UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
Prírodovedecká fakulta

Ústav matematických vied

Rozvíjanie tvorivosti prostredníctvom riešenia úloh z geometrie

Študentská vedecká odborná činnosť

Košice 2013

Martina Jesenská

Abstrakt

V práci sa zaoberáme možnosťami rozvíjania a hodnotenia tvorivosti žiakov pri riešení matematických úloh. V prvej kapitole uvádzame prístupy rôznych autorov k pojmom nadanie, talent a tvorivosť v matematike, formy rozvíjania nadania a kritériá posudzovania tvorivosti. V súvislosti s výskumom tvorivosti Levav-Waynbergovej a Leikinovej (2012) uvádzame pojem MSTs úlohy. Ide o úlohy, ktoré explicitne vyžadujú, aby riešiteľ našiel viac ako jeden spôsob riešenia. Druhá kapitola obsahuje prehľad korešpondenčných matematických seminárov (súťaží) na Slovensku, výber geometrických úloh z aktuálneho ročníka, ich vzorové riešenia a analýzu vhodnosti výberu úlohy do súťaže. V tretej kapitole navrhujeme systém kritérií na hodnotenie tvorivosti. Ďalej analyzujeme konkrétne žiacke riešenia vybranej úlohy z korešpondenčného seminára a na základe navrhnutých kritérií posudzujeme, nakoľko sa v riešení úlohy prejavila matematická tvorivosť. V závere práce porovnávame naše výsledky a hodnotenie žiackych riešení s hodnotením riešení organizátorov súťaže.

Abstract

This thesis deals with the ways of developing and evaluating the creativity of students by solving the mathematical problems. In the first chapter we provide the approaches of various authors to terms giftedness, talent and creativity in mathematics, then we write about the forms of the giftedness development and the criteria for evaluation of creativity. In connection with the study of creativity by Levav-Waynberg and Leikin (2012) we discuss Multiple Solution Tasks (MSTs). MSTs are tasks that explicitly request finding more than one solution path to a given mathematical problem. The second chapter contains the overview of the mathematical correspondence competitions in Slovakia, the selection of this year's tasks, their model solutions and the analysis of their appropriateness for the competitions. In the third chapter we design the system of criteria to creativity evaluation. We analyze the students' written solutions to one particular mathematical problem and based on the proposed criteria, we try to evaluate their mathematical creativity. In the conclusion, we compare our findings and evaluation of the students' written solutions to the evaluation of the solutions made by the organizers of the competition.

Obsah

Úvod

Tvorivá činnosť je pre rast a rozširovanie poznatkov vo väčšine oblastí ľudského poznania nevyhnutná. Inak tomu nie je ani v matematike. Keďže náš záujem je upriamený na matematiku, budeme sa zaoberať špeciálne matematickou tvorivosťou, jej prejavmi a možnosťami jej rozvíjania, pričom na matematickú tvorivosť budeme nahliadať ako na jednu zo zložiek matematického nadania.

V prvej kapitole našej práce popisujeme prístupy rôznych autorov k pojmom nadanie, talent a tvorivosť v matematike. Nielen matematici, ale aj mnohí psychológovia sa vo svojich pohľadoch na tieto pojmy rozchádzajú.

V ďalšej časti prvej kapitoly uvádzame prehľad foriem rozvíjania nadania, talentu a tvorivosti, pričom v druhej kapitole sa podrobnejšie venujeme matematickým korešpondenčným seminárom. Viedli nás k tomu osobné skúsenosti s opravovaním žiackych riešení v seminári Matik a vlastný záujem o ich hlbšiu analýzu.

V súvislosti s výskumom tvorivosti Levav-Waynbergovej a Leikinovej (2012) uvádzame pojem MSTs úlohy. Ide o úlohy, ktoré explicitne vyžadujú, aby riešiteľ našiel viac ako jeden spôsob riešenia. Autorky vo svojom výskume dospeli k záveru, že riešenie MSTs úloh prispieva k zvyšovaniu kreativity prostredníctvom rozvíjania schopnosti prepájať matematické vedomosti z rôznych oblastí.

V tretej kapitole navrhujeme systém kritérií na posudzovanie matematickej tvorivosti. Analyzujeme konkrétne žiacke riešenia vybranej úlohy z korešpondenčného seminára Matik a na základe navrhnutých kritérií posudzujeme, nakoľko sa u riešiteľov prejavila tvorivosť. V záverečnej časti práce porovnávame naše výsledky a hodnotenie žiackych riešení s hodnotením riešení organizátorov súťaže.

1 Matematické nadanie, talent a tvorivosť

1.1 Nadanie a talent

V nasledujúcej časti sa budeme venovať vymedzeniu pojmov nadanie a talent. Ako uvádza J. Mareš (2003), v priebehu niekoľkých rokov boli popísané tri pohľady na nadanie a talent (zoradené sú historicky a vzostupne podľa rozsahu):

1. Nadanie a talent sú vnímané ako nadpriemerná úroveň schopností jedinca, pričom ide o jednorozmerné poňatie; jedinou rozlišovacou charakteristikou je vysoké IQ (hranica je z intervalu 120 až 145 bodov, obvykle 130 bodov).
2. V ďalšom vnímaní ide o nadanie a talent ako nadpriemernú úroveň v niekoľkých vlastnostiach vplývajúcich na činnosť jedinca. Inak povedané, ide o súhrn vlastností jedinca umožňujúcich mu vykonávať určitú činnosť s nadpriemernou úspešnosťou. Jedná sa o viacrozmerné poňatie.
3. V najnovšom prístupe ide o súhrn fyzických a psychických vlastností každého človeka, regulujúcich vykonávanie jeho činností. Jedná sa teda o všeobecné a viacrozmerné poňatie nadania s rozlíšením podpriemerného, priemerného a nadpriemerného nadania (Dočkal, 1999).

V dnešných dňoch je podľa Mareša (2003) uprednostňované viacrozmerné (viaczložkové) poňatie nadania a talentu, pričom sa rozlišujú tri konštitučné zložky, a to inteligencia, tvorivosť a motivácia (Renzulli, 1986, 1978). V niektorých zdrojoch sa Renzulliho prvá zložka uvádza aj ako schopnosti (napr. Hříbková, 2007).
Dočkal (1999) tri zložky nadania a talentu formuluje nasledovne:

1. predpokladová zložka (schopnosti, vedomosti, fyzické vlastnosti)
2. aktivačná zložka (aktivita jedinca, záujmy, postoje, hodnoty)
3. voľná zložka (vytrvalosť, cieľavedomosť)

V. Burjan (2005) uvádza nasledovný model:

1. všeobecné intelektuálne predpoklady
2. motivácia
3. aktuálna vedomostná výbava

Poradie jednotlivých zložiek v modeli podľa Burjana odráža mieru dôležitosti a súvisí so „stabilitou" uvedených aspektov, resp. s možnosťou ich ovplyvňovania u žiakov. Pod všeobecnými intelektuálnymi predpokladmi rozumie také kognitívne schopnosti, ako logické myslenie, abstraktné myslenie, priestorovú predstavivosť, schopnosť analyzovať, zovšeobecňovať, vidieť analógie, argumentovať a tak ďalej. V. Burjan tiež tvrdí, že častým nedostatkom talentových skúšok, organizovaných s cieľom identifikovať matematické talenty, je skutočnosť, že sa zameriavajú najmä na tretí, podľa jeho názoru najmenej podstatný aspekt, ktorým je aktuálna vedomostná výbava.

Autorka L. Hříbková (2007) poníma nadanie ako komplexný fenomén, pričom u jeho nositeľov sú identifikované tri znaky (akcelerovaný vývoj, mimoriadny výkon a osobnostný potenciál). Vo svojej práci popisuje tri základné prístupy k nadaniu v 20. storočí.

1. kognitívny prístup
2. osobnostno-vývojový prístup
3. sociálno-kultúrny prístup

Tieto prístupy spolu koexistujú, všetky tri sú stále aktuálne v súčasnej psychológii nadania.

Autori Homola a Trpišovská (1992) tvrdia, že nadanie je podmienené vlohovým vybavením (súhrnom vrodených predpokladov k vykonávaniu určitej činnosti) a jeho rozvoj závisí na okolitých podmienkach (štúdium, skúsenosti, pedagogické pôsobenie, motivácia hodnotové zameranie, špecializácia a i.) Talent je potom nadpriemerné nadanie alebo konkrétna stránka schopností spojená s vysokým výkonom.

Rad autorov chápe pojmy nadanie a talent ako synonymá, no napríklad L. Ďurič (1999) navrhuje, aby boli rozlišované. Nadaním chápe možnosti pre úspešné vykonávanie určitej činnosti (označované aj ako potencionality), ktoré ešte nemali čas sa naplno prejaviť. Talent podľa neho predstavuje realizáciu nadania, prejavenie sa, či uplatnenie pôvodne skrytých možností. Musí však ísť o opakované dosahovanie pozoruhodných výsledkov v určitej oblasti.

Ďalej uvádzame pohľad na danú problematiku od J. Novotnej (2005), ktorá rozlišuje:

1. nadanie (talent), t.j. schopnosť orientovať sa v problémových situáciách, riešiť ich a uvedomovať si význam využívaných teoretických úvah

2. matematický talent, ktorý sa týka neobvykle vysokej schopnosti porozumieť matematickým myšlienkam a schopnosť matematicky myslieť

Novotná a Zhouf (2005) popisujú tri hlavné charakteristiky žiaka talentovaného na matematiku:

1. ochota tvrdo pracovať (zahŕňa rad charakteristík, napr. rozhodnosť, angažovanosť, energickosť, vytrvalosť, sebaistotu, schopnosť znášať stres)
2. prirodzená matematická zručnosť
3. výrazná tvorivosť (schopnosť odlišne myslieť, kombinovať skúsenosti a schopnosti zo zdanlivo nezlučiteľných oblastí a prepájať ich do nových myšlienok a výsledkov)

Podľa V. Vaněka (2003) matematický talent a nadanie nie sú jednoznačne definované. Pripúšťa však, že ich možno charakterizovať ako súbor zladených, rozvinutých matematických a tvorivých schopností a nadpriemerného intelektu spoločne s motiváciou k úlohám z matematiky v ich vzájomnej interakcii.

Prikláňame sa k názoru, že nadanie je v rôznom rozsahu pozorovateľné u každého človeka. Veríme, že je podmienené vrodenými vlohami, teda prítomnosťou predpokladovej zložky a ďalej je potrebné ho rozvíjať, pričom na rozvíjaní nadania sa podieľajú vnútorné a vonkajšie faktory. Medzi vnútorné faktory by sme zaradili cieľavedomosť, vytrvalosť, vlastnú motiváciu, kreativitu, vedomostnú výbavu, hodnoty a celkový prístup jedinca. Ku vonkajším môžeme zahrnúť vplyv rodinného zázemia, pedagogické pôsobenie a motiváciu zo strany učiteľov, kolektív v ktorom sa daný jedinec pohybuje a ďalšie vonkajšie vplyvy. Menované faktory spolu navzájom interagujú a v prípade úspešnej interakcie vedú k realizácii nadania, teda k prejavom talentu.

1.2 Tvorivosť

Ďalej sa zameriavame na tvorivosť ako jednu zo zložiek nadania a talentu (Renzulli 1986, 1978). Keďže náš záujem je upriamený na matematiku, budeme sa orientovať špeciálne na matematickú tvorivosť, jej prejavy a možnosti jej rozvíjania. V celej práci považujeme pojmy tvorivosť a kreativita za slová s rovnakým významom a teda ich môžeme v texte navzájom zamieňať.

H. Poincaré a J. Hadamard

Poincaré (1948) popisuje matematickú kreativitu ako voľbu. Proces tvorenia podľa neho pozostáva z vyhýbania sa zbytočnému spájaniu a z vykonávania toho, čo je užitočné. Metafora voľby môže byť interpretovaná ako schopnosť matematika starostlivo si vybrať medzi otázkami (alebo problémami / úlohami), ktoré prinesú plodné výsledky a naopak tými, ktoré nevedú k ničomu novému.

Podľa Sriramana (2009) táto interpretácia neberie do úvahy problém inovatívnosti. Charakteristika matematickej kreativity ako schopnosti zvoliť si medzi užitočnými a zbytočnými kombináciami je podobná charakteristike sochárskeho umenia ako procesu zbavovania sa nadbytočného. Takto by sa sochárom mohol stať takmer každý, kto by dokázal zaobchádzať s príslušnými nástrojmi a materiálom. Aby však bolo možné hovoriť o kreatívnom procese, nestačí si len vhodne vybrať to, čo je užitočné. Je potrebné aby zvolené matematické otázky, či procesy boli istým spôsobom neštandardné, výnimočné, originálne a teda aby boli inovatívne.

H. Poincaré (1948) vymedzuje v kreatívnom procese štyri štádiá, ktoré sú takmer identicky popísané u J. Hadamarda (1945), ktorý bol ovplyvnený psychológiou.

1. V prvom štádiu je pre detailné nahliadnutie do problému potrebná najmä usilovná práca. Tento stupeň nazval úvodná fáza vedomej činnosti. Hadamard toto štádium označuje ako prípravné.
2. Druhé štádium nastáva, keď je problém na určitý čas ponechaný stranou a myseľ je zamestnávaná inými úlohami. Táto fáza je u Hadamarda označovaná ako inkubácia.
3. Tretie štádium je spojené s náhlym objavením riešenia, možno aj počas vykonávania iných, s danou úlohou nesúvisiacich aktivít. Výskyt náhleho osvietenia je podľa autora prejavom dlhej predchádzajúcej podvedomej práce. Hadamard tak isto hovorí o štádiu osvietenia / iluminácie.
4. Kreatívny proces ďalej pokračuje a zároveň sa končí štvrtým štádiom, ktoré pozostáva z vyjadrenia výsledku vhodnými jazykovými prostriedkami. V tejto fáze sa výsledky overujú, upresňujú a cez praktické využitie sa hľadajú aj ich možné rozšírenia.

K definícii kreativity a k rozdeleniu kreatívneho procesu na štyri štádiá dospel Poincaré pod vplyvom svojho vlastného matematického výskumu.

Podľa Sriramana (2009) model síce hovorí o procese tvorenia u matematika, ale kreativitu samotnú nedefinuje. Okrem toho má podľa neho aj niekoľko nedostatkov:

1. V prvom rade, model sa zameriava hlavne na problémy, ktoré už boli stanovené matematikmi, v dôsledku čoho prehliada fascinujúci proces, ktorým ku daným otázkam došlo.
2. Ďalej tiež model pripisuje až príliš veľký význam práci podvedomia.

