UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Elementární funkce a definiční obor

Elementary functions and domain

Autor: Tomáš Vitásek

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous

Praha 2012

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Derka Pilouse. V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

V Praze dne 21. června 2012 . . . .

Tomáš Vitásek

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, Mgr. Derkovi Pilousovi, za projevenou ochotu a mnoho cenných rad a připomínek, které mi pomohly realizovat tuto práci.

Abstrakt

Cílem mé bakalářské práce je ukázat studentům učitelství matematiky a učitelům matematiky vztah mezi elementárními funkcemi a jejich definičním oborem a metody návrhu úloh na hledání definičného oboru. V kapitole „Zobrazení“ se snažím definovat a vysvětlit pojmy, které úzce souvisí s elementárními funkcemi a definičními obory, které využívám v dalších částech. Stěžejními kapitolami jsou „Definiční obory elementárních funkcí“ a „Návrhy úloh“. V první z těchto kapitol podrobně vysvětluji algoritmus řešení úloh na hledání definičního oboru elementární funkce a diskutuji, jak vypadají definiční obory různých elementárních funkcí. V druhé z nich potom k daným množinám navrhuji funkce takové, aby daná množina byla jejich definičním oborem. Snahou je navrhovat tyto funkce tak, aby úloha na nalezení definičního oboru byla řešitelná maturanty z matematiky na gymnáziích.

Klíčová slova: elementární funkce, definiční obor, skládání funkcí

Abstract

The aim of my bachelor thesis is to show the teachers and the students of educational mathematics the relation between the elementary functions and their domains and the methods of creating problems focused on finding the domain. In the chapter called "Zobrazení", I try to define and explain the terminology closely connected to elementary functions and their domains which I use in the following parts. Crucial chapters are "Definiční obory elementárních funkcí" and "Návrhy úloh". In the first of those two chapters I thoroughly explain the algorithm of solving problems focused on finding the domain of elementary functions and I discuss what the domains of various elementary functions are like. In the second of those two chapters, I suggest functions fitting a concrete domain. The aim is to suggest functions in a way that a student taking their maturita exam in mathematics at high school would be able to solve the problem of finding the domain.

Keywords: elementary function, domain, function composition.

Obsah

Seznam použitého značení **8**

Úvod **9**

1 Zobrazení a funkce **10**

1.1 Zobrazení 10

1.2 Funkce 13

1.2.1 Elementární funkce 15

2 Definiční obory elementárních funkcí **22**

2.1 Hledání definičního oboru elementárních funkcí 22

2.2 Definiční obory významných podoborů $\mathcal{E}$ 28

2.2.1 Polynomická funkce 28

2.2.2 Racionální funkce 30

2.2.3 Přidání odmocnin 32

2.2.4 Exponenciela, logaritmus a arkus sinus 34

2.2.5 Sinus 35

3 Návrhy úloh **36**

3.1 Vnitřní lineární funkce 38

3.1.1 Vnější funkce logaritmus a sudá odmocnina 38

3.1.2 Vnější funkce arkus sinus 39

3.2 Vnitřní kvadratická funkce 40

3.2.1 Vnější funkce logaritmus a sudá odmocnina 40

3.2.2 Vnější funkce arkus sinus 42
3.3 Vnitřní lineární lomená funkce 45
3.3.1 Vnější funkce logaritmus a sudá odmocnina 46
3.3.2 Vnější funkce arkus sinus 47
3.4 Další vnitřní funkce 49
3.5 Konstrukce funkcí s daným definičním oborem 51

Literatura **62**

Seznam použitého značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	množina nezáporných reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	zobecněná množina reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel (kladných celých)
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel s nulou
$A \to B$	zobrazení z množiny A do množiny B
$f \restriction M$	restrikce zobrazení f na množinu M
$f(C)$	obraz množiny C při zobrazení f
$f_{-1}(D)$	vzor množiny D při zobrazení f
$f \circ g$	složení vnějšího zobrazení f a vnitřního zobrazení g
f^{-1}	inverzní funkce k funkci f
$\mathcal{E}$	množina elementárních funkcí
I	interval
$P(x)$	polynom jedné proměnné x

Úvod

Toto téma jsem si pro svoji práci vybral, jelikož je každému studentovi střední školy blízké z výuky matematiky. I já se s mnoha úlohami na hledání definičního oboru na střední, ale i základní škole setkal, proto jsem se chtěl na toto téma podívat z druhé strany, tedy ze strany vyučujícího. Důležitou prací učitele matematiky je totiž mimo jiné právě návrh úloh. Tyto úlohy musí však být navrhovány speciálně ke konkrétnímu účelu a svou obtížností přizpůsobené věku žáka a škole, na které studuje. Rozdílné úlohy budou řešit žáci prvního a čtvrtého ročníku gymnázia, rozdílné úlohy budou však také řešit studenti stejného ročníku na středních odborných školách a studenti gymnázií. V této práci budu ukazovat především postup při návrhu složitějších příkladů, většinou se tedy bude jednat o příklady pro studenty gymnázií a v některých případech i úlohy, které mírně přesahují úroveň standardního učiva a na gymnáziích bývají řešeny například v rámci matematických seminářů. Vhodné úlohy nemusí být vždy jednoduché nalézt. Při návrhu musíme dbát, aby úlohu dokázal vyřešit student, kterému je určená. Na druhou stranu však nesmí být ani příliš nízká, aby dostatečně prověřovala schopnosti studenta. Práce bude členěna na tři části. V první se zabývám zavedením pojmů, které budeme dále využívat, tedy především pojmů týkajících se funkcí, elementárních funkcí a definičních oborů elementárních funkcí. Ve druhé části potom budu rozebírat, jak vypadají definiční obory elementárních funkcí a podrobně popisovat, jak řešit úlohy na hledání definičního oboru. Třetí část potom bude věnovaná právě návrhu úloh na hledání definičního oboru a popisu postupu při návrhu úlohy.

Kapitola 1

Zobrazení a funkce

1.1 Zobrazení

V této kapitole se budeme věnovat především zavedení základních pojmů, které budeme dále využívat. Nejdříve definujeme zobrazení, které je pojmem obecnějším než funkce a definici funkce v sobě obsahuje jako speciální případ.

Definice 1 (Zobrazení)**.** Řekneme, že $f \subset A \times B$ je zobrazení z množiny A do množiny B a píšeme $f : A \to B$, pokud platí $[x, y_1] \in f \wedge [x, y_2] \in f \Rightarrow y_1 = y_2$. Potom f nazýváme zobrazení z A do B. Budeme ho značit $f : A \ \to B$[i].

Značení. Zápis funkce jako množiny uspořádaných dvojic je z matematického hlediska naprosto postačujícím. Z historických důvodů však budeme užívat i jiných značení, která jsou tradičně využívána. Místo $[x, y] \in f$ budeme na některých místech používat zápis $f : y = f(x)$, nebo označení $x \mapsto y$, jehož výhodou je, že v takovémto zápisu můžeme zobrazení zapsat, aniž bychom ho pojmenovali.

---

[i]Definice je pro naše potřeby upravena a oproti klasické definci [7, str. 33] připouští i zobrazení prázdné množiny na prázdnou množinu. Takové zobrazení budeme nazývat prázdným zobrazením a zavádím ho zde proto, aby množina elementárních funkcí (viz. definice 17) byla uzavřena na své operace.

Zobrazení je tedy formálně množina uspořádaných dvojic, které nám říkají, kterému prvku z množiny A je přiřazen který prvek z množiny B. Důležitým požadavkem definice je, aby množina těchto dvojic neobsahovala dvě různé dvojice se stejným prvním prvkem (zjednodušeně říkáme, že „ke každému x existuje nejvýše jedno y“).

Definice 2 (Definiční obor a obor hodnot)**.** Je-li f zobrazení z množiny A do množiny B, potom
definiční obor f je množina $\mathcal{D}(f) := \{x; x \in A \wedge \exists y \in B : ([x, y] \in f)\}$,
obor hodnot f je množina $\mathcal{H}(f) := \{y; y \in B \wedge \exists x \in A : ([x, y] \in f)\}$ [1, str. 71].

Poznámka. Definiční obor je neoddělitelnou součástí zobrazení. Má-li zobrazení předpis, rovnost zobrazení je rovnost definiční množiny a rovnost předpisů na těchto množinách. Proto zobrazení

$$x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad x \mapsto x^2, x \in (0; 2)$$

nejsou shodná zobrazení. Naopak

$$x \mapsto x, x \in \langle 0; \infty) \quad \text{a} \quad x \mapsto |x|, x \in \langle 0; \infty)$$

jsou shodná zobrazení, jelikož pro nezáporná čísla je absolutní hodnotu možné vynechat.

Tato poznámka nás vede k pojmu restrikce zobrazení, který definujeme takto:

Definice 3 (Restrikce zobrazení)**.** Řekneme, že g je restrikce zobrazení f na množinu M, jestliže $g \subset f$ a $\mathcal{D}(g) = M \cap \mathcal{D}(f)$. Budeme ji značit $g = f \restriction M$[ii].

Restrikce zobrazení je nezbytná pro konstrukci inverzní funkce u funkcí, které nejsou prosté na celém definičním oboru. Pokud není funkce prostá, inverzní funkce k ní neexistuje. Proto budeme u takových funkcí hledat restrikce, na kterých funkce prostá je. K těmto restrikcím poté inverzní funkci. Příkladem je například funkce „druhá odmocnina“, jako inverzní k funkci „druhá mocnina“, zúžené na množinu nezáporných reálných čísel.

[ii] po konzultaci s Mgr. Derkem Pilousem

Definice 4. Zobrazení $f : A \to B$, pro které existuje $b \in B$ tak, že $\mathcal{H}_f = \{b\}$, se nazývá **konstantní** (budeme značit K_b). Jestliže pro $f : A \to A$ platí: $\forall x \in A : f(x) = x, x \in A$, nazývá se f **identické zobrazení** (krátce **identita**) na A (budeme značit id, resp. id_A) [7, str. 35] .

Definice 5. Nechť $f : A \to B$. Je-li $[x, y] \in f$, nazýváme x vzorem y a y obrazem x při zobrazení f. Obrazem množiny $C \subset A$ při zobrazení f rozumíme množinu $f(C) := \{y; \exists x \in C : [x, y] \in f\}$. Vzorem množiny $D \subset B$ při zobrazení f rozumíme množinu $f_{-1}(D) := \{x; \exists y \in D : [x, y] \in f\}$ [7, str. 34].

Vysvětlení. Obraz množiny C je množina všech prvků z oboru hodnot přiřazených zobrazením f prvkům množiny C. Vzor množiny D je množina všech prvků z definičního oboru, které f zobrazuje do D.

Dále si definujeme další důležitý pojem, kterým je skládání zobrazení. Jedná se o první funkční operaci, kterou budeme používat.

Definice 6 (Složené zobrazení)**.** Nechť f a g jsou zobrazení. Potom složené zobrazení $f \circ g$ je zobrazení h definované předpisem

$$h = \{[x, z]; \exists y : [x, y] \in g \wedge [y, z] \in f\}.$$

Poznámka. Skládání zobrazení je asociativní ($(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$), ale není komutativní (obecně neplatí $f \circ g = g \circ f$).

Jedná se o operaci, která nám umožňuje ze základních zobrazení vytvářet nová. Operace skládání budeme v mnoha příkladech využívat.

Lemma 1. $\mathcal{D}(f \circ g) = g_{-1}(\mathcal{D}(f))$.

Důkaz. Plyne přímo z definice složeného zobrazení. □

Poslední definice, kterou můžeme v rámci zobrazení vyřknout, aniž bychom museli využít speciálních vlastností funkcí, je definice inverzního zobrazení. Pro tuto definici však musíme nejdřív zavést pojem prostého zobrazení.

Definice 7 (Prosté zobrazení)**.** Řekneme, že f je **prosté zobrazení** množiny A do množiny B, jestliže

1. $f : A \to B$ a
2. $\forall x_1 \in A \forall x_2 \in A : ([x_1, y] \in f \wedge [x_2, y] \in f \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Poznámka. Z bodu dva je vidět, že se jedná o analogii definice zobrazení. Zde je požadavek symetrický k požadavku v definici zobrazení. Je třeba, aby „ke každému y existovalo nejvýše jedno x“.
Ve středoškolských učebnicích se častěji vyskytuje ekvivalentní definice prosté funkce $\forall x_1 \in A \forall x_2 \in A : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ [3, str. 35].

Nyní již můžeme definovat inverzní zobrazení.

Definice 8 (Inverzní zobrazení)**.** Nechť f je prosté zobrazení množiny A na množinu B. Řekneme, že f^{-1} je **inverzní zobrazení** k zobrazení f, jestliže $f^{-1} = \{[x, y]; [y, x] \in f\}$ [1, str. 77].

1.2 Funkce

V předešlé části jsme definovali několik pojmů týkajících se zobrazení a jeho vlastností. Pro naši práci je však potřeba pojmu konkrétnějšího, jelikož zobrazení je pojmem příliš širokým. Příkladem zobrazení je například zobrazení množiny všech ženatých mužů na množinu jejich manželek. U takového zobrazení mají smysl námi již definované pojmy. Definičním oborem je množina všech ženatých mužů, oborem hodnot množina všech vdaných žen. Složíme-li toto zobrazení se zobrazením vdaných žen na množinu jejich matek (označíme matky), složení těchto zobrazení má taktéž smysl. Složené zobrazení matky $\circ$ manželství je zobrazení, které zobrazuje množinu všech ženatých mužů na množinu matek vdaných žen. Toto zobrazení můžeme nazvat „tchýně“. Jelikož však cílem našeho zkoumání jsou elementární funkce jakožto nejvýznamnější množina funkcí, se kterými se ve výuce matematiky pracuje, je proto na místě definovat si pojem funkce jako speciálního zobrazení.

Definice 9. Zobrazení libovolné množiny A do nějakého číselného oboru budeme obecně nazývat **funkce**. Podrobněji **reálnou funkcí** budeme rozumět zobrazení do $\mathbb{R}$, **komplexní funkcí** zobrazení do $\mathbb{C}$. Je-li navíc $A \subset \mathbb{R}$, budeme takovou funkci nazývat podrobněji **reálnou funkcí reálné proměnné** [7, str. 105].

Úmluva. Nebude-li řečeno jinak, budeme pojmem funkce rozumět reálnou funkci jedné reálné proměnné.

Poznámka. Jelikož funkce je jen speciálním zobrazením, všechny dříve definované vlastnosti platí i pro funkce, nemusíme je tedy znovu definovat.

Jelikož číselné obory jsou speciálními strukturami s definovanými číselnými operacemi, můžeme definovat další operace a vlastnosti, které by v případě obecného zobrazení neměly smysl.[iii]

Definice 10. Nechť f a g jsou funkce. Pak nazýváme

(a) **součtem funkcí** f a g funkci

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

(b) **rozdílem funkcí** f a g funkci

$$(f-g)(x) := f(x) - g(x), x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

(c) **součinem funkcí** f a g funkci

$$(fg)(x) := f(x)g(x), x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

(d) **podílem funkcí** f a g funkci

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \setminus \{x; g(x) = 0\}.$$

Souhrnně tyto operace nazveme **funkčními operacemi** [1, str. 103].

