σ_1) se pohybuje po pevné rovině π (nyní Σ_2). Rovina Σ_2 se ovšem může také pohybovat. Podstatný je jen relativní pohyb soustavy Σ_1 vůči rovině Σ_2. Z tohoto pohledu na vzájemný pohyb Σ_1 vůči Σ_2 je patrno, jestliže jsme až dosud předpokládali, že soustava Σ_1 se pohybuje po pevné rovině Σ_2 (hledisko pozorovatele v rovině Σ_2), pak obdobně můžeme předpokládat, že rovinná soustava Σ_1 je pevná a soustava Σ_2 se po ní pohybuje (hledisko pozorovatele Σ_1). Oba takto vzniklé pohyby nazýváme (*navzájem*) *vratnými pohyby*.

U vratného pohybu platí mezi hybnou a pevnou polodií vztah, který je někdy považován za základ definice vratného pohybu. [4 s. 250]

Věta:

Pevná (hybná) polodie daného pohybu je hybnou (pevnou) polodií vratného pohybu.

Definice:

Pohyb, který vznikne z daného pohybu záměnou rolí obou polodií, se nazývá vratný pohyb k danému pohybu.

3. Popis práce v geometrických programech

Konstrukce uvedené v této práci a uložené na přiloženém CD jsou vytvářeny převážně v programu GeoGebra 3.2.47.0. Tento program umožňuje více možností při vytváření konstrukcí než druhý použitý program GEONExT 1.74. Obrázky křivek zařazené do textu této práce jsou vytvořeny v GeoGebře. Díky možnosti pohybovat s pojmenováním objektů jsou obrázky přehlednější. GEONExT tuto operaci neumožňuje.

Díky možnostem geometrických programů nám vznikají přesné konstrukce, u kterých odpadá pracné ruční rýsování. Bohužel se tak děje na úkor zvyšování zručnosti a pečlivosti proti časové úspoře. Prostředky geometrických programů nám dokonce mnohdy umožňují tvořit konstrukce jednodušším způsobem než pomocí pravítka a kružítka.

3.1. Popis programů

GeoGebra je volně stažitelný dynamický matematický program spojující geometrii, algebru a matematickou analýzu. Byl vytvořen Markusem Hohenwarterem a mezinárodním týmem programátorů pro účely vyučování matematiky a učení se matematice.

GeoGebra nabízí tři různé pohledy na matematické objekty: grafické, algebraicko-numerické a tabulkové zobrazení. Ty nám umožní zobrazovat matematické objekty ve třech různých vyobrazeních: graficky (např. body, funkce, grafy), algebraicky (např. souřadnice bodů, rovnice) a buňkami tabulky. Tím jsou všechny reprezentace téhož objektu propojeny dynamicky a automaticky se přizpůsobí změny provedené v některé z reprezentací, bez ohledu na to, jak byly původně vytvořeny. [7 s. 6]

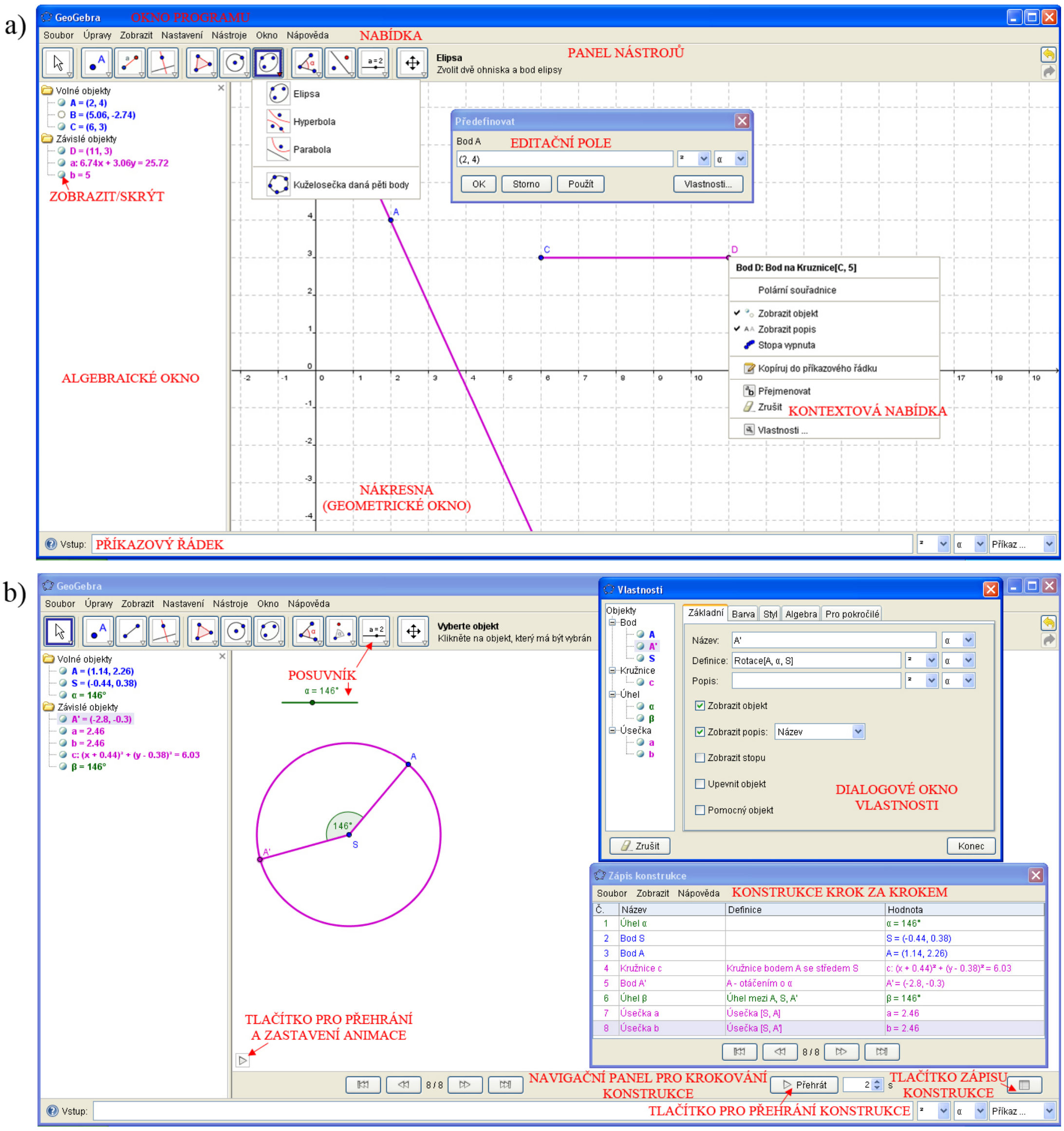
GEONExT, vytvořený na Univerzitě v Bayreuthu v Německu, se řadí mezi programy dynamické geometrie. Program Geonext byl vytvořen v programovacím jazyku Java, což do značné míry předurčuje jeho snadnou použitelnost na různých operačních systémech. Program je možné spustit i bez instalace přímo z internetových stránek jako applet. Geonext se významně odlišuje od ostatních programů dynamické geometrie, neboť je volně šiřitelný v rámci GNU General Public License. Instalace programu probíhá jednoduše a bez problémů, již v prvním kroku může uživatel zvolit vhodnou jazykovou verzi včetně češtiny. Rozšiřitelnost a lokalizace jsou stěžejní výhody programu Geonext. [8 s. 23]

3.2. Prostředí programů

V této kapitole se postupně seznámíme s prostředím geometrických programů GeoGebra a GEONExT. Nejedná se o přesný návod, jak v programech pracovat, ale spíše o nástin, jak se v nich snázeji orientovat. Orientace v programech je velmi důležitá pro vytváření křivek podle popisů konstrukcí uvedených v této práci. Jsou zmíněny i vypozorované situace, které se v návodech daných programů nevyskytují.

3.2.1. GeoGebra

Nyní si představíme pomocí obrázku 5: Prostředí GeoGebry, tj. umístění (popřípadě otevření) nabídek, panelů nástrojů či tlačítek v okně programu. Zmíněného pojmenování je používáno u popisů konstrukcí v této práci.



Obrázek 5: Prostředí GeoGebry

Po spuštění GeoGebry obsahuje okno programu nabídku, panel nástrojů, algebraické okno, geometrické okno a příkazový řádek. V geometrickém okně jsou automaticky zobrazeny osy a mřížka (v konstrukcích křivek v této práci nejsou zobrazeny). Editační pole se spustí dvojklikem levého tlačítka myši na objekt. V editačním poli můžeme měnit již zadané hodnoty na nové, ty se automaticky opraví v algebraickém i geometrickém okně. Kontextová nabídka se zobrazí při kliknutí na objekt pravým tlačítkem myši. Pro zobrazení rozšířenějšího panelu nástrojů stačí kurzorem myši kliknout na malý trojúhelník umístěný v pravém dolním rohu jednotlivých ikon nástrojů. V obrázku 5a) je rozšířený panel nástrojů rozbalen pro ikonu kuželoseček.

V algebraickém okně se nacházejí algebraické popisy vytvořených objektů. Objekty mohou být buď volné, nebo závislé. Volné objekty jsou takové, kterým můžeme měnit polohu (pokud nejsou upevněny) či hodnotu libovolně. Závislými objekty nelze libovolně pohybovat nebo jim měnit hodnoty, protože jsou propojeny s volnými objekty. Pohybem volných objektů se mění pozice závislých objektů. Pro lepší znázornění jsou v obrázku závislé objekty vykresleny fialově. Závislé objekty mají programem přednastavený jiný odstín modré než volné objekty, ale v obrázku 5 by tento rozdíl nebyl příliš znatelný.

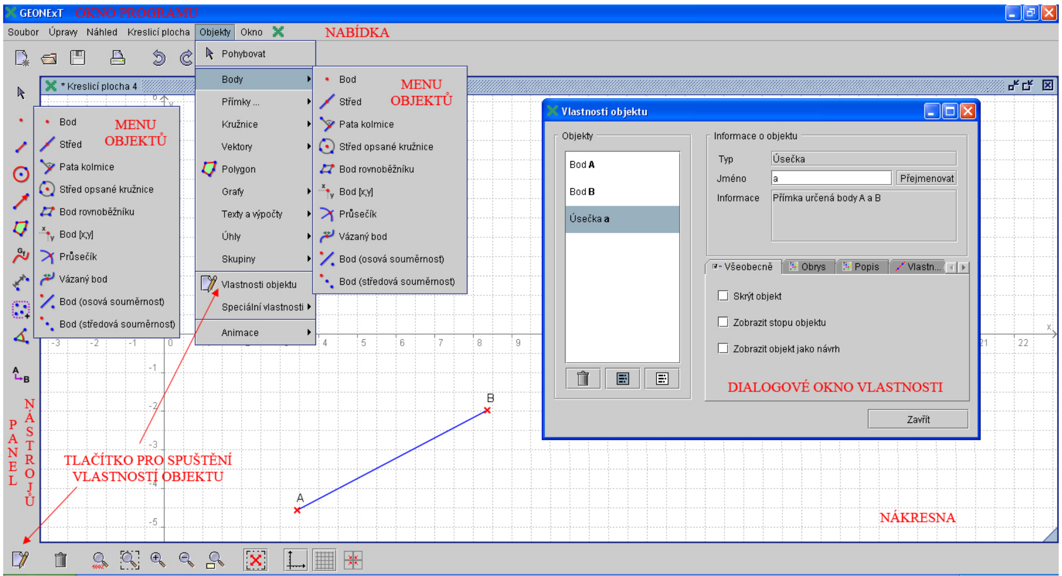
Důležitým nástrojem pro konstrukci křivek je „Posuvník“. Pokud je posuvník označený, můžeme jeho hodnoty měnit použitím kláves „+“ či „–“, nebo posouváním pomocí kurzoru myši. Díky posuvníkům můžeme konstrukce animovat – podrobněji se animacemi konstrukcí zabývá kapitola „3.3. Spuštění animace“. Po zaktivnění animace se zobrazí tlačítko pro přehrání a zastavení animace. Tím lze animace ovládat.

Dalším podstatným oknem je dialogové okno „Vlastnosti“ - obrázek 5b). V tomto okně se nastavují veškeré úpravy objektů, jako jsou změna názvu, barvy, stylu, atd. Také se zde (de)aktivují příkazy „Pomocný objekt“ (takto označený objekt se nezobrazuje v algebraickém okně), „Zobrazit objekt“, „Zobrazit popis“ a „Zobrazit stopu“. Zobrazení všech vykreslených stop je možno vymazat v nabídce „Zobrazit“ → „Překreslit“. Vypnutí „Zobrazení objektu“ je také možno provést v algebraickém okně, jak je vidět na obrázku 5a), a to kliknutím na kolečko u objektu. Když je kolečko prázdné, objekt není na nákresně zobrazen, pokud je plné, objekt je viditelný.

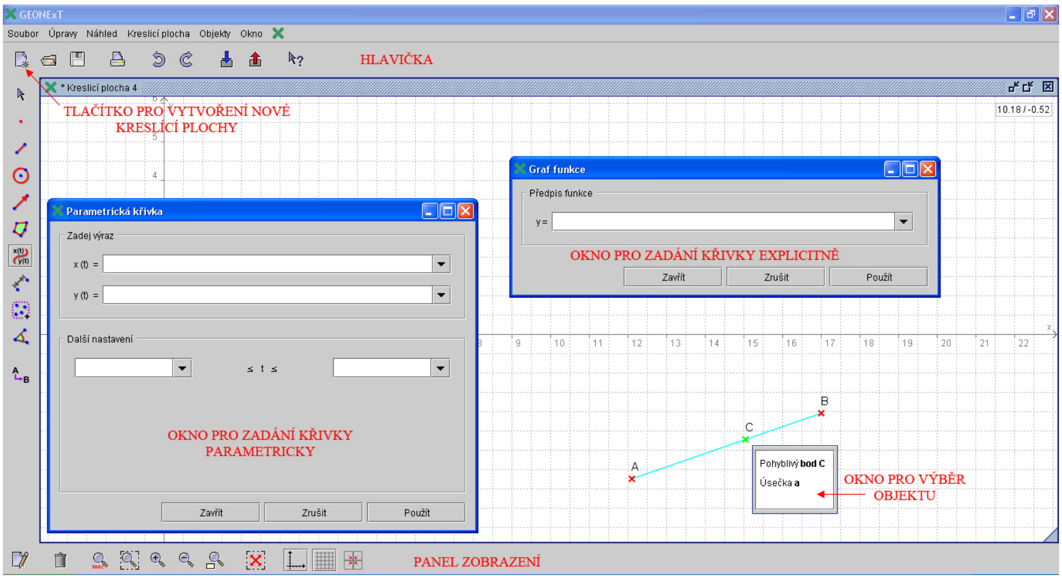
3.2.2. GEONExT

Nyní si představíme pomocí obrázku 6: Prostředí GEONExTu, tj. umístění (popřípadě otevření) nabídek, menu objektů či panelů nástrojů v okně programu. Uvedeného pojmenování je používáno i u popisů konstrukcí v této práci.

a)



b)



Obrázek 6: Prostředí GEONExTu

Po spuštění GEONExTu obsahuje okno programu nabídku, panel nástrojů, hlavičku a panel zobrazení. Nákresnu (kreslící plochu) musíme nejprve vytvořit a to kliknutím na tlačítko pro vytvoření nové kreslící plochy – viz obrázek 6b) anebo výběrem z nabídky „Soubor“ → „Nová kreslící plocha“.

Menu objektů lze zobrazit dvěma způsoby. První způsob je dvojklikem levého tlačítka myši na příslušný nástroj v panelu nástrojů, druhý způsob je výběr z nabídky „Objekty“.

Dialogové okno „Vlastnosti objektu“ je možné též zobrazit dvěma způsoby, a to buď tlačítkem pro spuštění „Vlastností objektu“ nebo přes nabídku „Objekty“ → „Vlastnosti objektu“. V tomto okně se nastavují veškeré úpravy objektů jako je přejmenování objektu, změna barvy či stylu. Barev je zde uvedeno jen 16, ale různé odstíny se dají zadat ručně podle trojice čísel dle RGB barevného modelu. Nevýhodou je, že se změnou barvy nezmění i popis objektu, obojí se musí upravovat nezávisle na sobě. Ve „Vlastnostech objektu“ se také (de)aktivují příkazy „Skrýt objekt“ (objekt se poté nezobrazuje na nákresně), „Zobrazit objekt jako návrh“ (objekt se na nákresně zobrazí skoro neviditelně) a „Zobrazit stopu objektu“. Stopy se z nákresny smažou pomocí příkazů z nabídky „Úpravy“ → „Smazat stopu“.

Křivky či funkce se mohou zadávat buď explicitně, nebo parametricky. A to výběrem z nabídky „Objekty“ → „Grafy“. Po objevení se odpovídajícího okna je v něm potřeba zadat požadované údaje.

Pokud se objekty v nákresně překrývají a potřebujeme nějaký objekt označit, ukáže se nám okno pro výběr objektu – obrázek 6b). V tomto okně klikneme levým tlačítkem myši na objekt, který potřebujeme vybrat.

Pro zobrazení postupu konstrukce musíme postupně vybrat v nabídce příkazy „Kreslící plocha“ → „Protokol konstrukce“.

Z didaktického hlediska je v GEONExTu nejzajímavější možnost exportu konstrukce do html souboru, tj. do webové stránky. V programu se tento export skrývá pod názvem „Diashow“. Export se provádí s již předem připravenými sériemi bitmapových obrázků, které dokumentují postup konstrukce. „Diashow“ musíme předem dobře promyslet a jednotlivé „snímky“ musíme postupně vytvořit pomocí příkazů z nabídky „Kreslící plocha“ → „Vytvořit screenshot“. Pokaždé, když v konstrukci zobrazíme nový objekt, vytvoříme snímek, aby „Diashow“ byla ucelená. Pro finální vygenerování „Diashow“ vybíráme příkazy z nabídky „Soubor“ → „Exportovat“ → „Diashow“.

3.3. Spuštění animace

Oba výše uvedené programy nám také dovolují vytvořit konstrukci animovanou. Tj. křivka se nám vykresluje při správném nastavení sama, aniž bychom museli nějakým bodem pohybovat pomocí kurzoru myši.