<u>Ervynck</u>

Ervynck (1991) popisuje tri štádiá v procese matematickej kreativity:

1. Prvé štádium (Štádium 0) je označované ako prípravné technické štádium. Pozostáva z technických alebo praktických aplikácií matematických pravidiel a postupov bez toho, aby si používateľ uvedomoval teoretické východiská.
2. Druhé štádium (Štádium 1) je fázou algoritmickej činnosti. Táto činnosť prvotne pozostáva z vykonávania matematických techník, ako napríklad explicitné opakované aplikovanie algoritmov.
3. Tretie štádium (Štádium 2) je označované ako tvorivá (koncepčná, konštrukčná) činnosť. V tomto štádiu sa objavuje skutočná matematická kreativita, ktorá pozostáva z nealgoritmického rozhodovania sa. Tieto rozhodnutia môžu byť rôznej povahy a vždy zahŕňajú voľbu.

Sriraman (2009) tvrdí, že hoci sa Ervynck snaží charakteristikou prvých dvoch štádií opísať proces, ktorým matematik dospeje k problému, jeho popis matematickej kreativity je veľmi podobný tomu, ako ju popísali Poincaré a Hadamard. Najmä jeho použitie spojenia nealgoritmické rozhodovanie sa je analogické s použitím spomínanej metafory voľby.

V modeli podľa Ervyncka (1991) sa však nespomína fáza, ktorá by obsahom pripomínala inkubačnú fázu z predošlého modelu. A taktiež tu chýba záverečné overenie dosiahnutých výsledkov.

<u>Krutetskii</u>

Ruský výskumník Krutetskii (1976) chápe tvorivosť v kontexte schopností študentov abstrahovať a zovšeobecniť matematický obsah.

<u>Torrance</u>

Podľa Torranca (1974) je tvorivosť založená na štyroch vzájomne prepojených zložkách, ktorými sú fluencia, flexibilita, inovatívnosť (originalita) a elaborácia (prepracovanie).

Fluencia sa vzťahuje na prúd myšlienok, na schopnosť produkovať množstvo nápadov, flexibilita sa týka schopnosti presúvať sa medzi rôznymi myšlienkami, meniť uhol pohľadu a smer riešenia. Inovácia je spojená s originalitou myšlienok a výsledkov daného jedinca a elaboráciou rozumie schopnosť domyslieť, rozpracovať detaily riešenia, doviesť myšlienku do konca a zovšeobecniť ju. Nasledujúc Torranca (1974), Silver (1997) tvrdí, že na rozvíjanie kreativity riešením úloh je potrebné zlepšiť prvé tri z jej vyššie spomínaných komponentov.

George Polya

Matematik George Polya (1954) chápe tvorivosť ako schopnosť použiť heuristické metódy a tak uchopiť matematický problém spôsobom podobným profesionálnym matematikom. Všíma si, že pri pokuse vyriešiť úlohu o nej riešiteľ uvažuje z rôznych hľadísk, opätovne si ju pretáča v mysli. Variácia úlohy je pre proces riešenia nevyhnutná. Polya kladie dôraz na použitie heuristických metód pri riešení matematických úloh rôzneho stupňa komplexnosti. V procese riešenia úlohy rozlišuje nasledovné štyri fázy:

1. Porozumenie úlohe – v tejto fáze by sa mal riešiteľ zamýšľať nad tým, či vie úlohu vysvetliť vlastnými slovami, ďalej aké informácie je možné zistiť zo zadania a hlavne si uvedomiť, čo je dané a čo je hľadané.
2. Návrh plánu riešenia úlohy – v tejto fáze prebieha voľba vhodnej stratégie, pričom Polya uvádza pre výber stratégie niekoľko konkrétnych návrhov:
   a. napíš rovnicu
   b. zapíš údaje do tabuľky (alebo inej prehľadnej štruktúry)
   c. nakresli si obrázok, urob si diagram (Vennove diagramy, graf a pod.)
   d. spomeň si na riešenie podobnej úlohy, prípadne si zjednoduš danú úlohu a vyrieš ju. Potom tento postup aplikuj na zložitejšiu úlohu
   e. nájdi podcieľ úlohy
   f. cesta späť (ak viem k čomu chcem dôjsť napr. aj pri priamom dôkaze)
   g. uhádni riešenie a potom o ňom ukáž, že je správne alebo uhádni čiastkové riešenie úlohy, čo môže zjednodušiť hľadanie ďalších riešení.
3. Realizácia plánu riešenia – tu by mal riešiteľ použiť stratégiu na vyriešenie úlohy zvolenú v predošlej fáze a vykonať pritom nutné kroky, napr. výpočty.
4. Pohľad späť – v tejto fáze je zdôraznená schopnosť interpretovať výsledok úlohy. Riešiteľ by sa mal zamýšľať nad tým, či odpoveď má zmysel, prípadne vykonať skúšku správnosti, či overenie. Tiež by mal uvažovať o tom, či je riešenie v súlade s údajmi zo zadania, alebo či sa prípadne dá postupovať aj iným spôsobom. A takisto môže byť prínosné porozmýšľať nad využitím danej metódy v podobných úlohách, prípadne na zovšeobecnenú úlohu.

Podľa Polyu, pri rozhodovaní o správnosti matematického predpokladu (hypotézy) používajú matematici rôzne stratégie. Pri hľadaní jasných a zrozumiteľných modelov využívajú mnohé heuristické metódy ako overovanie výsledkov, overovanie nepravdepodobného výsledku, odvádzanie z analógie, či prehlbovanie analógie. A teda heuristika môže byť chápaná ako mechanizmus používaný pri rozhodovaní (voľbe). Vedie matematika určitou cestou, výsledok ktorej môže, ale nemusí byť plodný. Kreativita spočíva v schopnosti používať rôzne stratégie, prechádzať od jednej k druhej, a tak dospieť k originálnym výsledkom.

Anat Levav-Waynbergová a Roza Leikinová

Výskum dvojice Levav-Waynbergová a Leikinová (2012) sa opiera o definíciu kreativity podľa Torranca (1974), ktorá je uvedená vyššie. Autorky si vo svojom výskume zameranom na úlohy s viacerými spôsobmi riešenia zvolili kombináciu pragmatického a psychometrického prístupu ku kreativite. Z pragmatického hľadiska je výskum kreativity spojený s hľadaním spôsobov ako ju rozvíjať, zatiaľ čo psychometrický náhľad sa zaoberá jej posudzovaním (Sriraman, 2009).

Sternberg, Frensch a Lubart

V poslednom období sa psychológovia pokúšajú prepojiť tvorivosť s mierou inteligencie (Sternberg, 1979, 1985), so schopnosťou vyňať a zovšeobecniť (Sternberg, 1985) a taktiež s celkovou schopnosťou riešiť úlohy (Frensch & Sternberg, 1992). Sternberg a Lubart (2000) definujú kreativitu ako schopnosť produkovať neočakávanú originálnu prácu, ktorá je užitočná a prispôsobiteľná. Voči tejto definícii by však matematici mohli namietať a to z jednoduchého dôvodu. Výsledky ich tvorivej práce nemusia byť nutne užitočné v zmysle použiteľnosti v reálnom svete. Ako príklad možno uviesť dôkaz Veľkej Fermatovej vety, ktorého autorom je profesor Andrew Wiles. Matematická komunita vníma jeho prácu ako kreatívnu. Je originálna, avšak nie je využiteľná v zmysle v akom uvádzajú Sternberg a Lubart.

Bharath Sriraman

Sriraman definuje kreativitu ako schopnosť produkovať novú, či originálnu prácu. Táto definícia je kompatibilná s jeho osobnou (vlastnou) definíciou matematickej kreativity ako procesu, ktorý vedie k nezvyčajným a detailným riešeniam danej úlohy, bez ohľadu na náročnosť úlohy, či vek riešiteľa. Definícia matematickej kreativity je v kontexte štúdie, skúmajúcej prácu profesionálnych matematikov spojená s publikovaním originálnych výsledkov v popredných odborných matematických časopisoch.

1.3 Možnosti rozvíjania nadania, talentu a tvorivosti

Ako uvádza L. Hozová vo svojom článku „Jak pečovat o matematické talenty“ (2003) talent nerastie sám od seba, preto je potrebné ho rozvíjať. Pri starostlivosti o talent je podnetné rodinné prostredie veľkou výhodou, dôležitú úlohu zohráva aj škola. V škole je zo strany učiteľa potrebný záujem, snaha, systematická práca a zodpovednosť v starostlivosti o rozvoj individuality. Autorka uvádza rady ako postupovať pri starostlivosti o matematické talenty v nasledujúcich bodoch:

1. V rámci vyučovania – priamo na hodinách matematiky:
    a. motivačné, problémové úlohy a matematické hádanky
    b. rozšírené vyučovanie matematiky
    c. motivácia žiakov k účasti na matematických súťažiach

2. Mimo vyučovania:
    a. matematické kluby a krúžky,
    b. matematické hry a súťaže
    c. semináre k riešeniam úloh z matematickej olympiády
    d. matematické sústredenia
3. Motivácia učiteľov matematiky:
    a. organizácia seminárov alebo prednášok, či konferencií, v rámci okresu, či celoštátne
4. Práca so študentmi vysokých škôl s pedagogickým zameraním:
    a. účasť študentov na okresných a regionálnych kolách matematickej olympiády
    b. účasť na matematických sústredeniach žiakov základných škôl
    c. opravovanie žiackych riešení v korešpondenčných súťažiach
    d. oboznamovanie študentov s formami rozvíjania matematického talentu v rámci didaktiky matematiky

Američan J. A. Plucker (1998) kritizuje vzdelávanie talentovanej mládeže v Spojených Štátoch Amerických. Jeho kritika sa týka používania tradičných metód, vymedzenia rozvíjania talentu na mimoškolské aktivity, ale aj diskriminácie detí z etnických a iných menšín a zo sociálne slabších rodín. Okrem kritiky však navrhuje i nasledovné možné riešenia, ktoré sú aplikovateľné aj u nás:

1. stavať výzvy pred každého žiaka a tým dávať šancu všetkým
2. rozšíriť paletu vyučovacích metód, diagnostických a examinačných postupov
3. snažiť sa o flexibilitu v administratívnych i pedagogických otázkach starostlivosti o talenty
4. zameriavať tvorivosť žiakov na závažné problémy zo života
5. hodnotiť a známkovať žiakov realisticky, teda tak, aby hodnotenie motivovalo žiakov k rozvíjaniu schopností
6. neprehliadať špecifické potreby talentovaných žiakov
7. snažiť sa udržať na škole tých učiteľov, ktorí chcú a vedia pracovať s talentovanými žiakmi

Z článkov od Burjana (2005) a Semanišinovej a Švedu (2007) sme vytvorili stručný prehľad súčasných foriem práce s matematickými talentami na Slovensku:

- špeciálne triedy so zameraním na matematiku, resp. na prírodovedné predmety; deti sú do nich vyberané na základe prospechu na prvom stupni, prípadne na základe testov, ktoré sú často zamerané skôr na aktuálny stav vedomostí žiakov ako na to, aby bolo zistené, či tieto deti majú matematické nadanie
- školy so zameraním na matematiku – žiaci sú prijímaní po úspešnom absolvovaní prijímacích pohovorov, ich cieľom je identifikovať nadaných žiakov

- matematické záujmové krúžky (viac-menej sporadicky, často sú zamerané skôr na doučovanie žiakov)
- matematické súťaže ako Matematická olympiáda, Pytagoriáda, SOČ, rôzne korešpondenčné semináre pre žiakov ZŠ a SŠ, MAKS, Matematický klokan
- sústredenia ku korešpondenčným seminárom
- matematické tábory (viac-menej sporadicky)
- knihy (nevychádzajú takmer žiadne)
- časopisy (nevychádzajú takmer žiadne)

Podľa Burjana, väčšina uvedených aktivít funguje iba vďaka nadšeniu, obetavosti a veľkému nasadeniu zanietených organizátorov. Dlhodobo chýba systémový prístup štátu a primerané finančné zabezpečenie.

1.4 Tvorivosť a MSTs úlohy

V matematickej literatúre sa často odporúča pristupovať k jednej úlohe použitím rôznych nástrojov alebo stratégií niekedy aj z viacerých matematických oblastí. (Dhombres, 1993; House & Coxford, 1995; NCTM, 2000; Polya, 1963, 1973, 1981; Schoenfeld, 1983, 1988; Vinner, 1989). Tieto odporúčania sú založené na hypotéze, že takáto činnosť prehlbuje matematické vedomosti a chápanie a rozvíja matematickú tvorivosť (Ervynck, 1991; Silver 1997).

Úlohy s viacerými spôsobmi riešenia (budeme ich označovať ako **MSTs úlohy** z anglického Multiple Solution Tasks) definujú Leikinová, Levav-Waynbergová, Gurevich a Mednikov (2006) a Leikinová a Levav-Waynbergová (2007) ako úlohy, ktoré explicitne vyžadujú aby riešitelia našli viac ako jednu cestu k riešeniu daného problému. Príklad takejto úlohy prevzatej z výskumu autoriek Leikinovej a Levav-Waynbergovej spolu s troma spôsobmi riešenia je uvedený v prílohe 1.

<u>MSTs úlohy a prepájanie vedomostí</u>

Viacerí autori (Askew, 2001; Dhombres, 1993; House & Coxford, 1995; Leikinová, 2003; Leikinová & Levav-Waynbergová, 2009; NCTM, 2000; Polya, 1963, 1973, 1981; Schoenfeld, 1983, 1988; Vinner, 1989) pokladajú riešenie MSTs úloh za jednu z ciest ako u riešiteľov rozvinúť schopnosť prepájať medzi sebou už nadobudnuté matematické vedomosti. Vytváranie prepojení medzi matematickými poznatkami tvorí významnú súčasť hlbšieho matematického poznania (napríklad Hiebert & Carpenter, 1992; Kieren, 1990; Sfard, 1991; Sierpinska, 1994; Skemp, 1987). Ba čo viac, rozvíjanie vedomia, že úlohu je možné riešiť aj viacerými spôsobmi a podporovanie študentov v tom, aby ich hľadali, prispieva k zvýšeniu kvality vyučovacieho procesu (Stigler & Hiebert, 1999). Navyše MSTs úlohy sa v didaktickom výskume ukázali ako vhodný prostriedok pre hodnotenie vedomostí a kreativity študentov.

Skemp (1987) rozlišuje asociatívne a konceptuálne (pojmové) prepájanie vedomostí. Pod asociatívnym prepájaním rozumie priraďovanie nových vedomostí k predtým získaným poznatkom, avšak bez uvedomenia si súvislostí medzi nimi. Na vytvorenie takýchto prepojení podľa neho stačí mechanické učenie, memorovanie, ktoré môže byť navonok nelogické.

Konceptuálne (pojmové) prepájanie je založené na uvedomovaní si určitého pravidla, inak povedané súvislostí, medzi vedomosťami. Nachádzanie súvislostí umožňuje prepojenie nových poznatkov do vhodnej už známej schémy. Skemp (1987) uvádza, že schopnosť vytvárať schémy z existujúcich a nových poznatkov je znakom toho, že daný jedinec týmto novým poznatkom rozumie.

MSTs úlohy a geometria

Podľa Levav-Waynbergovej a Leikinovej je oblasť geometrie vhodná pre identifikáciu a vytváranie MSTs úloh, keďže, takmer každá geometrická úloha sa dá na tento typ úlohy pretvoriť.