[iii] Například pro již zmiňovaná zobrazení „manželství“ a „matky“ by žádná z níže uvedených operací neměla smysl.

Poznámka. Mezi funkční operace bývá zahrnována i unární operace absolutní hodnota, tu však v rámci elementárních funkcí můžeme zkonstruovat složením sudé mocniny a stejné odmocniny. Stejně tak násobení funkce konstantou lze nahradit funkční operací násobení, kde jedna z funkcí je funkcí konstantní[iv].

Poznámka. Sčítání a násobení funkcí je asociativní i komutativní, naopak odčítání a dělení nejsou ani komutativní, ani asociativní.

Definice 11. Množinu funkcí generovaných množinou funkcí F (tzv. množina generátorů) a množinou binárních operací O (značíme$\langle F; O\rangle$) definujeme takto:

1. $F \subset \langle F; O\rangle$
2. $f, g \in \langle F; O\rangle \wedge \otimes \in O \Rightarrow f \otimes g \in \langle F; O\rangle$
3. Každou funkci z $\langle F; O\rangle$ lze z F zkonstruovat konečným počtem kroků 2.

Tato terminologie a značení jsou převzaty z algebry, kde se $\langle \dots \rangle$ používá pro lineární obal množiny.

1.2.1 Elementární funkce

Jak víme z definice 1, zobrazení, a tedy i funkce, je množina dvojic. Z abstraktně matematického hlediska je taková definice postačující, z didaktického hlediska nás však bude zajímat, jak můžeme takovou funkci zadat. Pravděpodobně nejjednodušším způsobem zadání může být zadání výčtem. Nicméně u takové funkce by nemělo hledání definičního oboru smysl, jelikož by byl znám již přímo ze zadání. Také bychom v takovém případě nemohli zadávat nekonečné funkce (ve smyslu nekonečnosti zobrazení jako množiny dvojic). Proto pro nás bude stěžejní zadání funkce předpisem, a to především předpisem konstruktivním. Zadání nekonstruktivní je sice také zadáním korektním,

[iv] V knize Matematika pro ekonomické fakulty [1, str. 103] jsou tyto operace zahrnuty mezi funkční operace.

nicméně pro naše příklady je zcela nevhodné. Takové zadání se taktéž prakticky nepoužívá ve školách.

Příklad 1. Mějme iracionální číslo $\pi \doteq 3,1415926\ldots$ Příkladem nekonstruktivního zadání funkce může být například funkce, která přirozenému číslu n přiřazuje jedničku, pokud se číslo, které je na n-tém místě v desetinném zápisu čísla π, ještě alespoň jednou vyskytuje, a nulu, pokud ne. Takové zadání funkce je sice korektní, nicméně o dané funkci toho mnoho nevíme. Abychom zjistili funkční hodnotu například pro 10^9, museli bychom znát nejméně $10^9 + 1$ místo v desetinném zápisu π. Pokud bychom dále v desetinném zápisu opět toto číslo našli, přiřadíme jedničku. Pokud by se však již nevyskytovalo, nelze o funkční hodnotě rozhodnout, jelikož nejsme schopni (alespoň my) dokázat, že se již tato cifra neobjeví. Funkce je tedy jednoznačně definována, ale obecně nejsme schopni její funkční hodnotu nelézt. Proto se tomuto zadání funkce věnovat nebudeme a pozornost budeme soustředit jen na zadání konstruktivní.

Poznámka. Jak si z definice 1, resp. definice 9, mohl čtenář všimnout již dříve, často zadávaný příklad „Určete definiční obor funkce“ nemá striktně vzato smysl, jelikož definiční obor je neoddělitelnou součástí funkce. Touto úlohou budeme tedy rozumět: „Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má daný výraz smysl,“ neboli „Určete maximální (ve smyslu inkluze) definiční obor funkce dané tímto předpisem v $\mathbb{R}$.“

Nejčastěji používanými (alespoň ve výuce matematiky) reálnými funkcemi jedné reálné proměnné jsou tzv. **elementární funkce**. Systém elementárních funkcí vybudujeme pomocí základních elementárních funkcí a funkčních operací. Pojmy konstantní a identické funkce jsou nám již známy z definice pro zobrazení, tudíž je nemusíme definovat znovu. Definujeme si tedy další funkce, pomocí kterých poté můžeme definovat všechny funkce elementární.

Definice 12. Mocninnou funkcí (značíme id^k) rozumíme každou funkci definovanou

$$\mathrm{id}^k := \prod_{i=1}^{k} \mathrm{id}, k \in \mathbb{N}.$$

Definice 13. Odmocninnou funkcí (značíme $\mathrm{id}^{\frac{1}{k}}$) nazveme funkci definovanou

1. pro k liché: $\mathrm{id}^{\frac{1}{k}} := (\mathrm{id}^k)^{-1},\ k \in \mathbb{N},\ k > 2,$
2. pro k sudé: $\mathrm{id}^{\frac{1}{k}} := (\mathrm{id}^k \restriction \langle 0; \infty))^{-1},\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2.$

Poznámka. Pro sudá k jsme museli zúžit definiční obor id^k tak, aby byla tato funkce prostá. Jinak bychom nemohli $\mathrm{id}^{\frac{1}{k}}$ zavést jako inverzi k id^k.

Jelikož exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce jsou tzv. funkce transcendentní, nelze je definovat konečným algebraickým výrazem. K definici funkce **exponenciální** využijeme součtu nekonečné řady, ostatní pak definjeme pomocí exponenciální funkce. Nejdříve definujeme základní exponenciální funkci, kterou označíme exp.

Definice 14. Exponenciální funkci definujeme

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \text{pro každé } x \in \mathbb{C}.$$

Přirozený logaritmus definujeme

$$\ln := \exp^{-1},$$

obecnou exponenciální funkci (označíme $\exp_a$) potom definujeme

$$\exp_a := \exp(\mathrm{id} \cdot \ln a)\ \text{a}$$

obecný logaritmus o základu a ($\log_a$) definujeme

$$\log_a := \exp_a^{-1}.$$

Značení. Funkční předpis základní exponenciální funkce ($\exp(x)$) budeme psát $f : y = \mathrm{e}^x$, funkční předpis obecné exponenciální funkce ($\exp_a(x)$) potom $f : y = a^x$.[v]

[v] e je tzv. Eulerovo číslo. Jedná se o transcendentní číslo. $\mathrm{e} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \doteq 2,718281\ldots$

Definice 15. **Goniometrické funkce** $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}$ definujeme předpisem

$$\begin{aligned} \sin x &:= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}), \\ \cos x &:= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}), \\ \mathrm{tg}\, x &:= \frac{\sin x}{\cos x} \text{ a} \\ \mathrm{cotg}\, x &:= \frac{\cos x}{\sin x}, \end{aligned}$$

kde Re značí reálnou část komplexního čísla a Im imaginární část komplexního čísla.

Definice 16. **Cyklometrické funkce** $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arccotg}$ definujeme [4, str. 87]

$$\begin{aligned} \arcsin &:= \left(\sin \restriction \left\langle \tfrac{-\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2} \right\rangle\right)^{-1}, \\ \arccos &:= \left(\cos \restriction \langle 0; \pi \rangle\right)^{-1}, \\ \mathrm{arctg} &:= \left(\mathrm{tg} \restriction \left(\tfrac{-\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2} \right)\right)^{-1} \text{ a} \\ \mathrm{arccotg} &:= \left(\mathrm{cotg} \restriction (0; \pi)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Tímto jsme definovali všechny funkce, které pro budeme pro definici elemetárních funkcí potřebovat[vi]. Můžeme tedy definovat množinu elemetárních funkcí.

Definice 17 (Elementární funkce)**.** Množninu $\langle F_E; O_E \rangle$, kde

1. $F_E = \{\mathrm{K}_b, \mathrm{id}, \mathrm{id}^{\frac{1}{k}}, \exp, \log, \sin, \arcsin\}$,
2. $O_E = \{+; -; \cdot; \div; \circ\}$,

nazýváme množinou elementárních funkcí (budeme značit $\mathcal{E}$).

Vysvětlení. Elementární funkce jsou takové funkce, které získáme z funkcí z F_E pomocí konečného počtu operací z O_E.

[vi]Definovali jsme jich dokonce více, než je třeba, jak si ukážeme později.

Úmluva. Funkční operace skládání ($\circ$) bude mít v našich příkladech nejvyšší precedenci. Z aritmetických operací má $\cdot$ a $\div$ vyšší precedenci než $+$ a $-$.

Příklad 2. Dokažte, že $x \mapsto \sin{(x+1)^2}$ je elementární funkce.

Řešení. $x \mapsto x+1$ je součet identické funkce id a konstatní funkce. Výraz $x \mapsto (x+1)^2$ získáme složením vnější funkce $x \mapsto x \cdot x$ a vnitřní $x \mapsto x+1$. Výsledný výraz $x \mapsto \sin{(x+1)^2}$ je potom složení vnější goniometrické funkce sin $x \mapsto \sin x$ a vnitřní $x \mapsto (x+1)^2$. Vyjádřili jsme tedy tuto funkci z funkcí F_E pomocí operací O_E, jedná se tedy o elementární funkci.
K vyjádření funkce jsme použili funkčních hodnot. Velmi jednoduše také můžeme zapsat tuto funkci přímo pomocí funkčního kalkulu. Potom zapíšeme $f = \sin \circ [(\mathrm{id}+1)(\mathrm{id}+1)]$.

Zde je však důležité ukázat, že budeme-li používat v našich příkladech mocninnou funkci id^k, goniometrické funkce $\cos, \mathrm{tg}$ a cotg a cyklometrické $\arccos, \mathrm{arctg}$ a $\mathrm{arccotg}$, mluvíme stále o elementárních funkcích, jelikož tyto funkce můžeme za použití výše uvedených operací vyjádřit pomocí funkcí $\mathrm{id}, \sin$ a $\arcsin$ tak, že zůstaneme uvnitř množiny $\mathcal{E}$.

Věta 1. $\langle F_E \cup \{\mathrm{id}^k, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arccotg}\}; O_E \rangle = \mathcal{E}$.

Důkaz. Funkci mocninnou jsme již výše definovali z funkce identické za pomoci operace násobení. U goniometrických funkcí není problém pomocí funkce sin vyjádřit ostatní:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
\mathrm{tg}\, x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}, \\
\mathrm{cotg}\, x &= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin x}.
\end{aligned}$$

U funkcí cyklometrických bude vyjádření složitější, nicméně ani zde nebude problém vyjádřit všechny funkce pomocí arcsin.

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

Nyní vyjádříme také funkce arctg a arccotg. Jelikož není problém vyjádřit jednu pomocí druhé jako

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x,$$

stačí nám vyjádřit například $\operatorname{arctg} x$. Položíme tedy rovnost

$$\arcsin y \quad = \quad \operatorname{arctg} x$$

a vyjádříme y:

$$\begin{aligned} \arcsin y &= \operatorname{arctg} x \qquad / \sin \restriction \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \circ, \\ \sin(\arcsin y) &= \sin(\operatorname{arctg} x), \\ y &= \sin(\operatorname{arctg} x). \end{aligned}$$

Zde se pokusíme funkci sin vyjádřit pomocí funkce tg tak, abychom se ve výše uvedené rovnici zbavili goniometrických a cyklometrických funkcí.

Lemma 2.

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Důkaz. Dokážeme přímou kalkulací.

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{|\cos x|}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \sin x.$$

Absolutní hodnoty jsme se mohli zbavit, jelikož tuto rovnost dokazujeme pouze pro $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, kde je funkce cos kladná. □

Pomocí tohoto lemmatu můžeme tedy vyjádřit

$$y = \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

a dostáváme

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

□

Můžeme tedy říci, že předpisem elementární funkce je každý konečný vzoreček obsahující jen funkce konstantní, identické, mocninné, odmocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické a čtyři základní aritmetické operace a skládání.

Poznámka. Mezi elementární funkce patří rovněž funkce hyperbolické (lze je vyjádřit za pomoci funkce exponenciální) a hyperbolometrické (inverzní funkce k hyperbolickým, resp. jejich restrikcím), ale protože se s nimi ve standardní výuce matematiky pracuje zřídka, nebudeme se jimi zabývat.

Kapitola 2

Definiční obory elementárních funkcí

2.1 Hledání definičního oboru elementárních funkcí

V této části vysvětlíme algoritmus nalezení definičního oboru elementární funkce. Na začátku si však ukážeme jeden zajímavý příklad.

Příklad 3. Určete definiční obor funkce

$$f : y = \frac{2^{\operatorname{arctg}(\sin(x^2+1)+7)}}{\sqrt[3]{\operatorname{arccotg} 2^x}}.$$

Řešení. Na první pohled vypadá úloha na nalezení definičního oboru této funkce téměř neřešitelná, po podrobnějším prozkoumání však zjistíme, že se jedná o úlohu triviální. V čitateli jsou vnější exponenciální funkce i vnitřní funkce arctg, sin, id^2, K_b definovány na celém $\mathbb{R}$. Totéž platí pro vnější funkci $\mathrm{id}^{\frac{1}{3}}$ i vnitřní arccotg a $\exp_2$ ve jmenovateli. Funkce arccotg navíc nenabývá pro žádné reálné číslo hodnoty nula, a proto ani dělením se definiční obor nezmění, a tudíž $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Jak je vidět z tohoto příkladu, ne každá úloha na určení definičního oboru, která vypadá na první pohled složitě, opravdu složitá je. Tento příklad je významný, jelikož v reálných příkladech je vhodné zařazovat funkce podobné předešlé, kde student musí sám zjistit, že tato funkce je zde vzhledem k definičnímu oboru bezvýznamná a nijak jej neomezuje.

Nyní již přistoupíme k výkladu algoritmu nalezení definičního oboru elementární funkce. Nejdříve definujeme funkci id^{-1}, abychom z množiny operací O_E mohli vyjmout operaci dělení $(\div)$. Pro formalizaci algoritmu hledání definičního oboru funkce je vyjmutí operace dělení výhodné, jelikož kromě podmínky smysluplnosti dělence i dělitele požaduje nenulovost dělitele. Na rozdíl od ostatních aritmetických operací vytváří tedy dvě podmínky zároveň. Pokud dělení z množiny operací vyjmeme, můžeme říct, že všechny aritmetické operace požadují pouze smysluplnost obou operandů.

Definice 18. Funkcí id^{-1} nazveme funkci $\frac{1}{\mathrm{id}}$.

Definičním oborem funkce id^{-1} je $\mathcal{D}(\mathrm{id}^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lemma 3. $\langle F_E; O_E \rangle = \langle F_E \cup \{\mathrm{id}^{-1}\}; O_E \setminus \{\div\} \rangle$.