V GeoGebře se animace spustí zaktivněním posuvníku. Tzn. v grafickém okně klikneme na posuvník pravým tlačítkem myši a v otevřené kontextové nabídce zatrhneme (kliknutím levého tlačítka myši) příkaz „Animace zapnuta", čímž animaci spustíme. Stejný výsledek má i spuštění animace ve „Vlastnostech" posuvníku, v záložce „Základní" zaškrtnutím políčka u příkazu „Animace zapnuta". Animace se vypíná analogickým způsobem, jakým se spouští, tj. kliknutím levého tlačítka myši na příkaz „Animace zapnuta" v kontextové nabídce posuvníku nebo ve „Vlastnostech" posuvníku odoznačením políčka u příkazu „Animace zapnuta". Animaci lze též přerušit pomocí stisknutí tlačítka pro přehrání a zastavení animace, které se objeví při jakémkoli zapnutí animace v levém dolním rohu geometrického okna programu.

V GEONExTu musíme pro spuštění animace pohyblivých objektů kliknout levým tlačítkem myši v menu „Objekty" na příkaz „Vlastnosti objektu" a v záložce „Vlastnosti" zaškrtnout políčko „Animovat". Zatímco u GeoGebry se animace spustí, jakmile zaškrtneme políčko „Animace zapnuta", v GEONExTu musíme animaci spustit postupně výběrem příkazů v menu „Objekty" → „Animace" → „Začít animaci". V GEONExTu se animace vypíná opět postupně v menu „Objekty" → „Animace" → „Ukončit animaci" nebo kliknutím na jakoukoli ikonu v panelu nástrojů či panelu zobrazení.

3.4. Konstruování objektů v programech

Popisy konstrukcí křivek v textu práce se nezabývají přesným návodem, jak konstruovat dílčí objekty v programech. V panelu nástrojů programu GeoGebra se zobrazuje nápověda, jak daný objekt vytvořit, případně které další objekty je třeba k tvorbě požadovaného objektu použít, respektive označit. V GEONExTu se nezobrazuje textová nápověda, ale obrázek objektu na ikoně nám značí, co potřebujeme k vytvoření objektu. Potřebné objekty jsou vyznačeny na ikoně objektu modře, červeně je označen vytvářený objekt. Předpokládá se tedy jistá zručnost a zkušenost při práci s programy.

Programy nám také většinou umožňují vytvářet křivky jednodušším způsobem než pomocí pravítka a kružítka. V některých případech nám odpadá vytváření objektů, které by u konstrukcí na papír byli jinak nezbytné. A pokud je to možné, tyto prvky se v konstrukcích této práce vynechávají (konstrukce jsou přehlednější a pro tvorbu křivek v uvedených programech postačující).

3.5. Popis objektů v programech

Při používání názvů objektů nám vznikají jisté problémy. U obou programů je styl pojmenování objektů obdobný, tj. nové objekty jsou pojmenovávány programy automaticky a to vzestupně dle písmen abecedy. Po přejmenování objektu uživatelem na již existující označení se stejné původní označení automaticky přejmenuje. V GeoGebře se k původnímu označení přidá index (např. z bodu B nám vznikne bod B_1). V GEONExTu se k označení objektu přidá hranatá závorka s číslem (např. z bodu B nám vznikne bod $B[1]$).

Rozdíl mezi pojmenováním objektů v programech také vzniká při následovném pojmenovávání. V GeoGebře při vzniklé mezeře v pojmenování (příčinou je přejme-novávání objektů uživatelem) vygeneruje program název právě chybějícího písmene v abecedě a dále pojmenovává program objekty dle původního principu. V GeoGebře nelze objekty přejmenovávat na x a y, protože tyto názvy jsou programem přednastavené pro osy souřadnicové soustavy. Zatímco v GEONExTu se pojmenovává stále vzestupně podle abecedy a žádné výjimky v přiřazování písmen nejsou (můžeme přejmenovávat i na x a y). Jediným rozdílem je, že se kružnice pojmenovávají vždy jako k s indexem (např. k_a), indexy jsou taktéž generovány vzestupně dle abecedy. Občas se stane, že se pojmenování chová nepředvídatelně, příčinou je přejmenovávání objektů (v jiné kreslící ploše se při analogickém postupu nemusí pojmenovávat stejně).

V popisech konstrukcí, které oba programy automaticky vytvářejí, se rovnou zapisují přejmenované objekty. Bohužel ale vzniká problém, když se nám v popisu konstrukce objeví vícekrát stejný název. Směrodatný je pouze jeho poslední výskyt. Předešlé případy jsou jen „Pomocné objekty“ a jsou posléze programem automaticky přejmenovány. Toto nelze nijak ošetřit bez přejmenovávání většiny objektů ihned při jejich vytvoření. Objekty v konstrukcích využívají automatické přejmenovávání, a proto konečné označení objektů v konstrukcích umístěných na přiloženém CD nemusí odpovídat názvům v popisech konstrukcí v práci. U obrázků či animací kinematicky vznikajících křivek (vytvořených v GeoGebře, respektive v GEONExTu), jejichž popisy konstrukcí jsou v daném programu uvedeny v textu práce, odpovídají názvy vytvářených objektů v programu názvům v popisu konstrukce v tomto textu. Následné automatické přejmenování se nebere v potaz.

GeoGebra neumožňuje psát do názvu objektu všechny znaky. Z tohoto důvodu nemůže mít jeden objekt více názvů vyjádřený pomocí rovnítka. V GEONExTu tento problém nevzniká.

Výhodou GeoGebry oproti GEONExTu je možnost pohybovat s popisy objektů. Nelze s nimi sice pohybovat libovolně, ale většinou to pro lepší čitelnost a nepřekrývání stačí. Popisy se mohou pohybovat v rozmezí imaginárního kruhu.

4. Pohyby

Tato kapitola je věnována postupně různým typům pohybů. V každé podkapitole je uveden slovní popis konstrukce vytvoření křivky, která je trajektorií příslušného pohybu. Obrázek křivky vytvořený v GeoGebře je umístěn v textu práce a její kinematický vznik je uložen v souborech programu GeoGebra, případně GEONExT na přiloženém CD.

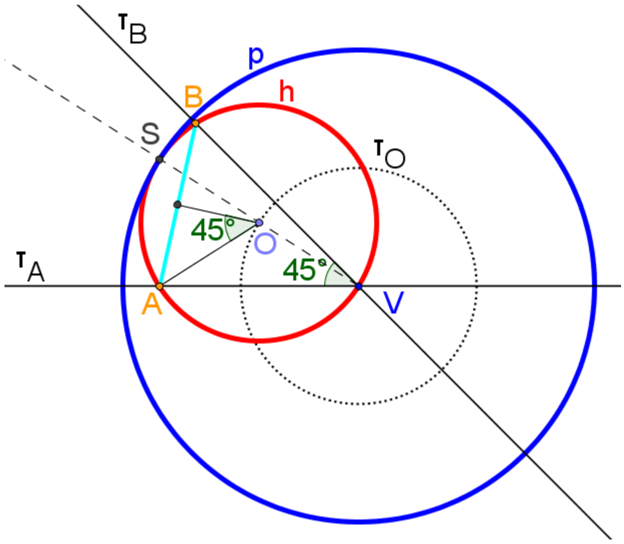
Existuje několik způsobů, jak kinematicky vznikající křivky vytvořit. Hlavním cílem této práce je ukázat, jak se kinematicky vznikající křivky vytvoří konstrukčně za pomoci dynamických nástrojů geometrických programů GeoGebra, případně GEONExT. Kinematicky vznikající křivky lze též popsat různými typy rovnic. U většiny z nich budou v textu jejich rovnice uvedeny. Oba uvedené programy jsou po zadání rovnic a hodnot potřebných parametrů schopny samy křivky nakreslit. Na nákresnách se ale zobrazí celkový vzhled zadaných křivek, nikoliv jejich kinematický vznik. A právě tvorba dynamických konstruktcí kinematicky vznikajících křivek je hlavním přínosem této práce.

Poznámka: V obrázcích je díky možnostem fontů programů užito odlišné značení než v textu práce. Fonty programů se neshodují s fonty v textovém editoru, a tak například $\boldsymbol{\tau}$ v textovém editoru odpovídá ɪ v geometrickém programu.

4.1. Eliptický pohyb

Pohyb NRS Σ, jejíž dva různé body A, B opisují přímé různoběžné trajektorie τ_A, τ_B, nazýváme eliptickým pohybem.

Určíme pevnou polodii p eliptického pohybu (obrázek 7). Nechť trajektorie τ_A, τ_B krajních bodů A, B úsečky AB pohybující se nepromĕnné soustavy Σ svírají úhel ω $(0 < \omega \leq \pi/2)$; jejich průsečík označme V. Okamžitý střed otáčení S a body A, B, V leží zřejmě na kružnici h, jejíž střed O je středem úsečky VS. Její poloměr $r = |AB|/(2\sin\omega)$, a je tedy konstantní. Proto také $|VS|$ je konstantní. Odtud již plyne, že okamžité středy otáčení S vyplňují kružnici $p \equiv (V, 2r)$, která je pevnou polodií eliptického pohybu.



Obrázek 7: Eliptický pohyb - pevná a hybná polodie

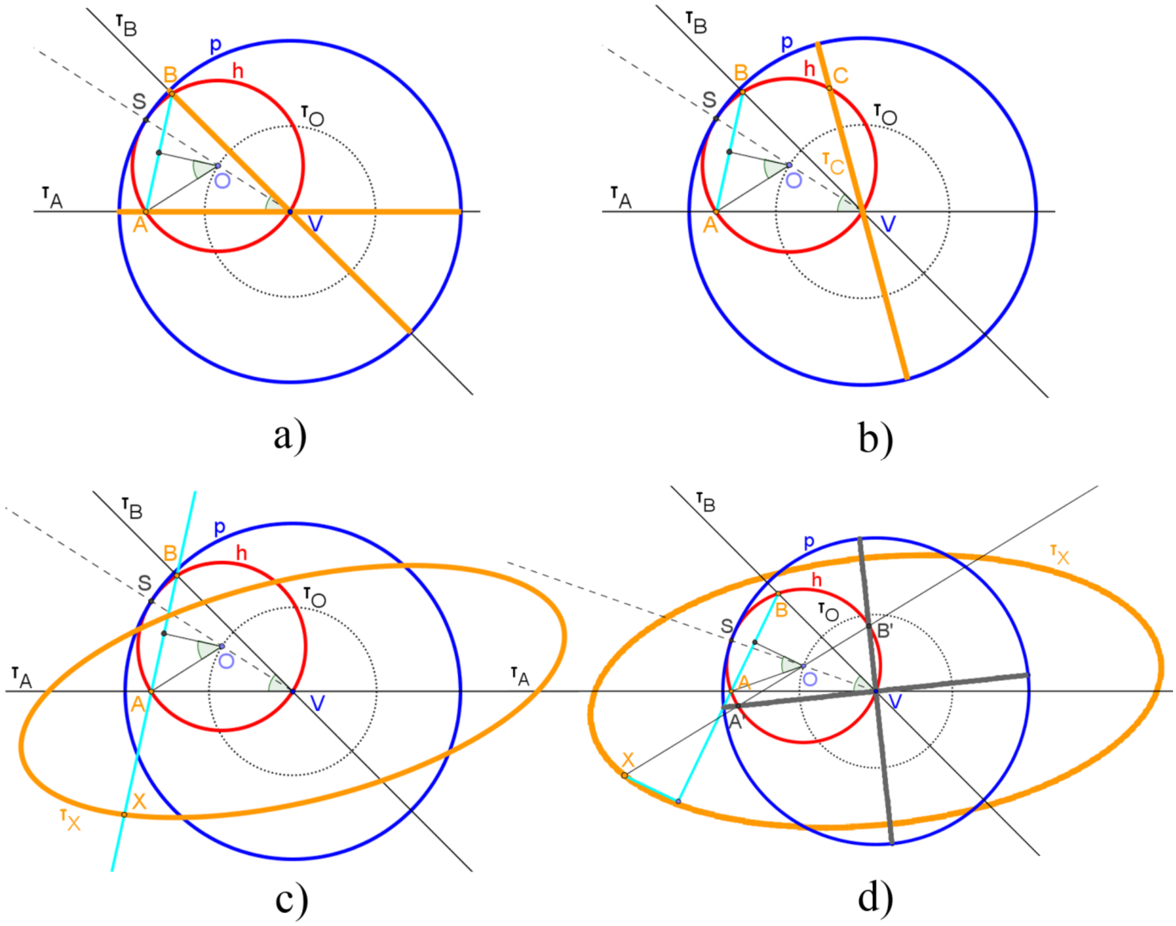
Hybnou polodií eliptického pohybu je kružnice $h \equiv (O, r)$.

Eliptický pohyb vznikne valením vnějšího obvodu kružnice h po vnitřním obvodu kružnice p, jejíž poloměr se rovná dvojnásobku poloměru kružnice h.

Polodie eliptického pohybu se často nazývají *Cardanovy kružnice*.

4.1.1. Trajektorie eliptického pohybu

Každý bod hybné polodie opíše průměr pevné polodie. Tuto vlastnost mají především body A, B - obrázek 8a). Je-li C libovolný další bod polodie h, je oblouk BC kružnice h pevný, a tedy $\sphericalangle BVC$ je konstantní. Trajektorie τ_C je průměrem pevné polodie p - obrázek 8b). Trajektorie τ_O středu O hybné polodie h je kružnice (V, r). Trajektorie τ_X každého jiného bodu X neproměnné rovinné soustavy Σ je elipsa (odtud je odvozen název pohybu) - obrázek 8c), 8d). Přímka OX protíná hybnou polodii h v bodech A', B', které opíší přímé k sobě navzájem kolmé trajektorie $\tau_{A'}, \tau_{B'}$, a tedy bod X opíše elipsu o velikosti poloos $|XA'|, |XB'|$ - rozdílová proužková konstrukce elipsy - obrázek 8d). [4 s. 251-252]



Obrázek 8: Trajektorie eliptického pohybu

4.1.2. Konstrukce elipsy

Popis konstrukce trajektorie eliptického pohybu s tvořícím bodem X libovolně umístěným v NRS Σ. Konstrukce je vytvořena v programu GeoGebra. Sestrojíme:

1) **bod $\boldsymbol{V}$**: bod libovolně umístěný na nákresně
2) dvě různoběžné **přímky $\boldsymbol{\tau_A}$, $\boldsymbol{\tau_B}$**: přímky dané dvěma libovolně umístěnými body na nákresně a společným průsečíkem V (po sestrojení přímek označíme libovolně umístěné body jako „Pomocné objekty“)
3) **kružnici $\boldsymbol{\tau_O}$**: kružnice daná středem V a libovolným poloměrem (např. 2 cm)
4) **úhel $\boldsymbol{\omega}$**: úhel daný pomocnými body z kroku 2) a vrcholem v bodě V (pokud se v GeoGebře zadává úhel dvěma přímkami, zobrazí se pouze jeden vrcholový úhel. Pro naše účely zobrazíme ten, který potřebujeme. V tomto okamžiku pomocné body z kroku 2) zneviditelníme)
5) **bod $\boldsymbol{O}$**: bod libovolně umístěný na kružnici τ_O

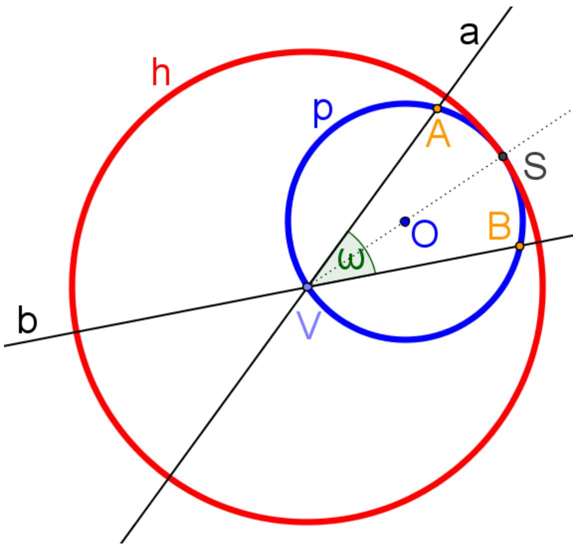
6) **kružnici $\boldsymbol{h}$** (hybnou polodii): kružnice daná středem O a poloměrem stejným jako je poloměr kružnice τ_O
7) **průsečíky $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$**: průsečíky kružnice h a přímky τ_A (uvažovat budeme pouze průsečík A, druhý průsečík C označíme jako „Pomocný objekt“ a vypneme u něj „Zobrazení objektu“)
8) **průsečíky $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}$**: průsečíky kružnice h a přímky τ_B (uvažovat budeme pouze průsečík B, druhý průsečík D označíme jako „Pomocný objekt“ a vypneme u něj „Zobrazení objektu“)
9) **polopřímku $\boldsymbol{a}$**: polopřímka daná body V a O
10) **průsečíky $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{E}$**: průsečíky polopřímky a a kružnice h (uvažovat budeme pouze průsečík S, druhý průsečík E označíme jako „Pomocný objekt“ a vypneme u něj „Zobrazení objektu“)
11) **kružnici $\boldsymbol{p}$** (pevnou polodii): kružnice daná středem V a bodem S
12) **přímku $\boldsymbol{b}$**: přímka daná body A a B
13) **bod $\boldsymbol{F}$**: střed úsečky AB (bodu F vypneme „Zobrazení popisu“)
14) **úsečku $\boldsymbol{c}$**: úsečka spojující body F, O
15) **úsečka $\boldsymbol{d}$**: úsečka spojující body O, A
16) **úhel $\boldsymbol{\alpha}$**: úhel daný body F, O, A (velikost úhlu odpovídá velikosti úhlu ω, v GeoGebře bohužel dva objekty nemohou mít stejný název, proto je úhel označený jako α)
17) **bod $\boldsymbol{G}$**: bod libovolně umístěný na přímce b (v našem případě vně úsečky AB; bodu G vypneme „Zobrazení názvu“)
18) **kolmici $\boldsymbol{e}$**: kolmice k přímce b vedená bodem G
19) **bod $\boldsymbol{X}$**: bod libovolně umístěný na kolmici e (bodu X zapneme „Zobrazení stopy“ a změníme mu barvu na oranžovou)
20) **úsečku $\boldsymbol{f}$**: úsečka spojující body B a G (úsečce $f \equiv BG$ změníme barvu na tyrkysovou pro zvýraznění části ramena, přímku b v tomto okamžiku zneviditelníme)
21) **úsečku $\boldsymbol{g}$**: úsečka spojující body G a X (úsečce $g \equiv GX$ změníme barvu na tyrkysovou pro zvýraznění druhé části ramena, kolmici e zneviditelníme)
22) **polopřímku $\boldsymbol{i}$**: polopřímka daná body X a O
23) **průsečíky $\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B'}$**: průsečíky polopřímky i a kružnice h (bodům A', B' nastavíme „Zobrazení stopy“ – tyto body vytvářejí trajektorie, které jsou částmi hlavní a vedlejší osy elipsy tvořené bodem X)

Pohybem bodu O po kružnici τ_O (tedy pohybem hybné polodie h) nám tvořící bod X zanechává stopu a tím vykresluje elipsu. Umísťováním dalších bodů na nákresnu pevně spojených s přímkou b vytváříme různé elipsy. Různé polohy a možné výsledky trajektorií eliptického pohybu jsou uvedeny v textu výše v podkapitole 4.1.1. Trajektorie eliptického pohybu.