Podľa Hershkowitza (1990), Clementsa a Battistu (1992) geometria kombinuje potrebu vizuálnych schopností, ako aj potrebu prítomnosti abstraktného a logického zdôvodňovania. Tu sa črtá príležitosť pre skúmanie a dokazovanie - činnosť, ktorá sa ponáša na výskumnú prácu matematikov (Herbst, 2002). Tak isto je u študentov podporovaná schopnosť odvodzovať a zovšeobecňovať vlastnosti objektov, čím títo študenti získavajú väčšiu samostatnosť v matematickom myslení (Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004; Clements, 2003).

Lawson a Chinnappan (2000) našli vzťah medzi kvalitou organizácie vedomostí študentov a ich úspešnosťou pri riešení geometrických úloh. Tvrdia, že úroveň usporiadania vedomostí sa prejavuje v prepojení vedomostí, ktoré študenti využívajú pri riešení úloh. Pri porovnávaní úspešnosti študentov sa ukázalo, že tí žiaci, ktorí mali vytvorené prepojenia medzi poznatkami, boli pri riešení úloh úspešnejší ako žiaci, ktorí mali rozsiahlejšie vedomosti, čo sa týka obsahu, ale nemali vytvorené prepojenia.

Výskum (Anat Levav-Waynbergová a Roza Leikinová, 2012)

Skúmaná populácia:

Na výskume sa zúčastnili triedy so štandardným vyučovaním matematiky (označované ako RL z anglického regular level) a tiež triedy s vyšším počtom hodín matematiky (označované ako HL z anglického high level). Žiaci z oboch typov tried boli rozdelení do experimentálnej skupiny (so systematickým využívaním MSTs vo výuke) a kontrolnej skupiny (bez akýchkoľvek zmien vo vyučovaní). V experimentálnej skupine boli žiaci sústavne vedení k tomu, aby nachádzali čo najviac možných postupov riešenia. Takto teda vznikli štyri skupiny, ktoré boli porovnávané na základe výsledkov v písomných testoch.

Posudzovanie žiackych riešení:

Vedomosti z geometrie boli hodnotené na základe správnosti a prepojenosti prezentovaných riešení. Ako kritériá pre kreativitu boli zvolené fluencia, flexibilita a originalita. Riešenia, ktoré obsahovali len náznak postupu, prípadne boli založené na nesprávnej argumentácii dosiahli skóre 0 vo všetkých pozorovaných kritériách a ďalej neboli brané do úvahy.

Pri hodnotení správnych riešení boli pre analýzu jednotlivých riešiteľov skonštruované priestory riešení. Pod pojmom priestor riešení autorky rozumejú skupinu riešení danej matematickej úlohy, pričom rozoznávajú niekoľko typov:

1. Priestor riešení na stupni odborníka je najúplnejší súbor riešení daného problému, ktorý je známy v danom čase.
2. Individuálny priestor riešení zahŕňa riešenia, ktoré boli dosiahnuté individuálnym riešiteľom. V tejto kategórii sú rozlišované dva podtypy v závislosti na schopnosti riešiteľa dospieť k riešeniu samostatne.
    a. Dostupný priestor riešení označuje tie riešenia, ktoré dokáže riešiteľ vyprodukovať v danej chvíli bez pomoci.
    b. Potenciálny priestor riešení zahŕňa aj tie riešenia, ktoré vzniknú s pomocou iných.
3. Kolektívny priestor riešení je daný riešeniami vytvorenými celou skupinou riešiteľov.

Kvantitatívny výskum:

Správnosť riešenia

Úplné riešenia dosiahli za správnosť 100 bodov. Riešeniam, ktoré síce neboli úplné, ale viedli ku správnemu záveru, bolo pridelené skóre primerane podľa miery neúplnosti.

Prepojenosť geometrických vedomostí

Prepojenosť geometrických vedomostí jednotlivých riešiteľov je daná počtom rôznych pojmov, tvrdení a vlastností, ktoré daný riešiteľ úspešne využíva pri riešení danej úlohy. Skóre v prepojenosti individuálneho priestoru riešení je určené ako percento použitých pojmov myšlienok, tvrdení a vlastností vzhľadom na priestor riešení odborníka.

Skóre dosiahnuté v kreativite je tvorené hodnotami skóre v nasledujúcich kritériách:

- **fluencia** - Skóre vo fluencii jednotlivca reprezentuje rozsah jeho priestoru riešení, je dané počtom riešení, ku ktorým daný riešiteľ dospel.
- **flexibilita** - Skóre vo flexibilite udáva mieru, do akej bol riešiteľ schopný presunúť sa od jedného riešenia k úplne odlišnému postupu. Prvé riešenie daného typu je ohodnotené desiatimi bodmi, ďalšie podobné riešenia dostanú skóre 1 alebo 0,1 podľa miery podobnosti. Celková flexibilita je daná súčtom bodov pridelených jednotlivým riešeniam v rámci individuálneho priestoru riešení.
- **originalita** - Skóre v originalite je určené ojedinelosťou výskytu určitého riešenia v triede, do ktorej daný riešiteľ patrí. Spôsob riešenia, ktorý sa v jednej triede vyskytuje u viac ako 40% študentov získava skóre v originalite 0,1. Spôsob riešenia s výskytom 15-40% má skóre 1. Za najoriginálnejšie sú považované spôsoby riešenia vyskytujúce sa v jednej triede u menej ako 15% žiakov. Tieto majú skóre v originalite 10. Hraničné hodnoty 15% a 40% boli určené experimentálne (Leikinová, 2009).

Kvalitatívny výskum:

Okrem písomných testov uskutočnili autori výskumu s niektorými študentmi z experimentálnej aj z kontrolnej skupiny osobné rozhovory. Na týchto stretnutiach boli študentom zadané úlohy typu MSTs a zadávatelia mali možnosť pozorovať prístup riešiteľov k takýmto úlohám. Výskum prebiehal počas jedného školského roka, pričom osobné stretnutia boli uskutočnené trikrát počas tohto obdobia a to pred začatím výskumu – na začiatku školského roka, neskôr po troch mesiacoch a tak isto aj po skončení výskumu na konci školského roka.

Osobné rozhovory demonštrovali, že žiaci si ľahko budujú chápanie toho, čo to znamená riešiť úlohu z geometrie viacerými spôsobmi, ďalej tiež ukázali ich flexibilitu a spôsob ako si žiaci prepájajú vedomosti pomocou MSTs. Taktiež bola viditeľná vôľa a motivácia študentov nájsť rôzne riešenia.

Pri stretnutiach uskutočnených po troch mesiacoch už boli v prístupe žiakov z experimentálnej a kontrolnej skupiny k riešeniu zadaných úloh viditeľné rozdiely. Rozdiel však nebol v počte odlišných riešení, ku ktorým riešitelia dospeli. Obaja našli zhodne, po štyri, rôzne riešenia. Avšak študent, ktorý sa na hodinách geometrie opakovane stretával s MSTs úlohami, nadobudol väčšiu sebaistotu pri hľadaní týchto riešení a dokázal k riešeniam dospieť samostatnejšie.

Výsledky

Na základe výsledkov písomných testov bolo viditeľné, že v **správnosti** riešení došlo k zvýšeniu priemerných hodnôt u všetkých skupín, pričom nenastal žiaden významný rozdiel medzi experimentálnou a kontrolnou skupinou, keďže skóre za správnosť neodráža počet rôznych riešení.

Hodnoty skóre v **prepojenosti** sa zvýšili u všetkých skupín okrem porovnávacej HL skupiny, čo bolo dosť prekvapujúce. S veľkou pravdepodobnosťou to bolo spôsobené tým, že študenti z porovnávacej HL skupiny boli zvyknutí riešiť úlohy čo najefektívnejšie, teda zväčša produkovali stručné a jasné riešenia, v ktorých chýbalo prepájanie väčšieho počtu rôznych pojmov, tvrdení a vlastností.

Fluencia a flexibilita vzrástli vo všetkých skupinách, najvýraznejšie v experimentálnej HL skupine. Ich nárast bol okrem používania MSTs úloh v experimentálnej skupine spôsobený aj tým, že počas školského roka študenti nadobudli nové vedomosti, vďaka ktorým boli schopní nachádzať nové spôsoby riešenia. Aj pre žiakov z porovnávacej skupiny to už na konci školského roka bolo minimálne druhé stretnutie s úlohami typu MSTs a teda boli pripravenejší na ich riešenie ako na úplnom začiatku výskumu.

Skóre v **originalite** bolo znížené v experimentálnej i porovnávacej skupine s vyšším počtom hodín matematiky. Keďže sa žiaci vo všeobecnosti zlepšili v prepojenosti, fluencii a flexibilite, viacerí z nich nachádzali rôznorodé riešenia a tým sa znížil výskyt ojedinelých postupov riešenia. U študentov zo skupiny RL nedošlo až k takému výraznému nárastu predchádzajúcich kritérií, teda viaceré postupy riešenia si zachovali svoju ojedinelosť a tým aj vyššie skóre v originalite.

Zníženie skóre v originalite u študentov zo skupiny HL viedlo k opätovnej analýze originality, tentoraz sa však k riešeniam pristupovalo individuálne. Pre tento účel bol zavedený pojem tzv. celkovo originálne riešenie. Každému takémuto riešeniu bol udelený maximálny počet bodov za originalitu (10) bez ohľadu na to, koľkokrát sa u riešiteľov vyskytlo. V úvodnom písomnom teste sa takéto riešenie objavilo u jedného študenta z experimentálnej a u jedného z porovnávacej HL skupiny. V teste na konci výskumu sa k celkovo originálnemu riešeniu podarilo dospieť deviatim študentom, (všetci z experimentálnej HL skupiny), pričom jeden z nich vyprodukoval až dve takéto riešenia. Bolo možné pozorovať, že všetky riešenia tohto typu sa vyskytli v skupine HL a nárast ich počtu v experimentálnej skupine jednoznačne svedčí o pozitívnom vplyve úloh MSTs na originalitu pri riešení matematických úloh.

Zhrnutie:

Porovnaním experimentálnej a kontrolnej skupiny sa ukázalo, že systematickým využívaním MSTs úloh vo vyučovaní došlo v skupine HL študentov k zvýšeniu prepájania vedomostí z geometrie, tiež k zvýšeniu fluencie a flexibility pri riešení úloh. Štatisticky významný vplyv MSTs na originalitu a kreativitu nebol preukázaný. Avšak individuálna analýza originality riešení ukázala, že MSTs úlohy pomohli u študentov z HL skupiny k zvýšeniu originality. Taktiež bola podporená myšlienka, že originalita je viac interná charakteristika a preto je viac spojená s kreativitou a menej dynamická ako fluencia a flexibilita. V neposlednom rade, bolo potvrdené, že zavedenie MSTs úloh do vyučovania poskytuje viac príležitostí prezentovať sa pre potenciálne kreatívnych študentov a teda takéto úlohy slúžia ako efektívny prostriedok na rozvíjanie riešiteľských schopností.

2 Matematické korešpondenčné semináre na Slovensku

Jednou z možností ako rozvíjať matematické nadanie, talent a kreativitu sú matematické korešpondenčné semináre (Burjan 2005, Šveda & Semanišinová 2007). Korešpondenčné semináre sú realizované formou súťaže, ktorá začína rozoslaním série súťažných úloh na školy (u väčšiny seminárov aj ich zverejnením na internete). V niektorých seminároch, najmä tých, ktoré sú určené pre základné školy, sú zadania úloh zapracované do príbehu. Žiaci svoje vypracované riešenia pošlú na opravenie organizátorom korešpondenčného seminára do vopred uvedeného termínu. V priebehu mesiaca dostane každý súťažiaci naspäť opravené a obodované riešenia, pričom súčasťou opravovania je aj komentár od opravujúceho. V prípade nesprávneho alebo neúplného riešenia pomáha tento komentár súťažiacemu pochopiť, kde spravil chybu, prípadne ako mal v riešení pokračovať. S opravenými riešeniami dostávajú riešitelia aj vzorové riešenia organizátorov korešpondenčného seminára a zvyčajne aj zadania ďalších úloh. Týmto spôsobom prebieha počas školského roka niekoľko kôl (sérií) väčšinou rozdelených na zimnú a letnú časť.

Po ukončení korešpondenčnej časti sú najúspešnejší riešitelia pozvaní na sústredenie, ktoré prebieha formou pobytu v prírode. Sústredenie má predovšetkým motivačný charakter a pomocou osobného kontaktu vytvára z účastníkov kolektív ľudí s rovnakými záujmami.

Korešpondenčné semináre majú veľký význam ako pre riešiteľov, tak aj pre ich organizátorov. U riešiteľov rozvíjajú nadanie a talent a umožňujú im zmysluplne tráviť voľný čas, napomáhajú aj k ich osobnostnému rozvoju prostredníctvom budovania medziľudských vzťahov a zlepšujú ich komunikačné schopnosti. Organizátormi sú zvyčajne študenti strednej a vysokej školy, väčšina z nich sú bývalými riešiteľmi. Účasť pri organizácii korešpondenčného seminára pomáha rozvíjať komunikačné a organizačné schopnosti, zodpovednosť, samostatnosť, trpezlivosť a ďalšie vlastnosti.

Na Slovensku bola tradícia matematických korešpondenčných seminárov založená v 70. rokoch minulého storočia. V súčasnosti sú u nás organizované napríklad nasledujúce korešpondenčné semináre:[1]

Pikomat – P-mat, Bratislava, www.pikomat.sk
Malynár, Matik, Strom – Združenie STROM, PF UPJŠ, Košice, www.strom.sk
Riešky – Gymnázium Grösslingová 18, 811 09 Bratislava, www.riesky.sk
KMS – Združenie Trojsten, FMFI UK, Bratislava, www.kms.sk
Sezam – FRI ZU, Žilina, www.sezam.sk
MAKS – EXAM Testing, spol. s r. o., Bratislava, www.maks.sk
Matmix – P-mat, Bratislava, www.matmix.sk
Taktik – Taktik International, s. r. o., Bratislava, www.taktik.sk
KSM – Gymnázium Jura Hronca, Novohradská 3, 821 09 Bratislava, www.gjh.sk

[1] Pri názvoch je uvedená organizácia, prípadne škola, ktorá daný seminár organizuje a internetová stránka daného seminára.

V nasledujúcej časti uvádzame príklady úloh, ktoré sa v školskom roku 2012/2013 objavili v zimnej časti vybraných matematických korešpondenčných seminárov na Slovensku. Zamerali sme sa na úlohy z geometrie pre vekovú kategóriu 7., 8. a 9. ročník ZŠ, resp. sekunda, tercia a kvarta osemročných gymnázií. Úlohy z geometrie sme si vybrali na základe výsledkov výskumu uvedených v kapitole 1 v časti 1.4 Tvorivosť a MSTs úlohy. Okrem zadaní úloh uvádzame aj ich vzorové riešenia zverejnené organizátormi súťaže a krátky komentár. V komentári uvedieme náš názor na formuláciu zadania úloh, na vzorové riešenie úlohy, prípadne uvedieme ďalšie možné prístupy k riešeniu a posúdime, či požadovaný matematický aparát, podľa nového štátneho vzdelávacieho programu z roku 2010, zodpovedá vekovej kategórii, pre ktorú je úloha určená.