Důkaz. Dokážeme dvě inkluze:

1. $\langle F_E \cup \{\mathrm{id}^{-1}\}; O_E \setminus \{\div\} \rangle \subset \langle F_E; O_E \rangle$.
   Plyne z definice 18, jelikož $\mathrm{id}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{id}}$.

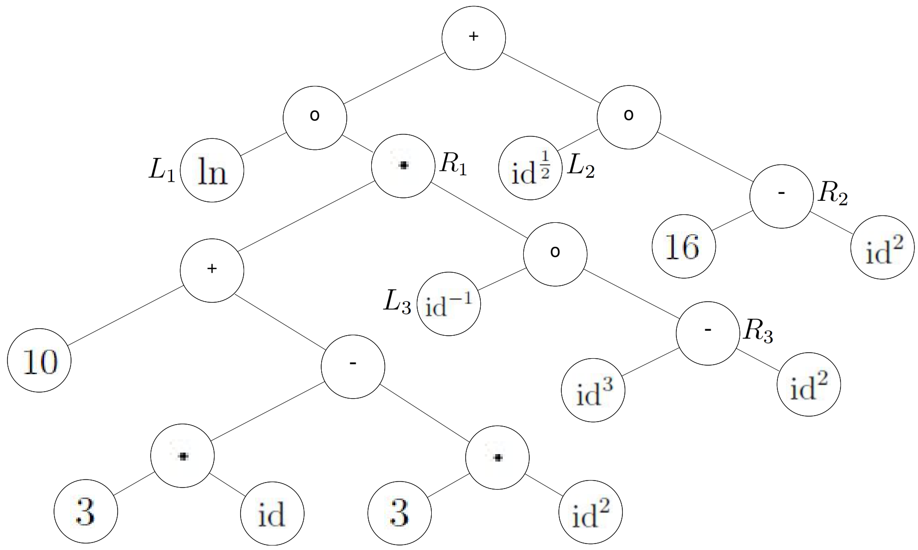
2. $\langle F_E; O_E \rangle \subset \langle F_E \cup \{\mathrm{id}^{-1}\}; O_E \setminus \{\div\} \rangle$.
   Vyjádříme podíl dvou funkcí $(f \div g)$ pomocí funkce id^{-1} a operací násobení a skládání funkcí:
$$f \div g = \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} = f \cdot \frac{1}{\mathrm{id}} \circ g = f \cdot \mathrm{id}^{-1} \circ g.$$

Jelikož platí obě inkluze, platí $\langle F_E; O_E \rangle = \langle F_E \cup \{\mathrm{id}^{-1}\}; O_E \setminus \{\div\} \rangle$. $\square$

Při hledání definičního oboru budeme vycházet z definic a vět uvedených v první kapitole. Celý proces řešení si ukážeme na jednom konkrétním příkladu. Vyjdeme z definičních oborů základních elementárních funkcí, se kterými se počítá na střední škole (viz Tabulka 2.1).

funkce	**definiční obor**
K_b	$\mathbb{R}$
id	$\mathbb{R}$
$\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}, k \in \mathbb{N}$	$\langle 0; \infty)$
$\mathrm{id}^{\frac{1}{2k+1}}, k \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
id^{-1}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\exp$	$\mathbb{R}$
$\exp_a$	$\mathbb{R}$
$\ln$	$(0; \infty)$
$\log_a$	$(0; \infty)$
$\sin$	$\mathbb{R}$
$\cos$	$\mathbb{R}$
tg	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
cotg	$(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin$	$\langle -1; 1 \rangle$
$\arccos$	$\langle -1; 1 \rangle$
arctg	$\mathbb{R}$
$\mathrm{arccotg}$	$\mathbb{R}$

Tabulka 2.1: Definiční obory základních elementárních funkcí



Obrázek 2.1: Strom funkce

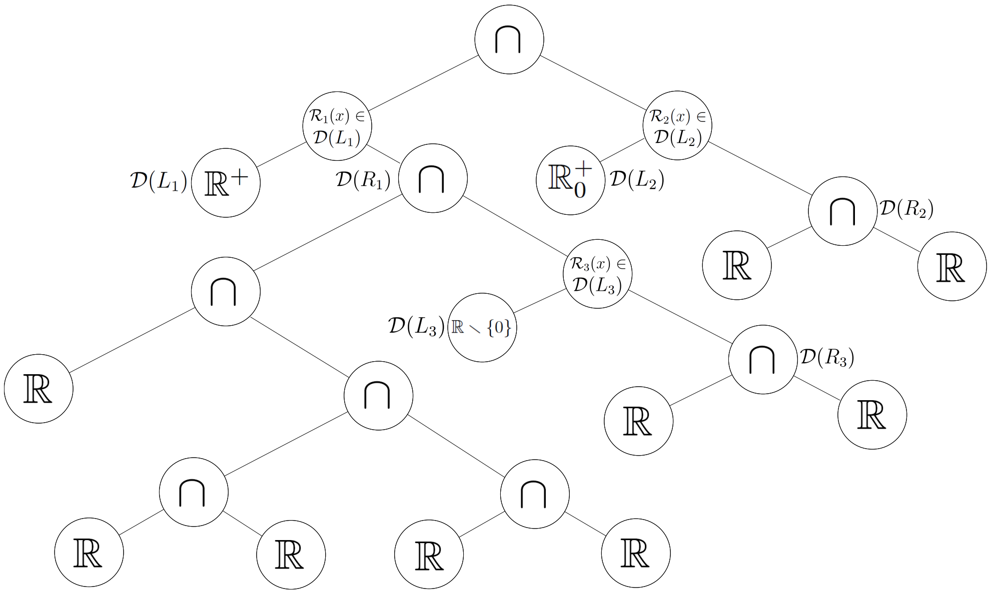
Příklad 4. Určete maximální definiční obor funkce

$$f : y = \ln \frac{10 + 3x - 3x^2}{x^3 - x^2} + \sqrt{16 - x^2}.$$

Řešení. Postupovat budeme pomocí dekompozice funkce. Tento postup je opačný oproti konstrukci této funkce podle definice, kdy funkce vznikne ze základních elementárních pomocí aritmetických operací a operace skládání. Tento rozklad znázorníme binárním stromem, kde v uzlech jsou jednotlivé operace a v listech základní elementární funkce (viz Obrázek 2.1).

Stejně jako jsme rozložili tuto funkci, můžeme rozložit i postup nalezení jejího definičního oboru s tím, že operacím aritmetickým přiřadíme podle definice 10 množinovou operaci průnik a operaci skládání podle věty 1 restrikci vnitřní funkce, která zajistí, aby její obor hodnot byl podmnožinou definičního oboru funkce vnější (viz Obrázek 2.2).

Značení. $R_i, i \in \mathbb{N}$ značí funkci, kterou znázorňuje pravý podstrom vystupující ze sousedního vyššího uzlu, $L_i, i \in \mathbb{N}$ funkci, kterou znázorňuje levý podstrom. Podmínka $R_i(x) \in \mathcal{D}(L_i)$ tedy značí právě takovou restrikci funkce R_i, aby funkční hodnoty $R_i(x)$ patřily do definičního oboru funkce L_i.



Obrázek 2.2: Strom definičního oboru

Poté postupně omezujeme definiční obor pomocí tzv. backtrackingu, kdy z uzlu postupujeme dolů doleva, pokud jsme ještě vlevo nebyli. Pokud ano a nebyli jsme ještě vpravo, postoupíme doprava. Když jsme již byli vlevo i vpravo, vracíme se nahoru. Pokud jsme v kořeni (nemůžeme již postoupit nikam), tak jsme skončili. Když dospějeme do listu, zaevidujeme množinu. Když jsme v uzlu podruhé, aplikujeme podmínku tohoto uzlu[i].

Poznámka. Mnoho podstromů jsme schopni vyhodnotit rovnou a nemusíme je rozkládat. Jelikož množinová operace průnik je asociativní, můžeme, pokud podstrom, který vyhodnocujeme, obsahuje pouze operaci průnik množin, tento podstrom nahradit listem obsahujícím množinu, která je průnikem všech množin v něm obsažených. Druhá možnost, kdy můžeme zjednodušit strom definičního oboru, nastává, pokud všechny listy obsahují pouze množinu všech reálných čísel. Takový podstrom můžeme nahradit listem s touto množinou.

[i]Jelikož předmětem této práce není teorie grafů, některé pojmy zde nejsou definované a přistupujeme k nim intuitivně.

Podíváme-li se pozorně na stromy na obrázcích 2.1 a 2.2, zjistíme, že při průchodu stromem projdeme nejdříve podstrom, který zobrazuje funkci, resp. definiční obor funkce $g : y = \ln \frac{10+3x-x^2}{x^3-x^2}$, a potom podstrom pro funkci a definiční obor funkce $h : y = \sqrt{16-x^2}$. Funkcí f je potom součet funkcí g a h, tedy $f = g + h$, s definičním oborem $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) \cap \mathcal{D}(h)$. Začneme tedy s levým podstromem. Dostáváme podmínky pro jednotlivé mocninné funkce, a tedy množinu $\mathbb{R}$ pro všechny tyto funkce. Součtem vzniká funkce polynomická, která je opět definovaná na celé množině $\mathbb{R}$ (což je vidět i z grafu), jelikož $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. První podmínka omezující definiční obor je podmínka na nenulovost funkce složené s vnější funkcí id^{-1}, tedy $R_3(x) = x^3 - x^2 \in \mathcal{D}(L_3) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Do nerovnice tuto podmínku přepíšeme jako $x^3-x^2 \neq 0$ a z toho $x \neq 0 \wedge x \neq 1$. Definiční obor jsme zúžili na $\mathbb{R} \smallsetminus \{0, 1\}$. Poté se dostáváme k podmínce na kladnost vnitřní funkce složené s funkcí ln, tedy $R_1(x) = \frac{10+3x-x^2}{x^3-x^2} \in \mathcal{D}(L_1) = \mathbb{R}^+$. Tu vyjádříme nerovnicí $\frac{10+3x-x^2}{x^3-x^2} > 0$. Řešení této nerovnice je množina $(-\infty; -2) \cup (1; 5)$. Množinu jsme tedy dále zúžili, tentokrát na sjednocení intervalů $(-\infty; -2) \cup (1; 5)$, které je definičním oborem funkce g. Nyní postupujeme do pravého podstromu. Jelikož polynomická funkce, jak jsme již zmínili, je definovaná v celém $\mathbb{R}$, jedinou podmínkou, na kterou narazíme, je nezápornost funkce složené s vnější funkcí $\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}$, a tedy $R_2(x) = 16 - x^2 \in \mathcal{D}(L_2) = \mathbb{R}_0^+$. Řešíme nerovnici $16 - x^2 \geq 0$. Řešením této nerovnice je interval $\langle -4; 4 \rangle$, což je definiční obor funkce h. Definičním oborem funkce f je tedy $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) \cap \mathcal{D}(h) = \langle -4; -2) \cup (1; 4\rangle$.

Tímto algoritmem jsme ukázali jednoznačný a univerzální postup pro nalezení definičního oboru elementární funkce, jehož správnost plyne z definic a vět o aritmetických operacích a operaci skládání. Pro nalezení definičního oboru se ale může zdát zbytečně složitým, obzvláště pro úlohu, na které jsme ho ukázali. Nicméně výhodou je možnost jednoznačně lokalizovat případné chyby v řešení, což se může ukázat výhodné především při řešení složitějších příkladů. Přesná formalizace také umožňuje implementaci algoritmu počítačovým programem. Reprezentace elementárních funkcí binárním stromem se skutečně v takových aplikacích používá[ii].

2.2 Definiční obory významných podoborů $\mathcal{E}$

V této části se začneme věnovat rozboru různých typů definičního oboru v závislosti na použitých funkcích a metodami řešení úloh na hledání definičního oboru funkce. Budeme postupovat od nejjednodušších funkcí, ke kterým budeme postupně přidávat další a sledovat, jak se definiční obor může změnit.

2.2.1 Polynomická funkce

Definice 19. Polynomem nejvýše n-tého stupně ($n \in \mathbb{N}_0$) rozumíme funkci f definovanou předpisem

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left(f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right).$$

Pokud platí $a_n \neq 0$, nazýváme tento polynom polynomem stupně právě n [1, str. 120].

Vysvětlení. Polynom je součet členů ve tvaru koeficient (konstanta) krát celá nezáporná mocnina x. Jak ukazuje následující lemma, platí to i opačně.

Lemma 4. Nechť $\mathcal{M} = \{ax^k; a \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N}_0\}$, potom $P(x)$ je polynom právě tehdy, když je konečným součtem prvků $\mathcal{M}$.

Důkaz. Jelikož prvky z množiny $\mathcal{M}$ jsou ve tvaru koeficient z množiny reálných čísel krát celá nezáporná mocnina x, z definice plyne, že každý polynom lze zapsat jako součet prvků z $\mathcal{M}$, a stejně tak opačně, součet prvků z M bude vždy polynom. $\square$

Věta 2. $\mathcal{P} = \langle\{K_b, \mathrm{id}\}, \{+, -, \cdot, \circ\}\rangle$ *je rovna množině všech polynomických funkcí.*

[ii]po konzultaci s Mgr. Derkem Pilousem

Důkaz. K_b je polynom, jelikož $K_b = b \cdot x^0$, id je polynom, jelikož $\mathrm{id}(x) = 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0$. Nyní dokážeme, že součet, rozdíl, součin, podíl a složení polynomů je opět polynom.

1. $+$:

   $$\sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n_2} b_k x^k.$$

   Podle Lemmatu 4. Jedná se o součet členů $\mathcal{M}$, tedy polynom.

2. $-$:

   $$\sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k - \sum_{l=0}^{n_2} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n_2} -b_k x^k,$$

   čímž jsme úlohu převedli na bod 1, který jsme již dokázali.

3. $\cdot$:

   $$\sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k \cdot \sum_{l=0}^{n_2} b_l x^l = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} a_k b_l x^{k+l},$$

   kde $a_k b_l$ je konstanta a x^{k+l} je mocninná funkce. Tedy $a_k b_l x^{k+l} \in \mathcal{M}$. Proto i dvojitý součet je součtem prvků z $\mathcal{M}$, tudíž polynom.

4. $\circ$:

   $$\sum_{k=0}^{n_1} a_k \left(\sum_{l=0}^{n_2} b_l x^l \right)^k.$$

   V tomto bodě můžeme využít předchozích. $\left(\sum_{l=0}^{n_2} b_l x^l \right)^k$ je zjevně pro každé k součin polynomů, tedy polynom (viz. bod 3). Poté tento polynom postupně násobíme $a_0, a_1, \ldots a_{n_1}$, což bude pokaždé polynom, a tyto polynomy sčítáme. Výsledný výraz je tedy polynomem.