4.2. Kardioidický pohyb

Kardioidický pohyb je vratný pohyb k eliptickému pohybu. Je to tedy pohyb daný pohybem dvou různoběžných přímek a, b neproměnné rovinné soustavy Σ, které stále procházejí dvěma různými pevnými body A, B (obrázek 9).

U kardioidického pohybu ($\sphericalangle ab = \omega$, $V \equiv a \cap b$) leží okamžitý střed otáčení S a body A, B, V na kružnici $p \equiv (O, r)$, bod O je středem úsečky VS. Vzhledem k tomu, že úhel ω je konstantní, pohybuje se bod V, a tedy i bod S po kružnici p, která je pevnou polodií kardioidického pohybu.



Obrázek 9: Kardioidický pohyb - pevná a hybná polodie

Hybnou polodií kardioidického pohybu je kružnice $h \equiv (V, 2\,r)$.

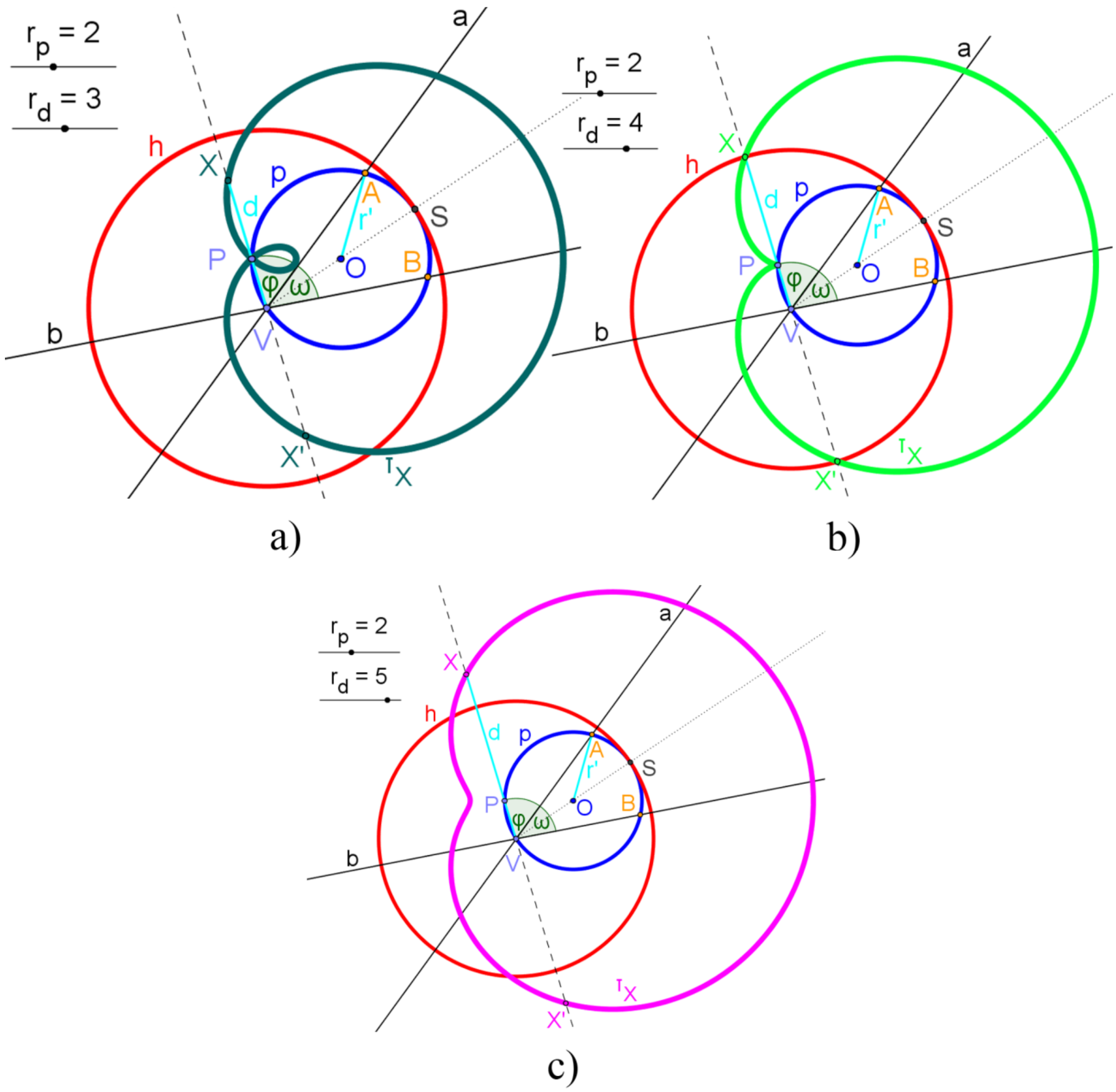
Kardioidický pohyb vznikne valením vnitřního obvodu kružnice h po vnějším obvodu kružnice p, jejíž poloměr se rovná polovině poloměru kružnice h.

4.2.1. Trajektorie kardioidického pohybu

Trajektorie průsečíku $V \equiv a \cap b$ je pevná polodie p. Nechť $X \not\equiv V$ je libovolný bod NRS Σ. Přímka $x \equiv VX$ náleží soustavě Σ a vzdálenost $d = |VX|$ je pevná. Jeden z průsečíků přímky x s pevnou polodií p je bod V, druhý označíme P. Protože úhel $\varphi = \sphericalangle ax$ je konstantní, je bod P při pohybu soustavy Σ pevný.

Křivky vzniklé kardioidickým pohybem se nazývají *Pascalovy závitnice*. Uvažujme r poloměr pevné polodie p a d vzdálenost tvořících bodů X, X' od bodu V pevné polodie p, pak rozlišujeme tři typy Pascalových závitnic. Trajektorie τ_X má pro

1. $d < 2r$ uzlový bod v bodě P a je prodlouženou Pascalovou závitnicí - obrázek 10a);
2. $d = 2r$ bod vratu v bodě P a je prostou Pascalovou závitnicí. V tomto případě má závitnice svůj speciální název – říkáme jí *kardioida* (odtud název pohybu) nebo *srdcovka* - obrázek 10b).
3. $d > 2r$ izolovaný dvojnásobný bod a je zkrácenou Pascalovou závitnicí - obrázek 10c).



Obrázek 10: Pascalovy závitnice

V pravoúhlé souřadnicové soustavě $\{P; x, y\}$, jejíž kladná poloosa x prochází středem O pevné polodie p, má Pascalova závitnice implicitní rovnici

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = d^2(x^2 + y^2).$$

Parametrické rovnice kardioidy jsou tvaru

$$x = r * (2\cos t - \cos 2t),$$

$$y = r * (2\sin t - \sin 2t),$$

kde $r \equiv r_h$ je poloměr hybné polodie h a t je úhel otáčení hybné polodie h. [4 s. 251-253]

4.2.2. Konstrukce Pascalových závitnic

Popis konstrukce závitnic vytvořených v GEONExTu. Sestrojíme:

1) **bod $\boldsymbol{O}$**: bod libovolně umístěný na nákresně
2) **kružnici $\boldsymbol{p}$** (pevnou polodii): kružnice daná středem O a poloměrem $r' = r/2$ (zadáme libovolné konkrétní číslo) – příkaz „Kružnice (zadat poloměr)“
3) **bod $\boldsymbol{A}$**: bod libovolně umístěný na kružnici p
4) **bod $\boldsymbol{B}$**: bod libovolně umístěný na kružnici p (mimo bod A)
5) **bod $\boldsymbol{V}$**: bod libovolně umístěný na kružnici p (mimo body A a B) – bodu nastavíme ve „Vlastnostech objektu“ v kolonce „Vlastnosti“ příkaz „Animovat“
6) **přímku $\boldsymbol{a}$**: přímka procházející body A a V
7) **přímku $\boldsymbol{b}$**: přímka procházející body B a V
8) **úhel $\boldsymbol{\omega}$**: úhel daný body B, V, A
9) **polopřímku $\boldsymbol{c}$**: polopřímka daná body V, O
10) **průsečíky $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{S}$**: průsečíky polopřímky c a pevné polodie p (uvažovat budeme pouze průsečík S, druhému průsečíku D označíme „Skrýt objekt“)
11) **kružnici $\boldsymbol{h}$ (hybnou polodii)**: kružnice daná středem V a bodem S
12) **bod $\boldsymbol{P}$**: bod libovolně umístěný na kružnici p (mimo body A, B, V a S)
13) **přímka $\boldsymbol{x}$**: přímka procházející body V a P
14) **úhel $\boldsymbol{\varphi}$**: úhel daný body A, V, P
15) **průsečíky $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X'}$**: průsečíky kružnice h a přímky x. Tvořícím bodům X, X' zaktivníme „Zobrazit stopu objektu“ a změníme jim barvu na světle zelenou. Trajektorií bodů X, X' je kardioida.
16) **kružnice $\boldsymbol{k_a}$**: kružnice daná středem V a poloměrem d, kde $d < r$ (zadáme konkrétní číslo)

17) **průsečíky $\boldsymbol{X_1, X'_1}$**: průsečíky kružnice k_a a přímky x. Tvořícím bodům X_1, X'_1 zaktivníme „Zobrazit stopu objektu“ a změníme jim barvu na tmavě zelenou. Kružnici k_a nyní zaktivníme ve „Vlastnostech objektu“ příkaz „Skrýt objekt“. Trajektorií bodů X_1, X'_1 je prodloužená Pascalova závitnice.
18) **kružnice $\boldsymbol{k_b}$**: kružnice daná středem V a poloměrem d, kde $d > r$ (zadáme konkrétní číslo)
19) **průsečíky $\boldsymbol{X_2, X'_2}$**: průsečíky kružnice k_b a přímky x. Tvořícím bodům X_2, X'_2 zaktivníme „Zobrazit stopu objektu“ a změníme jim barvu na žlutou. Kružnici k_b nyní ve „Vlastnostech objektu“ zaktivníme příkaz „Skrýt objekt“. Trajektorií bodů X_2, X'_2 je zkrácená Pascalova závitnice.

Pro lepší názornost jsou v konstrukci zvýrazněny poloměr r' pevné polodie p a vzdálenost d tvořícího bodu X (X') od bodu V světle modrými úsečkami. Vykreslování křivek se zaktivní spuštěním animace („Objekty“ → „Animace“ → „Začít animaci“).

Závitnice se dají v GEONExTu vykreslit ještě jedním způsobem, a to pomocí stopy křivky. V nabídce postupně vybereme „Objekty“ → „Grafy“ → „Křivka stopy ???“. Pascalovu závitnici zadáme bodem X a bodem V. Analogický postup provedeme i pro body X', X_1, X'_1, X_2, X'_2 vždy ve spojení s bodem V.

4.3. Konchoidální pohyb

Říkáme, že je dán konchoidální pohyb, jestliže přímka m NRS Σ prochází pevným bodem P a jestliže bod $Q \in m$ opisuje trajektorii τ_Q. Křivka τ_Q se nazývá *řídicí křivka*, bod P *pól konchoidálního pohybu*. Trajektorie pohybu se nazývá *konchoida*, a to *kolmá* (*kosá*), leží-li (neleží-li) tvořící bod M na přímce m. Je-li řídicí křivkou přímka (kružnice), mluvíme o *konchoidě přímky* (*kružnice*).

4.3.1. Přímá konchoida přímky

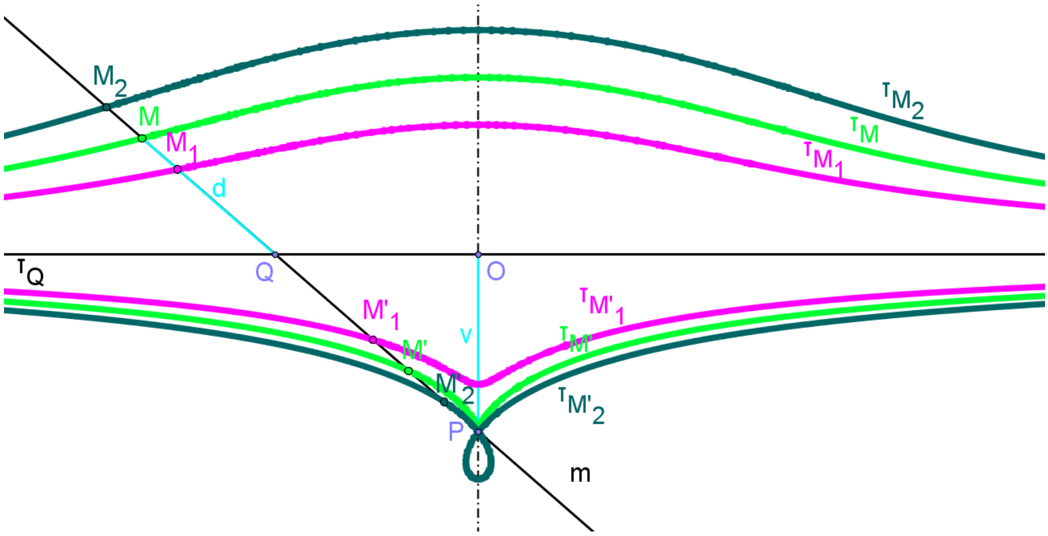
Přímá konchoida přímky bývá někdy nazývána též *Nicomedova konchoida*.

Vzdálenost pólu P od řídicí přímky $q \equiv \tau_Q$ označíme v ($v > 0$). Trajektorie τ_M bodu $M \in m$ ($M \not\equiv Q$) je větev Nicomedovy konchoidy. Úplnou konchoidu dostaneme, když na obě polopřímky vyťaté na pohybující se přímce m bodem Q nanášíme od bodu Q úsečku konstantní velikosti d ($d > 0$). Nicomedova konchoida má dvě větve $\tau_M \tau_{M'}$; řídicí přímka q je její asymptotou. Pól P je dvojnásobným bodem konchoidy, a to uzlovým bodem pro

$v < d$, bodem vratu pro $v = d$ a izolovaným bodem pro $v > d$ (obrázek 11). [4 s. 253-254]

V pravoúhlé souřadnicové soustavě $\{O; x, y\}$, kde $x \equiv q, P \in y$, je implicitní rovnice Nicomedovy konchoidy tvaru

$$x^2y^2 + (y + v)^2(y^2 - d^2) = 0.$$



Obrázek 11: Přímá konchoida přímky (Nicomedova konchoida)

4.3.1.1. Konstrukce Nicomedovy konchoidy

Popis konstrukce Nicomedovy konchoidy vytvořené v GEONExTu. Sestrojíme:

1) **přímku $q = \tau_Q$**: přímka daná dvěma body, libovolně umístěná na nákresně (body zneviditelníme aktivací příkazu „Skrýt objekt“)
2) **bod O**: bod umístěný přibližně do středu nákresny na přímku τ_Q
3) **kolmici b**: kolmice k přímce q vedená bodem O
4) **bod P**: bod umístěný libovolně (pod přímku τ_Q) na kolmici b
5) **bod Q**: bod umístěný libovolně na přímku τ_Q
6) **přímku m**: přímka procházející body P a Q
7) **úsečku v**: úsečka daná body O a P - úsečce změníme barvu na tyrkysovou (pro lepší názornost)
8) **kružnici k_a**: kružnice daná středem Q a poloměrem v
9) **průsečíky M, M'**: průsečíky kružnice k_a a přímky m (kružnici k_a zneviditelníme označením příkazu „Skrýt objekt“). Bodům M, M' nastavíme „Zobrazit stopu objektu“ a změníme jim barvu na světle zelenou. Body M, M' jsou tvořícími body prosté konchoidy.