PIKOMAT – zimná časť - 2. séria - Úloha S4: Táborisko banditov

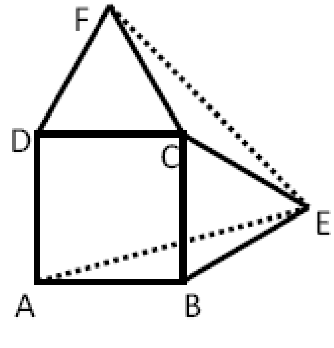
Ľahkonohý Jeleň si predstavil mapu a na nej štvorec ABCD. Mimo štvorca sú body E, F tak, že trojuholníky BCE a CDF sú rovnostranné. Ľahkonohý Jeleň je v bode F a potrebuje sa dostať do bodu A. V bode D sú ale banditi a strážia aj bod C, takže ho Ľahkonohý Jeleň potrebuje obísť cez bod E. Potrebuje teda ísť priamou trasou medzi bodmi E a F a takisto priamo medzi bodmi E a A. Vieme, že dĺžka úsečky AE je 1000 metrov. Zisti dĺžku úsečky EF, aby si Ľahkonohý Jeleň vedel spočítať celkovú dĺžku svojej obchádzky.

<u>Vzorové riešenie:</u>

Aj keď túto úlohu bolo možné riešiť niekoľkými spôsobmi, budeme sa venovať tomu, na ktorý sa zamerala väčšina riešiteľov. Zo zadania vieme, že trojuholníky DCF a BCE sú rovnostranné. Z toho je tiež jasné, že ich strany sú rovnako dlhé ako strany štvorca ABCD. Z toho vyplýva, že nám vzniknú dva rovnoramenné trojuholníky ABE a ECF s rovnakými dĺžkami ramien – v jednom sú to strany AB a BE, v druhom strany EC a CF – všetky štyri sú rovnako dlhé. Keď sa im lepšie prizrieme, zistíme, že dokonca aj uhly medzi týmito stranami sú rovnaké:

$$|\angle ABE| = |\angle ABC| + |\angle CBE| = 90° + 60° = 150°$$
$$|\angle ECF| = 360° - |\angle ECB| - |\angle BCD| - |\angle DCF| = 360° - 60° - 90° - 60° = 150°$$

Tým pádom už aj z obrázka (Obr. 2.1) vidno (a niektorí to možno tiež poznáte ako pravidlo strana - uhol - strana alebo sus), že trojuholníky ABE a ECF sú zhodné. To znamená, že aj ich základne AE a EF sú rovnako dlhé. Keďže dĺžku AE poznáme zo zadania – 1000 m – zistili sme aj dĺžku EF, je tiež 1000 m.



Obr. 2. 1

Komentár k úlohe:

Úloha je podľa nášho názoru dostatočne jasne sformulovaná. Zakomponovanie úlohy do príbehu môže viesť k zatraktívneniu jej znenia a tým k motivácii riešiteľov. Na druhej strane v znení tejto úlohy príbeh spôsobil to, že je zadanie o niečo dlhšie a to môže niektorých riešiteľov odradiť.

Vzorové riešenie využíva nasledujúce pojmy a vlastnosti:

- rovnostranný trojuholník a jeho vlastnosti
- rovnoramenný trojuholník a jeho vlastnosti
- štvorec a jeho vlastnosti
- zhodnosť trojuholníkov

Podľa nového štátneho vzdelávacieho programu pre matematiku sú rovnostranný trojuholník, rovnoramenný trojuholník a zhodnosť trojuholníkov učivom 8. ročníka základných škôl. Zo skúseností však vieme, že mnohí učitelia žiakov s pojmami rovnostranný a rovnoramenný trojuholník oboznamujú už skôr, pri preberaní tematického celku o uhloch, konkrétne v rámci učiva rozdelenie trojuholníkov podľa veľkosti uhlov. O zhodnosti trojuholníkov to však väčšinou neplatí. Žiaci 7. ročníka, ktorí sa s touto témou ešte nestretli, preto nemuseli vzorovému riešeniu celkom porozumieť.

Úloha sa však dala vyriešiť aj bez využitia zhodnosti trojuholníkov. Doplnením pomocnej úsečky AF by vznikol trojuholník AEF, v ktorom poznáme stranu AE. Využitím vlastností štvorca, rovnostranného a rovnoramenného trojuholníka by sme vedeli určiť veľkosť všetkých vnútorných uhlov trojuholníka AEF (zistili by sme, že všetky majú 60°) a teda by sme ukázali, že tento trojuholník je rovnostranný. Keďže jedna jeho strana má 1000 m, aj zvyšné jeho strany majú rovnakú dĺžku a teda hľadaná úsečka EF má tiež 1000 m.

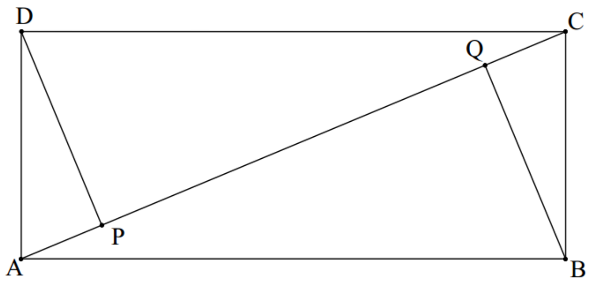
Riešky - zimná časť - 3. kolo – 9. úloha

[Čarbanica] vyzerala ako obdĺžnik, nazvime si ho ABCD, kde |AB| = 156 cm a |BC| = 65 cm. Z bodov D a B boli vedené kolmé priamky na uhlopriečku AC. Priesečníky kolmíc s uhlopriečkou AC označme P a Q. Aká bola veľkosť úsečky PQ?

Vzorové riešenie:

Ako prvý krok pomôže urobiť si náčrt, ako na obrázku (Obr. 2.2). Na začiatok je potrebné vypočítať si dĺžku úsečky AC podľa Pytagorovej vety.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$



Obr. 2. 2

$$|AC|^2 = 156^2 + 65^2$$
$$|AC|^2 = 28561$$
$$|AC| = 169\ cm$$

Veľkosti uhlov BCA a BCQ sú rovnaké, pretože C, Q a A sú na jednej priamke. Veľkosti uhlov ABC a BQC sú rovnaké, pretože sú oba pravé. Preto môžeme povedať, že trojuholníky ABC a CQB sú si navzájom podobné. Pomer |CQ| : |BC| sa teda rovná |BC| : |AC|.

$$\frac{|CQ|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$|CQ| = \frac{|BC|^2}{|AC|}$$

$$|CQ| = \frac{65^2}{169}$$

$$|CQ| = 25\ cm$$

Keďže dĺžky úsečiek CQ a AP sú rovnaké, dĺžka PQ sa rovná $|AC| - 2 \times |CQ|$, čo sa rovná 119 cm.
Odpoveď: Veľkosť úsečky PQ je 119 cm.

Komentár k úlohe:

Zadanie úlohy bolo formulované zrozumiteľne a jednoznačne. Zakomponovanie úlohy do príbehu sa na zadaní takmer vôbec neprejavilo.

Vzorové riešenie využíva nasledujúce pojmy a vlastnosti:

- obdĺžnik a jeho vlastnosť, že všetky jeho vnútorné uhly sú pravé
- Pytagorova veta
- podobnosť trojuholníkov
- zhodnosť trojuholníkov

Predpokladáme, že zhodnosť trojuholníkov, (konkrétne veta usu) bola využitá v závere vzorového riešenia pri tvrdení, že dĺžky úsečiek CQ a AP sú rovnaké. Tento fakt tu bol považovaný za samozrejmosť a jeho zdôvodnenie bolo vynechané. Tak isto nebolo zdôvodnené ani to, že uhol ABC je pravý, čo vyplýva z vlastností obdĺžnika. Vo vzorových riešeniach je občas možné zdôvodnenia niektorých medzikrokov vynechať. Ide najmä o také zdôvodnenia, ktoré by mal bez problémov odhaliť každý riešiteľ. Zhodnosť trojuholníkov je však učivom 8. ročníka a teda nemusí byť zrejmá všetkým riešiteľom. Na druhej strane v tejto úlohe daná zhodnosť súvisí aj so symetriou obdĺžnika a teda je intuitívne viditeľná.

Pytagorova veta a podobnosť trojuholníkov sú učivom až 9. ročníka a teda sa opäť mohlo stať, že niektorí mladší riešitelia vzorovému riešeniu neporozumeli úplne. Úlohu bolo možné vyriešiť bez použitia podobnosti, avšak viacnásobným využitím Pytagorovej vety a vzťahu pre obsah trojuholníka. V pravouhlom trojuholníku ABC je úsečka BQ výškou na stranu AC. Obsah tohto trojuholníka však môžeme vyjadriť aj pomocou jeho odvesien. Platí vzťah:

$$S_{ABC} = \frac{|AC| \times |QB|}{2} = \frac{|BC| \times |AB|}{2}$$

Stranu AC by sme vypočítali pomocou Pytagorovej vety a tak by sme v tomto vzťahu poznali všetky dĺžky okrem |QB|, túto úsečku by sme si odtiaľ vyjadrili nasledovne:

$$|QB| = \frac{|BC| \times |AB|}{|AC|}$$

Keďže v pravouhlom trojuholníku BCQ by sme už poznali dĺžky dvoch strán, tretiu by sme si dopočítali opäť využitím Pytagorovej vety. Ďalej by sme pokračovali rovnako, ako v prvom uvedenom vzorovom riešení.

SEZAM – zimná časť - 1. séria - 5. úloha

V jazierku v strede lesa si svoju zábavu našli vodomerky. Zaviedli na nej lodnú dopravu. Jazierko malo tvar presného kruhu, na obvode jazierka boli tri kamienky A, B, C a presne v strede maják M. Vodomerky premávali po dvoch priamych trasách od kameňa A ku kameňu B a od kameňa A ku kameňu C. Obe tieto trasy boli dlhé 5 metrov. Navyše si jedna vodomerka všimla, že keď kotví v prístave u kameňa B, tak vidí maják M a kameň A pod uhlom 30°. Teraz chcú zaviesť aj priamu linku medzi kameňmi B a C. Chceli by ale dopredu vedieť, aká bude dlhá. Vedeli by ste im to vyrátať? Aká je vzdialenosť medzi kameňmi B a C?

Vzorové riešenie:

Väčšina z vás príklad riešila podobným spôsobom a tento spôsob riešenia si aj uvedieme. Keďže body A, B, C ležia na kružnici a bod M je stred tejto kružnice (Obr. 2.3), musí platiť:

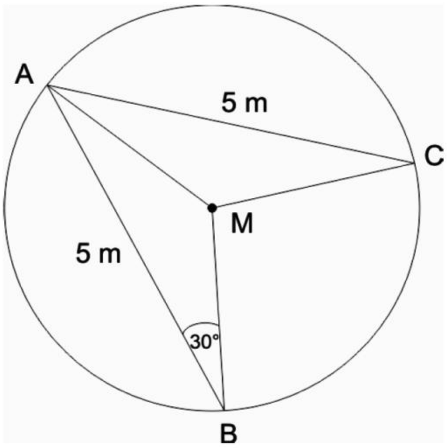
$|AM| = |BM| = |CM|$ = polomer kružnice (jazierka)

Keďže o trojuholníku ABM vieme, že má dve rovnaké strany, môžeme o ňom povedať, že je rovnoramenný. O rovnoramenných trojuholníkoch platí, že ich uhly pri základni (základňa je v našom prípade AB) sú rovnako veľké. Teda platí:

$$|\angle MBA| = |\angle MAB| = 30°$$

O každom trojuholníku, a teda aj trojuholníku ABM vieme, že súčet jeho vnútorných uhlov je spolu 180°. Vieme si preto zistiť veľkosť uhla BMA:

$$|\angle BMA| = 180° - 2 \times 30° = 120°$$



Obr. 2. 3

Dva trojuholníky sú zhodné, pokiaľ sa dĺžky ich strán rovnajú (veta sss). Z tohto vieme teda usúdiť, že trojuholník ABM je zhodný s trojuholníkom CAM. Teda všetko, čo platí pre trojuholník ABM, platí aj pre trojuholník CAM:

$$|\angle MBA| = |\angle MAC| = 30°$$
$$|\angle MAB| = |\angle MCA| = 30°$$
$$|\angle BMA| = |\angle AMC| = 120°$$

O plnom uhle vieme, že má 360°. Uhol BMC si teda vieme vypočítať takto:

$$|\angle BMC| = 360° - |\angle BMA| - |\angle AMC| = 120°$$

Všimnime si, že trojuholník BCM je tiež rovnoramenný ($|AM| = |BM| = |CM|$) a uhol, ktorý zviera medzi svojimi ramenami je 120°. Toto isté platí aj pre trojuholníky ABM a CAM. Teda teraz už vieme, že trojuholníky ABM, CAM, BCM sú zhodné podľa vety sus (strana, uhol medzi nimi zovretý, strana).Ak sú teda všetky tri trojuholníky zhodné bude platiť aj:

$$|AB| = |AC| = |BC|$$

Vzdialenosť medzi kamienkami B a C je taká istá ako medzi kamienkami A a C aj A a B a teda 5 metrov.

<u>Komentár k úlohe:</u>

Zadanie úlohy bolo zakomponované do príbehu a formulované zrozumiteľne a jednoznačne.

Vzorové riešenie využíva nasledujúce pojmy a vlastnosti:

- kružnica a jej vlastnosti
- rovnoramenný trojuholník a jeho vlastnosti
- trojuholník – súčet vnútorných uhlov
- zhodnosť trojuholníkov
- plný uhol

Všetky z uvedených pojmov a vlastností až na rovnoramenný trojuholník a zhodnosť trojuholníkov sú známe žiakom nastupujúcim do 7. ročníka základnej školy. Vo vzorovom riešení sa zo zhodnosti využívajú konkrétne vety sss a sus. Čo sa týka vety sss, je veľmi pravdepodobné, že tento poznatok je intuitívne jasný aj žiakom, ktorí sa so znením tejto vety ešte na vyučovaní nestretli. Môžu si ju uvedomiť napríklad pri samotnom rysovaní trojuholníka pomocou kružidla.