Dokázali jsme, že každý prvek $\mathcal{P}$ je polynom. Nyní dokažme, že každý polynom patří do $\mathcal{P}$. Každý prvek $\mathcal{M}$ patří do $\mathcal{P}$, protože vzniká z funkce konstantní a identické pomocí operace násobení. A jelikož každý polynom lze zapsat jako konečný součet prvků z M, každý polynom je z množiny $\mathcal{P}$. □

Jak jsme již zmiňovali výše, výraz definující polynom má smysl pro každé reálné číslo, definiční obor polynomických funkcí bude proto celé $\mathbb{R}$.

2.2.2 Racionální funkce

Definice 20. Funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy v proměnné x a polynom Q není identicky roven 0, se nazývají **funkce racionální** [7, str. 151].

Poznámka. Každý polynom je racionální funkcí s polynomem stupně 0 ve jmenovateli.

Věta 3. $\mathcal{R} = \langle\{K_b, \mathrm{id}\}, \{+, -, \cdot, \div, \circ\}\rangle$ *je rovna množině obsahující právě všechny racionální funkce a funkci prázdnou.*

Důkaz. Jak vyplývá z poznámky uvedené výše, K_b a id jsou funkce racionální, tudíž budeme opět dokazovat, že množina racionálních funkcí rozšířených o prázdnou funkci je uzavřena na operace $+, -, \cdot, \div, \circ$. Funkce prázdná, v součtu, rozdílu, součinu, podílu i při složení s libovolnou elementární funkcí, je funkce prázdná. Stačí nám nyní dokázat, že součet, rozdíl, součin, podíl a složení dvou racinonálních funkcí je funkce racionální, nebo funkce prázdná.

1. $+$:

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{m_1} a_k x^k}{\sum\limits_{l=0}^{n_1} b_l x^l} + \frac{\sum\limits_{i=0}^{m_2} c_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{n_2} d_j x^j} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m_1} a_k x^k \sum\limits_{j=0}^{n_2} d_j x^j + \sum\limits_{i=0}^{m_2} c_i x^i \sum\limits_{l=0}^{n_1} b_l x^l}{\sum\limits_{l=0}^{n_1} b_l x^l \sum\limits_{j=0}^{n_2} d_j x^j}.$$

   Jelikož v čitateli nám vznikly součiny dvou polynomů, které jsou také polynomy, a jejich součet, který bude stále polynomem (viz Věta 2), a ve jmenovateli také součin dvou polynomů, jedná se stále o racionální funkci.

2. $-$: Dokážeme stejně jako pro sčítání převedením na společného jmenovatele s využitím důkazu z Věty 2.

3. $\cdot$:
$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{m_1} a_k x^k}{\sum\limits_{l=0}^{n_1} b_l x^l} \cdot \frac{\sum\limits_{i=0}^{m_2} c_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{n_2} d_j x^j} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m_1} a_k x^k \sum\limits_{i=0}^{m_2} c_i x^i}{\sum\limits_{l=0}^{n_1} b_l x^l \sum\limits_{j=0}^{n_2} d_j x^j}.$$
Jelikož víme, že součin dvou polynomů je polynom, jedná se opět o podíl dvou polynomů, a tedy racionální funkci.

4. $\div$: Jelikož platí
$$\frac{\frac{P_1(x)}{P_2(x)}}{\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot \frac{Q_2(x)}{Q_1(x)},$$
pokud není polynom Q_1 identicky roven nule, převedli jsme tento bod na předchozí, který jsme již dokázali. Pokud ano, jedná se o prázdnou funkci.

5. $\circ$:
$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{m_1} a_k \left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{m_2} c_i x^i}{\sum\limits_{j=0}^{m_3} d_j x^j} \right)^k}{\sum\limits_{l=0}^{n_1} b_l \left(\frac{\sum\limits_{p=0}^{n_2} e_p x^p}{\sum\limits_{q=0}^{n_3} f_q x^q} \right)^l}.$$
V tomto případě se opět můžeme odkázat na předešlé body. Podíl v závorkách je podíl dvou polynomů, tedy racionální funkce. Umocněna na celé nezáporné k je stále racionální, jelikož umocnění lze převést na násobení. Když tuto funkci postupně násobíme konstantami $a_o, a_1 \dots a_{m_1}$(resp. a_{n_1}), jedná stále o racionální funkci (viz. důkaz pro násobení) a součet těchto m_1 (resp. n_1) racionálních funkcí bude opět racionální funkcí (viz důkaz pro součet). Podíl dvou racionálních funkcí potom bude také racionální funkcí (viz důkaz pro podíl).

Dokázali jsme jednu inkluzi, dokažme nyní opačnou. Každý polynom je prvek $\langle\{K_b, \mathrm{id}\}, \{+, -, \cdot, \circ\}\rangle$, množina $\mathcal{R}$ je její nadmnožinou a obsahuje operaci dělení, proto každá racionální funkce je prvek $\mathcal{R}$. $\square$

Přidáním operace dělení vznikla podmínka smysluplnosti výrazu definujícího racionální funkci. Dělení, na rozdíl od předchozích aritmetických operací, není definováno na celém $\mathbb{R}^2$, jelikož není definováno dělení nulou. Proto definičním oborem racionální funkce je množina $\mathbb{R}$ bez kořenů polynomu ve jmenovateli této funkce. Jak víme z polynomické algebry, množina kořenů polynomu (s výjimkou nulového polynomu) je konečná[iii], definiční obor racionální funkce je tedy doplňkem ke konečné podmnožině $\mathbb{R}$. Problémem při hledání definičního oboru ve výuce matematiky může být obtížná řešitelnost, či algebraická neřešitelnost problému nalezení kořenů polynomu ve jmenovateli. Polynomické rovnice stupně 0, 1 a 2 jsou řešitelné jednoduše a postup při hledání kořenů je znám již studentům na střední škole. Pro polynomy stupně 3 a 4 je hledání kořenů nad rámcem středoškolského učiva matematiky[iv], pro polynomy stupně 5 a více je obecně nemožné nalézt algebraicky kořeny[v].

2.2.3 Přidání odmocnin

Označme $\mathcal{IR} = \langle\{K_b, \mathrm{id}, \mathrm{id}^{\frac{1}{k}}\}, \{+, -, \cdot, \div, \circ\}\rangle$. Tato množina funkcí je již na určení definičního oboru složitější. Přidali jsme funkce, z nichž některé nejsou definovány na celém $\mathbb{R}$, přibudou nám tedy podmínky při hledání definičního oboru složené funkce. Při vnitřním složení (např. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$) omezuje definiční obor na nezáporná čísla (vnější funkce pak samozřejmě může definiční obor omezit i více). Při vnějším složení (např. $\sqrt{x^2 - 7x + 5}$) nesmí být argument pod odmocninou záporný. Poprvé může tedy v definičním oboru oproti $\mathbb{R}$ chybět celý interval, nebo sjednocení konečného počtu intervalů (nekonečná množina čísel).

Věta 4. *K množině, kterou tvoří sjednocení konečného počtu intervalů a izolovaných bodů, existuje funkce z $\mathcal{IR}$, pro kterou platí, že tato množina je jejím definičním oborem.*

[iii] Tento důkaz plyne ze základní věty algebry, která přesahuje rámec této práce.
[iv] Řeší se pomocí tzv. Cardanových vzorců.
[v] Nelze vyjádřit kořeny pomocí elementárních funkcí.

Důkaz. Mějme intervaly $I_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Označme krajní body I_i jako a_i a b_i a bez újmy na obecnosti předpokládejme

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 ... < a_n < b_n,$$

a izolované body

$$c_1, c_2, ..., c_m \text{ takové, že } \forall i, j : c_j \notin I_i.$$

Nyní definujeme zobrazení P tímto způsobem: Nechť I je interval s krajními body $a < b,\ a, b \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$P(I) = \begin{cases} a - x & \text{pokud } I = \langle a; \infty), a \in \mathbb{R} \\ x - a & \text{pokud } I = (-\infty; a\rangle, a \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{a-x} & \text{pokud } I = (a; \infty), a \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{x-a} & \text{pokud } I = (-\infty; a), a \in \mathbb{R} \\ (x-a)(x-b) & \text{pokud } I = \langle a; b\rangle, a, b \in \mathbb{R} \\ \frac{x-a}{x-b} & \text{pokud } I = \langle a; b), a, b \in \mathbb{R} \\ \frac{x-b}{x-a} & \text{pokud } I = (a; b\rangle, a, b \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{(x-b)(x-a)} & \text{pokud } I = (a; b), a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hledanou funkcí je například funkce daná předpisem

$$f(x) = \sqrt{-\prod_{i=1}^{n} P(I_i) \cdot \prod_{i=1}^{m} (x - c_i)^2}.$$

Jelikož doplněk k výše diskutované množině bude opět sjednocením konečného počtu intervalů a izolovaných bodů, platí také, že pro tento doplněk můžeme stejným postupem nalézt funkci, jejímž bude definičním oborem. $\square$

Poznámka. Pokud bychom izolovaný bod chápali jako interval $\langle b; b\rangle$, v důkazu by jako hledaná funkce stačila funkce daná předpisem

$$f(x) = \sqrt{-\prod_{i=1}^{n} P(I_i)}.$$

2.2.4 Exponenciela, logaritmus a arkus sinus

V této části přidáme do množiny generátorů exponenciální a logaritmickou funkci. Výsledná množina generovaných funkcí se nám tak rozroste o další funkce a dostáváme množinu $\langle\{\mathrm{c}, \mathrm{id}, \mathrm{id}^{\frac{1}{k}}, \exp, \ln\}, \{+, -, \cdot, \div, \circ\}\rangle$. Exponenciela, stejně jako následující funkce, množinu generovaných funkcí rozšíří, jelikož tuto funkci není možné vyjádřit pomocí předchozích. Důkaz však přesahuje rámec této práce.[vi]

Exponenciální funkce sama o sobě nepřidává podmínky pro řešení úloh na hledání definičního oboru, jelikož $\mathcal{D}(\exp) = \mathbb{R}$. Nicméně u příkladů na hledání definičního oboru má význam, jelikož zvyšuje variabilitu možných příkladů, respektive nerovnic, které vzniknou při řešení příkladu. Umožňuje nám tedy komplexnější prověření znalostí studentů při řešení rovnic a nerovnic. Máme-li například funkci $f : y = \sqrt{6 + x - x^2}$, můžeme tuto funkci složit s vnitřní exponenciální funkcí (využijeme například funkci $g : y = 2^x$). Tím dostaneme předpis funkce: $h(x) = \sqrt{2^x - 4^x + 6}$. Nerovnici, která vznikne při hledání definičního oboru, student řeší právě substitucí za 2^x. Zde však opět narážíme na problém s řešitelností úloh, a to ve dvou úrovních. Některé rovnice, které vzniknou z podmínek platnosti definičního výrazu, nejsou v rámci elementárních funkcí řešitelné vůbec, některé sice ano, nicméně obtížnost příkladu převyšuje i rozšířenou látku vyučovanou na střední škole. Příkladem takové funkce, jejíž definiční obor nedokážeme v rámci elementárních funkcí vyjádřit, je například funkce $f : y = \sqrt{x^2 + 2^x - 4}$. O této funkci víme, že nebude prázdná (dosazením hodnot zjistíme, že např. pro $x = 2$ má definiční výraz smysl) ani definovaná na množině $\mathbb{R}$ (pro $x = 0$ nemá definiční výraz smysl), nicméně maximální definiční obor této funkce pomocí elementárních funkcí a celých čísel vyjádřit nedokážeme. Příkladem funkce, jejíž definiční obor pomocí elementárních funkcí a celých čísel vyjádřit lze, ale řešení nebude známé studentovi střední školy, je např. funkce $f : y = \ln(8^x - 2^x + 4)$. Jedná se o složení funkce $g : y = \ln(x^3 - x + 4)$ s vnitřní funkcí $h : y = 2^x$. Z podmínek smysluplnosti tohoto výrazu dostaneme po zavedení substituce

[vi] Čtenáře odkazuji na článek Roberta Rische [6].

kubickou nerovnici bez racionálních kořenů, jejíž kořeny student střední školy obecně nalézt nedokáže.

Logaritmická funkce (ať bude základ logaritmu jakýkoli) se stran definičního oboru a podmínek omezujících definiční obor chová podobně jako odmocninná funkce. Je definovaná jen pro kladné hodnoty argumentu, tedy $\mathcal{D}(\log_a) = (0; \infty)$. Proto může, stejně jako funkce odmocninná, z definičního oboru vyjmout celé intervaly. Rozdíl je však zjevný. Logaritmická funkce má smysl pouze pro kladné hodnoty argumentu, na rozdíl od odmocninné, která má smysl pro nezáporné hodnoty argumentu (tedy i pro nulu).

Přidání funkce arcsin dříve než funkce sin se může zdát na první pohled ne zcela systematické vzhledem k zavedení arcsin jako inverze k restrikci sin. Nicméně vzhledem k definičnímu oboru tomu tak pravděpodobně není. Funkce $\exp, \ln, \arcsin$ rozšířily množinu generovaných funkcí. Nás však zajímá, zda rozšířily také množinu definičních oborů generovaných funkcí. Naše hypotéza je taková, že množina definičních oborů bude stejná jako u množiny R. Bohužel se nám nepodařilo tuto hypotézu dokázat. Nicméně je podpořena zkušenostmi s řešením úloh na hledání definičního oboru. Také v dostupné literatuře jsme neobjevili žádnou takovou funkci, která by byla definována na nekonečném sjednocení intervalů a/nebo izolovaných bodů.

2.2.5 Sinus

Poslední funkcí, kterou do námi zkoumané množiny přidáme, bude funkce sinus. Tím dostaneme kompletní množinu $\mathcal{E}$. Definičním oborem funkcí z $\mathcal{E}$ může být sjednocení konečného počtu intervalů a izolovaných bodů, ale zcela jistě i sjednocení nekonečného počtu. Stačí uvést funkci $f : y = \sqrt{\sin x}$, pro kterou $\mathcal{D}(f) = \langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Pravděpodobně tedy až přidáním funkce sin do množiny generátorů můžeme zkonstruovat funkce, které jsou definované na nekonečném sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

Kapitola 3

Návrhy úloh

V této části budeme k problému definičního oboru přistupovat opačně. Nebudeme se ptát, jak vypadají definiční obory dané množiny funkcí, ale jak najít k danému definičnímu oboru funkci, která bude právě na této množině definovaná. Jelikož lze těžko rozhodnout, který definiční obor je složitější, a který jednodušší, budeme postupovat podle složitosti nerovnic, které dostaneme při řešení úlohy na nalezení definičního oboru funkce. Obtížnost by neměla přesahovat úroveň seminářů a cvičení z matematiky na gymnáziích.[i]

Dříve než se dostaneme k detailnějšímu rozboru definičních oborů, zmíníme jednu speciální funkci. Jedná se o funkci jejíž definičním oborem je prázdná množina. Nazýváme ji prázdnou funkcí. Jedná se o funkci, jejíž definiční výraz nemá smysl pro žádnou reálnou hodnotu proměnné. Jako příklad můžeme uvést funkci $x \mapsto \ln(-x^2)$, nebo $x \mapsto \sqrt{-\frac{1}{x^2}}$. Definičním oborem složené funkce $f \circ g$ je totiž $g_{-1}(\mathcal{D}(f))$, tedy podmnožina $\mathcal{D}(g)$, která se nejdříve při zobrazení g zobrazí do $\mathcal{D}(f)$. Vnitřní funkce $-\operatorname{id}^2$ a $-\operatorname{id}^{-1} \circ \operatorname{id}^2$ zobrazují svůj definiční obor do intervalu $\mathcal{H}(-\operatorname{id}^2) = \langle 0; \infty)$ resp. $\mathcal{H}(-\operatorname{id}^{-1} \circ \operatorname{id}^2) = (0; \infty)$, tedy mimo definiční oboru funkcí ln, resp. sudá odmocnina. Zajímavá funkce, jako ilustrační, je také $x \mapsto \sqrt{\sin x - a}$, kde $a > 1$. Funkce sin zobrazí množinu $\mathbb{R}$ na $\mathcal{H}(\sin) = \langle -1; 1\rangle$, proto

[i]Pomineme-li cyklometrické funkce, postupy řešení námi nalezených příkladů by měly být známy všem maturantům z matematiky na gymnáziu.