10) **kružnici $\boldsymbol{k_b}$**: kružnice daná středem Q a poloměrem r_b, kde $r_b < v$ (zadáme konkrétní číslo)

11) **průsečíky $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M'_1}$**: průsečíky kružnice k_b a přímky m (kružnici k_b zneviditelníme označením příkazu „Skrýt objekt“). Bodům M_1, M'_1 nastavíme „Zobrazit stopu objektu“ a změníme jim barvu na růžovou. Body M_1, M'_1 jsou tvořícími body zkrácené konchoidy

12) **kružnici $\boldsymbol{k_c}$**: kružnice daná středem Q a poloměrem r_c, kde $r_c > v$ (zadáme konkrétní číslo)

13) **průsečíky $\boldsymbol{M_2}$, $\boldsymbol{M'_2}$**: průsečíky kružnice k_c a přímky m (kružnici k_c označíme jako neviditelnou aktivací příkazu „Skrýt objekt“). Bodům M_2, M'_2 nastavíme „Zobrazit stopu objektu“ a změníme jim barvu na tmavě zelenou. Body M_2, M'_2 jsou tvořícími body prodloužené konchoidy

14) **úsečku $\boldsymbol{d}$**: úsečka spojující body Q a M (M') - úsečce změníme barvu na tyrkysovou (pro lepší názornost)

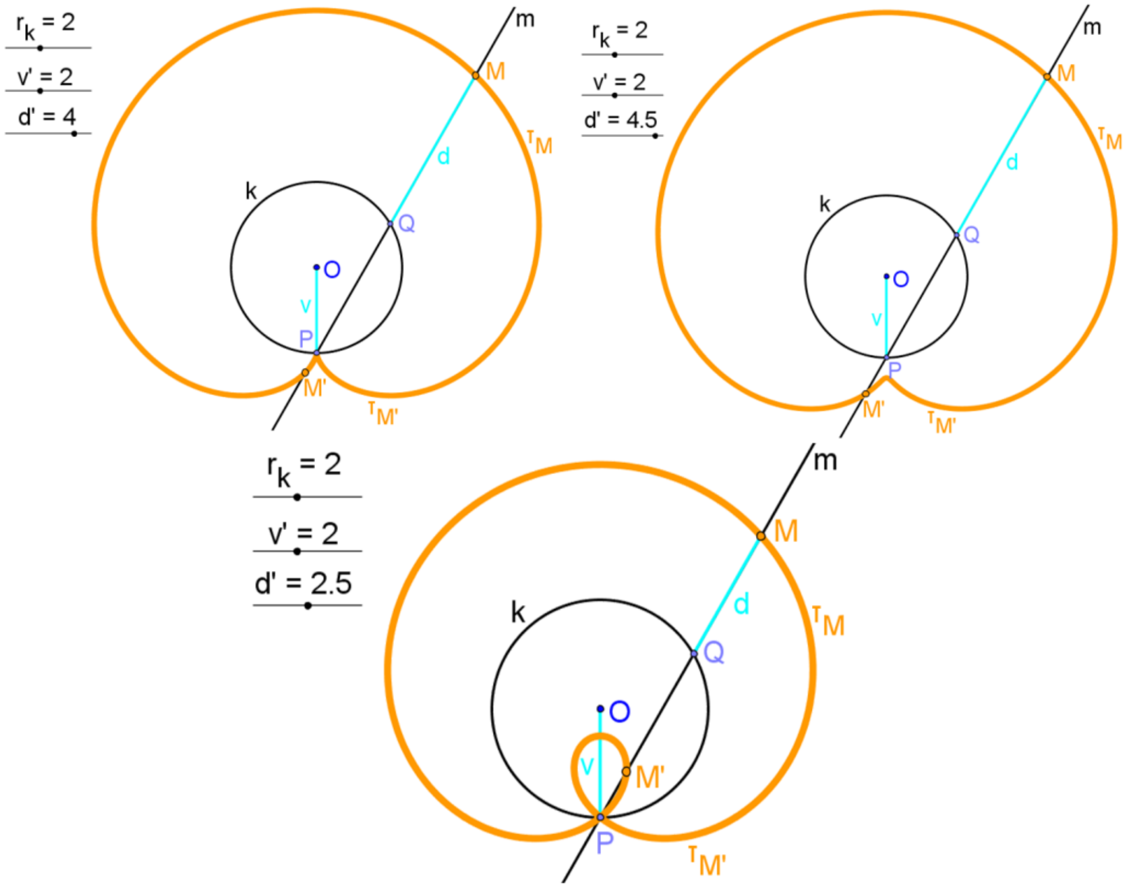
Tvořící body M, M', M_1, M'_1, M_2, M'_2 vykreslují pohybem bodu Q po přímce τ_Q křivky. Vzhled křivek je dán poměrem mezi délkami úseček v a d.

Konchoidy se dají vykreslit ještě jedním způsobem a to pomocí stopy křivky. V nabídce postupně vybereme „Objekty“ → „Grafy“ → „Křivka stopy ???“. Konchoidu zadáme bodem M a bodem Q. Stejným způsobem vytvoříme stopy křivek i u ostatních tvořících bodů M', M_1, M'_1, M_2, M'_2 a to vždy ve spojení s bodem Q.

4.3.2. Přímá konchoida kružnice

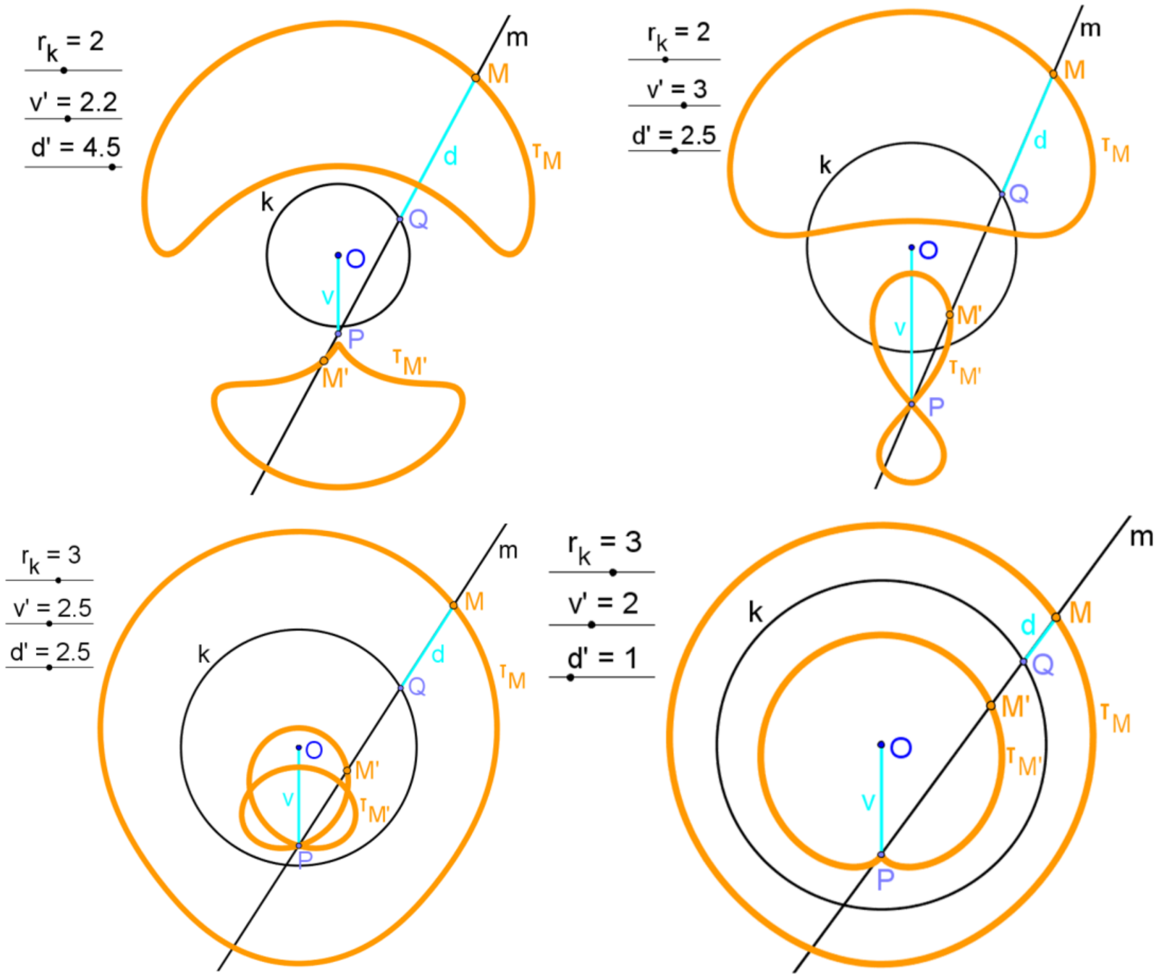
Je dán pevný bod P a řídicí kružnice k (pevná polodie). Vzdálenost pólu P od středu O řídicí kružnice $k \equiv \tau_Q$ označíme v ($v > 0$). Trajektorie $\tau_M, \tau_{M'}$ bodů $M, M' \in m$ ($M \not\equiv Q$) jsou větve přímé konchoidy kružnice. Úplnou konchoidu dostaneme, když na obě polopřímky vyťaté na pohybující se přímce m bodem Q nanášíme od bodu Q úsečku konstantní velikosti d ($d > 0$).

Pro pól P ležící na řídicí kružnici k dostáváme Pascalovu závitnici (obrázek 12). V tomto případě je řídicí kružnice k pevnou polodií.



Obrázek 12: Přímá konchoida kružnice - Pascalovy závitnice

Neleží-li pól P na řídicí kružnici k, bod M $(M \not\equiv Q)$ pohybující se přímky m opíše trajektorii τ_M, která je jednou větví hledané konchoidy. Druhou větev vytvoří bod $M' \in m$, který leží na polopřímce opačné ke QM a pro který $|M'Q| = |MQ|$ (obrázek 13). [4 s. 255]



Obrázek 13: Přímé konchoidy kružnice

4.3.2.1. Konstrukce přímé konchoidy kružnice

Popis konstrukce přímé konchoidy kružnice zkonstruované v GeoGebře. Sestrojíme:

1) **posuvníky $\boldsymbol{r_k, v', d'}$**: posuvník r_k je číslo udávající poloměr řídicí kružnice k. Posuvník v' je číslo, které určuje vzdálenost pólu P od středu O. Posuvník d' je číslo, jenž určuje vzdálenost tvořícího bodu M od bodu Q.
2) **bod $\boldsymbol{O}$**: bod libovolně umístěný na nákresně
3) **kružnici $\boldsymbol{k}$**: kružnice daná středem O a poloměrem r_k (posuvník)
4) **bod $\boldsymbol{Q}$**: bod libovolně umístěný na kružnici k
5) **bod $\boldsymbol{P}$, úsečku $\boldsymbol{v}$**: tyto objekty vzniknou pomocí výběru příkazu v panelu nástrojů – „Úsečka dané délky z bodu“. Pro vytvoření vybereme bod O a délku v' (posuvník). Úsečku umístíme tažením bodu P pomocí kurzoru myši svisle pod bod O.
6) **přímku $\boldsymbol{m}$**: přímka spojující body Q a P
7) **kružnici $\boldsymbol{c}$**: kružnice daná středem Q a poloměrem d' (posuvník)

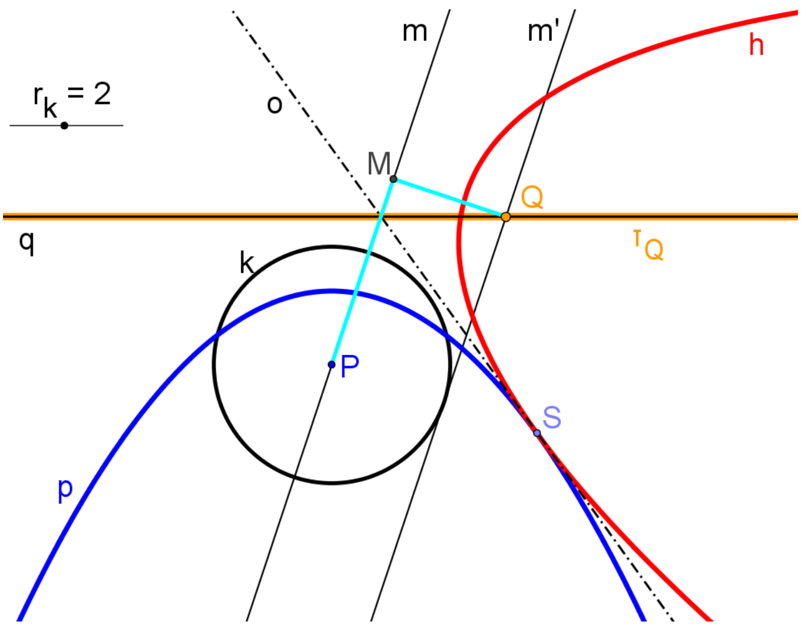
8) **průsečíky M, M'**: průsečíky kružnice c a přímky m (body M, M' jsou tvořícími body přímé konchoidy kružnice, a proto jim změníme barvu na oranžovou a zaktivníme v jejich vlastnostech „Zobrazit stopu“)
9) **úsečku d**: úsečka spojující body Q, M; resp. Q, M'

Tvořící body M, M' vytvářejí trajektorie přímé konchoidy kružnice pohybem bodu Q po řídicí kružnici k. Konchoida kružnice se dá vykreslit ještě jedním způsobem a to pomocí množiny bodů daných vlastností. V panelu nástrojů vybereme příkaz „Množina bodů“. Konchoidu zadáme bodem M, který je součástí množiny, a bodem Q na přímce m. Stejným způsobem vytvoříme množinu bodů i pro bod M' též ve spojení s bodem Q.

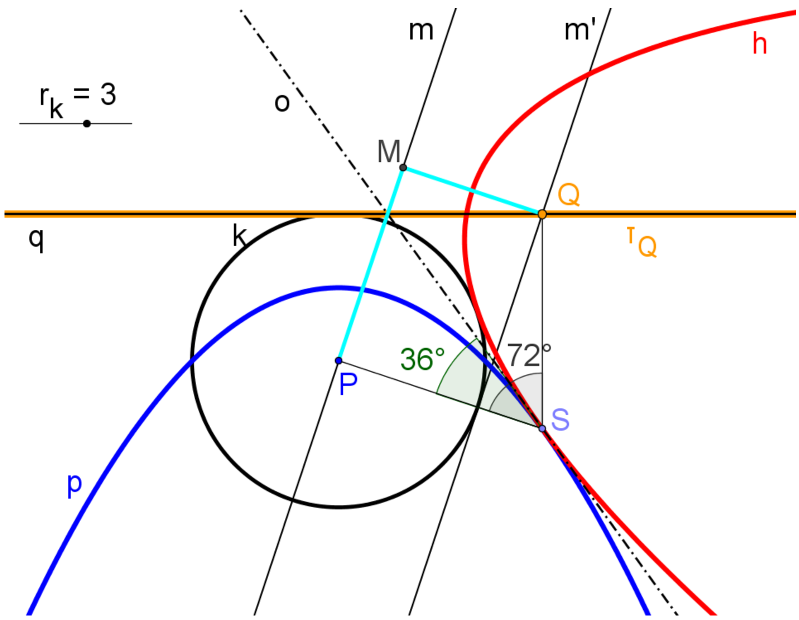
Pro lepší názornost jsou úsečky v a d vyznačeny tyrkysovou barvou.

4.4. Zobecněný konchoidální pohyb

U zobecněného konchiodálního pohybu opisuje bod Q, pevně spojený s pohybující se přímkou m, ale na m neleží, řídicí přímku $q \equiv \tau_Q$ (obrázek 14). Bod Q leží na přímce m', kde $m' \parallel m$. Přímka m' při pohybu obaluje kružnici $k \equiv (m') \equiv (P, |MQ|)$. To znamená, že týž pohyb lze vytvořit pohybem přímky m', která se dotýká pevné kružnice k, přičemž bod $Q \in m'$ opisuje danou trajektorii τ_Q. Ve speciálním případě (obrázek 15), kdy trajektorie τ_Q bodu Q je přímka q, která se dotýká kružnice k, leží střed S na ose o úsečky PQ, a proto $|SP| = |SQ|$. Pevnou polodií je parabola p, pro niž je q řídicí přímkou a P ohniskem. Hybnou polodii najdeme, přejdeme-li k vratnému pohybu. Při něm je trajektorií bodu P přímka m a přímka q obaluje bod Q. Hybnou polodií je proto parabola h, pro niž je m řídicí přímkou a bod Q ohniskem. Daný pohyb lze realizovat valením paraboly h po shodné parabole p. [4 s. 255-256]



Obrázek 14. Zobecněný konchoidální pohyb



Obrázek 15. Zobecněný konchoidální pohyb - speciální případ

4.4.1. Konstrukce trajektorie zobecněného konchoidálního pohybu

Popis konstrukce trajektorie zobecněného konchoidálního pohybu vytvořené v GeoGebře. Sestrojíme:

1) **posuvník $\boldsymbol{r_k}$**: posuvník pro nastavení poloměru kružnice k
2) **bod $\boldsymbol{P}$**: bod libovolně umístěný na nákresnu
3) **kružnici $\boldsymbol{k}$**: kružnice daná středem P a poloměrem r_k (posuvník)

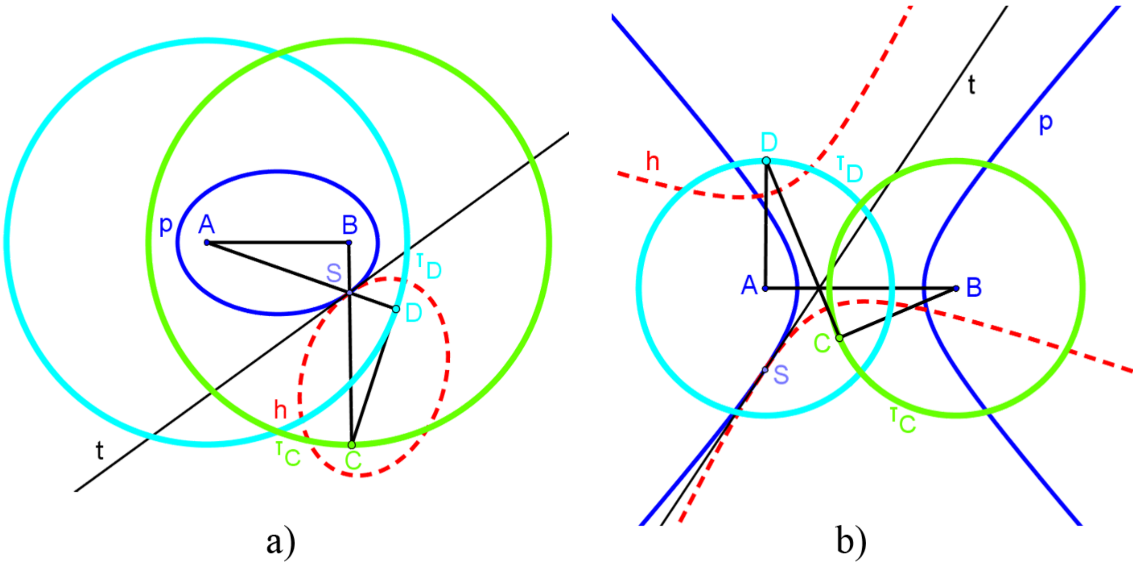
4) **přímku $\boldsymbol{q}$**: přímka umístěná libovolně na nákresnu (nad bod P), daná dvěma body A, B (body A, B označíme jako „Pomocné objekty“ a zneviditelníme je)
5) **parabolu $\boldsymbol{p}$** (pevnou polodii): parabola daná ohniskem P a řídicí přímkou q
6) **bod $\boldsymbol{S}$**: bod libovolně umístěný na parabole p
7) **tečnu $\boldsymbol{o}$**: tečna k parabole p vedená bodem S
8) **parabolu $\boldsymbol{h}$** (hybnou polodii): parabola vytvořená pomocí osové souměrnosti, kde vzorem je parabola p a osou souměrnosti je tečna o
9) **přímku $\boldsymbol{m}$**: přímka vytvořená pomocí osové souměrnosti, kde vzorem je přímka q a osou souměrnosti je tečna o
10) **kolmici $\boldsymbol{a}$**: kolmice k přímce m vedená bodem P
11) **průsečíky $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$**: průsečíky kružnice k a kolmice a (průsečík C označíme jako „Pomocný objekt“ a zneviditelníme jej)
12) **rovnoběžku $\boldsymbol{m'}$**: rovnoběžka s přímkou m vedená průsečíkem D (nyní označíme průsečík D a kolmici a jako „Pomocné objekty“ a zneviditelníme je)
13) **průsečík $\boldsymbol{Q}$**: průsečík rovnoběžky m' a přímky q (tomuto bodu nastavíme „Zobrazení stopy“ a změníme mu barvu na oranžovou) – je to tvořící bod trajektorie zobecněného konchoidálního pohybu
14) **kolmici $\boldsymbol{b}$**: kolmice k přímce m vedená bodem Q
15) **průsečík $\boldsymbol{M}$**: průsečík přímky m a kolmice b (nyní označíme kolmici b jako „Pomocný objekt“ a zneviditelníme ji)

Pohybujeme-li bodem S po pevné polodii p, pak tvořící bod Q vytváří stopu, tj. trajektorii zobecněného konchoidálního pohybu. Pokud má kružnice k takový poloměr, že přímka q je její tečnou, vzniká nám speciální případ popsaný výše. Pro lepší znázornění je rameno spojující body P, M, Q zvýrazněno tyrkysově.