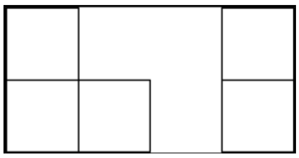
Vetu sus si niektorí žiaci môžu takisto intuitívne uvedomiť, často však prehliadajú, že uhol, ktorý sa v nej spomína, nie je ľubovoľný vnútorný uhol trojuholníka. Túto vetu v riešení nebolo nutné použiť, podarilo sa nám ju však obísť len využitím vlastností rovnoramenného a rovnostranného trojuholníka, ktoré sú tak isto nad rámec učiva 7. ročníka, ako bolo spomenuté vyššie. Nadväzujúc na uvedené vzorové riešenie by sme po zistení, že trojuholníky AMB a CMA sú zhodné, mohli do obrázka doplniť úsečku BC a všímať si trojuholník ABC. Strany AB a AC majú obe 5 metrov, trojuholník je teda rovnoramenný so základňou BC, pričom ramená AB a AC zvierajú uhol, pre ktorý platí:

$$|\angle BAC| = |\angle MAB| + |\angle MAC| = 30° + 30° = 60°$$

Uhly pri základni by sme vedeli dopočítať využitím vlastností rovnoramenného trojuholníka a súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku. Zistili by sme, že oba majú tiež 60° a teda, že trojuholník ABC je rovnostranný. Z toho následne vyplýva, že tak ako strany AB a AC, aj strana BC má 5 metrov.

MATIK – zimná časť – 1. séria – 1. úloha

Ignáciova kadibúdka má tvar podlahy v tvare štvorca 5 krát 5 metrov, ktorý chceme vykachličkovať dvoma typmi kachličiek (Obr. 2.4), ktorých dlhšia strana má dĺžku 2 metre a kratšia 1 meter. Koľko kachličiek ktorého typu na to môžeme použiť? Nájdite všetky možnosti a ku každej nakreslite jedno možné usporiadanie.



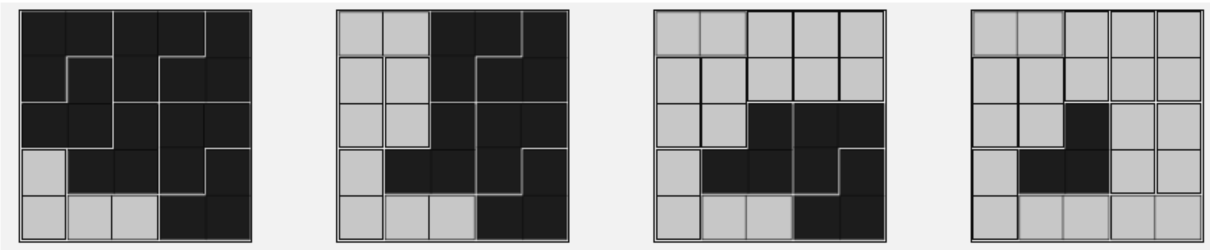
Obr. 2. 4

Vzorové riešenie:

Kadibúdka má plochu $5 \times 5 = 25$ štvorčekov (1 štvorček = 1 m^2). Vieme, že menšia kachlička pokryje dva štvorčeky, väčšia tri. Hocijaký počet menších kachličiek pokryje párny počet štvorčekov, lebo to musí byť násobok plochy jednej kachličky (teda násobok 2). Menšími a väčšími kachličkami spolu ale potrebujeme pokryť nepárny počet štvorčekov (25), a teda väčšie kachličky musia pokryť nepárny počet. A to docielime len tak, že ich použijeme tiež nepárny počet, lebo ak by sme tri (obsah kachličky) vynásobili párnym číslom, vyjde číslo párne, čo nechceme.

Teraz už môžeme vyskúšať možnosti. Ak použijeme jednu (najmenšie nepárne číslo) väčšiu kachličku, tak pokryje tri štvorčeky. Ostáva nám teda $25 - 3 = 22$ štvorčekov, na čo spotrebujeme jedenásť menších kachličiek. Obdobne pokračujeme pre všetky nepárne počty ďalej. Tri väčšie nám pokryjú deväť štvorčekov, teda ostáva $25 - 9 = 16$, čo pokryje osem menších kachličiek. Päť väčších pokryje pätnásť štvorčekov, ostáva nám ešte desať, čo pokryje päť menších kachličiek. Ďalšia možnosť je sedem väčších a dve $((25 - 21)/2)$ menšie kachličky. Viac ich dať nemôžeme, lebo už deväť väčších kachličiek pokryje 27 štvorčekov, čo je viac ako 25, teda ďalšie nepárne čísla skúšať netreba.

Našli sme štyri možnosti, no aby sme si boli istí, že vyhovujú, musíme ku každej nájsť ešte aspoň jedno možné usporiadanie kachličiek, teda ku každej možnosti prihodíme ešte jeden obrázok. Po chvíli kreslenia ľahko dospejeme napríklad k týmto štyrom obrázkom (Obr. 2.5):



Obr. 2. 5

Na vykachličkovanie Leonidovej kadibúdky môžeme použiť jedenásť menších a jednu väčšiu, osem menších a tri väčšie, päť menších a päť väčších alebo dve menšie a sedem väčších kachličiek.

<u>Komentár k úlohe:</u>

Zadanie úlohy bolo formulované zrozumiteľne a jednoznačne. Prípadným nezrovnalostiam sa predišlo uvedením obrázka, ktorý znázorňuje tvar kachličiek.

Vzorové riešenie využíva nasledujúce pojmy a vlastnosti:

- párne a nepárne čísla, operácie s nimi
- obsah štvorca
- obsah útvaru v štvorcovej sieti

Vzorové riešenie nezahŕňa žiaden matematický aparát nad rámec učiva danej vekovej kategórie. S pojmom párneho a nepárneho čísla sa žiaci stretávajú najneskôr v 5. ročníku, s obsahom štvorca najneskôr v šiestom. Úloha je pre žiakov neštandardná, pretože takýto typ úloh sa v bežných učebniciach nevyskytuje veľmi často. Predkladá pred žiakov problém, ku ktorému nemajú natrénovanú stratégiu, a tak im umožňuje objaviť niečo nové, osvojiť si postup riešenia, ktorý môžu neskôr využiť pri zložitejších školských úlohách.

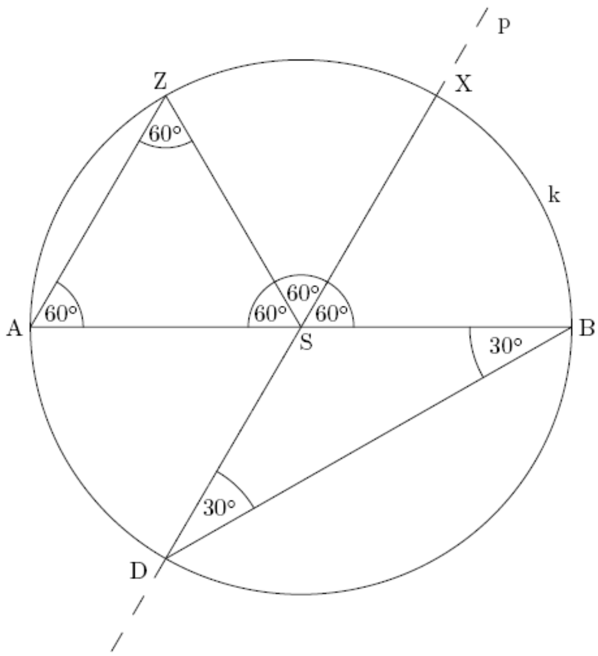
MATIK – zimná časť – 1. séria - 3. úloha

Mám gumu na kolese v tvare kružnice k so stredom v skrutke S a polomerom 1 centimeter. Priemer tejto kružnice je AB a žuvačka Z je tretí bod na kružnici. Os uhla ZSB pretne kružnicu v polrovine opačnej k ABZ v bode D. Aká je dĺžka úsečky AZ, ak veľkosť uhla ABD je 30°?

<u>Vzorové riešenie:</u>

Na začiatok označme bod, kde priamka vedená bodmi D a S pretína kružnicu k, ako bod X (Obr. 2.6). Všimnime si, že úsečky SD, SB, SX, SZ a SA sú rovnako dlhé, pretože všetky sú polomermi kružnice, teda sú rovné 1 cm. Keďže SD a SB sú rovnako dlhé, znamená to, že trojuholník SDB je rovnoramenný, čo znamená, že uhly pri základni sú rovnako veľké, teda

$$|\angle SDB| = |\angle SBD| = 30°.$$



Obr. 2. 6

Keďže súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180° tak:

$$|\angle DSB| = 180° - 30° - 30° = 120°.$$

Uhly XSB a BSD sú susedné (ich súčet je 180°), z čoho dostávame

$$|\angle XSB| = 180° - |\angle BSD| = 180° - 120° = 60°$$

Vieme, že priamka DX je osou uhla ZSB, teda aj priamka SX je osou uhla ZSB (pretože bod S leží na priamke DX), teda

$$|\angle XSZ| = |\angle XSB| = 60°.$$

Uhol ASB je priamy (má veľkosť 180°) a vidíme, že

$$|\angle ASB| = |\angle ASZ| + |\angle ZSX| + |\angle XSB|, \text{ teda}$$

$$|\angle ASZ| = |\angle ASB| - |\angle ZSX| - |\angle XSB| = 180° - 60° - 60° = 60°.$$

Teraz si všimnime trojuholník ASZ. Vieme o ňom, že strany AS a ZS sú rovnako dlhé (polomery tej istej kružnice), teda tento trojuholník bude rovnoramenný so základňou *AZ*, takže uhly pri základni budú rovnako veľké. Súčet uhlov v trojuholníku je 180°, čo znamená, že

$$|\angle SAZ| + |\angle SZA| + 60° = 180°, \text{ teda}$$

$$|\angle SAZ| + |\angle SZA| = 120°.$$

Uhly SAZ a SZA majú teda veľkosť $120°/2 = 60°$. Teraz vidíme, že všetky tri vnútorné uhly v trojuholníku ASZ sa rovnajú (majú 60°), teda tento trojuholník je rovnostranný, čo znamená, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé. Strany AS a ZS sa rovnajú polomeru (1cm), teda aj |AZ| = 1 cm.

<u>Komentár k úlohe:</u>

Aj v tomto prípade bolo podľa nás zadanie úlohy sformulované dostatočne jasne a zrozumiteľne.

Vzorové riešenie využíva nasledujúce pojmy a vlastnosti:

- kružnica a jej vlastnosti
- rovnoramenný trojuholník a jeho vlastnosti
- trojuholník – súčet vnútorných uhlov
- susedné uhly
- os uhla
- rovnostranný trojuholník a jeho vlastnosti

Všetky z uvedených pojmov a vlastností, okrem vlastností rovnoramenného a rovnostranného trojuholníka, by mali byť podľa štátneho vzdelávacieho programu známe žiakom, pre ktorých je úloha určená. Ako sme spomínali vyššie, vo viacerých prípadoch žiaci nastupujúci do 7. ročníka poznajú tieto špeciálne prípady trojuholníkov a ich vlastnosti. Podrobnejšej analýze tejto úlohy sa budeme venovať v nasledujúcej kapitole, v ktorej rozoberieme aj niektoré konkrétne žiacke riešenia.

Zhrnutie:

V druhej kapitole našej práce sme priblížili matematické korešpondenčné semináre na Slovensku a uviedli konkrétne úlohy z geometrie, ktoré sa vyskytli v zimnej časti seminárov v prebiehajúcom školskom roku. Úlohy sme vybrali náhodne a podľa možností, ktoré nám poskytol rozsah tejto práce. Zadania a vzorové riešenia úloh sme prevzali tak, ako boli uvedené na internetových stránkach príslušných seminárov, adresy stránok sú uvedené v zozname internetových zdrojov.

Zadanie všetkých vybraných úloh bolo podľa nášho názoru formulované dostatočne zrozumiteľne a jednoznačne. Zakomponovanie úloh do príbehu prináša „oživenie“, u niektorých riešiteľov zvyšuje motiváciu zapojiť sa do súťaže. Iných môže naopak odradiť to, že zadanie je tým menej prehľadné a väčšinou aj dlhšie. V každom prípade si však takto riešitelia precvičujú schopnosť vybrať z textu zadania informácie, ktoré sú pre riešenie dôležité.

Ani v jednom prípade (okrem Obr. 2.4) sa pri zadaní úlohy nevyskytol obrázok. Keďže zadanie bolo vždy jednoznačné, uviesť obrázky nebolo potrebné a riešiteľom bolo takto umožnené pri načrtávaní obrázkov nachádzať rôzne súvislosti.

V štyroch z piatich uvedených úloh sa vo vzorovom riešení vyskytol matematický aparát, ktorý presahuje vedomosti žiakov 7. ročníka. Vzhľadom na zaradenie jednotlivých tematických celkov v priebehu školského roka môže byť nad rámec aj u niektorých ôsmakov. Vzorové riešenie by podľa nás, ak je to možné, malo obsahovať taký matematický aparát, ktorý je podľa školských osnov známy všetkým žiakom, ktorým je daná úloha určená. Ak totiž úloha vyžaduje matematický aparát nad rámec učiva, môže odradiť nadaných žiakov, ktorých aktuálna vedomostná výbava je slabšia ako napríklad u žiakov z matematických tried. Takto sa môže stať, že nadaní žiaci, ktorí sa so seminárom stretnú ako siedmaci, no nie sú schopní vyriešiť niektoré úlohy, pretože nemajú potrebný matematický aparát, sa k nemu už neskôr nevrátia a prídu tak o jednu z možností ako rozvíjať svoje nadanie.

Obsahový a výkonový štandard uvedený v štátnom vzdelávacom programe obsahuje minimálny predpísaný štandard preberaného učiva a je v právomoci škôl niektoré tematické celky rozšíriť, prípadne doplniť. Žiaci sa teda v niektorých prípadoch už skôr stretávajú s rovnostranným, rovnoramenným trojuholníkom, ich vlastnosťami, a tiež s vetou sss o zhodnosti trojuholníkov.

Okrem aktuálnej vedomostnej výbavy sa žiaci 7., 8. a 9. ročníka zvyčajne líšia aj množstvom nazbieraných skúseností. Tento fakt sa organizátori seminárov snažia ošetriť rôznymi systémami bodovania, aby bola súťaž čo možno najspravodlivejšia. Napríklad v seminári Matik, v ktorom každá séria obsahuje šesť úloh, sú body prideľované nasledovne:

- deviataci dostanú body za všetky vyriešené úlohy
- ôsmaci dostanú body za päť najlepšie vyriešených úloh plus minimum z týchto piatich úloh
- siedmaci a mladší dostanú do celkového hodnotenia body za päť najlepšie vyriešených úloh plus maximum z týchto piatich úloh

V niektorých úlohách bolo možné úlohu riešiť viacerými spôsobmi, no vo vzorovom riešení bol uvedený iba jeden postup riešenia. Uvedomujeme si, že aj organizátori matematických seminárov majú rôzne obmedzenia, napríklad týkajúce sa rozsahu tlačenej verzie časopisu so zadaniami. Myslíme si však, že uverejnenie viacerých prístupov k riešeniu súťažných úloh (prípadne aspoň v náznaku), by malo veľmi pozitívny efekt u všetkých riešiteľov. Tak isto nám vo vzorových riešeniach chýbal akýsi pohľad späť, teda návrat k zadaniu, uvedomenie si významu toho, k čomu sme dospeli. Tým by mohlo prísť aj k uvedomeniu si rôznych prístupov k riešeniu a prepojeniu vedomostí.