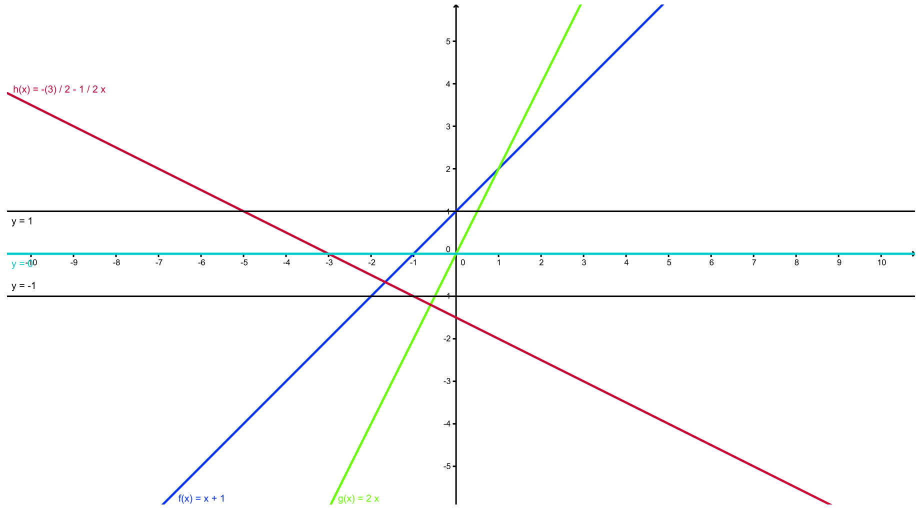
$\mathcal{H}(\sin - \mathrm{K}_a) = \langle -1-a; 1-a \rangle$, takže pro $a > 1$ nabývá hodnot pouze záporných a výsledná funkce nemá smysl pro žádné $x \in \mathbb{R}$. Ve výuce matematické analýzy bývá často jako příklad uváděna funkce $x \mapsto \ln \ln \sin x$[ii]. Na rozdíl od předchozích není na první pohled vidět, že tato funkce má prázdný definiční obor. Nicméně je tomu tak. Sinus zobrazuje množinu $\mathbb{R}$ na množinu $\mathcal{H}(\sin) = \langle -1; 1 \rangle$. Tuto množinu zobrazí funkce ln na množinu $(-\infty, 0\rangle$ a pro $x \in (-\infty; 0\rangle$ nemá výraz $\ln x$ smysl. Důvod pro tento příklad jako jeden z modelových je jeho derivace. Jestliže tuto funkci mechanicky zderivujeme, dostáváme $\frac{\operatorname{cotg} x}{\ln \sin x}$. Funkce daná tímto předpisem, na rozdíl od původní, není prázdná, nicméně se nejedná o derivaci této funkce, jelikož ta má za definiční obor prázdnou množinu a tudíž její derivace neexistuje. Ještě jednu zajímavou skupinu předpisů je dobré zmínit. Podle naší definice je elementární funkcí i každá funkce $x \mapsto \frac{a}{0}, a \in \mathcal{E}$. Zároveň tento předpis nemá smysl pro žádné $\mathbb{R}$ a jedná se tedy o prázdnou funkci. Jelikož zobrazení je definované jako množina dvojic, a všechny výše uvedené předpisy definují prázdnou množinu dvojic, můžeme říct, že všechny výše uvedené předpisy definují stejnou funkci, a to funkci prázdnou.

Pro návrh úloh nás budou, spíše než prázdná, zajímat funkce, které jsou definované alespoň pro nějaká reálná čísla. Zároveň hledáme především takové funkce, jejichž definiční obor není celá množina $\mathbb{R}$. Jako vnější funkce budeme tedy většinou využívat funkce $\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$, ln, $\log_a$, id^{-1}, arcsin a arccos.

Poznámka. Význam pro tvorbu příkladů mají však i funkce, které žádným způsobem definiční obor neomezí. Ty zde fungují jako tzv. distraktory. Student v takovém případě musí sám na tento fakt přijít a ztěžuje to řešení zadaného příkladu.

Úmluva. Výrazem konečný interval budeme rozumět interval, jehož oba krajní body mají konečnou hodnotu.

[ii]po konzultaci s Mgr. Derkem Pilousem



Obrázek 3.1: Příklady lineárních funkcí

3.1 Vnitřní lineární funkce

Nejjednodušší vnitřní funkcí, kterou využijeme pro skládání s vnějšími funkcemi $\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$, ln, arcsin a id^{-1}, je funkce lineární. Jedná se o polynomickou funkci prvního stupně. Při řešení úloh na nalezení definičního oboru funkce, kde bude vnitřní lineární funkce, povede na řešení lineární nerovnice. Způsob řešení je tedy znám dokonce již žákům základních škol.

Poznámka. Pokud se jedná o vnější funkci, která již není složena s žádnou další vnější funkcí, můžeme v úlohách na hledání definičního oboru ln a $\log_a$ zaměňovat, jelikož se vzhledem k definičnímu oboru chovají stejně. Za stejného předpokladu můžeme zaměňovat i arcsin a arccos. Pro přehlednost se v takových případech budeme využívat funkcí ln a arcsin.

3.1.1 Vnější funkce logaritmus a sudá odmocnina

Vnější logaritmickou funkci a funkci sudá odmocnina budeme diskutovat současně, jelikož se tyto funkce chovají vzhledem k definičnímu oboru podobně.

Při řešení úlohy hledáme množinu, na které vnitřní funkce nabývá kladných (resp. nezáporných), a na které záporných (resp. nekladných) hodnot.

Lineární funkce má pouze jeden nulový bod (označíme ho u)[iii], a proto řešením bude jeden nekonečný interval s krajním bodem v u. Pro klesající vnitřní funkci od minus nekonečna do u, pro rostoucí od u do plus nekonečna. Grafy některých lineárních funkcí i s nulovou hranicí jsou zobrazené na obrázku 3.1. Chceme-li tedy, aby funkce $f = \mathrm{id}^{\frac{1}{2k}} \circ g$ měla definiční obor $\langle u; \infty)$, hledáme funkci $g : y = ax+b,\ a, b \in \mathbb{R}\ a > 0$ takovou, aby $g(u) = 0$. Řešíme jednu rovnici o dvou neznámých (za parametr zvolíme např. a) a dostáváme $b = -au$. Hledanou vniřní funkcí je tedy funkce $g : y = ax - au$. Pro $a < 0$ bude potom funkce g klesající a funkce f definovaná na intervalu $(-\infty; u\rangle$. Pro logaritmickou funkci složenou s vnitřní funkcí g je definiční obor podobný, jen otevřený.

3.1.2 Vnější funkce arkus sinus

Při složení vnější funkce arkus sinus s vnitřní lineární funkcí řešíme soustavu dvou lineárních nerovnic, tedy úlohu řešitelnou minimálně studenty středních škol. Hledáme hodnoty, pro které vnitřní lineární funkce nabývá funkčních hodnot mezi -1 a 1. Některé grafy lineárních funkcí i se znázorněním hranice v -1 a 1 jsou opět na obrázku 3.1. Složením arcsin s vnitřní lineární funkcí můžeme vytvořit funkci definovanou na libovolném intervalu $\langle u; v\rangle$. Jak si lze všimnout z obrázku 3.1, lineární funkce vždy do intervalu $\langle -1; 1\rangle$ zobrazí množinu, která bude tvořena jen jedním uzavřeným intervalem. Proto složením vnější funkce arcsin s vnitřní lineární funkcí dostaneme vždy funkci definovanou na jednom uzavřeném intervalu.

Příklad 5. Nalezněte lineární funkci g takovou, aby pro $f = \arcsin \circ g$ byl $D(f) = \langle u; v\rangle$, kde $u, v \in \mathbb{R}$.

Řešení. Hledáme lineární transformaci intervalu $\langle u; v\rangle$ na interval $\langle -1; 1\rangle$. Proto tedy $g(x) = ax + b$. Z podmínek $ax + b \geq -1 \wedge ax + b \leq 1$ dostáváme $x \geq \frac{-1-b}{a} \wedge x \leq \frac{1-b}{a}$ pro $a > 0$.

[iii] Při složení vnitřní lineární funkce s vnější funkcí id^{-1} by z definičního oboru vzniklé funkce byl vyjmut pouze bod u.

Dostaneme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} u &= \frac{-1-b}{a} \\ v &= \frac{1-b}{a}. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy získáváme vzorce pro a a b

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{v-u} \\ b &= \frac{u+v}{u-v}. \end{aligned}$$

Hledanou funkcí je potom funkce

$$g_1 : y = \frac{2}{v-u}x + \frac{u+v}{u-v}.$$

Pro $a < 0$ odvodíme vzorec pro vnitřní funkci analogicky a dostaneme

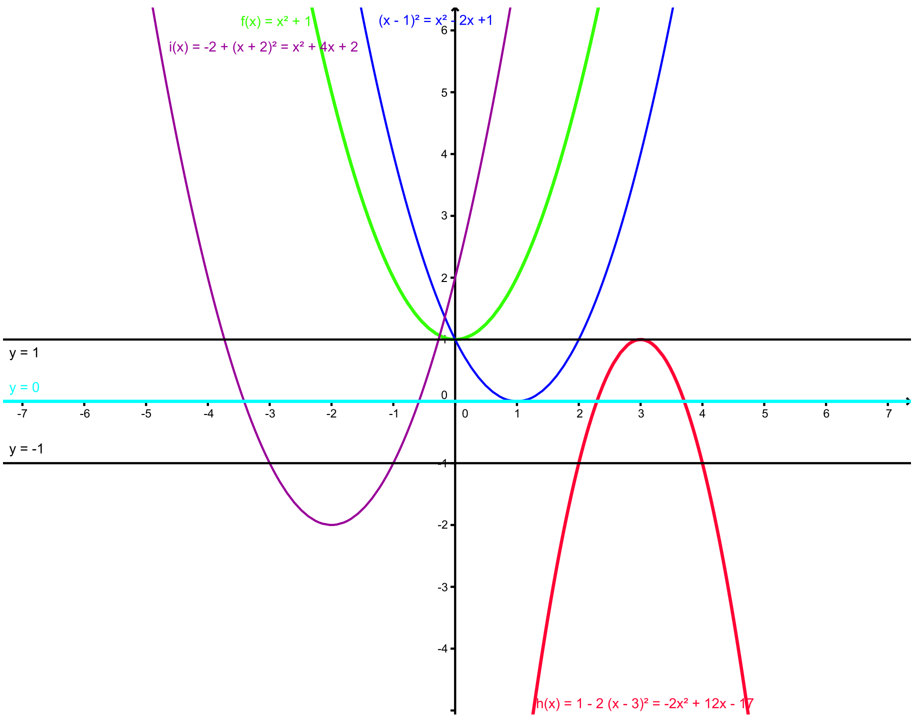
$$g_2 : y = \frac{2}{u-v}x + \frac{u+v}{v-u}.$$

3.2 Vnitřní kvadratická funkce

Další funkce, kterou její jednoduchost umožňuje využít jako vnitřní funkci funkcí $\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$, ln, arcsin a id^{-1}, je funkce kvadratická. To je funkce $g : y = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Opět se jedná o polynomickou funkci, tentokráte druhého stupně.

3.2.1 Vnější funkce logaritmus a sudá odmocnina

Úloha na nalezení definičního oboru vnitřní kvadratické funkce složené s vnější funkcí $\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$, nebo ln povede tentokrát na řešení kvadratické nerovnice. Opět tedy na úlohu řešitelnou studenty středních škol, nicméně řešení je složitější než u nerovnice lineární. Znovu budeme hledat nulové body vnitřní funkce a intervaly, na kterých tato funkce nabývá kladných, resp. nezáporných hodnot. Některé konkrétní kvadratické funkce jsou znázorněny na obrázku 3.2 i s nulovou hranicí.



Obrázek 3.2: Příklady kvadratických funkcí

Rozdělíme dva případy, pro které budeme diskutovat definiční obor funkce $f_1 = \mathrm{id}^{\frac{1}{2\mathrm{k}}} \circ g$, resp. $f_2 = \ln \circ g$. První z nich je pro $a > 0$. V takovém případě nabývá funkce g nezáporných hodnot buď na celém $\mathbb{R}$, nebo pro sjednocení dvou intervalů $(-\infty; u\rangle \cup \langle v; \infty)$. Pokud g nemá žádný reálný kořen, nabývá kladných hodnot a $\mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R}$. Takový případ nastává, pokud je diskriminant rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ menší než nula, tedy $D = b^2 - 4ac < 0$ nebo po úpravě $b^2 < 4ac$. Pokud má rovnice jen jeden reálný kořen, nabývá funkce g jen nezáporných hodnot. Potom $\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{u\}$, kde u je kořenem rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Tato situace nastává pro diskriminant nulový, tedy $b^2 = 4ac$. Významější pro reálné příklady je však samozřejmě taková vnitřní funkce, která definiční obor funkcí f_1 a f_2 omezí. Takový případ nastane pro diskriminant kladný, tedy $b^2 > 4ac$. Hledáme tedy nyní kvadratickou funkci, jejíž kořeny jsou námi zvolené hodnoty u, v, tedy $au^2 + bu + c = 0 \ \wedge \ av^2 + bv + c = 0$, kde $a > 0$. Podle Viétových vztahů dostaneme

$$\begin{aligned} b &= -a(u+v), \\ c &= avu. \end{aligned}$$

Pro takové hodnoty a, b a c pak platí $\mathcal{D}(f_1) = (-\infty; u\rangle \cup \langle v; \infty)$ a $\mathcal{D}(f_2) = (-\infty; u) \cup (v; \infty)$.