4.5. Pohyb kloubového antiparalelogramu

Nejprve ozřejmíme, co je to kloubový antiparalelogram. Je to speciální *kloubový čtyřúhelník $ABCD$* vyskytující se při pohybu NRS Σ pevně spojené s úsečkou CD, jejíž krajní body C, D se pohybují po kružnicích τ_C, τ_D se středy po řadě v bodech B, A - obrázek 16. Strana AB se nazývá *rám*, strany AD, BC *kliky* (opisují-li body C, D kružnice τ_C, τ_D), popř. *vahadla* (opisují-li body C, D jen oblouky kružnic τ_C, τ_D) a strana CD *ojnice*. Kloubový antiparalelogram je zkřížený kloubový čtyřúhelník, pro který $|AB| = |CD|, |AD| = |BC|$. [4 s. 257]

Pohyb kloubového antiparalelogramu lze převést buď na valení elipsy po shodné elipse - obrázek 16a) *nebo na valení hyperboly po shodné hyperbole* - obrázek 16b).



Obrázek 16. Kloubový antiparalelogram

4.5.1. Konstrukce antiparalelogramu

Popis konstrukce antiparalelogramu vytvořeného v GeoGebře. Sestrojíme:

1) **elipsu** nebo **hyperbolu *p*** (pevnou polodii): v nástrojové liště vybereme příkaz pro vytvoření dané kuželosečky a zkonstruujeme ji dle pokynů pro sestrojení (zobrazujících se napravo od nástrojové lišty). Bod C označíme jako „Pomocný objekt" a odoznačíme u něj „Zobrazit objekt", čímž jej zneviditelníme.
2) **bod *S***: bod umístěný libovolně na kuželosečku
3) **tečnu *t***: tečna ke kuželosečce v bodě S
4) **bod *C***: v nástrojové liště vybereme příkaz pro osovou souměrnost, nejdříve vybereme vzor (bod A), poté osu souměrnosti (tečnu t). Vzniklému obrazu C zaktivníme „Zobrazení stopy" a změníme mu barvu na světle zelenou.
5) **bod *D***: v nástrojové liště vybereme příkaz pro osovou souměrnost, nejdříve vybereme vzor (bod B), poté osu souměrnosti (tečnu t). Vzniklému obrazu D zaktivníme „Zobrazení stopy" a změníme mu barvu na tyrkysovou.
6) **elipsu** nebo **hyperbolu h** (hybnou polodii): v nástrojové liště vybereme ikonu pro sestrojení odpovídající kuželosečky. Tu zadáme pomocí ohnisek C, D a obecného bodu S kuželosečky.
7) **kloubový antiparalelogram**: zkonstruujeme úsečky AB, AD, BC, CD

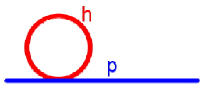
Pohybem bodu S po elipse p či hyperbole p vytvářejí body C a D kružnice τ_C, τ_D.

Kružnice se dají vykreslit ještě jedním způsobem a to pomocí množiny bodů daných vlastností. V panelu nástrojů vybereme příkaz „Množina bodů“ a kružnici zadáme bodem C, který je součástí množiny, a bodem S na přímce t. Stejným způsobem vytvoříme druhou kružnici pro tvořící bod D.

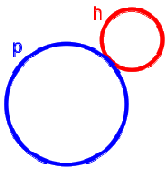
4.6. Cyklické pohyby

Pohyb, při kterém jsou polodiemi buď kružnice, anebo přímky (ale nikoli obě současně přímky), se nazývá *cyklický*. Cyklické pohyby jsou:

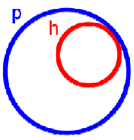
- *cykloidální*



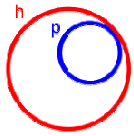
- *epicykloidální*



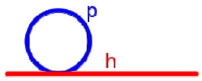
- *hypocykloidální*



- *pericykloidální*



- *evolventní*



Trajektorie vzniklé cyklickými pohyby se nazývají cyklické křivky.

Při konstrukcích cyklických křivek v GeoGebře budeme s výhodou využívat nástroj zvaný „Posuvník“. Posuvník je grafickým vyjádřením libovolného čísla (hodnoty) nebo velikosti úhlu. Umožňuje ovládat hodnotu čísla či úhlu. V následujících podkapitolách jej budeme užívat k nastavování poloměrů polodií a velikostí úhlů otáčení. Díky posuvníkům a jejich animacím již nebudeme muset v konstrukcích hýbat body ručně, ale veškerými objekty bude (dle předem vytvořeného nastavení) pohybovat sám program.

Jednotlivým cyklickým pohybům a jejich trajektoriím se budeme postupně věnovat v následujících podkapitolách této práce.

4.6.1. Cykloidální pohyb

Vzniká valením kružnice h po přímce p (obrázek 17); trajektoriím říkáme **cykloidy**. Trajektorií τ_O středu O hybné polodie h je přímka; trajektorie τ_A vnitřního bodu $A \not\equiv O$

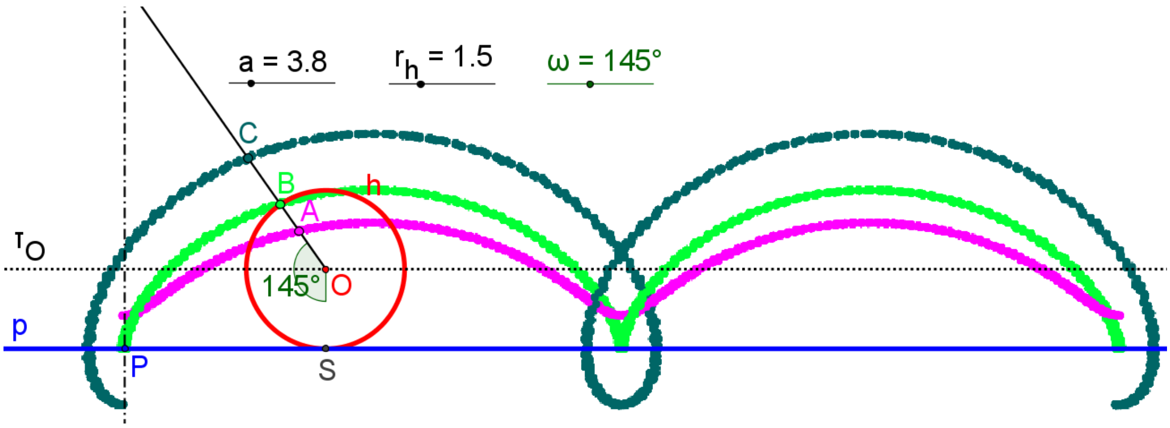
hybné polodie h se nazývá **zkrácená cykloida**, trajektorie τ_B bodu $B \in h$ **prostá cykloida** a trajektorie τ_C vnějšího bodu C hybné polodie h **prodloužená cykloida**. Cykloidy (s výjimkou τ_O) jsou transcendentní křivky.

Parametrické rovnice cykloidy jsou v pravoúhlé souřadnicové soustavě $\{P; x, y\}$

$$x = r\omega - v \sin \omega,$$

$$y = r - v \cos \omega,$$

kde r je poloměr hybné polodie, v je vzdálenost tvořícího bodu cykloidy od středu hybné polodie. Parametr ω je úhel otočení hybné polodie. [4 s. 258]

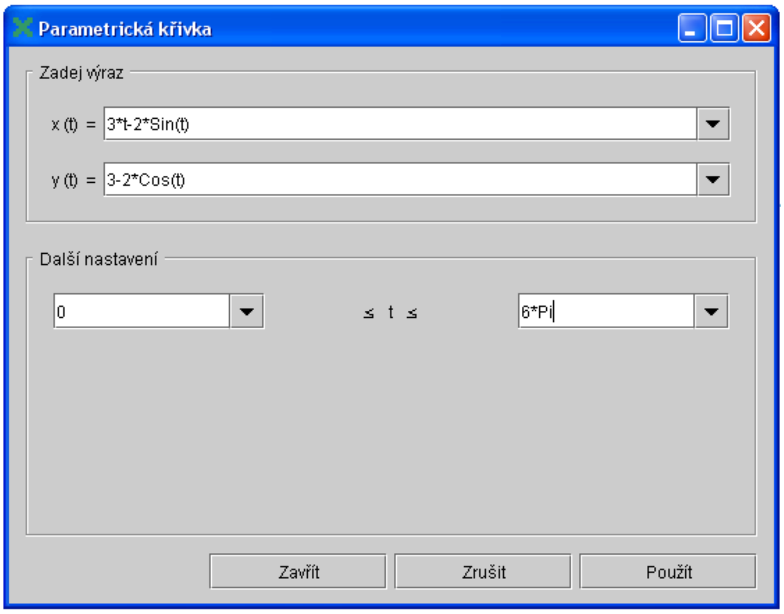


Obrázek 17. Prostá, zkrácená a prodloužená cykloida

4.6.1.1. Konstrukce cykloidy

V GEONExTu se cykloida zadá rovnicemi přes příkazy v nabídce „Objekty“ → „Grafy“ → „Parametrická křivka“. Do okna pro vytvoření parametrické křivky zadáme cykloidu parametrickými rovnicemi $x(t) = r * t - v * Sin(t)$, $y(t) = r - v * Cos(t)$.

Za r a v musíme zadat konkrétní číselné hodnoty, $t \in R$ je přednastavený parametr, jehož rozsah určujeme v témže okně, kde zadáváme rovnice (obrázek 18).



Obrázek 18. Okno pro vytvoření křivky zadané parametricky v GEONExTu

V GeoGebře se rovnice křivky zadá do příkazového řádku (viz. obrázek 19). Napravo od příkazového řádku vybereme v seznamu příkaz pro zadání křivky – „Krivka“. Do příkazového řádku už jen doplníme x-ové a y-ové proměnné závislé na daném parametru, parametr, interval pro hodnotu parametru (vše oddělené čárkami) – např.:

Krivka[2 t - 4sin(t), 2 - 4 cos(t), t, 0, 4π]

Obrázek 19. Příkazový řádek v GeoGebře

Obdobným způsobem by se zadávali parametrické rovnice i u ostatních cyklických pohybů.

Popis konstrukce cykloidy vytvořené v GeoGebře. Sestrojíme:

1) **posuvníky $\boldsymbol{a, r_h, \omega}$** : Posuvník s pojmenováním a určuje číselnou hodnotu intervalu, ve kterém se bude cykloida pohybovat (0-…, do kolonky opakovat musíme nastavit „Rostoucí“ – bez tohoto nastavení by se cykloida odvalovala po přímce p tam a zpět a vytvářela by jinou křivku, než potřebujeme). Posuvník r_h určuje číselnou hodnotu poloměru hybné polodie (rozsah 0-…). Posuvník ω mění hodnotu úhlu, o který se bude otáčet tvořící bod po hybné polodii (úhel ω nastavíme v rozsahu 0°-360 °).
2) **bod $\boldsymbol{P}$**: bod libovolně umístěný na nákresně při levém okraji (bod P zvolíme za počátek souřadnicové soustavy)

3) **bod A_1** (poslední označení bodu – původně bod značen jako A): bod umístěný vodorovně s bodem P
4) **přímku p** (pevnou polodii): přímka daná dvěma body P a A_1. Bod A_1 označíme následně ve „Vlastnostech“ jako „Pomocný objekt“.
5) **kolmici b**: kolmice k přímce p procházející bodem P
6) **kružnici c**: kružnice daná středem P a poloměrem r_h (posuvník)
7) **průsečíky B a C_1** (poslední označení bodu – původně bod značen jako C): průsečík kružnice c a kolmice b (uvažovat budeme pouze průsečík C_1 v polorovině „nad přímkou“ p, druhý průsečík B označíme jako „Pomocný objekt“ a vypneme u něj „Zobrazení objektu“; stejným způsobem jako bod B nastavíme i kružnici c)
8) **kolmici τ_0**: kolmice ke kolmici b procházející průsečíkem C_1
9) **kružnici d**: kružnice daná středem C_1 a poloměrem a (posuvník) – nyní bod C_1 zneviditelníme a nastavíme jej jako „Pomocný objekt“
10) **průsečíky O a E**: průsečíky kružnice d a kolmice τ_0 (průsečík E nebudeme dále uvažovat, označíme jej jako „Pomocný objekt“ a vypneme u něj „Zobrazení objektu“; stejným způsobem nastavíme i kružnici d)
11) **kružnici h** (hybnou polodii): danou středem O a poloměrem r_h (posuvník)
12) **průsečík S**: průsečík kružnice h a přímky p
13) **bod B**: bod vzniklý otočením bodu S o úhel ω (posuvník) ve směru hodinových ručiček okolo středu O (tento bod je tvořící bod prosté cykloidy, a proto mu změníme barvu na světle zelenou)
14) **úhel α**: úhel daný body B, O, S (zobrazíme jeho velikost; bohužel v GeoGebře nemohou být dva objekty označeny stejným názvem, proto zobrazení velikosti úhlu ω je nazváno α)
15) **polopřímku e**: polopřímka daná body S a B
16) **bod A**: bod umístěný na polopřímce e uvnitř kružnice h (tento bod je tvořící bod zkrácené cykloidy, a proto mu změníme barvu na růžovou)
17) **bod C**: bod umístěný na polopřímce e vně kružnice h (tento bod je tvořící bod prodloužené cykloidy, a proto mu změníme barvu na tmavě zelenou)

Nyní už jen spustíme animaci u úhlu ω a hodnoty a. Při zapnutí animace se objeví v levém dolním rohu tlačítko pro zastavení a následné přehrání animace. Po objevení tlačítka animaci zastavíme a nastavíme další vlastnosti. Posuvníky a a ω nastavíme na 0. Bodům A, B, C zaškrtneme „Zobrazení stopy“. Dalším problémem je správné nastavení –

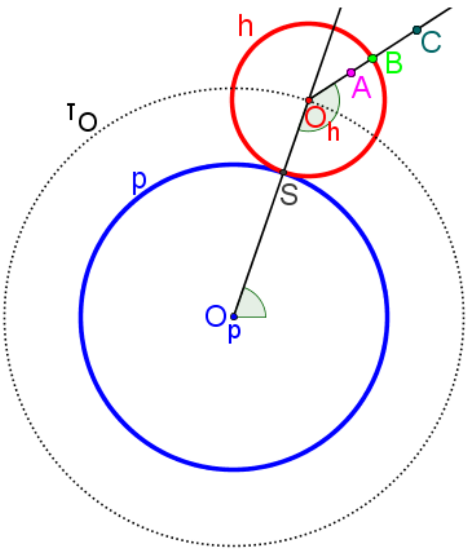
maximum u posuvníku a musíme zadat jako násobek obvodu kružnice h. Podle toho jaký je násobek, musí se nastavit na hodnotu tohoto násobku rychlost u úhlu ω (např. $r_h = 1{,}5$, chceme 3 otočky; do max. posuvníku a zapíšeme $2 * Pi * 1.5 * 3$ – program si součin sám spočítá na hodnotu 27.274. U posuvníku úhlu ω nastavíme rychlost na 3). Když máme vše nastavené, můžeme animaci přehrát.

4.6.1.2. Využití cykloidy v praxi

Izochronosti cykloidy si všiml a využil ji v 17. století Christian Huygens při konstrukci přesných hodin potřebných k tehdejšímu rozvoji mořeplavby. Potřeboval vytvořit takové kyvadlové hodiny, jejichž perioda by nezávisela na velikosti výkyvu. Zjistil, že kulička na niti musí při pohybu vykreslovat cykloidu. Aby získal požadovanou trajektorii, tj. změnu délky vlákna během pohybu, přidal horní zarážky, které mají též tvar cykloidy. [9 s. 44]

4.6.2. Epicykloidální pohyb

Vytvoříme jej valením vnějšího obvodu kružnice h po vnějším obvodu kružnice p (obrázek 20); trajektorie se nazývají **epicykloidy**. Trajektorií středu O_h hybné polodie h je kružnice τ_0 soustředná s pevnou polodií p (dále ji nebudeme uvažovat). Trajektorie každého jiného vnitřního bodu A hybné polodie h se nazývá **zkrácená epicykloida**, trajektorie bodu B hybné polodie h **prostá epicykloida** a trajektorie vnějšího bodu C hybné polodie h **prodloužená epicykloida**. V případě, že $r_p = r_h$, pak jsou epicykloidy tzv. *Pascalovy závitnice* – obrázek 21a). V případě, že $r_p = 2r_h$, je prostá epicykloida nazývána *nefroida* – obrázek 21b). Další dva možné příklady epicykloidy jsou na obrázcích 21c), 21d).