3 Voľba kritérií a posudzovanie tvorivosti

V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať posudzovaniu kreativity na základe vybraných kritérií v konkrétnych žiackych riešeniach. Pôjde o riešenia úlohy č. 3 v 1. sérii zimnej časti matematického korešpondenčného seminára Matik v školskom roku 2012/2013. Zadanie tejto úlohy je nasledovné:

Mám gumu na kolese v tvare kružnice k so stredom v skrutke S a polomerom 1 centimeter. Priemer tejto kružnice je AB a žuvačka Z je tretí bod na kružnici. Os uhla ZSB pretne kružnicu v polrovine opačnej k ABZ v bode D. Aká je dĺžka úsečky AZ, ak veľkosť uhla ABD je 30°?

Vzorové riešenie je uvedené v 2. kapitole našej práce. Organizátori nám poskytli riešenia žiakov zapojených do súťaže vypracované v písomnej forme, s riešiteľmi sme sa osobne nestretli. Podľa pravidiel tohto seminára je úlohou riešiteľov uviesť vo svojom riešení okrem výsledku aj celý myšlienkový postup, ktorým sa k výsledku dopracovali. Za odoslané riešenie môžu následne riešitelia získať od 0 do 9 bodov.

K dispozícii sme mali 50 riešení od žiakov z niektorých základných škôl (38 riešiteľov) a osemročných gymnázií (12 riešiteľov) z Košického, Prešovského a Žilinského kraja, jedno riešenie bolo z Českej republiky. Úlohu odovzdali ôsmi žiaci 9. ročníka, štrnásti žiaci 8. ročníka, dvadsiati siedmi žiaci 7. ročníka a jeden šiestak.

3.1 Voľba kritérií

V jednotlivých riešeniach sme sa pokúšali na základe nami zvolených kritérií hodnotiť znaky matematickej kreativity. Pri výbere kritérií sme vychádzali z výskumu autoriek Leikinovej a Levav-Waynbergovej z roku 2012, kde boli v žiackych riešeniach hodnotené: správnosť, prepojenosť vedomostí a kreativita. Kritériami pre kreativitu boli fluencia, flexibilita a originalita.

V našej práci sme sledovali kritériá vymedzené nasledovným spôsobom:

- **Správnosť** – Za správne sme považovali každé riešenie, v ktorom riešitelia dospeli k správnemu výsledku úvahami, ktoré boli dostatočne zdôvodnené. V prípade, že niektoré zdôvodnenia chýbali, no dané pojmy a vlastnosti boli využívané správne a zmysluplne, riešenie bolo tak isto považované za správne. Vo viacerých žiackych riešeniach sa vyskytlo riešenie rysovaním a následne meraním. Napriek správnemu výsledku sme všetky riešenia, v ktorých žiaci argumentovali meraním považovali za nesprávne.
- **Prepojenosť vedomostí** – Na základe žiackych riešení sme vymedzili jednotlivé pojmy a vlastnosti (konkretizované v časti o počte krokov nižšie), ktoré využívali riešitelia a následne sme sledovali ich výskyt. Prepojenosť vedomostí sme pozorovali len vo vybraných riešeniach.
- **Počet krokov, z ktorých riešenie pozostáva** – V správnych žiackych riešeniach boli využívané nasledovné pojmy a vlastnosti:

I. **Podobnosť** – uvedomenie si, že ak sa v určitom pomere zväčší dĺžka polomeru kružnice, tak v tom istom pomere sa zväčší aj dĺžka hľadanej úsečky AZ. Ani jeden z riešiteľov neuviedol priamo, že využíva podobnosť.

II. **Kružnica a jej vlastnosti** – všetky body na kružnici majú od jej stredu rovnakú vzdialenosť rovnú polomeru tejto kružnice. Táto informácia pomohla riešiteľom nachádzať v obrázku rovnoramenné trojuholníky.

III. **Rovnoramenný trojuholník a jeho vlastnosti** – v rovnoramennom trojuholníku sú vnútorné uhly pri základni zhodné. Využitím tohto poznatku dokázali riešitelia napríklad dopočítavať vnútorné uhly v trojuholníkoch.

IV. **Rovnostranný trojuholník a jeho vlastnosti** – v rovnostrannom trojuholníku sú všetky strany a všetky vnútorné uhly zhodné. Riešitelia dokázali z informácie, že všetky tri vnútorné uhly v trojuholníku majú 60° usúdiť, že daný trojuholník je rovnostranný. Takto na základe jednej známej dĺžky strany dokázali určiť dĺžky zvyšných strán v tomto trojuholníku.

V. **Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku** – súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180°. Tento poznatok bol kľúčový pri určovaní veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníkoch.

VI. **Talesova veta** – v trojuholníku, ktorého jedna strana je priemerom kružnice a jeho tretí vrchol leží tiež na tejto kružnici, je vnútorný uhol nad priemerom kružnice pravý. Využitím Talesovej vety nachádzali riešitelia v obrázku pravouhlé trojuholníky a dokázali určiť veľkosti niektorých ďalších uhlov.

VII. **Susedné / vrcholové uhly** – súčet veľkostí susedných uhlov je 180° a vrcholové uhly majú rovnakú veľkosť. Poznatky o vzájomnom vzťahu veľkostí susedných a vrcholových uhlov pomohli na základe jedného známeho uhla určiť aj veľkosti ďalších uhlov.

VIII. **Plný uhol** – veľkosť plného uhla je 360°. Nie všetci z riešiteľov uviedli daný pojem.

IX. **Os uhla a jej vlastnosti** – os uhla rozdeľuje daný uhol na dve zhodné časti a tiež platí, že v rovnoramennom trojuholníku je os uhla oproti základni na základňu kolmá.

X. **Stredové / obvodové uhly** – veľkosť obvodového uhla je rovná polovici veľkosti stredového uhla prislúchajúcemu tomu istému kružnicovému oblúku. Túto vlastnosť použil iba jeden riešiteľ.

XI. **Obdĺžnik a jeho vlastnosti** – doplnenie pôvodného obrázka dokreslením úsečiek tak, že vznikne obdĺžnik a využitie jeho vlastností.

XII. **Šesťuholník a jeho vlastnosti** – doplnenie pôvodného obrázka dokreslením úsečiek tak, že vznikne šesťuholník a využitie jeho vlastností.

- **Originalita** – U jednotlivých riešiteľov sme zaznamenávali výskyt vyššie uvedených krokov. Za originálne sme považovali riešenie, ktoré obsahovalo krok s nízkym výskytom. Riešiteľov sme z dôvodu ich nedostatočného počtu nerozdelili podľa tried, do ktorých patria ako to bolo vo výskume Leikinovej a Levav-Waynbergovej (2012). Originálne riešenia sme si všímali vzhľadom na celú množinu riešiteľov.

- **Pohľad späť** – V správnych riešeniach sme si všímali, či na záver bola uskutočnená spätná väzba, ktorá mohla byť realizovaná vo forme komentára, určitého zhrnutia alebo obrázka. Pohľad späť sme vyhodnocovali len vo vybraných riešeniach.

V našom výskume nemalo zmysel sledovať fluenciu, ktorej skóre odráža rozsah priestoru riešení individuálnych riešiteľov, ani flexibilitu, ktorá odráža schopnosť riešiteľa presúvať sa od jedného postupu riešenia k inému. V zadaní úlohy v seminári Matik nebola požiadavka, aby žiaci riešili danú úlohu viacerými spôsobmi. U každého riešiteľa sa vyskytol maximálne jeden spôsob riešenia.

3.2 Analýza žiackych riešení

V nasledujúcej tabuľke uvádzame prehľad dát získaných pri analýze žiackych riešení.

Tabuľka

P.Č.	meno	škola	roč.	B	S/N	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	poč.krok.
1	Adam	OG	7	0	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	Boris	ZŠ	8	6	N+	0	4	3	7	2	1	5	0	6	0	8	0	8
3	Cyril	ZŠ	8	0	N	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	Dávid	OG	7	1	N	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	Emil	OG	7	1	N	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	Anna	ZŠ	7	0	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	Barbora	ZŠ	8	1	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	Diana	ZŠ	8	0	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	Filip	ZŠ	9	9	S	1	4	5	8	3	2	6	0	7	0	0	0	8
10	Gabriel	ZŠ	8	8	S-	1	3	4	5	0	2	0	0	6	0	0	0	6
11	Eva	ZŠ	9	9	S	1	2	3	8	4	0	5	7	6	0	0	0	8
12	Lukáš	ZŠ	9	9	S	1	2	3	8	4	0	5	7	6	0	0	0	8
13	Ivan	ZŠ	9	9	S	1	4	5	9	3	2	6	8	7	0	0	0	9
14	Janko	ZŠ	9	7	S-	1	3	4	5	0	0	7	0	6	0	2	0	7
15	Karol	ZŠ	8	9	S	1	4	5	8	3	2	6	0	7	0	0	0	8
16	Hugo	ZŠ	7	9	S	0	2	3	7	4	1	6	0	5	0	0	0	7
17	Ľubo	ZŠ	7	7	S-	1	0	5	6	2	0	3	0	4	0	0	0	6
18	Martin	ZŠ	7	1	N	1	2	0	0	4	0	3	0	0	0	0	0	4
19	Noro	ZŠ	7	1	N	0	0	1	0	2	0	3	0	0	0	0	0	3
20	Oliver	ZŠ	7	2	S-	0	1	2	6	3	0	4	0	5	0	0	0	6
21	Peter	ZŠ	9	6	S-	1	2	3	8	4	0	5	7	6	0	0	0	8
22	Richard	ZŠ	7	0	N	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
23	Samuel	ZŠ	7	0	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	Števo	ZŠ	8	1	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

P.Č.	meno	škola	roč.	B	S/N	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	poč.krok.
25	Tomáš	ZŠ	7	7	S-	1	2	3	7	4	0	5	0	6	0	0	0	7
26	Vlado	ZŠ	9	1	S-	1	0	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	5
27	Gabriela	ZŠ	9	7	S-	1	2	3	7	4	6	5	0	0	0	0	0	7
28	Hana	ZŠ	7	1	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	Zdeno	OG	7	9	S	1	2	3	8	4	7	5	0	6	0	0	0	8
30	Adrián	ZŠ	7	6	S-	1	0	2	7	3	0	4	6	5	0	0	0	7
31	Ivana	ZŠ	7	4	S-	1	0	2	5	3	0	0	0	4	0	0	0	5
32	Jana	ZŠ	7	1	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	Katka	ZŠ	7	3	S-	1	0	2	6	3	0	4	0	5	0	0	0	6
34	Lenka	ZŠ	8	2	S-	1	0	2	4	3	0	0	0	0	0	0	0	4
35	Braňo	OG	7	9	S	0	1	2	6	3	0	4	0	5	0	0	0	6
36	Daniel	OG	7	9	S	0	1	2	6	3	0	4	0	5	0	0	0	6
37	Monika	OG	7	2	N	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
38	Nina	OG	7	1	N	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
39	Natália	OG	7	1	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	Edo	OG	8	0	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	Olívia	ZŠ	7	9	S	0	1	2	6	3	0	4	0	5	0	0	0	6
42	Fero	ZŠ	7	1	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	Gusto	ZŠ	8	8	S-	1	2	3	8	4	0	5	7	6	0	0	0	8
44	Jozef	OG	7	7	S-	0	0	1	5	2	0	3	0	4	0	0	0	5
45	Petra	ZŠ	8	2	N	1	0	0	3	0	0	2	0	0	0	0	0	3
46	Kristián	ZŠ	6	8	S-	1	0	0	0	0	0	3	0	4	2	0	5	5
47	Laco	OG	7	9	S	0	1	2	6	3	0	4	0	5	0	0	0	6
48	Radka	ZŠ	8	9	S	1	4	5	6	3	2	7	0	8	0	0	0	8
49	Matej	ZŠ	8	6	S-	4	3	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	4
50	Marián	ZŠ	8	4	S-	0	0	2	5	1	0	4	0	3	0	0	6	6
výskyt daného kroku u riešiteľov:						21	20	27	27	26	10	25	6	25	1	1	2	

Vysvetlivky k tabuľke:

meno – priradené krycie mená v abecednom poradí z dôvodu zachovania anonymity riešiteľov
škola – ZŠ – základná škola, OG – osemročné gymnázium
roč. –ročník, ktorý žiak navštevoval v čase riešenia úlohy
B – počet bodov udelený organizátormi korešpondenčného seminára Matik
S/N – ohodnotenie správnosti, resp. nesprávnosti riešenia
I.-XII. – použité kroky, tak ako sú očíslované vyššie
poč. krok. – počet rôznych pojmov a vlastností, ktoré riešiteľ použil
výskyt daného kroku u riešiteľov – počet riešiteľov, u ktorých sa daný krok vyskytol

S- v stĺpci S/N znamená, že riešenie bolo správne ale neúplné, N+ znamená, že riešiteľ urobil numerickú chybu, ďalej postupoval správne, ale dospel k nesprávnemu výsledku. Číselné hodnoty, ktoré sú uvedené v stĺpcoch I.-XII. vyjadrujú poradie, v ktorom boli jednotlivé kroky v riešeniach žiakov použité. V prípade viacnásobného použitia daného pojmu alebo vlastnosti je v tabuľke zachytené len ich prvé použitie. Počet krokov v poslednom stĺpci tabuľky teda nezachytáva to, ak bol niektorý krok využitý viac krát.