Pro $a < 0$ je situace přesně opačná. Definičním oborem funkcí f_1 a f_2 je prázdná množina nebo konečný interval[iv]. Pokud funkce g nemá kořen, jedná se o prázdnou funkci, a tedy $\mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(f_2) = \emptyset$. Když má jen jeden kořen $\mathcal{D}(f_1) = u$, kde u je kořen funkce g a $\mathcal{D}(f_2) = \emptyset$, funkce f_2 je tedy prázdná. Pokud má funkce g kořeny dva, funkce f_1 a f_2 budou definované na jednom konečném intervalu. Hledáme-li funkci $g : y = ax^2 + bx + c$ definovanou na námi zadaném intervalu od u do v dostáváme podobné koeficienty a, b a c jako v předešlém případě:

$$\begin{aligned} b &= -a(u+v) \\ c &= avu. \end{aligned}$$

Rozdíl je pouze v koeficientu a, pro který zde musí platit $a < 0$. Pro tyto hodnoty a, b a c pak platí $\mathcal{D}(f_1) = \langle u; v\rangle$ a $\mathcal{D}(f_2) = (u; v)$.

Poznámka. Máme-li kvadratickou funkci g, tak pro definiční obory funkcí $f_1 : y = \sqrt{-g}$ a $f_2 : y = \ln g$ platí: $\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R} \smallsetminus \mathcal{D}(f_2)$. Pro definiční obory funkcí $f_3 : y = \ln(-g)$ a $f_4 : y = \sqrt{g}$ potom platí $\mathcal{D}(f_3) = \mathbb{R} \smallsetminus \mathcal{D}(f_4)$.

3.2.2 Vnější funkce arkus sinus

Opět můžeme s vnitřní kvadratickou funkcí složit vnější funkci arcsin. Hledání definičního oboru nás dovede k řešení soustavy dvou kvadratických nerovnic, kdy hledáme, pro které hodnoty proměnné vnitřní kvadratická funkce nabývá hodnot mezi -1 a 1. Řešení je tedy opět známo studentům střední školy. Z grafu kvadratických funkcí si můžeme všimnout, že nastat můžou

[iv]Toto platí, pokud izolovaný bod chápeme jako uzavřený interval.

tři možnosti, jak bude definiční obor složené funkce vypadat. Pokud obor hodnot kvadratické funkce neprotne definiční interval arcsin vůbec, bude se jednat o prázdnou funkci. Takový případ nastane pokud $a > 0$ a zároveň rovnice $ax^2 + bx + c = 1$ nemá reálné kořeny, nebo $a < 0$ a zároveň rovnice $ax^2 + bx + c = -1$ nemá reálné kořeny. V ostatních případech se při složení s arcsin jedná o neprázdnou funkci, jelikož definiční interval arcsin obor hodnot vnitřní funkce protne. Pokud budou mít dvě rovnice $ax^2 + bx + c = 1$ a $ax^2 + bx + c = -1$ dohromady minimálně jeden a maximálně tři kořeny, složená funkce bude definovaná na jednom uzavřeném intervalu[v], pokud bude mít kořeny čtyři, bude definovaná na sjednocení dvou stejně dlouhých uzavřených intervalů.

Vysvětlení. Druhý případ, kdy mají výše uvedené rovnice od jednoho do tří kořenů je takový, kdy funkční hodnota extrému vnitřní funkce leží mezi -1 a 1 a graf funkce tedy protne jen jednu z hranic -1 a 1 a druhé se maximálně dotkne. Ve třetím případě leží funkční hodnota extrému mimo interval $\langle -1; 1\rangle$ a graf protne obě hranice -1 a 1.

Nejdříve odvodíme vzorec pro funkci g takovou, aby funkce $f_1 = \arcsin \circ g$ byla definována na uzavřeném intervalu $\langle u; v\rangle$. Začneme odvozením vzorce pro kvadratickou funkci h, ze které složením s vnější funkcí arcsin dostaneme funkci definovanou na intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Co takové funkci víme?

1. $h(-1) = h(1) = \pm 1$,
2. extrém funkce h je z intervalu $\langle -1; 1)$ pro funkci s kladným koeficientem u kvadratického členu, resp. $(-1; 1\rangle$ pro funkci se záporným koeficientem u kvadratického členu.

Vysvětlení. Rovnost v bodě 1. vyjadřuje právě požadavek na jeden z krajních bodů definičního oboru funkce. Požadavek v bodě dva potom zajistí, aby funkce byla definovaná právě na uzavřeném intervalu $\langle -1; 1\rangle$ (aby se interval $\langle -1; 1\rangle$ zobrazil do intervalu $\langle -1; 1\rangle$).

[v] Toto opět platí pokud izolovaný bod považujeme za uzavřený interval.

Jelikož mluvíme o kvadratické funkci a funkční hodnoty $h(1)$ a $h(-1)$ se rovnají, hledaná funkce bude sudá, a proto nebude obsahovat lineární člen. Hledáme tedy funkci $h : y = ax^2 + c$. Nyní podle bodu 1. dostáváme dvě možnosti:

1. $h_1(1) = h_1(-1) = 1$.
   Jednu z funkčních hodnot tedy dosadíme a získáme $a \cdot 1^2 + c = 1$. Úpravou potom dostaneme $a = 1 - c,\ c \in \langle -1; 1)$. Námi hledanou funkcí je potom $h_1 : y = (1 - c)x^2 + c,\ c \in \langle -1; 1)$.

2. $h_2(1) = h_2(-1) = -1$.
   Opět dosadíme a získáme $a \cdot 1^2 + c = -1$. Úpravou potom dostaneme $a = -1 - c, c \in (-1; 1\rangle$. Výsledkem je $h_2 : y = (-1 - c)x^2 + c, c \in (-1; 1\rangle$.

Nyní využijeme lineární transformace intervalu $\langle u; v\rangle$ na interval $\langle -1; 1\rangle$, kterou již známe. Složíme-li funkci, která provádí tuto transformaci, s vnější funkcí h_1, resp. h_2, dostaneme kvadratickou funkci g_1, resp. g_2, takovou, že $\arcsin \circ g_1$, resp. $\arcsin \circ g_2$, má definiční obor $\langle u; v\rangle$. Ukážeme, jak bude taková funkce vypadat například pro g_1:

$$g_1 : y = (1 - c)\left(\frac{4x^2}{(v - u)^2} - \frac{4(v + u)x}{(v - u)^2} + \frac{(v + u)^2}{(v - u)^2}\right) + c = \\ = (1 - c)\left(\frac{2x - v - u}{v - u}\right)^2 + c, c \in \langle -1; 1).$$

Pro g_2 bude postup analogický a hledanou funkcí je

$$g_2 : y = (-1 - c)\left(\frac{2x - v - u}{v - u}\right)^2 + c, c \in (-1; 1\rangle.$$

Další možnost, jak může vypadat definiční obor funkce $f = \arcsin \circ g$, je sjednocení dvou stejně dlouhých, konečných, uzavřených intervalů. Stejně dlouhé budou, protože kvadratická funkce $x \mapsto x^2$ je sudá a do intervalu $\langle -1; 1\rangle$ se vždy zobrazí dva stejně velké intervaly. Opět si ukážeme žádanou funkci nejdříve pro kladný koeficient u kvadratického členu a využijeme funkce definované na jednom uzavřeném intervalu odvozené výše. Aby funkce

$f = \arcsin \circ g$ byla definovaná na sjednocení dvou intervalů, stačí volit hodnotu parametru c v intervalu $(-\infty; -1)$ a dostaneme funkci

$$f_1 : y = \arcsin \left[(1-c) \left(\frac{2x - v - u}{v - u} \right)^2 + c \right], \ c \in (-\infty; -1),$$

definovanou na množině $\langle u; z_1 \rangle \cup \langle z_2; v \rangle$. Pokud chceme, aby funkce byla definovaná na námi určeném sjednocení dvou intervalů, nebude již těchto funkcí nekonečně mnoho, ale pouze jedna, jednoznačně určená. Také je důležité uvědomit si, že intervaly nemůžeme volit libovolně. Zvolíme-li tedy u, v nemůžeme již zvolit libovolná z_1, z_2. Vybíráme jen jedno z nich, například z_1, pro které musí platit $z_1 \in (u; \frac{u+v}{2})$. Pak již můžeme jen dopočítat hodnotu z_2, kdy platí $z_1 - u = v - z_2$. Poté vyjádříme hodnotu c tak, aby platilo $g_1(z_1) = g_1(z_2) = -1$. Řešíme tedy jednu rovnici o jedné neznámé c,

$$(1-c) \left(\frac{2z_1 - v - u}{v - u} \right)^2 + c = -1,$$

z níž dostaneme

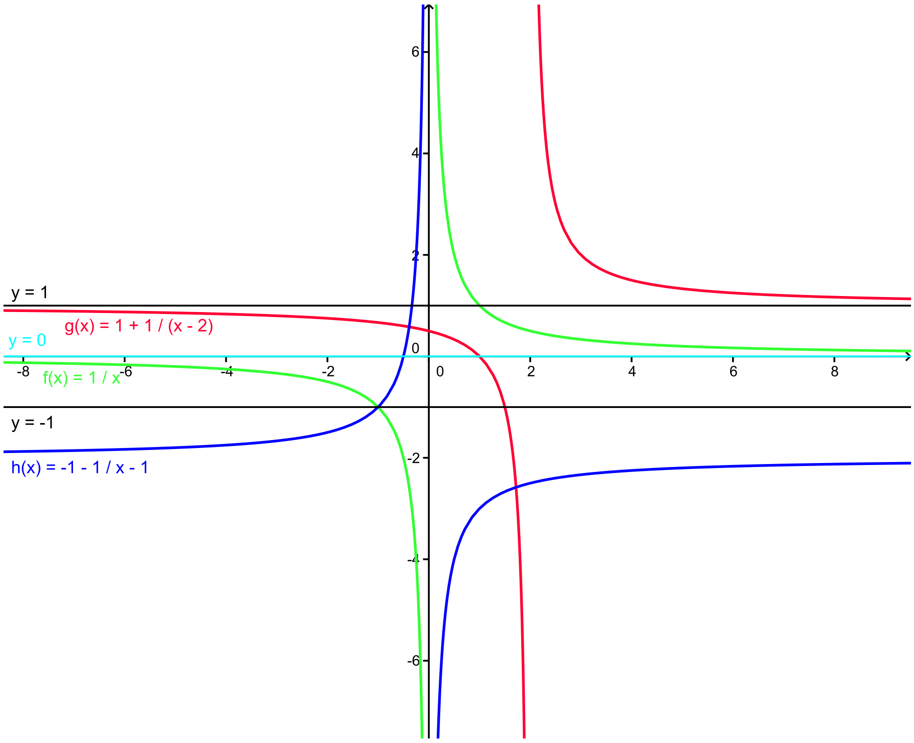
$$c = \frac{2}{(\frac{2z_1 - v - u}{v - u})^2 - 1} + 1.$$

Na první pohled se tento vzorec zdá složitý, nicméně je třeba si uvědomit, že u, v i z_1 jsou konstanty. Pro funkci $f_1 = \arcsin \circ g_1$, kde c je výše uvedená hodnota, potom platí $\mathcal{D}(f_1) = \langle u; z_1 \rangle \cup \langle z_2; v \rangle$. Funkci $f_2 = \arcsin g_2$ definovanou na stejném intervalu dostaneme analogicky:

$$f_2 : y = \arcsin \left[(-1-c) \left(\frac{2x - v - u}{v - u} \right)^2 + c \right], c = -\frac{2}{(\frac{2z_1 - v - u}{v - u})^2 - 1} - 1.$$

3.3 Vnitřní lineární lomená funkce

Další funkcí, se kterou můžeme funkce $\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$, ln, arcsin a id^{-1} složit a úloha na nalezení definičního oboru bude řešitelná studenty střední školy, je funkce lineární lomená. Jedná se o speciální případ racionální funkce. Tato funkce je dána předpisem $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0, bc - ad \neq 0$. Pro naše potřeby však bude výhodnější tvar $g(x) = m + \frac{k}{x+l}$, $m = \frac{a}{c}$, $l = \frac{d}{c}$, $k = \frac{bc-ad}{c^2}$. Na tento tvar není těžké předpis funkce upravit [5].



Obrázek 3.3: Lomené funkce

3.3.1 Vnější funkce logaritmus a sudá odmocnina

Pokud složíme vnitřní lineární lomenou funkci s vnější funkci $\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$ resp. ln, můžeme podle hodnoty m určit, jak bude vypadat definiční obor funkce $f_1 = \mathrm{id}^{\frac{1}{2k}} \circ g$, resp. $f_2 = \ln \circ g$. Jak je z grafu lineárních lomených funkcí vidět (viz. obr. 3.3), pro $m > 0$ bude funkce definovaná na sjednocení dvou nekonečných intervalů. Jeden z nich bude polouzavřený, druhý otevřený. Jeden z krajních bodů je roven $-l$. Tento bod do definičního oboru patřit nebude.

Hledejme nyní funkci definovanou na sjednocení intervalů $(-\infty; u) \cup \langle v; \infty)$. Proto v tomto případě platí $u = -l$. Nyní hledáme nulový bod funkce tak, aby měla nulovou hodnotu pro $x = v$. Dosadíme tedy do rovnice

$$m + \frac{k}{v - u} = 0.$$

Řešíme tedy jednu rovnici o neznámých m, k. Zvolíme parametrem například

m a dostáváme

$$k = m(u - v).$$

Hledanou funkcí je tedy funkce

$$f_1 : y = \sqrt{m + \frac{m(u-v)}{x-u}}.$$

Stejným postupen hledáme předpis funkce f_2 definované na sjednocení intervalů $(-\infty; u\rangle \cup (v; \infty)$. Dostaneme

$$f_2 : y = \sqrt{m + \frac{m(v-u)}{x-v}}.$$

Funkce

$$f_3 = \ln\left(m + \frac{m(u-v)}{x-u}\right) \text{ a } f_4 : y = \ln\left(m + \frac{m(v-u)}{x-v}\right)$$

jsou potom definované na sjednocení intervalů $(-\infty; u) \cup (v; \infty)$.

Pro $m = 0$ bude funkce $g : y = \frac{k}{x+l}$ nabývat kladných hodnot na otevřeném nekonečném intervalu. Chceme-li, aby funkce $f_1 = \mathrm{id}^{\frac{1}{2\mathrm{k}}} \circ g$ byla definovaná na intervalu $(-\infty; u)$, položíme $u = -l \ \wedge \ k < 0$. Pokud má být definována na intervalu $(u; \infty)$, položíme $u = -l \ \wedge \ k > 0$. Pro funkci $f_2 : y = \ln \circ g$ platí $\mathcal{D}(f_2) = \mathcal{D}(f_1)$.