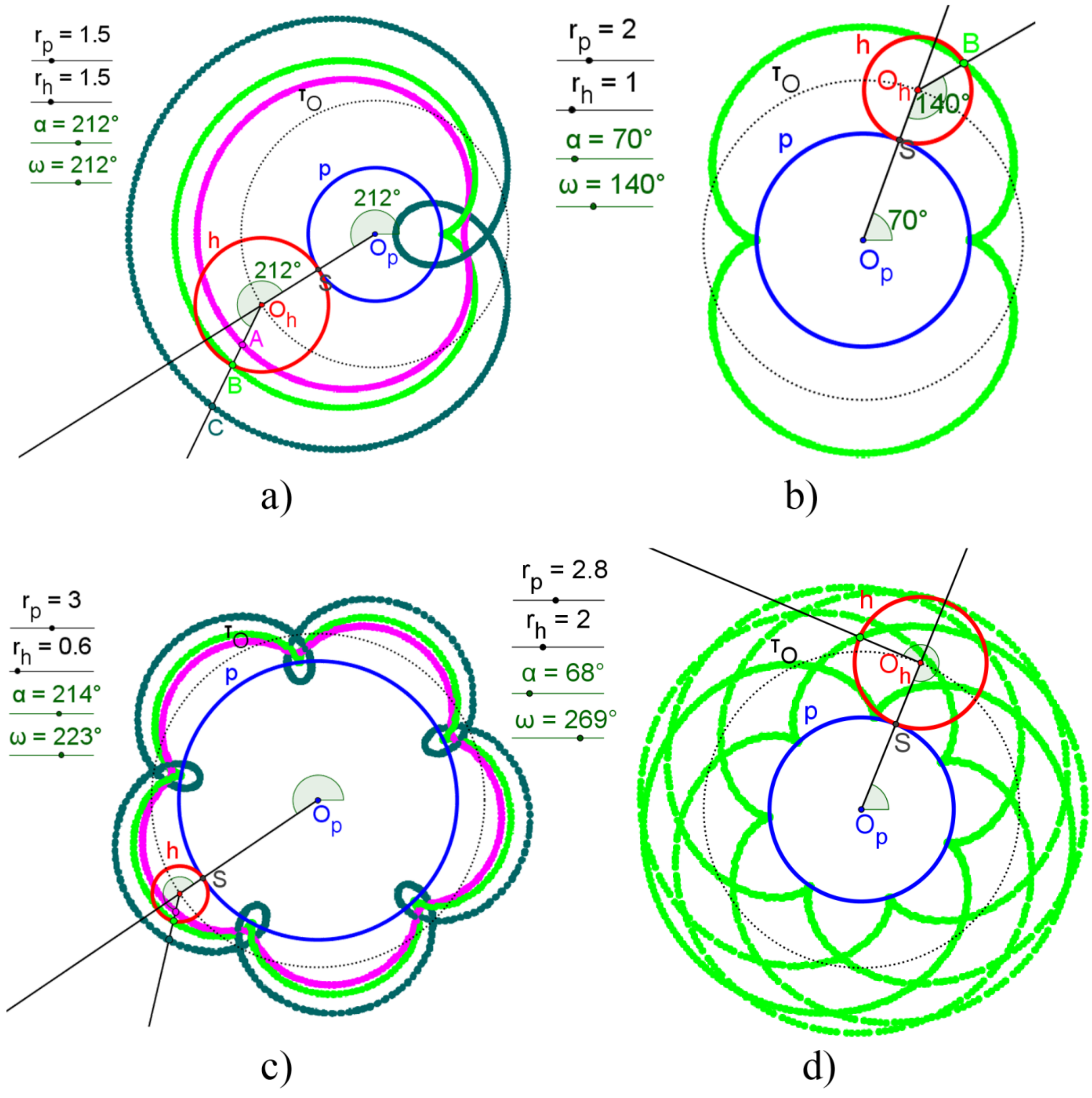
Obrázek 20: Epicykloidální pohyb - pevná a hybná polodie

V pravoúhlé souřadnicové soustavě $\{O_p; x, y\}$ má epicykloida parametrické rovnice

$$x = (r_p + r_h)\cos\omega - v\cos\frac{r_p + r_h}{r_h}\omega,$$

$$y = (r_p + r_h)\sin\omega - v\sin\frac{r_p + r_h}{r_h}\omega,$$

kde v je vzdálenost tvořícího bodu epicykloidy od středu O_h hybné polodie h. [4 s. 258-259]



Obrázek 21: Epicykloidy

4.6.2.1. Konstrukce epicykloidy

Popis konstrukce epicykloidy vytvořené v GeoGebře. Sestrojíme:

1) **posuvníky $\boldsymbol{r_p, r_h, \alpha, \omega}$**: První posuvník r_p je číslo, které nám určí poloměr pevné polodie (0-…). Druhý posuvník r_h je číslo určující poloměr hybné polodie (rozsah

0-…). Třetí posuvník α je úhel, který nám bude otáčet hybnou polodií po pevné polodii (rozsah 0°-360°). Čtvrtý posuvník ω je úhel, který nám bude otáčet tvořícím bodem po hybné polodii (rozsah 0°-360 °).

2) **bod $\boldsymbol{O_p}$**: bod libovolně umístěný na nákresně
3) **kružnici $\boldsymbol{p}$** (pevnou polodii): kružnice daná středem O_p a poloměrem r_p (posuvník)
4) **bod $\boldsymbol{A_1}$** (poslední označení bodu – původně bod značen jako A): bod umístěný na kružnici p (tento bod je počátek otáčení hybné polodie po pevné polodii)
5) **bod $\boldsymbol{S}$**: bod zkonstruovaný otočením bodu A_1 o úhel α (posuvník) proti směru hodin okolo středu O_p
6) **úhel $\boldsymbol{\beta}$**: úhel daný body A_1, O_p, S - zobrazíme pomocí něj velikost úhlu α (Bohužel v GeoGebře nemohou být dva objekty označeny stejným názvem, proto zobrazení velikosti úhlu α je nazváno β. Bod A_1 označíme jako „Pomocný objekt“ a zneviditelníme jej aktivací příkazu „Zobrazit objekt“.)
7) **polopřímku $\boldsymbol{a}$**: polopřímka daná body O_p, S
8) **kružnici $\boldsymbol{c}$**: kružnice daná středem S a poloměrem r_h (posuvník)
9) **průsečíky $\boldsymbol{O_h}$ a $\boldsymbol{B_1}$** (poslední označení bodu – původně bod značen jako B): průsečíky kružnice c a polopřímky a (průsečík B_1 nebudeme dále uvažovat a tak jej označíme jako „Pomocný objekt“ a vypneme u něj „Zobrazení objektu“; stejným způsobem nastavíme i kružnici c)
10) **kružnici $\boldsymbol{h}$** (hybnou polodii): kružnice daná středem O_h a poloměrem r_h (posuvník)
11) **bod $\boldsymbol{B}$**: bod vzniklý otočením bodu S o úhel ω (posuvník) proti směru hodin okolo středu O_h (tento bod je tvořící bod prosté epicykloidy, a proto mu změníme barvu na světle zelenou)
12) **úhel $\boldsymbol{\gamma}$**: úhel daný body S, O_h, B (zobrazuje velikost úhlu ω; bohužel v GeoGebře nemohou být dva objekty označeny stejným názvem, proto zobrazení velikosti úhlu ω je nazváno γ)
13) **polopřímku $\boldsymbol{b}$**: polopřímka daná body O_h, B
14) **bod $\boldsymbol{A}$**: bod umístěný na polopřímce b uvnitř kružnice h (tento bod je tvořící bod zkrácené epicykloidy, a proto mu změníme barvu na růžovou)
15) **bod $\boldsymbol{C}$**: bod umístěný na polopřímce b vně kružnice h (tento bod je tvořící bod prodloužené epicykloidy, a proto mu změníme barvu na tmavě zelenou)

Nyní už jen spustíme animaci u úhlů α a ω. Po přerušení animace nastavíme další vlastnosti. Posuvníky α a ω nastavíme na 0. Bodům A, B, C zaškrtneme „Zobrazení stopy“.

Dalším problémem je správné nastavení – poměr $r_p : r_h$ musí odpovídat rychlosti u úhlu ω. Když máme vše správně nastavené, můžeme přehrát animaci.

Na přiloženém CD je uložena konstrukce prosté epicykloidy vytvořená v GEONExTu.

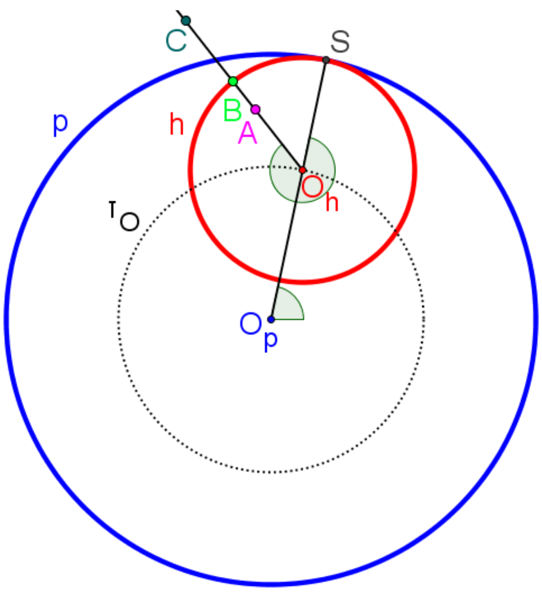
4.6.2.2. Epicykloidální pohyb v praxi

Epicykloidu vytváří vystřelená kulka, která kmitá kolem neustále se měnící příčné osy (tzv. nutace).

4.6.3. Hypocykloidální pohyb

Hypocykloidální pohyb vzniká valením kružnice h jejím vnějším obvodem po vnitřním obvodu kružnice p; trajektorie se nazývají **hypocykloidy**. Trajektorií středu O_h hybné polodie h je kružnice τ_O, soustředná s pevnou polodií p (dále ji vyloučíme). Trajektorie bodů A té oblasti určené v Σ hybnou polodií h, která obsahuje bod O_p, se nazývají **zkrácené hypocykloidy**, trajektorie bodů B ležících na polodii h se nazývají **prosté hypocykloidy** a trajektorie ostatních bodů C **prodloužené hypocykloidy** (obrázek 22).

Speciálním případem je situace, kdy $r_p = 2r_h$, čímž vznikne eliptický pohyb (zkrácené a prodloužené hypocykloidy jsou elipsy, prostá hypocykloida tvoří úsečku) – obrázek 23a). Pro $r_p = 3r_h$ tvoří prostá hypocykloida křivku zvanou *Steinerova hypocykloida* - obrázek 23b) a pro $r_p = 4r_h$ je trajektorií *asteroida* – obrázek23c). Další příklad trajektorií hypocykloidálního pohybu je vidět na obrázku 23d).



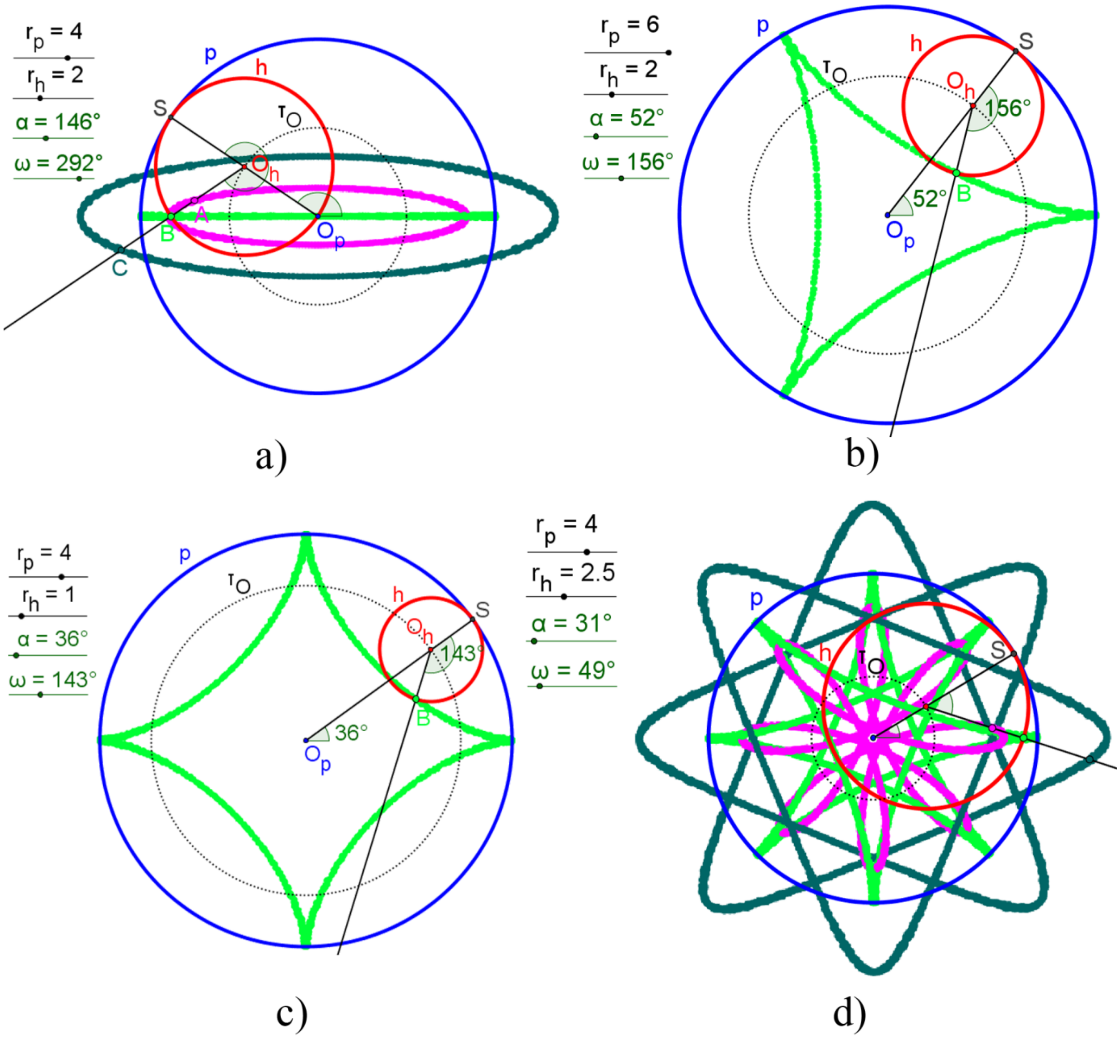
Obrázek 22: Hypocykloidální pohyb - pevná a hybná polodie

V pravoúhlé souřadnicové soustavě $\{O_p; x, y\}$ má hypocykloida parametrické rovnice

$$x = (r_p - r_h)\cos\omega + v\cos\frac{r_p - r_h}{r_h}\omega,$$

$$y = (r_p - r_h)\sin\omega + v\sin\frac{r_p - r_h}{r_h}\omega,$$

kde v je vzdálenost tvořícího bodu od středu O_h hybné polodie h a ω je velikost úhlu otočení. [4 s. 259-260]



Obrázek 23: Hypocykloidy

4.6.3.1. Konstrukce hypocykloidy

Popis konstrukce hypocykloidy vytvořené v GeoGebře. Sestrojíme:

1) **posuvníky r_p, r_h, α, ω**: První posuvník r_p je číslo, které nám určí poloměr pevné polodie (0-…). Druhý posuvník r_h je číslo určující poloměr hybné polodie (rozsah 0-…). Třetí posuvník α je úhel, který nám bude otáčet hybnou polodií po pevné

polodii (rozsah 0°-360°). Čtvrtý posuvník ω je úhel, který nám bude otáčet tvořícím bodem po hybné polodii (rozsah 0°-360°).

2) **bod $\boldsymbol{O_p}$**: bod libovolně umístěný na nákresně
3) **kružnici $\boldsymbol{p}$** (pevnou polodii): kružnice daná středem O_p a poloměrem r_p (posuvník)
4) **bod $\boldsymbol{A_1}$** (poslední označení bodu – původně bod značen jako A): bod umístěný na kružnici p (tento bod je počátek otáčení hybné polodie po pevné polodii)
5) **bod $\boldsymbol{S}$**: bod zkonstruovaný otočením bodu A_1 o úhel α (posuvník) proti směru hodin kolem středu O_p
6) **úsečku $\boldsymbol{a}$**: úsečka spojující body O_p, S
7) **úhel $\boldsymbol{\beta}$**: úhel daný body A_1, O_p, S - pomocí něj zobrazíme velikost úhlu α. (V GeoGebře bohužel nemohou být dva objekty označeny stejným názvem, proto zobrazení velikosti úhlu α je nazváno β. Bod A_1 označíme jako „Pomocný objekt“ a zneviditelníme jej aktivací příkazu „Zobrazit objekt“.)
8) **kružnici $\boldsymbol{c}$**: kružnice daná středem S a poloměrem r_h (posuvník)
9) **průsečík $\boldsymbol{O_h}$**: průsečík kružnice c a úsečky a (kružnici c označíme jako „Pomocný objekt“ a vypneme u ní příkaz „Zobrazení objektu“, čímž ji zneviditelníme, a tak v konstrukci nebude zobrazena)
10) **kružnici $\boldsymbol{h}$** (hybnou polodii): kružnice daná středem O_h a poloměrem r_h (posuvník)
11) **bod $\boldsymbol{B}$**: bod vytvořený otočením bodu S o úhel ω (posuvník) ve směru hodin kolem středu O_h (bod B je tvořící bod prosté hypocykloidy, a proto mu změníme barvu na světle zelenou)
12) **úhel $\boldsymbol{\gamma}$**: úhel daný body S, O_h, B (pomocí něj zobrazíme velikost úhlu ω; v GeoGebře bohužel nemohou být dva objekty označeny stejným názvem, proto zobrazení velikosti úhlu ω je nazváno γ)
13) **polopřímku $\boldsymbol{b}$**: polopřímka daná body O_h, B
14) **bod $\boldsymbol{A}$**: bod umístěný na polopřímce b uvnitř kružnice h (tento bod je tvořící bod zkrácené hypocykloidy, a proto mu změníme barvu na růžovou)
15) **bod $\boldsymbol{C}$**: bod je umístěn na polopřímce b vně kružnice h (tento bod je tvořící bod prodloužené hypocykloidy, a proto mu změníme barvu na tmavě zelenou)

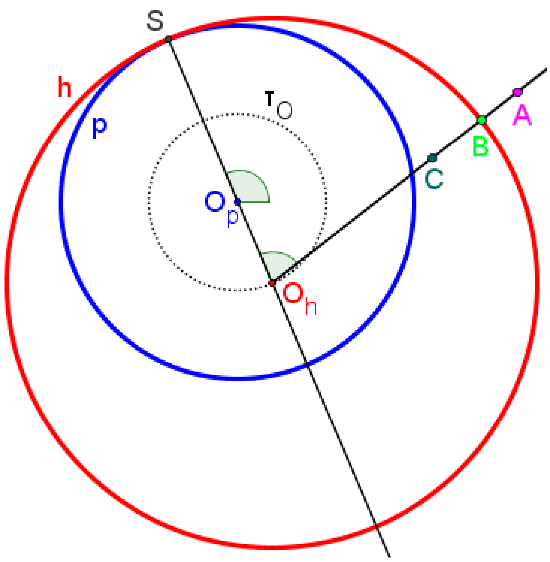
Nyní už spustíme animaci úhlů α a ω. Při pozastavení animace určíme další vlastnosti animačních objektů. Posuvníky a a ω nastavíme na 0. Bodům A, B, C zaškrtneme příkaz

„Zobrazení stopy“. Dalším problémem je správné nastavení poměru $r_h : r_p$, ten musí odpovídat rychlosti u úhlu ω. Je-li vše správně nastavené, můžeme animaci přehrát.