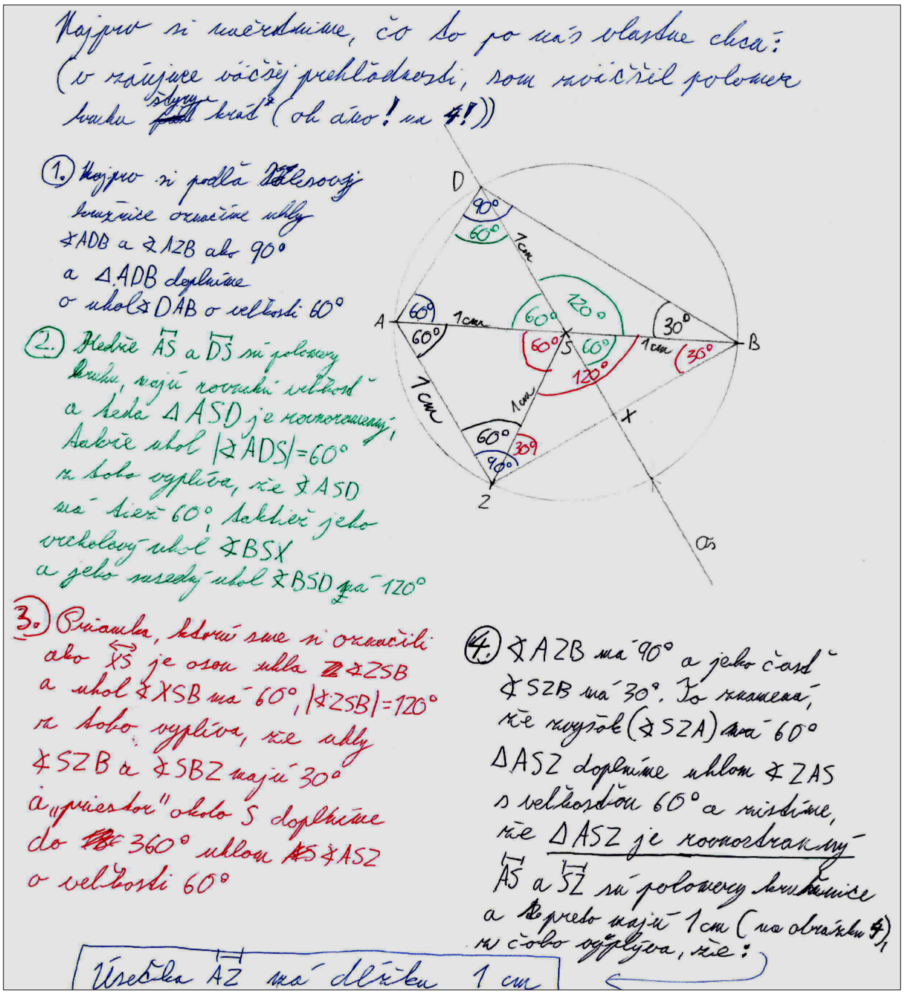
Výsledky:

Správnosť:

Z tabuľky vidíme, že dvanásti riešitelia vyriešili úlohu úplne správne, sedemnásti riešitelia mali riešenie správne, avšak s nepresnosťami, prípadne s chýbajúcimi zdôvodneniami. Zvyšných dvadsaťjeden riešení bolo nesprávnych. Jeden z riešiteľov, konkrétne Bohuš (P.Č. 2), urobil vo svojom postupe numerickú chybu. Ďalej používal správne úvahy a dopracoval sa k výsledku, ktorý však nebol správny. Riešitelia, ktorí úlohu riešili nesprávne rysovaním a meraním, no uviedli aspoň odpoveď so správnym výsledkom, prípadne náznak zdôvodnenia, získali buď 1 alebo 2 body.

Počet krokov, z ktorých riešenie pozostáva:

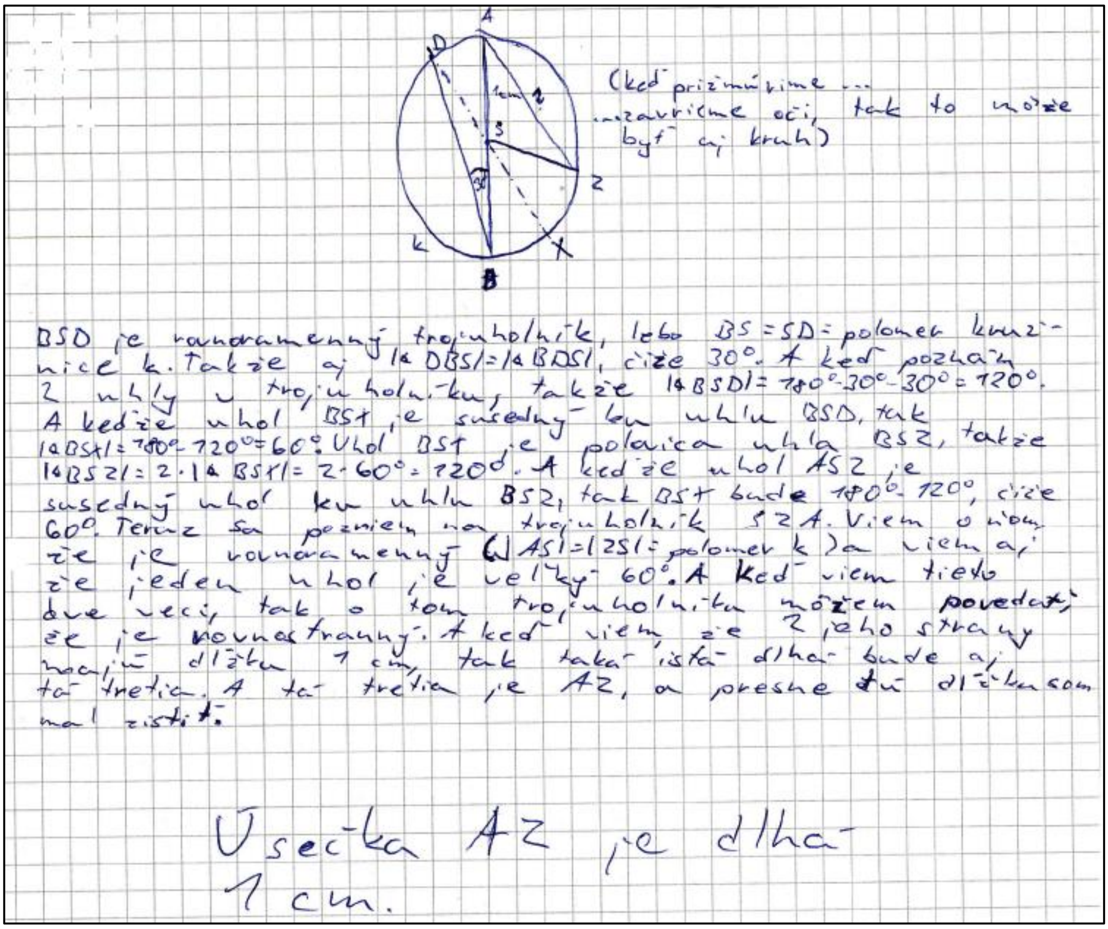
Počet krokov, teda počet použitých pojmov a vlastností sledujeme len v úplne správnych riešeniach (v tabuľke označené S). Maximálny počet krokov bol 9, vyskytol sa u riešiteľa Ivana (P.Č. 13), na obrázku (Obr. 3.1) uvádzame jeho riešenie. Využil



Obr. 3. 1

podobnosť, Talesovu vetu, súčet vnútorných uhlov v trojuholníku, kružnicu a jej vlastnosti, rovnoramenný trojuholník, vrcholové uhly, os uhla, plný uhol a rovnostranný trojuholník.

Minimálny počet krokov v úplne správnych riešeniach bol 6 a vyskytol sa u štyroch riešiteľov, sú to menovite Braňo (P.Č. 35), Daniel (P.Č. 36), Olívia (P.Č. 41) a Laco (P.Č. 47). U všetkých riešiteľov sme dokonca pozorovali použitie tých istých krokov v zhodnom poradí. Riešiteľ Ivan sa od tejto skupiny odlišuje využitím podobnosti, Talesovej vety a plného uhla. Na porovnanie tejto skupiny riešiteľov s Ivanom použijeme Braňove riešenie (Obr 3.2):

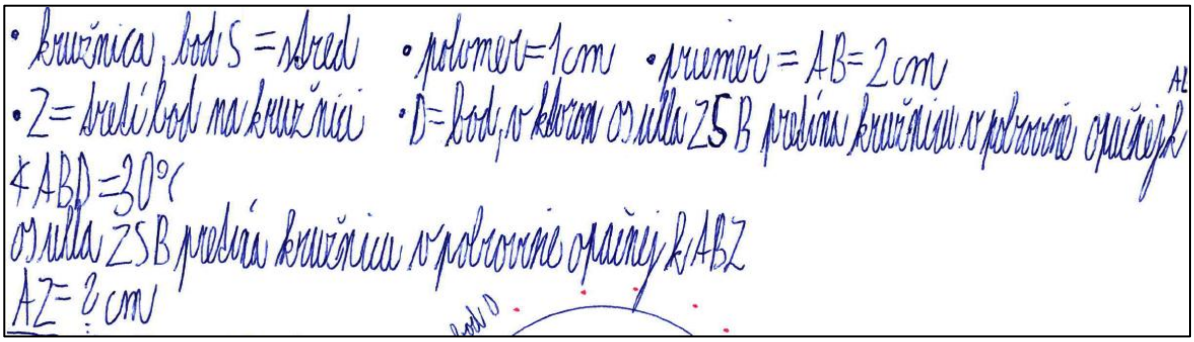


Obr. 3. 2

Braňo na rozdiel od Ivana neuvádza využitie podobnosti. Keďže obrázok nerysuje, iba načrtáva, pravdepodobne sa nad podobnosťou nezamyslel. Ivan využíva Talesovu vetu na určenie vnútorných uhlov v trojuholníku ABD, odtiaľ cez ďalšie vlastnosti určuje ďalšie vnútorné uhly vo vzniknutých trojuholníkoch. U Braňa vidíme, že sa k veľkostiam týchto uhlov dopracoval tak, že na začiatku využil vlastnosť kružnice a rovnoramenný trojuholník. Plný uhol vyžíva Ivan na určenie veľkosti uhla ASZ, Braňo túto veľkosť určuje pomocou poznatku o susedných uhloch.

Prepojenosť vedomostí

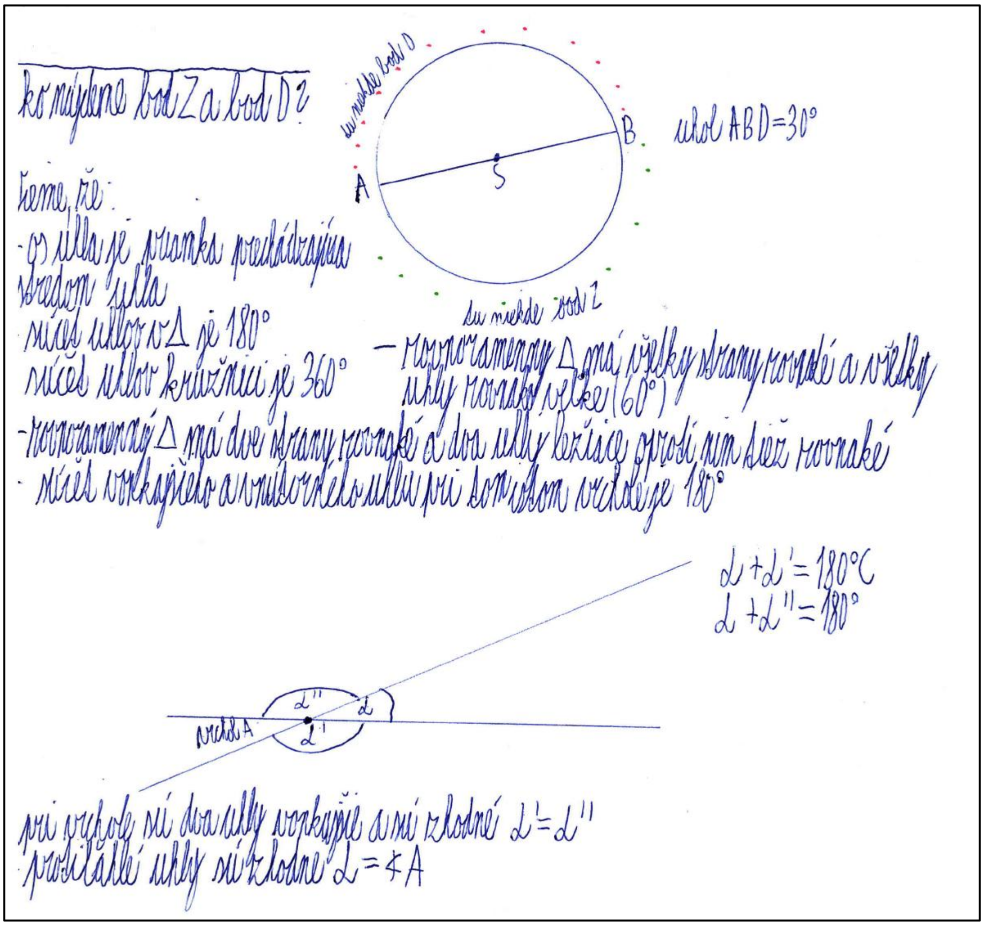
Jedným z riešiteľov, u ktorých bolo možné sledovať prepojenosť vedomostí bol Marián (P.Č. 50). Jeho riešenie ako jedno z mála obsahuje aj dôkladný zápis zo zadania (Obr. 3.3):



Obr. 3. 3

Potom nasleduje časť, v ktorej sa Marián snaží zosumarizovať si svoje poznatky súvisiace s informáciami v zadaní úlohy. Môžeme jasne pozorovať, že sa snaží pracovať čo najsystematickejšie, pozorujeme tu snahu o prepájanie vedomostí.

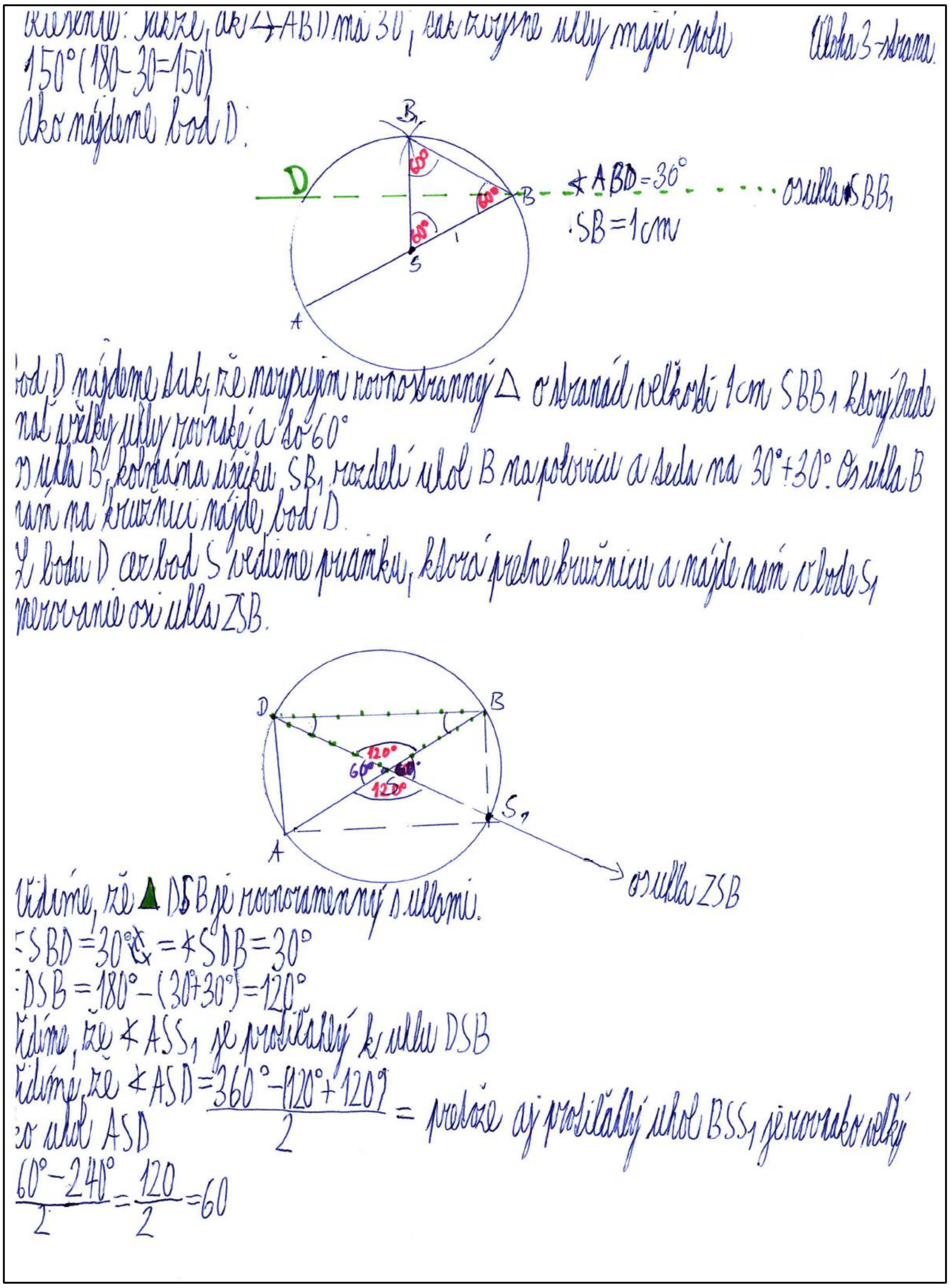
Na obrázku (Obr. 3.4) vidno uvedomenie si pojmu polrovina (polroviny sú odlíšené bodkami rôznych farieb), ďalej Marián uvádza os uhla, súčet vnútorných uhlov v trojuholníku, plný uhol, rovnoramenný trojuholník, ktorý je spomenutý dva krát. V jednom prípade došlo k „preklepu“, ide o rovnostranný trojuholník. Ďalej sa tu ešte