Pro $m < 0$ bude funkce f_1 definovaná na jednom polouzavřeném, konečném intervalu. Postup nalezení funkce definované na intervalu $(u; v\rangle$, resp. $\langle u; v)$, bude analogický k postupu, který jsme aplikovali při $m > 0$. Hledáme-li funkci definovanou pro $\mathcal{D}(f_1) = (u; v\rangle$, dostaneme funkce $f_1 : y = \sqrt{m + \frac{m(u-v)}{x-u}}, m < 0$. Pokud chceme nalézt funkci definovanou na $\mathcal{D}(f_2) = \langle u; v)$, dostáváme funkci $f_2 : y = \sqrt{m + \frac{m(v-u)}{x-v}}$.

3.3.2 Vnější funkce arkus sinus

S vnitřní racionální lomenou funkcí můžeme samozřejmě také složit funkci arcsin. Jak jsme již zmínili v minulé části, jedná se o funkci danou předpisem

$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0, bc - ad \neq 0$. Pro hledání různých typů definičních oborů však znovu využijeme tvaru

$$g(x) = m + \frac{k}{x+l},\ m = \frac{a}{c},\ l = \frac{d}{c},\ k\ = \frac{bc-ad}{c^2}.$$

Opět můžeme podle hodnoty m rozlišit, jaký bude definiční obor funkce $f = \arcsin \circ g$. Pokud chceme, aby funkce f byla definovaná jen pro interval $\langle u; v\rangle$, jak je z grafu funkce vidět, musí platit $|m| > 1$, jelikož u takové funkce protne definiční interval arcsin pouze jedno rameno hyperboly, a to pro konečný interval. Pro $|m| = 1$ se bude jednat o interval nekonečný, jelikož definiční interval vnějších funkcí protne opět pouze jedno rameno hyperboly, ale bude k jedné z hodnot ± 1 v nekonečnu nebo minus nekonečnu konvergovat. Pro $|m| < 1$ se potom bude jednat o sjednocení dvou nekonečných intervalů.

Nejdříve se zaměříme na případ, kdy $|m| > 1$, a hledáme funkci g tak, aby $D(f) = \langle u; v\rangle$. Musí tedy platit $(g(u) = 1\ \wedge\ g(v) = -1) \vee (g(u) = -1\ \wedge\ g(v) = 1)$. Vyjádříme první z možností rovnicemi

$$\begin{aligned} m + \frac{k}{u+l} &= 1 \\ m + \frac{k}{v+l} &= -1. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic dostaneme (opět pro neznámé k, l a parametr m):

$$\begin{aligned} k &= \frac{v-u+m^2(u-v)}{2}, \\ l &= \frac{(v-u)m-u-v}{2}. \end{aligned}$$

Po dosazení za k, l a m dostanem funkci f definovanou na intervalu $\langle u, v\rangle$.

Pro $|m| = 1$ bude složená funkce definovaná na nekonečném intervalu. Pokud $m = 1$, hledáme, kdy vnitřní funkce $g : y = m + \frac{k}{x+l}$ nabývá hodnoty -1. Pokud chceme, aby funkce $f = \arcsin \circ g$ byla definovaná na intervalu $\langle u; \infty)$, podobným způsobem jako v minulém případě odvodíme $l = -\frac{k+2u}{2} \wedge k < 0$. Pro $l = -\frac{k+2u}{2} \wedge k > 0$ bude funkce f definovaná na intervalu $(-\infty; u\rangle$. Pokud $m = -1$, dostaneme $l = \frac{k-2u}{2}\ \wedge\ k > 0$, pokud chceme, aby funkce f

byla definovaná na intervalu $\langle u; \infty)$, a $l = \frac{k-2u}{2} \wedge k < 0$, pokud požadujeme, aby funkce f byla definovaná na intervalu $(-\infty; u\rangle$.

Pro $|m| < 1$ bude funkce definovaná na sjednocení intervalů $(-\infty; u\rangle \cup \langle v; \infty)$. Stejným postupem, jako pro $|m| > 1$, vyjádříme k, l a m tak, aby funkce $g : y = m + \frac{k}{x+l}$ byla definovaná právě na požadovaném intervalu. Řešíme stejnou soustavu rovnic, s rozdílem právě pouze v hodnotě m. Dostaneme

$$\begin{aligned} k &= \frac{v - u + m^2(u - v)}{2}, \\ l &= \frac{(v - u)m - u - v}{2}. \end{aligned}$$

3.4 Další vnitřní funkce

Jako vnitřní funkci funkcí $\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$, id^{-1}, ln a arcsin můžeme využít i některé polynomické funkce stupně vyššího než dva. Jak již bylo dříve zmíněno, nalézt kořeny takové funkce student střední školy obecně nedokáže a u polynomů pátého a vyššího stupně obecně kořeny není možné algebraicky vyjádřit. Omezíme se tudíž jen na některé speciální případy. Pokud je polynomická funkce zadána v součinovém tvaru polynomů stupně nejvýše dva, není problém nalézt kořeny při libovolném stupni polynomu. Proto při skládání s vnější logaritmickou funkcí, nebo funkcí sudá odmocnina, můžeme jako vnitřní funkci využít polynomickou funkci libovolného stupně, pokud je zadána ve výše uvedeném tvaru.

U funkce arcsin je situace složitější, jelikož nehledáme nulové body funkce, ale řešíme podmínku, kdy argument funkce (vnitřní funkce) nabýval hodnot mezi minus jedna a jedna. V obecném případě se tedy nevyhneme roznásobení, a tím může vzniknout problém s řešitelností úlohy. Omezíme se tudíž jen na některé speciální případy. Jedním takovým je funkce bikvadratická, tedy kvartická funkce[vi] bez kubického a lineárního členu.

Příklad 6. Určete definiční obor funkce $f : y = \arccos\left(x^4 - 3x^2 + 1\right)$.

[vi]Kvartická funkce je polynomická funkce 4. stupně.

Řešení. Jak již víme, hledáme takové omezení, aby vnitřní funkce zobrazila x do intervalu $\langle -1; 1\rangle$, tedy dostaneme podmínky

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 1 &\leq 1, \\ x^4 - 3x^2 + 1 &\geq -1. \end{aligned}$$

Upravíme na

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 &\leq 0, \\ x^4 - 3x^2 + 2 &\geq 0. \end{aligned}$$

První nerovnici řešíme vytknutím x^2, druhou nerovnici substitucí $z = x^2$, poté jako kvadratickou nerovnici a dosazením za z následně dopočítáme řešení. Definičním oborem funkce f tedy bude množina

$$\begin{aligned} &\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3}\rangle \cap [(-\infty; -\sqrt{2}\rangle \cup \langle -1; 1\rangle \cup \langle \sqrt{2}; \infty)] = \\ &\qquad = \langle -\sqrt{3}; -\sqrt{2}\rangle \cup \langle -1; 1\rangle \cup \langle \sqrt{2}; \sqrt{3}\rangle. \end{aligned}$$

Další možností je jako vnitřní funkce arcsin využít racionální funkce s polynomy stupně nejvýše dva v čitateli i jmenovateli. V takovém případě dostaneme funkci danou předpisem

$$f(x) = \arcsin \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, d \vee e \vee f \neq 0,$$

a proto musí platit

$$\begin{aligned} \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} &\geq -1 \ \wedge \\ \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} &\leq 1. \end{aligned}$$

Úpravou nerovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{(a + d)x^2 + (b + e)x + c + f}{dx^2 + ex + f} &\geq 0 \ \wedge \\ \frac{(a - d)x^2 + (b - e)x + c - f}{dx^2 + ex + f} &\leq 0. \end{aligned}$$

Řešení takové úlohy lze převést na řešení soustavy dvou kvadratických, či lineárních nerovnic, které je známé z výuky na střední škole.

3.5 Konstrukce funkcí s daným definičním oborem

V této části se pokusíme k dané množině najít různé elementární funkce, které ji mají za definiční obor. Využijeme funkcí, které jsme již dříve ukázali. Ukážeme tento návrh úloh na několika konkrétních příkladech. V každém příkladu si ukážeme vždy několik funkcí, které budou daným podmínkám vyhovovat. Na rozdíl od minulé části, zde budeme využívat jako vnější logaritmickou funkci nejen ln, ale logaritmy s různými základy, a jako cyklometrickou funkci nejen arcsin, ale i arccos. Využívat všech budeme hlavně proto, aby zde bylo na první pohled vidět více funkcí vyhovujících zadání příkladů.

Zabývejme se nejprve případem, kdy je definičním oborem jeden interval. V takovém případě lze využít přímo postupů z minulé části.

Příklad 7. Nalezněte elementární funkci definovanou právě na intervalu $\langle 1; 2\rangle$.

Řešení. Požadovanou funkci zkonstruujeme například složením vnitřní lineární funkce s funkcí arcsin. Dostaneme funkci

$$f_1 : y = \arcsin(2x-3).$$

Stejný definiční obor bude potom mít i funkce

$$f_{11} : y = \sqrt[3]{\arcsin(2x-3)},$$

kde jsme funkci „třetí odmocnina“, jejíž definičním oborem je celá množina reálných čísel, použili jako distraktor. Můžeme také složit vnitřní kvadratickou funkci s vnější funkcí sudá odmocnina. Podle vzorců z předešlé části dostáváme

$$f_2 : y = \sqrt{ax^2 - 3ax + 2a},\ a < 0.$$

Takových funkcí je tedy nekonečně mnoho. Konkrétními jsou například tyto funkce:

$$f_{21} : y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \quad \text{a} \quad f_{22} : y = \sqrt{-5x^2 + 15x - 10}.$$

Další možností je složit vnitřní lineární lomenou funkci s funkcí arccos. Dostáváme

$$f_3 : y = \arccos\left(m + \frac{1-m^2}{x + \frac{m-3}{2}}\right), \ |m| > 1.$$

Takových funkcí je opět nekonečně mnoho. Konkrétním příkladem jsou

$$f_{31} : y = \arccos\left(3 - \frac{4}{x}\right) \quad \text{a} \quad f_{32} : y = \arccos\left(-3 - \frac{4}{x-3}\right).$$

Pro zadání úlohy jsou však vhodnějšími a častěji využívanými tvary

$$g_{31} : y = \arccos\frac{3x-4}{x} \quad \text{a} \quad g_{32} : y = \arccos\frac{5-3x}{x-3},$$

kde vnitřní lineární lomená funkce je v základním tvaru, na který je možné ji jednoduše upravit.

Krom těchto způsobů můžeme také využít dvou funkcí definovaných na intervalech, jejichž průnikem je požadovaný interval. Využijeme například průniku intervalů $(-\infty; 2\rangle$ a $\langle 1; 4)$.

Na prvním intervalu je definována například funkce odmocninná složená s vnitřní lineární funkcí, a to

$$g_1 : y = \sqrt{2-x}.$$

Můžeme též složit vnitřní lineární lomenou funkci s vnější funkcí arcsin. Zvolíme-li $m = 1$, dostaneme

$$g_2 : y = \arcsin\left(1 + \frac{k}{x - \frac{k+2u}{2}}\right).$$

Konkrétními příklady žádané funkce jsou

$$g_{21} : y = \arcsin\left(1 + \frac{2}{x-3}\right) \text{ a } g_{22} : y = \arcsin\left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{x - \frac{9}{4}}\right).$$

Vnitřní funkci můžeme opět upravit do základního tvaru lineární lomené funkce a dostaneme

$$g_{21} : y = \arcsin\frac{x-1}{x-3} \text{ a } g_{22} : y = \arcsin\frac{x-\frac{7}{4}}{x-\frac{9}{4}} = \arcsin\frac{7-4x}{9-4x}.$$

Funkci definovanou na intervalu $\langle 1; 4)$ zkonstruujeme například jako průnik vnitřní kvadratické funkce a vnější funkce sudá odmocnina, jejíž definiční obor poté ještě omezíme vydělením funkcí, jejíž funkční hodnota ve čtyřce je rovna nule. Dostaneme

$$h_1 : y = \frac{\sqrt{ax^2 - 5ax + 4a}}{x - 4}, \ a < 0.$$

Konkrétním příkladem jsou

$$h_{11} : y = \frac{\sqrt{-x^2 + 5x - 4}}{x - 4} \text{ a } h_{12} : y = \frac{\sqrt{-7x^2 + 35x - 28}}{x - 4}.$$

Můžeme však také využít postupu z věty 4 a dostaneme

$$h_{21} : y = \sqrt{-\frac{x - 1}{x - 4}} = \sqrt{\frac{1 - x}{x - 4}}.$$

Hledanou funkci, definovanou na intervalu $\langle 1; 2\rangle$, dostaneme jako součet, rozdíl, součin, a pokud funkce ve jmenovateli nemá nulové body, také jako podíl funkcí g a h. Příkladem jsou

$$f_4 : y = \sqrt{2 - x} + \frac{\sqrt{-7x^2 + 35x - 28}}{x - 4} \text{ a}$$

$$f_5 : y = \sqrt{\frac{1 - x}{x - 4}} \cdot \arcsin \frac{4x - 7}{4x - 9}.$$

Nyní se zaměříme na případy, kdy má být funkce definovaná na sjednocení dvou nebo více intervalů. Funkci definovanou na sjednocení dvou nekonečných intervalů můžeme navrhnout přímo pomocí uvedených funkcí a postupů odvozených dříve. Ukážeme si nyní, jak navrhnout funkci definovanou na dané množině, neodpovídá-li tato množina typově žádné z minulé části práce. Návrh funkce definované na sjednocení dvou nekonečných intervalů zde demonstrujeme na jedné z podúloh.

Příklad 8. Najděte elementární funkci, jejíž definiční obor je roven množině $\mathcal{D}(f) = \langle 1; 3) \cup \langle 4; 7\rangle$.

Řešení. Takovou funkci nedokážeme zkonstruovat přímo podle minulé části. Můžeme však nalézt

1. různé funkce g_i definované na množině $M = \langle 1; 7 \rangle$ a

2. různé funkce h_i definované na množině $N = (-\infty; 3) \cup \langle 4; \infty)$.

Průnikem těchto množin je hledaná množina. Proto funkce $f = g_i \pm h_i$, $f = g_i \cdot h_i$, a pokud g_i a h_i nemají reálné kořeny, také $f = \frac{g_i}{h_i}$ a $f = \frac{h_i}{g_i}$.