Na přiloženém CD je uložena konstrukce prosté hypocykloidy vytvořená v programu GEONExT.

4.6.4. Pericykloidální pohyb

Vznikne valením vnitřního obvodu kružnice h po vnějším obvodu kružnice p (obrázek 24). Trajektorie se nazývají **pericykloidy**. Ukázky pericykloid naleznete na obrázku 25.

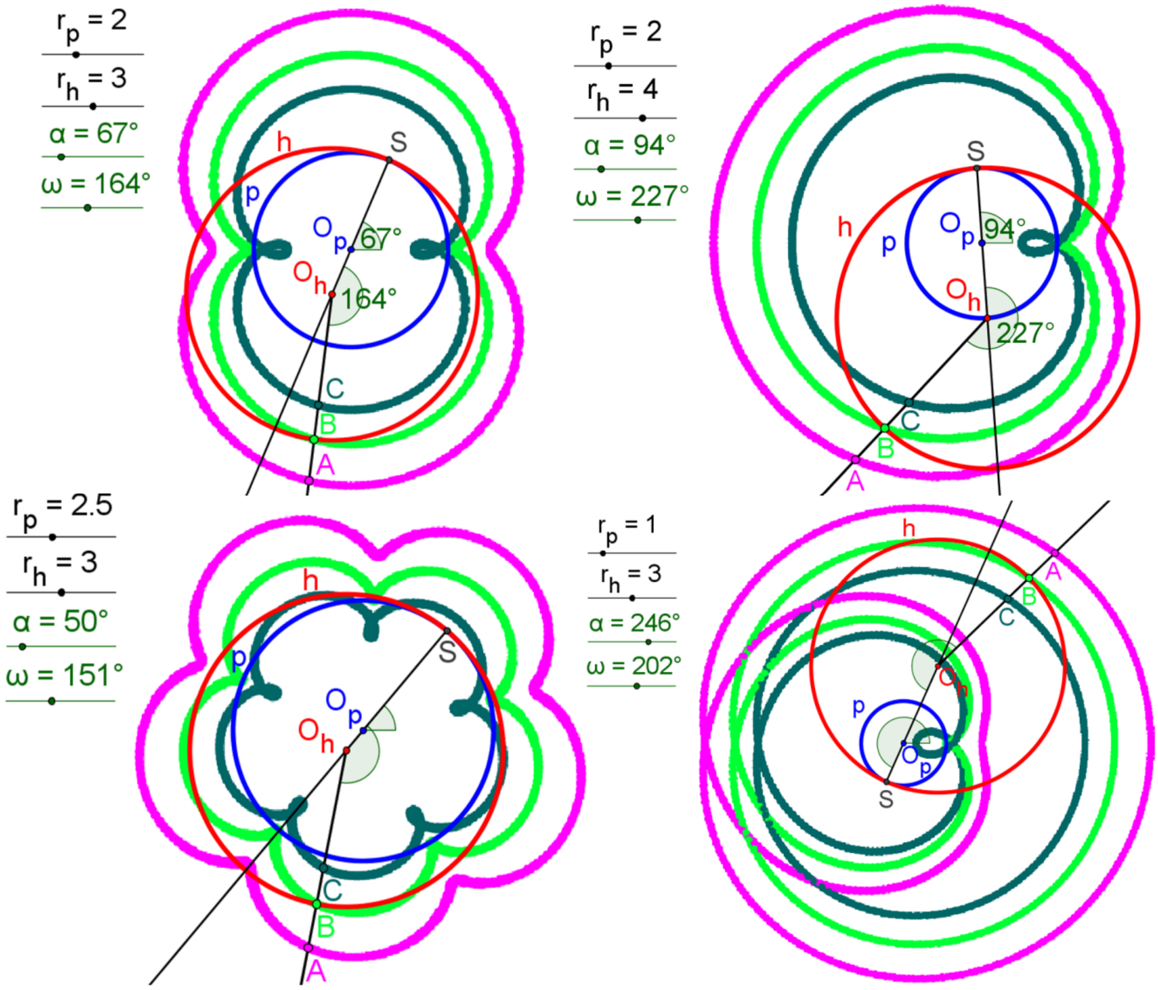


Obrázek 24: Pericykloidální pohyb - pevná a hybná polodie

Pericykloidy není třeba zvlášť vyšetřovat, neboť platí věta:

Věta:

Každá epicykloida je pericykloidou a obráceně.



Obrázek 25: Pericykloidy

4.6.4.1. Konstrukce pericykloidy

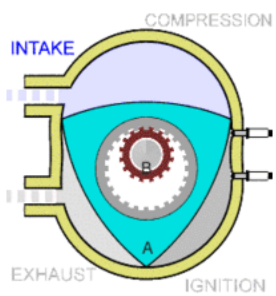
Popis konstrukce pericykloidy vytvořené v GeoGebře. Sestrojíme:

1) **posuvníky $\boldsymbol{r_p, r_h, \alpha, \omega}$**: První posuvník r_p je číslo, které nám určí poloměr pevné polodie (0-…). Druhý posuvník r_h je číslo, které určuje poloměr hybné polodie (rozsah 0-…). Třetí posuvník α je úhel, který bude otáčet hybnou polodií po pevné polodii (rozsah 0°-360°). Čtvrtý posuvník ω je úhel, který bude otáčet tvořící bod po hybné polodii (rozsah 0°-360 °).
2) **bod $\boldsymbol{O_p}$**: střed pevné polodie libovolně umístěný na nákresně
3) **kružnici $\boldsymbol{p}$** (pevnou polodii): kružnice daná středem O_p a poloměrem r_p (posuvník)
4) **bod $\boldsymbol{A_1}$** (poslední označení bodu – původně byl bod značen jako A): bod umístěný na kružnici p (tento bod je počátek otáčení hybné polodie po pevné polodii)
5) **bod $\boldsymbol{S}$**: bod zkonstruovaný otočením bodu A_1 o úhel α (posuvník) proti směru hodin kolem středu O_p

6) **úhel $\boldsymbol{\beta}$**: úhel daný body A_1, O_p, S - pomocí něj zobrazíme velikost úhlu α (V GeoGebře bohužel nemohou být dva objekty označeny stejným názvem, proto zobrazení velikosti úhlu α je nazváno β. Bod A_1 označíme jako „Pomocný objekt" a zneviditelníme jej aktivací příkazu „Zobrazit objekt".)
7) **polopřímku $\boldsymbol{a}$**: polopřímka daná body S, O_p
8) **kružnici $\boldsymbol{c}$**: kružnice daná středem S a poloměrem r_h (posuvník)
9) **průsečík $\boldsymbol{O_h}$**: průsečík kružnice c a polopřímky a (kružnici c označíme jako „Pomocný objekt" a vypneme u ní „Zobrazení objektu"; a tak v konstrukci nebude zobrazena)
10) **kružnici $\boldsymbol{h}$** (hybnou polodii): kružnice daná středem O_h a poloměrem r_h (posuvník)
11) **bod $\boldsymbol{B}$**: bod vytvořený otočením bodu S o úhel ω ve směru hodin kolem středu O_h (tento bod je tvořící bod prosté pericykloidy, a proto mu změníme barvu na světle zelenou)
12) **úhel $\boldsymbol{\gamma}$**: úhel daný body S, O_h, B; s jeho užitím zobrazíme velikost úhlu ω (v GeoGebře bohužel nemohou být dva objekty označeny stejným názvem, proto zobrazení velikosti úhlu ω je nazváno γ)
13) **polopřímku $\boldsymbol{b}$**: polopřímka daná body O_h, B
14) **bod $\boldsymbol{C}$**: bod umístěný na polopřímce b uvnitř kružnice h (tento bod je tvořící bod prodloužené pericykloidy, a proto mu změníme barvu na tmavě zelenou)
15) **bod $\boldsymbol{A}$**: bod umístěný na polopřímce b vně kružnice h (tento bod je tvořící bod zkrácené pericykloidy, a proto mu změníme barvu na růžovou)

Nyní už jen spustíme animaci u úhlů α a ω. Při pozastavení animace nastavíme další vlastnosti. Posuvníky a a ω nastavíme na hodnotu 0. Bodům A, B, C zaškrtneme „Zobrazení stopy". Dalším problémem je správné nastavení poměru $r_h : r_p$, ten musí odpovídat rychlosti u úhlu α. Když máme vše nastavené, můžeme animaci nechat přehrát.

4.6.4.2. Využití pericykloidálního pohybu v praxi

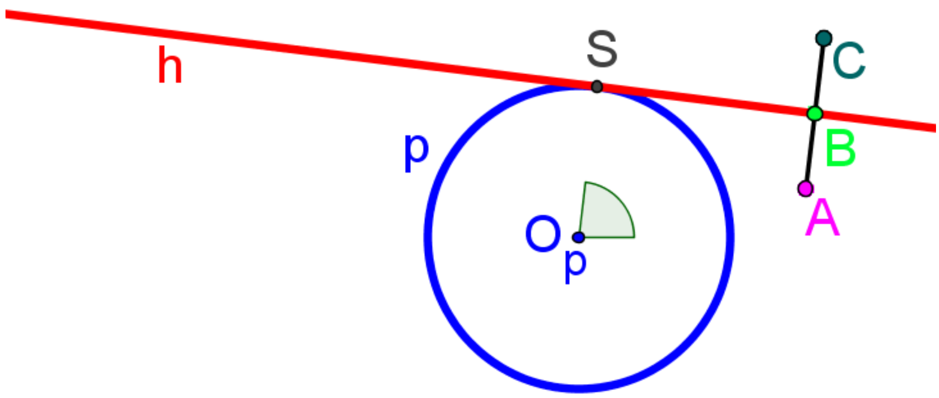


Wankelův motor - Základním principem Wankelova motoru je vykonání všech čtyř pracovních fází (sání, komprese, expanze, výfuk) během jediného otočení pístu. Tím pádem není třeba převádět pulzování pístů klasického spalovacího motoru na otáčivý pohyb. Zjednodušeně řečeno: trojúhelníko-vitý píst rotuje v oválném válci a všechny takty probíhají sou-časně.

Tudíž odpadá kliková hřídel a ojnice, sloužící k přeměně vratného pohybu v rotační, také vačky a jimi ovládané ventily. Wankelův motor je jednodušší, kompaktnější a vzhledem k objemu výkonnější. Více informací se můžete dočíst v tomto článku: http://www.tyden.cz/rubriky/auta/historie/wankeluv-motor-predbehl-dobu_79263.html.

4.6.5. Evolventní pohyb

Je dán valením přímky h po kružnici p; trajektorie pohybu se nazývají **evolventy kružnice** (obrázek 26). Obecně *evolventním pohybem* rozumíme každý pohyb, jehož hybnou polodií h je přímka; pevnou polodií p může být libovolná křivka.



Obrázek 26: Evolventní pohyb - pevná a hybná polodie

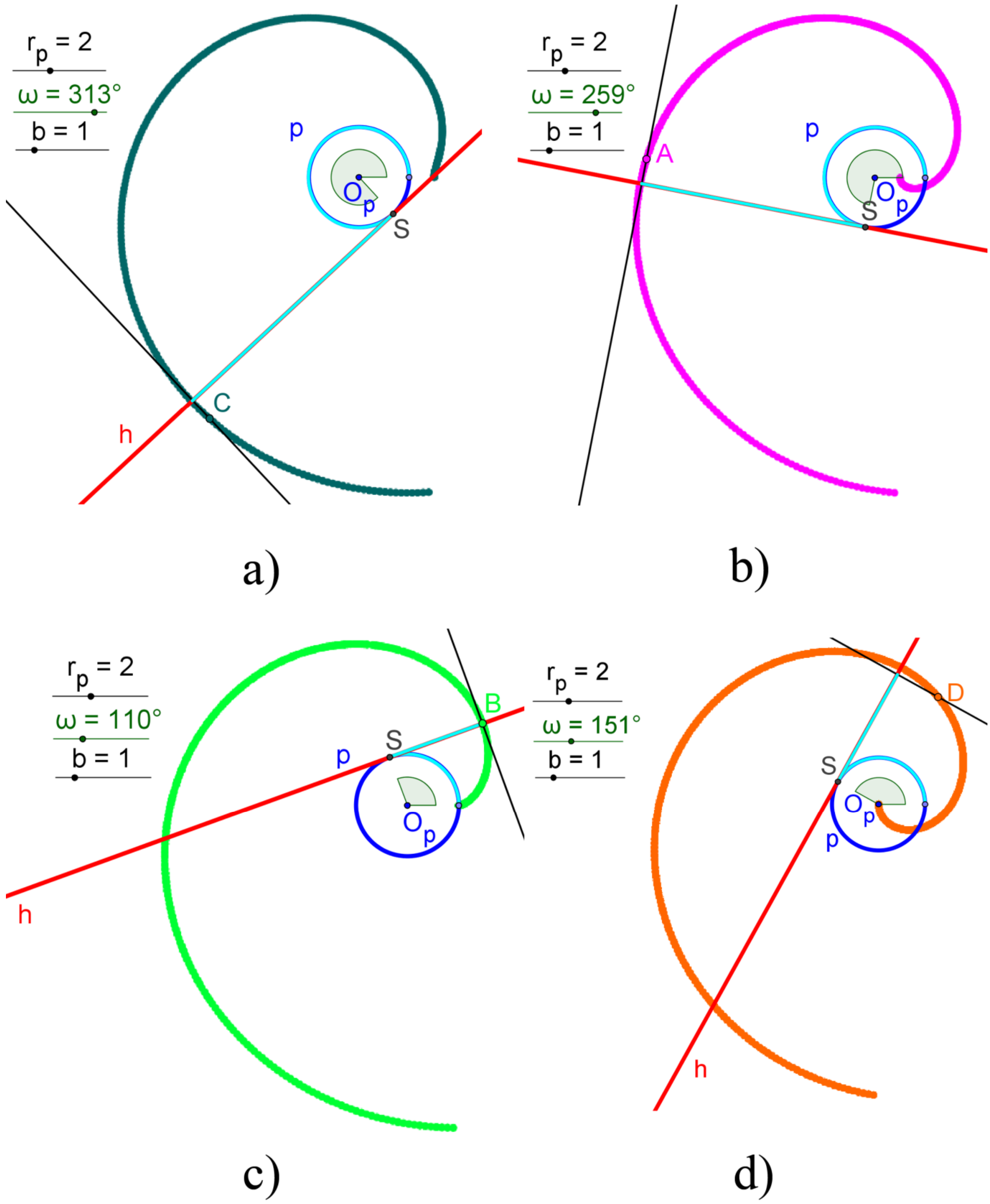
V pravoúhlé souřadnicové soustavě $\{O_p; x, y\}$ parametrické rovnice evolventy kružnice jsou

$$x = v\cos\omega + r\omega\sin\omega,$$
$$y = v\sin\omega - r\omega\cos\omega,$$

kde v je vzdálenost tvořícího bodu od středu O_p pevné polodie p, ω je velikost úhlu otočení a r je poloměr pevné polodie p.

4.6.5.1. Trajektorie evolventního pohybu

Trajektoriím říkáme **evolventy kružnice** (křivky) p. Trajektorie vnitřního bodu A (C) poloroviny určené přímkou h, v níž leží (neleží) střed O_p pevné polodie, se nazývá **prodloužená (zkrácená) evolventa kružnice** – obrázek 27a) a 27b), trajektorie bodu B přímky h **prostá evolventa kružnice** (často stručně jen evolventa kružnice) – obrázek 27c). Trajektorie τ_D bodu $D \equiv O_p$ je **Archimédova spirála** – obrázek 27d). [4 s. 262]



Obrázek 27: Evolventy kružnice

4.6.5.2. Konstrukce evolventy kružnice

Popis konstrukce evolventy kružnice vytvořené v GeoGebře. Sestrojíme:

1) **posuvníky $\boldsymbol{r_p, \omega}$**: posuvník r_p pro nastavení poloměru pevné polodie a posuvník ω pro určení úhlu, který bude pohybovat hybnou polodií po pevné polodii
2) **bod $\boldsymbol{O_p}$**: bod libovolně umístěný na nákresnu

3) **kružnici $\boldsymbol{p}$** (pevnou polodii): kružnice daná středem O_p a poloměrem r_p (posuvník)
4) **bod $\boldsymbol{A_1}$** (poslední označení bodu – původně bod značen jako A): bod libovolně umístěný na kružnici p (nejlépe vodorovně s bodem O_p)
5) **bod $\boldsymbol{S}$**: bod zkonstruovaný otočením bodu A_1 o úhel ω (posuvník) proti směru hodin okolo středu O_p
6) **úhel $\boldsymbol{\alpha}$**: úhel daný body A_1, O_p, S (zobrazíme pomocí něj velikost úhlu ω; v GeoGebře bohužel nemohou být dva objekty označeny stejným názvem, proto zobrazení velikosti úhlu ω je nazváno α)
7) **oblouk $\boldsymbol{c}$**: oblouk daný trojicí bodů O_p, A_1, S - změníme mu barvu na tyrkysovou pro jeho lepší znázornění (Bodu A_1 skryjeme popis)
8) **tečnu $\boldsymbol{h}$** (hybnou polodii): tečna ke kružnici p procházející bodem S
9) **kružnici $\boldsymbol{d}$**: kružnice daná středem S a poloměrem c
10) **průsečík $\boldsymbol{B}$**: průsečík kružnice d a tečny h (vzniknou dva průsečíky, ale uvažujeme jen průsečík umístěný napravo od bodu S – druhý průsečík označíme jako „Pomocný objekt“ a zneviditelníme jej). Bodu B nastavíme „Zobrazení stopy“ a změníme mu barvu na světle zelenou. Kružnici d zaktivníme příkaz „Pomocný objekt“ a pak ji zneviditelníme.
11) **úsečku $\boldsymbol{a}$**: úsečka spojující body S, B (úsečce SB nastavíme stejnou barvu, jako jsme použili pro zobrazení oblouku c, tj. tyrkysovou, protože jejich délky si odpovídají)

Posuvníku ω zapneme animaci. Tvořící bod B vytváří prostou evolventu kružnice. Pro zkrácenou a prodlouženou evolventu, ve speciálním případě pro Archimédovu spirálu, postup pokračuje takto:

12) **posuvník $\boldsymbol{b}$**: posuvník pro nastavení vzdálenosti tvořících bodů zkrácené a prodloužené evolventy
13) **kolmici $\boldsymbol{e}$**: kolmice k přímce h vedená bodem B
14) **kružnici $\boldsymbol{f}$**: kružnice se středem B a poloměrem b (posuvník)
15) **průsečíky $\boldsymbol{A, C}$**: průsečíky kružnice f a kolmice e; průsečík nalevo od bodu B označíme A a druhý C (bodům A, C změníme barvu na růžovou, respektive tmavě zelenou a nastavíme jim „Zobrazení stopy“)

Při zapnutí animace se začnou vytvářet zkrácené a prodloužené evolventy. V případě, že se číselné hodnoty u posuvníků r_p a b rovnají, pak prodloužená evolventa vytváří Archimédovu spirálu.

4.6.5.3. Využití evolventy v praxi

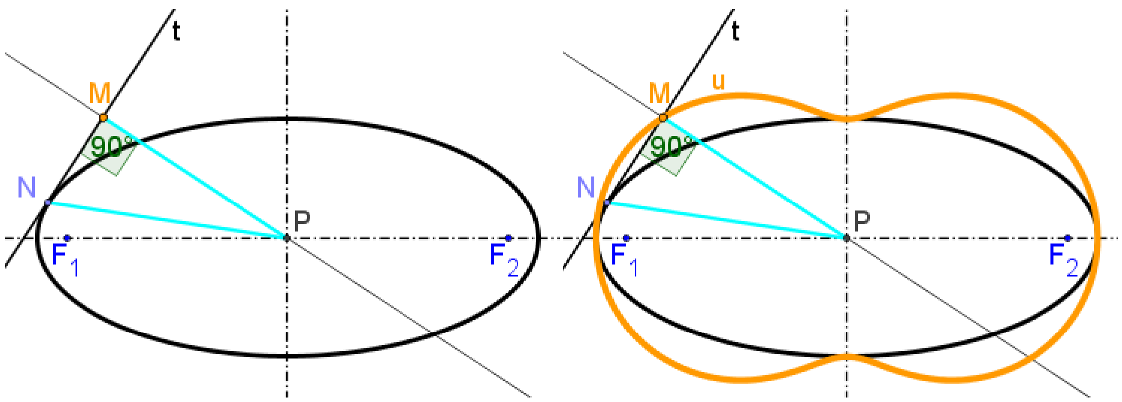
Evolventa kružnice se využívá např. při atletických závodech k rozmístění startovacích bloků. Při běhu na 3 000 m překážek je start v místě, kde rovina přechází v zatáčku. Závodníci následně běží po tečně k vnitřnímu okraji a tím se srovná délka jejich dráhy s ostatními závodníky.

5. Trajektorie vzniklé speciálními pohyby

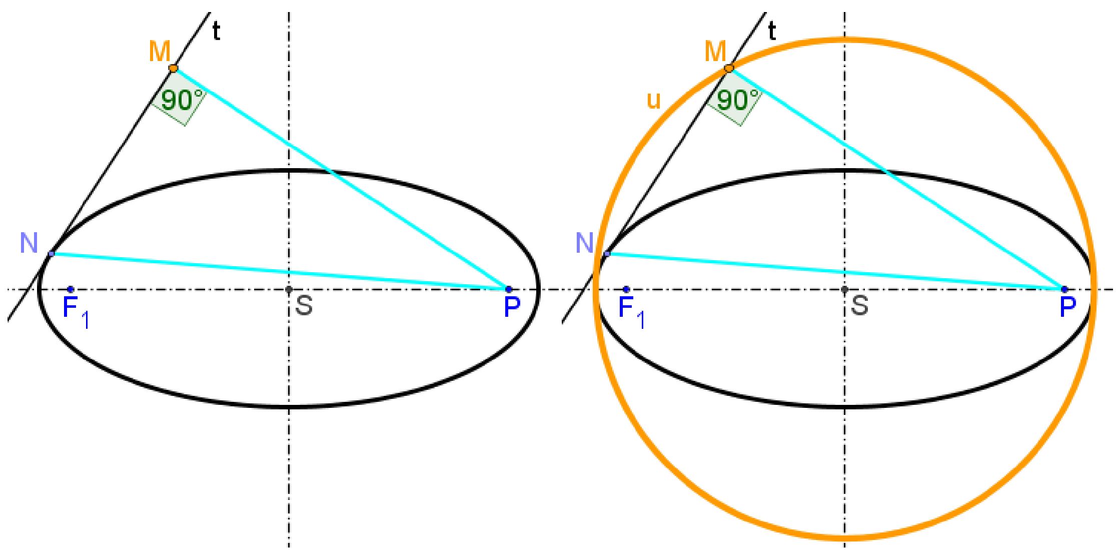
5.1. Úpatnice

Úpatnice bodu P vzhledem ke křivce k je množina všech pat M kolmic spuštěných z bodu P na tečny t křivky k; bod P se nazývá *pól*. Úpatnice je tedy trajektorie vrcholu M pravého úhlu, jehož jedno rameno obaluje křivku k a druhé prochází pólem P. Odtud je zřejmé, že úpatnice vznikají při pohybech, u nichž se dvojice různoběžných přímek NRS Σ pohybuje tak, že jedna přímka obaluje křivku a druhá prochází pevným bodem.

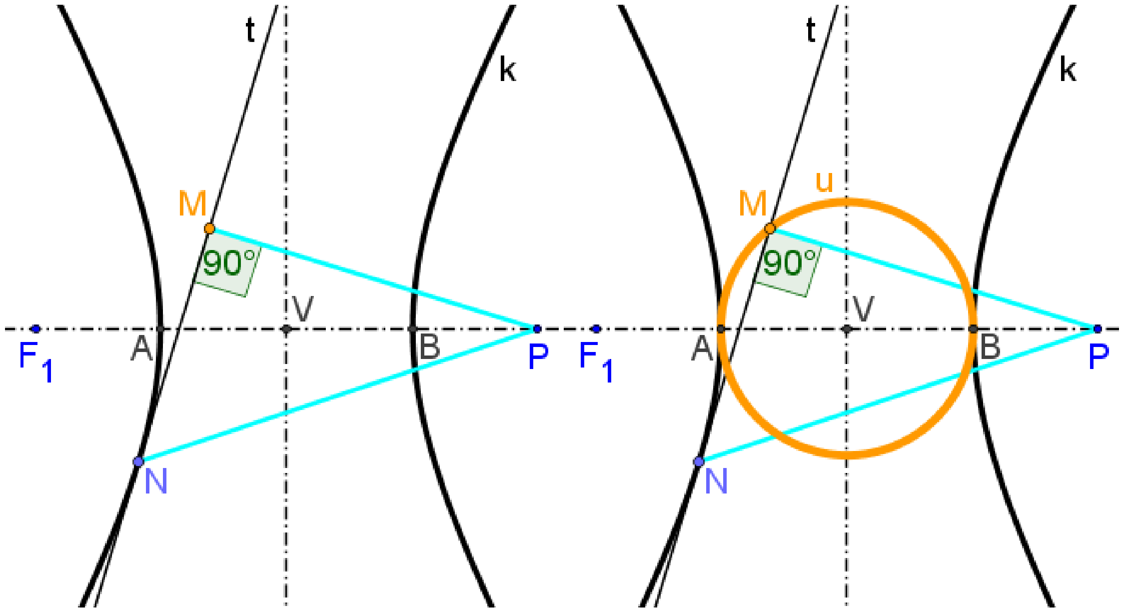
Na obrázku 28 je zobrazena úpatnice elipsy pro pól P ležící ve středu S elipsy, tj. $P \equiv S$. Příkladem úpatnice kuželosečky pro pól P ležící v jejím ohnisku je vrcholová kružnice elipsy (obrázek 29), vrcholová kružnice hyperboly (obrázek 30) a vrcholová přímka paraboly (obrázek 31). [4 s. 256]



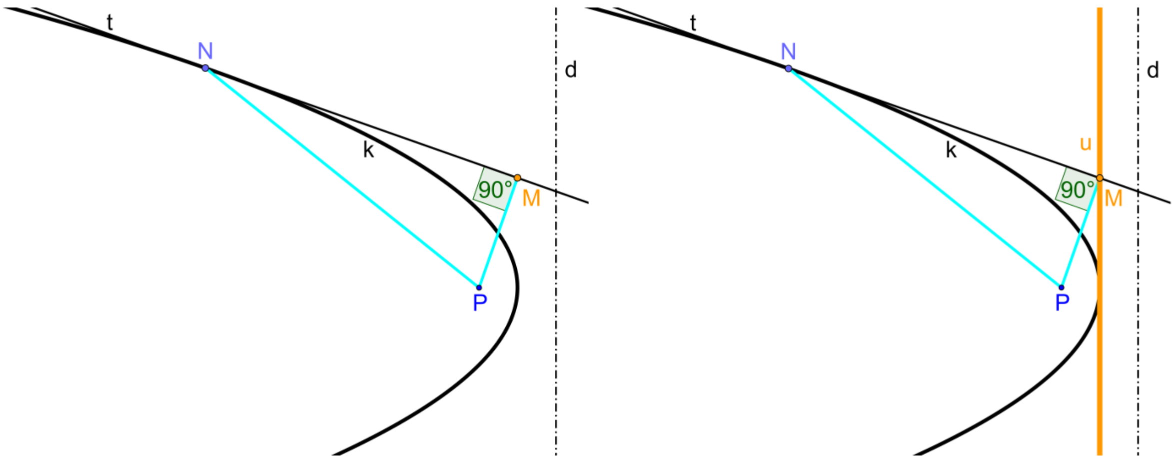
Obrázek 28: Úpatnice elipsy pro pól ve středu elipsy



Obrázek 29. Úpatnice elipsy pro pól v ohnisku elipsy



Obrázek 30. Úpatnice hyperboly pro pól v ohnisku hyperboly



Obrázek 31. Úpatnice paraboly pro pól v ohnisku paraboly

5.1.1. Konstrukce úpatnice

Následuje popis konstrukce úpatnice elipsy, hyperboly a paraboly (EHP) – pro pól v ohnisku kuželosečky - vytvořené v GeoGebře. Sestrojíme:

1) **EHP *k***: v nástrojové liště vybereme příkaz pro vytvoření dané kuželosečky, zkonstruujeme ji dle pokynů pro její sestrojení (pokyny se zobrazují napravo od nástrojové lišty)
2) **hlavní a vedlejší osy** v případě elipsy a hyperboly, v případě paraboly sestrojíme její osu, řídicí přímka je již sestrojena z předešlého kroku
3) **bod *N***: bod umístěný libovolně na EHP
4) **tečnu *t***: tečna dotýkající se dané kuželosečky (EHP) v bodě *N*

5) **kolmici $\boldsymbol{c}$**: kolmice k tečně t procházející pólem P kuželosečky, tj. buď středem S či ohniskem F dané kuželosečky
6) **průsečík $\boldsymbol{M}$**: průsečík tečny t a kolmice c k dané tečně t. Tomuto bodu M nastavíme ve vlastnostech „Zobrazení stopy“

Pohybem bodu N po kuželosečce EHP vytváříme úpatnici.

Úpatnice se dá vykreslit ještě jedním způsobem a to jako množina bodů. V panelu nástrojů vybereme příkaz „Množina bodů“ a úpatnici zadáme bodem M, který je součástí množiny, a bodem N na přímce t.

Poznámka: V obrázcích úpatnic kuželoseček je pro přehlednost zvýrazněn pravoúhlý trojúhelník pomocí jeho stran a pomocí pravého úhlu při vrcholu M (pravý úhel se zadává buď třemi body nebo dvěma přímkami). Dále je v obrázcích zneviditelněná kolmice c procházející bodem M a pólem P.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit přehled několika kinematicky vznikajících křivek. U každé křivky popsat způsob jejího kinematického vytvoření a křivku následně dynamicky vykreslit pomocí vybraného geometrického programu. Tento cíl byl naplněn, jak dokazuje soubor konstrukcí uložených na přiloženém CD a též jednotlivé obrázky křivek uvedené v této práci a doplněné o popisy konstrukcí jejich tvorby v geometrických programech GeoGebra či GEONExT. Pro zpestření tématu této práce je uveden stručný nástin vývoje vzniku geometrie. Některé křivky jsou doplněny o jejich využití v praxi. Dále se v textu práce nacházejí krátké komentáře k prostředí geometrických programů GeoGebra a GEONExT a popisy práce v nich. Většina uvedených informací není k nalezení ve standardních návodech obou programů.

Velkým přínosem této práce je, že podle popisů konstrukcí uvedených v textu si čtenář může křivky obdobným způsobem také sám vytvořit ve zmíněných geometrických programech. Což by se dalo například vhodně využít při výuce kinematické geometrie. Nevýhodou ovšem je, že se s kinematickou geometrií setkáváme především už jen na vysoké škole. Podle mého názoru by se vytváření křivek (především cyklických) zamlouvalo i žákům na základních či středních školách. Žáci by zadáváním různých poměrů pevných a hybných polodií vytvářeli zajímavé křivky, které jsou nejen hezké na pohled, ale většina z nich má i své odborné názvy. Práce v geometrických programech je určitě výhodným zpestřením hodin matematiky. Žáci si vyzkoušejí jiné metody konstruování než pomocí pravítka a kružítka. Touto metodou se ušetří i čas a žáci jsou tak díky dynamičnosti programů schopni vytvořit více různých konstrukcí než ručně. Práce v geometrických programech by se ovšem neměla stát hlavní činností při výuce geometrie, protože trénování zručnosti, přesnosti a čistoty práce je pro ně jistě mnohem důležitější. Na druhou stranu oba v práci užívané geometrické programy jsou volně stažitelné, a tak když žáky práce v nich zaujme, mohou si je nainstalovat doma na své osobní počítače a konstrukce si tak mohou vytvářet sami individuálně.

Literatura

[1] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I.* 3. nezměněné vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1982. ISBN 04-009-82

[2] OPAVA, Z. *Matematika kolem nás*. 1. vyd. Praha: Albatros, 1989. ISBN 13-781-89

[3] LOMTATIDZE, L. *Historický vývoj pojmu křivka*. [online] Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. [citováno 30. 8. 2012], Dostupné z: <http://dml.cz/browse-author-items?id=16484 >

[4] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie II.* 3. nezměněné vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1984. ISBN 04-006-84

[5] ŠIMEČEK, V. *Kinematická geometrie*. [online] Praha: Gymnázium Christiana Dopplera, 2012. [citováno 21. 8. 2012]. Dostupné z: <http://machu.euweb.cz/g-simecek.pdf>

[6] DRS, L., NOVÁK J., ROUBEK, O. *Konstruktivní geometrie: pro stud. fak. strojní*. Praha: Editační středisko ČVUT, 1989. ISBN 8001000915

[7] HOHENWARTER, M., HOHENWARTER, J., *GeoGebra Help 3.2*. [online] Linz: Johannes Kepler University, Rakousko, 2009. [citováno 2. 4. 2013]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org/help/docuen.pdf >

[8] ŠŤASTNÁ, B., *Inteligentní sbírka úloh z euklidovské geometrie*. [online] Brno: Masarykova univerzita – Fakulta informatiky, 2006. [citováno 4. 4. 2013]. Dostupné z: <http://is.muni.cz/th/4487/fi_m/html/ch03s02.html>

[9] TEIGISZEROVA, L., *Cykloida v teórii a praxi*. Bakalářská práce [online] Brno: Masarykova univerzita – Fakulta přírodovědecká, 2010. [citováno 4. 4. 2013]. Dostupné z: <http://is.muni.cz/th/268878/prif_b/bakalarka.pdf>

internetové zdroje:
http://www.geogebra.org
http://geonext.uni-bayreuth.de/

Seznam příloh na CD

Na přiloženém CD naleznete:

Složku „Geometrické programy“ – instalační soubor programu GeoGebra 3.2.47.0.

– instalační soubor programu GEONExT 1.74.

Složku „Konstrukce“ – 4.1. Eliptický pohyb.ggb

– 4.2. Kardioidický pohyb.ggb

– 4.2. Kardioidický pohyb.gxt

– 4.3.1. Přímá konchoida přímky - Nicomedova konchoida.ggb

– 4.3.1. Přímá konchoida přímky - Nicomedova konchoida.gxt

– 4.3.1. Přímá konchoida kružnice.ggb

– 4.4. Zobecněný konchoidální pohyb.ggb

– 4.5. Kloubový antiparalelogram - elipsa.ggb

– 4.5. Kloubový antiparalelogram - hyperbola.ggb

– 4.6.1. Cykloida.ggb

– 4.6.2. Epicykloida. ggb

– 4.6.2. Prostá epicykloida. gxt

– 4.6.3. Hypocykloida.ggb

– 4.6.3. Prostá hypocykloida.gxt

– 4.6.4. Pericykloida.ggb

– 4.6.5. Evolventa kružnice.ggb

– 5.1. Úpatnice elipsy z ohniska. ggb

– 5.1. Úpatnice elipsy ze středu. ggb

– 5.1. Úpatnice hyperboly z ohniska. ggb

– 5.1. Úpatnice paraboly z ohniska. ggb