Funkce g_i budeme navrhovat několika způsoby stejně jako v minulém příkladu. Nejdříve ukážeme, jak vznikne požadovaná funkce složením vnitřní lineární funkce a vnější funkce arccos.

$$g_1 : y = \arccos\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{3}\right).$$

Stejně jako v příkladu 7 můžeme také složit vnitřní kvadratickou funkci s vnější funkcí sudá odmocnina. Takových funkcí bude nekonečně mnoho, ukážeme si zde jen dvě konkrétní

$$g_{21} : y = \sqrt[4]{-x^2 + 8x - 7} \quad \text{a} \quad g_{22} : y = \sqrt{-\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{7}{2}}.$$

Vnitřní kvadratickou funkci můžeme také složit s vnější funkcí arcsin. Koeficient u kvadratického členu zvolíme kladný (pro koeficient záporný je nalezení funkce analogické) a dostáváme

$$g_3 : y = \arcsin\left[(1-c)\left(\frac{x^2 - 8x + 16}{9}\right) + c\right], \ c \in \langle -1; 1).$$

Takže například pro $c = 0$ máme

$$g_{31} : y = \arcsin\left(\frac{x^2 - 8x + 16}{9}\right).$$

Další možností je složení vnější funkce sudá odmocnina s vnitřní lineární lomenou funkcí. Takových funkcí bude opět nekonečně mnoho, jak jsme si ukázali v minulém příkladu. Konkrétními funkcemi jsou například

$$g_{41} : y = \arcsin\left(2 - \frac{9}{x+2}\right) \quad \text{a} \quad g_{42} : y = \arcsin\left(-\frac{3}{2} - \frac{\frac{15}{4}}{x - \frac{17}{2}}\right).$$

Opět upravíme na vhodnější tvar

$$g_{41} : y = \arcsin\frac{2x-5}{x+2} \quad \text{a} \quad g_{42} : y = \arcsin\frac{18-3x}{2x-17},$$

na které je možné předchozí jednoduše upravit.

Nyní se pokusíme najít různé funkce h_i definovanou na množině $N = (-\infty; 3) \cup \langle 4; \infty)$. Jedná se o případ funkce definované na dvou nekonečných intervalech. Přímo, pomocí odvození v minulé části práce, je vhodné využití vnější funkce sudá odmocnina a vnitřní lineární lomené funkce. Takových funkcí je znovu nekonečně mnoho a můžeme je vyjádřit předpisem s parametrem.

$$h_1 : y = \sqrt{m - \frac{m}{x-3}}.$$

Konkrétním funkcemi jsou například

$$h_{11} : y = \sqrt{1 - \frac{1}{x-3}} = \sqrt{\frac{x-4}{x-3}} \quad \text{a} \quad h_{12} : y = \sqrt{4 - \frac{4}{x-3}} = \sqrt{\frac{4x-16}{x-3}}.$$

Kromě výše uvedené funkce můžeme navrhnout takovou, která má definiční obor $(-\infty; 3\rangle \cup \langle 4; \infty)$. K tomu využijeme složení sudé odmocniny s vnitřní kvadratickou funkcí. Dále pak ještě omezíme definiční obor například pomocí funkce $x \mapsto \frac{1}{2^x-8}$, která nebude definovaná pouze v bodě 3. Dostáváme předpis s parametrem

$$h_2 : y = \sqrt{(ax^2 - 7ax + 12a)} \cdot \frac{1}{2^x - 8} = \frac{\sqrt{(ax^2 - 7ax + 12a)}}{2^x - 8}, \; a > 0$$

Konkrétními funkcemi jsou například

$$h_{21} : y = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{2^x - 8} \quad \text{a} \quad h_{22} : y = \frac{\sqrt{2x^2 - 14x + 24}}{2^x - 8}.$$

Další funkce, u které můžeme dosáhnout požadovaného definičního oboru, je funkce, která vznikne složením arcsin s vnitřní lineární lomenou funkcí. Opět poté ještě omezíme definiční obor o hodnotu 3 pomocí funkce $x \mapsto \frac{1}{(x-3)^2}$. Takových funkcí je znovu nekonečně mnoho. Dostáváme

$$h_3 : y = \frac{\arcsin\left(m + \frac{\frac{1-m^2}{2}}{x + \frac{m-7}{2}}\right)}{x^2 - 6x + 9}, \; |m| < 1.$$

V případě konkrétní funkce můžeme tento tvar většinou upravit na přijatelnější pro zadání úlohy. Ukážeme si tedy i nějakou konkrétní funkci:

$$h_{31} : y = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{8}}{x - \frac{13}{4}}\right)}{x^2 - 6x + 9} = \frac{\arcsin \frac{x - \frac{5}{2}}{2x - \frac{13}{2}}}{x^2 - 6x + 9} = \frac{\arcsin \frac{2x-5}{4x-13}}{x^2 - 6x + 9}.$$

Jak je vidět, často je možné i na první pohled nepřehledně zapsaný předpis funkce upravit na tvar vhodný pro zadání úlohy.

Navrhli jsme tedy funkce, které jsou definované na množině M, resp. N. Nyní můžeme tyto funkce mezi sebou (vždy jedna definovaná na M a druhá na N) sečíst, odečíst, nebo vynásobit, a v některých případech i vydělit. Dostaneme funkci definovanou na množině požadované v zadání. K takové funkci můžeme ještě přidat funkci, která je definovaná pro všechna reálná čísla a využít ji jako distraktoru. Můžeme ji k již nalezené funkci příčíst, odečíst ji od ní, vynásobit jí funkci, a pokud nemá nulové body, můžeme jí i vydělit nalezenou funkci a definiční obor se nezmění. Pomocí výše nalezených funkcí můžeme vytvořit mnoho dalších funkcí, které budou definované na požadované množině. Pokud zkombinujeme všechny výše uvedené funkce (bez distraktorů), dostaneme 12 možných funkcí, a to za předpokladu, že uvažujeme jen jednu aritmetickou operaci a opomíjíme, že u některých funkcí můžeme volbou parametru funkci dále měnit. Požadovanou funkcí je potom například

$$f_1 : y = \arcsin \frac{18-3x}{2x-17} + \frac{\sqrt{2x^2-14x+24}}{x^2-6x+9}$$

nebo

$$f_2 : y = \frac{\sqrt{-x^2+8x-7}}{\sqrt{\operatorname{arctg} \mathrm{e}^x}} - \sqrt{\frac{x-4}{x-3}} = \sqrt{\frac{-x^2+8x-7}{\operatorname{arctg} \mathrm{e}^x}} - \sqrt{\frac{x-4}{x-3}}.$$

Funkci danou předpisem $\sqrt{\operatorname{arctg} \mathrm{e}^x}$ jsem zde použili jako, již zmiňovaný, distraktor. Tento výraz má opravdu smysl pro všechna reálná čísla, jelikož e^x nabývá pouze kladných hodnot i výraz $\operatorname{arctg} \mathrm{e}^x$ bude vždy nabývat kladných hodnot, a proto celý výraz $\sqrt{\operatorname{arctg} \mathrm{e}^x}$ má smysl pro každé $\mathbb{R}$ a navíc nemá nulové body.

K dané množině jsme tedy nalezli poměrně velké množství funkcí, které tuto množinu mají jako definiční obor. Existují však i další funkce definované na množině z příkladu 8. Můžeme například využít průniku množiny M, kterou jsme již prodiskutovali, s množinou $K = \langle 0; 3\rangle \cup \langle 4; 7\rangle$, kterou poté ještě omezíme pomocí funkce definované na množině $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. K funkci definované na této množině můžeme, jelikož oba intervaly jsou stejně velké, využít složení vnitřní kvadratické a vnější funkce arcsin. Podle vzorce, který jsme dřívě odvodili, dostaneme funkci

$$h_4 : y = \arcsin\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 1\right).$$

Funkcí, jejímž definičním oborem bude množina $\mathcal{D}(f)$, je potom také funkce

$$f_3 : y = \arcsin\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 1\right) \cdot \sqrt{\frac{-x^2 + 8x - 7}{x^2 - 6x + 9}}.$$

Poznámka. Jelikož výraz $x^2 - 6x + 9$ nabývá vždy nezáporných hodnot, mohli jsme výraz $\frac{\sqrt{-x^2+8x-7}}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ nahradit výrazem $\sqrt{\frac{-x^2+8x-7}{x^2-6x+9}}$ a definiční obor se tím nezmění.

Při řešení jedné z podúloh jsme si také ukázali, jak navrhnout funkci definovanou na dvou nekonečných intervalech.

V dalším příkladě si ukážeme takový definiční interval, abychom při návrhu úlohy využili také vnější logaritmickou funkci.

Příklad 9. Nalezněte elementární funkci definovanou na množině $\mathcal{D}(f) = (-\infty; -1) \cup (2; 3)$.

Řešení. Přímo podle odvození z minulé části práce, opět k této množině funkci nenajdeme a znovu budeme muset využít průniku množin, ke kterým jsme schopni nalézt funkci na nich definované. Budeme tedy hledat například

1. různé funkce g_i definované na intervalu $(-\infty; 3)$ a
2. různé funkce h_i definovanou na sjednocení intervalů $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$.

Nejjednodušší způsob, jak navrhnout první zmíněnou funkci, bude složení vnější logaritmické funkce a vnitřní lineární. Hledanou funkcí bude

$$g_1 : y = \log_2(3a - ax).$$

Konkrétními funkcemi jsou například

$$g_{11} : y = \ln(3 - x) \text{ a } g_{12} : y = \ln\left(7 - \frac{7x}{3}\right).$$

Další možností je složení vnitřní lineární lomené funkce s vnější funkcí logaritmus. Dostáváme

$$g_2 : y = \log_3 \left(\frac{k}{x-3} \right), \; k < 0.$$

Konkrétním příkladem je

$$g_{22} : y = \log_3 \left(-\frac{1}{x-3} \right).$$

Pro konstrukci druhé funkce využijeme například složení vnitřní kvadratické funkce s vnější logaritmickou funkcí. Takových funkcí je nekonečně mnoho, ukážeme si jednu konkrétní.

$$h_{11} : y = \ln (x^2 - x - 2).$$

Můžeme však například složit stejnou vnitřní funkci s vnější sudou odmocninou, a poté ještě definiční obor omezit. Toho však můžeme docílit také tím, že místo funkce definované výrazem $\sqrt[4]{x^2 - x - 2}$, která bude definovaná na polouzavřených intervalech využijeme funkce

$$h_{21} : y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - x - 2}}.$$

Poslední možností, kterou si ukážeme, je složení vnitřní lineární lomenou funkce s vnější arccos a následně omezení definičního oboru o krajní body. Takovou funkcí je například

$$h_{31} : y = \frac{\arccos \left(\frac{x+4}{3x} \right)}{x^2 - x - 2}.$$

Hledanou funkci získáme opět součtem, rozdílem, součinem a pro některé z výše uvedených funkcí i podílem z funkcí g_i a h_i. Jsou jimi například

$$f_1 : y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - x - 2}} \cdot \ln (3 - x) = \frac{\ln (3 - x)}{\sqrt[4]{x^2 - x - 2}},$$

$$f_2 : y = \frac{\ln (x^2 - x - 2)}{\log_3 \left(-\frac{1}{x-3} \right)},$$

$$f_3 : y = \frac{\arccos \left(\frac{x+4}{3x} \right)}{x^2 - x - 2} + \log_3 \left(-\frac{1}{x-3} \right).$$

Ukážeme si ještě jeden příklad. V tomto příkladě zvolíme sjednocení intervalu a jednoho izolovaného bodu. Tento příklad je poměrně důležitý, jelikož studenta může fakt, že v definičním oboru se vyskytuje bod „odtržený“ od zbytku definičního oboru, zmást. Musí si také uvědomit, že pro průnik dvou intervalů platí $(u; v\rangle \cap \langle v; w) = \{v\}$. Pro návrh úlohy s ním však můžeme zacházet stejně jako s uzavřeným intervalem se stejnými krajními body.

Příklad 10. Nalezněte elementární funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathcal{D}(f) = \langle -2; 0) \cup \{2\}$.

Řešení. Stejně jako v minulých příkladech rozdělíme i tento na dva podpříklady. Budeme hledat

1. různé funkce g_i s definičním oborem $\mathcal{D}(g) = \langle -2; 2\rangle$ a
2. různé funkce h_i s definičním oborem $\mathcal{D}(h) = (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty)$.

Nejdříve budeme hledat funkce definované na množině $\mathcal{D}(g)$, tedy na uzavřeném intervalu. Vhodnou vnější funkcí bude tedy sudá odmocnina a arcsin. Takový typ definičního oboru jsme již probrali v předešlých úlohách, ukážeme si již jen několik konkrétních funkcí:

$$g_1 : y = \sqrt{4 - x^2},$$
$$g_2 : y = \arcsin \frac{1}{4}x^2,$$
$$g_3 : y = \arcsin \frac{1}{2}x.$$

Funkci definovanou na množině $\mathcal{D}(h)$ můžeme navrhnout přímo složením vnitřní lineární lomené funkce s vnější funkcí sudá odmocnina a dostaneme například funkci

$$h_1 : y = \sqrt{2 - \frac{4}{x}} = \sqrt{\frac{2x - 4}{x}}.$$

Druhá možnost je nalézt funkci definovanou na sjednocení dvou polouzavřených intervalů $(-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$, a poté další funkcí omezit definiční obor o bod $\{0\}$. Dostaneme například funkci

$$h_2 : y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}.$$

Hledanou funkcí je potom například

$$f_1 : y = \arcsin \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{2 - \frac{4}{x}} = \arcsin \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{\frac{2x - 4}{x}},$$

nebo

$$f_2 : y = \sqrt{4 - x^2} + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}.$$

Závěr

V práci se mi podařilo formalizovat algoritmus nalezení definičního oboru elementární funkce tak, aby bylo možné ho implementovat počítačovým programem. Částečně jsem také ukázal, jak vypadají definiční obory některých významných podoborů $\mathcal{E}$. V poslední části jsem poté ukázal, jak navrhnout funkci s daným definičním oborem několika různými způsoby. Práci by bylo možné rozšířit o návrh funkce pomocí některých funkcí, které jsme neprodiskutovali a také by bylo možné postup návrhu úlohy formalizovat do podoby algoritmu, který by bylo možné implementovat počítačovým programem, případně takový program vytvořit.

Literatura

[1] Coufal, Jan, Klůfa, Jindřich. *Matematika pro ekonomické fakulty.* Praha : EKOPRESS, 2000. 405 s. ISBN 80-86119-30-0.

[2] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet I.* Vydání 7. nezměněné. Praha : Academia, 1984. 392 s. ISBN 21-003-84.

[3] Odvárko, Oldřich. *Matematika pro gymnázia - Funkce.* Dotisk 2. vydání. Praha : Prometheus, 1996. 160 s. ISBN 80-85849-09-7.

[4] Rektorys, Karel a kol. *Přehled užité matematiky I.* 6. přepracované vydání. Praha : Prometheus, 1995. 160 s. ISBN 80-85849-92-5.

[5] Richter, Jaroslav. *Webové stránky určené pro výuku funkcí na střední škole.* Praha, 2007. Dostupné z WWW: `<http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav_richter/>`. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce RNDr. Jarmila Robová, CSc.

[6] Risch, Robert Henry. Algebraic Properties of the Elementary Functions of Analysis. *American Journal of Mathematics.* Baltimore : The John Hopkins University Press, 1979, Vol. 101, No. 4, s. 743-759. ISSN 1080-6377

[7] Veselý, Jiří. *Základy matematické analýzy : první díl.* Praha : Matfyzpress, 2004. 264 s. ISBN 80-86732-29-0.