Obr. 3. 4

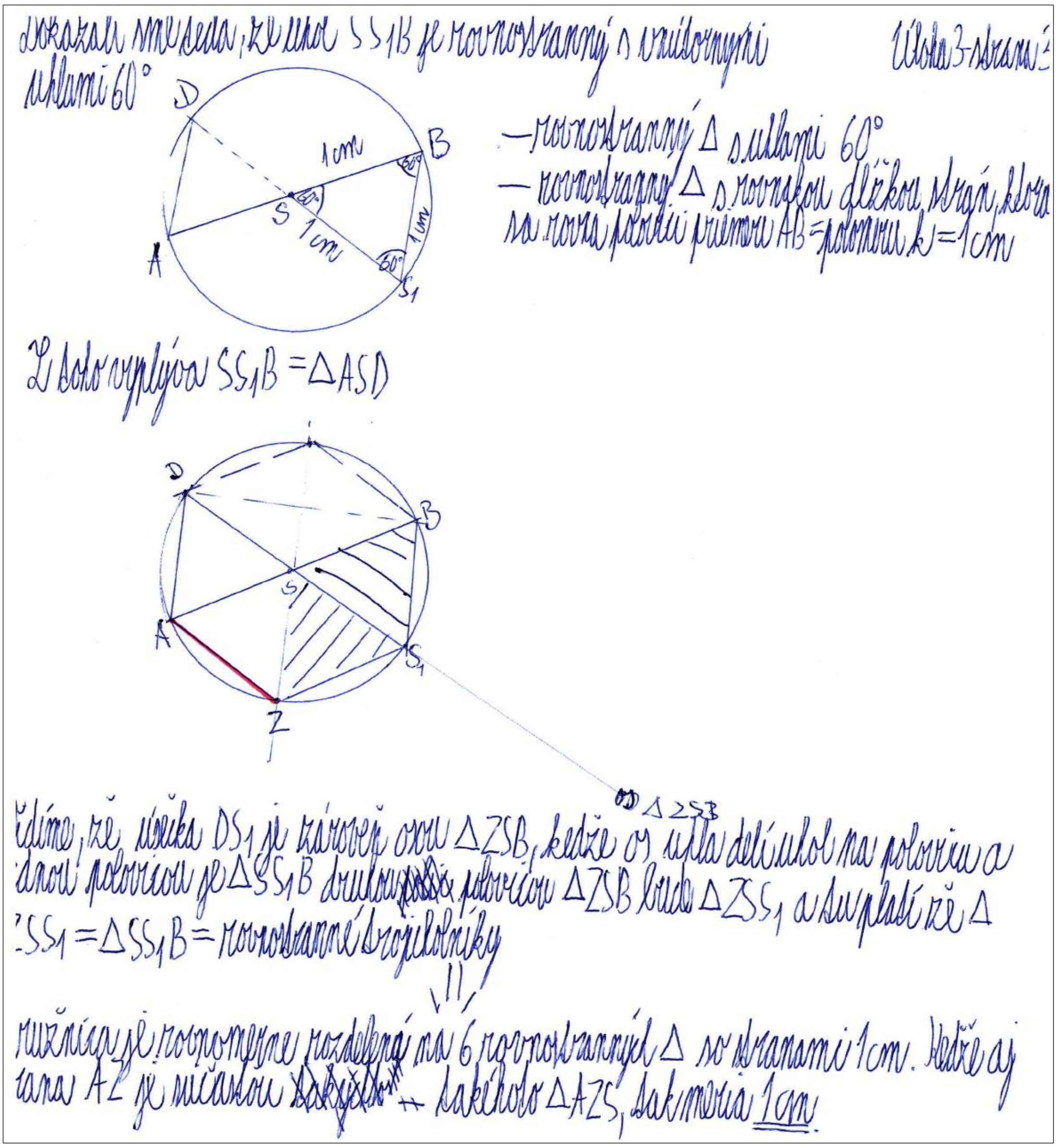
nepriamo spomínajú susedné a vrcholové uhly. Vyzerá to tak, že Marián uvádza všetky spomínané pojmy bez toho, aby vedel, či ich v riešení využije.

Následne riešiteľ konštrukčne hľadá bod D zo zadania. Aj keď to k vyriešeniu úlohy nie je potrebné, je možné, že na základe tejto konštrukcie si Marián mohol uvedomiť nejaké súvislosti.



Obr. 3. 5

V ďalšom postupe sa vyskytujú viaceré nepresnosti, či chyby vo vyjadrovaní, viac menej z nepozornosti. Napríklad namiesto pojmu vrcholové uhly používa pojem protiľahlé uhly, alebo uvádza, že „uhol SS_1B je rovnostranný“. Takéto chyby nepovažujeme za vážne, výraznejším nedostatkom je chýbajúce zdôvodnenie tvrdenia: „Z toho vyplýva $SS_1B = \Delta ASD$“ (Obr. 3.6). Nie je jasné, z čoho to vyplýva. Buď riešiteľ v závere riešenia omylom vynechal nejaký krok, alebo to jednoducho nevedel zdôvodniť.



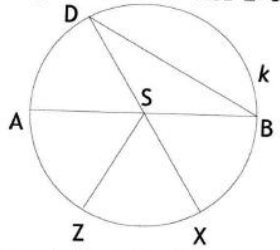
Obr. 3. 6

Aj napriek tomu sa Mariánovi podarilo zaujímavé pozorovanie, všimol si, že do obrázka sa dá doplniť šesť rovnakých rovnostranných trojuholníkov a z toho zistil dĺžku hľadanej úsečky AZ. Žiaľ aj v závere riešenia chýba dostatočné zdôvodnenie. V každom prípade považujeme prístup tohto riešiteľa za zaujímavý, je vidieť, že Marián si všimol viaceré súvislosti, ktoré si iní riešitelia nevšimli.

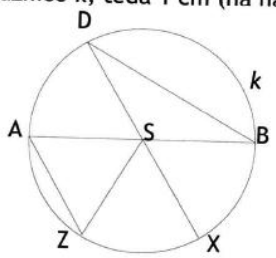
Originalita

V poslednom riadku tabuľky je uvedená početnosť výskytu jednotlivých krokov v riešeniach žiakov. Za originálne považujeme riešenia, ktoré obsahujú nasledovné kroky: obvodové a stredové uhly (krok sa vyskytol 1 krát), obdĺžnik a jeho vlastnosti (2 krát) a šesťuholník a jeho vlastnosti (2 krát). Na ukážku originálneho riešenia sme vybrali riešiteľa Kristiána (P.Č. 46), ktorý využil obvodové a stredové uhly a šesťuholník. Uvádzame časť jeho riešenia (Obr. 3.7):

Ak chceme vedieť polohu bodu Z (žuvačky), a teda aj veľkosť uhlu <ZSB, musíme najprv poznať veľkosť uhla <XSB (polovičnú oproti <ZSB). Tú zistíme nasledovne: Vidíme, že <ABD (ktorého veľkosť poznáme, 30°) je obvodovým uhlom obidvoch oblúkov ohraničených bodmi A a D. Uhol <ASD je ich stredovým uhlom, má teda dvojnásobnú veľkosť (60°). Uhly <ASD a <XSB sú vrcholové, majú teda rovnakú veľkosť. Veľkosť uhla <XSB je teda 60° a <ZSB 2×60°=120°:



Teraz stačí zistiť dĺžku úsečky $|\overline{AZ}|$. Keďže ide o tetivu, ktorá spája body ohraničujúce oblúky zo stredovým uhlom 60°, ide (podobne ako napríklad pri úsečkách $|\overline{AD}|$, $|\overline{ZX}|$ alebo $|\overline{XB}|$) o stranu pravidelného šesťuholníka, teda má rovnakú dĺžku ako polomer kružnice *k*, teda 1 cm (na nasledujúcom obrázku 2 cm):



ODPOVEĎ: Úsečka ZS je dlhá 1 cm.

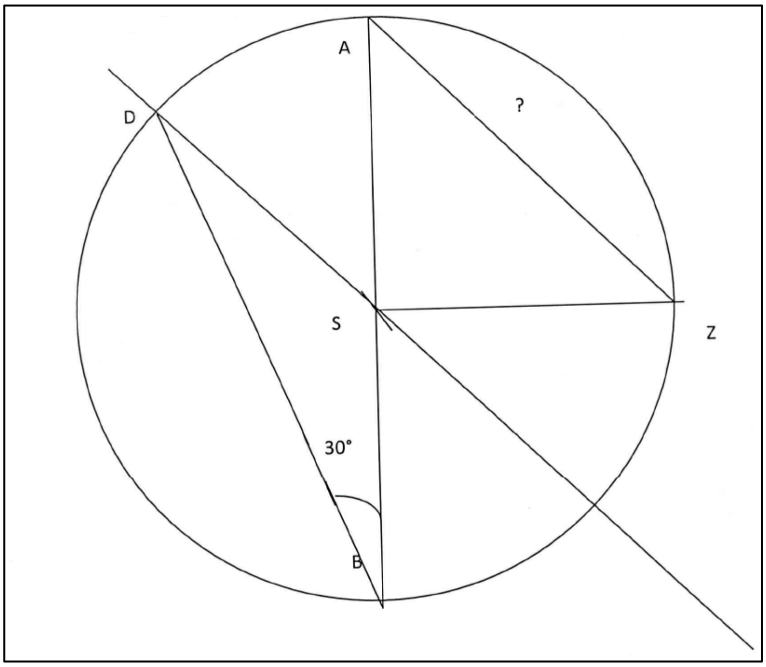
Obr. 3. 7

Využitie pojmov stredového a obvodového uhla je prekvapujúce, keďže toto učivo je zaradené až na stredných školách, o to viac, že Kristián je najmladší spomedzi všetkých riešiteľov (je žiakom iba 6. ročníka). Niekedy sa stáva, že deti s veľkým záujmom o matematiku sa k niektorým vedomostiam dostanú skôr ako sú preberané v škole. Či už je to na rôznych krúžkoch, alebo sústredeniach, alebo im ich môžu prezradiť rodičia, starší súrodenci, či kamaráti.

Pohľad späť

Hodnotiť toto kritérium bolo veľmi náročné najmä preto, že sme k dispozícii mali iba písomnú formu žiackych riešení a s riešiteľmi sme sa osobne nestretli. V písomných riešeniach žiaci nie vždy zapíšu každú svoju myšlienku. V súťažiach, kde majú súťažiaci dostatok času na riešenie je zvykom, že po vyriešení úlohy „na nečisto" svoje riešenie ešte raz prepíšu, pričom nemusia dodržať pôvodný postup.

Výskyt spätnej väzby sme si všímali na základe obrázka, porovnali sme riešenia Ivana (P.Č.13), ktoré je uvedené vyššie (Obr. 3.1) a Daniela (P.Č. 36), uvedené nižšie (Obr. 3.8):



Obr. 3. 8

U Daniela bol obrázok uvedený za odpoveďou na konci riešenia. Aj napriek zisteniu, že trojuholník ASZ je rovnostranný, na obrázku vyzerá takmer ako pravouhlý. Netvrdíme, že je to chyba, ale vidíme, že riešiteľ Daniel nevykonal spätnú väzbu. U riešiteľa Ivana vidíme, že obrázok odzrkadľuje vlastnosti trojuholníkov zistené počas riešenia úlohy, teda predpokladáme, že riešiteľ vykonal myšlienkovú spätnú väzbu.

Zhrnutie:

V žiackych riešeniach sme posudzovali kreativitu na základe nami navrhnutých kritérií, ktorými boli správnosť riešenia, prepojenosť vedomostí, počet krokov, originalita, a pohľad späť. Spomínané kritériá sme si zvolili v súvislosti s výskumom Leikinovej a Levav – Waynbergovej (2012), ktorý bol zameraný na MSTs úlohy. K dispozícii sme mali naskenované, písomne vypracované riešenia žiakov zapojených do súťaže. So žiakmi sme nevykonali žiadne osobné rozhovory. Je možné, že žiaci do svojich riešení nenapísali úplne všetky svoje myšlienky a preto niektoré naše úvahy pri ich hodnotení nemusia byť správne. Pri porovnávaní nášho hodnotenia s hodnotením organizátorov sme si všimli, že opravovatelia prísnejšie hodnotili menej prehľadné riešenia s preklepmi a formálnymi chybami, a to napriek tomu, že niektoré z týchto riešení boli myšlienkovo správne a pozorovali sme v nich prepájanie vedomostí a výskyt originálnych krokov.

Úplne správne riešenie a plný počet bodov od organizátorov získali dvanásti riešitelia, čo predstavuje 24% z celkového počtu 50 riešiteľov. Taktiež správne, no s nepresnosťami alebo s chýbajúcimi zdôvodneniami vyriešili úlohu sedemnásti riešitelia, čo predstavuje 34% zo všetkých riešiteľov. Všetkých správnych riešení bolo teda dohromady 58%. Zvyšní riešitelia vyriešili úlohu nesprávne.

Zo všetkých krokov sa u riešiteľov s úplne alebo čiastočne správnymi riešeniami najčastejšie vyskytovali kroky III. rovnoramenný trojuholník a jeho vlastnosti a IV. rovnostranný trojuholník a jeho vlastnosti. Oba tieto kroky sa vyskytli zhodne u dvadsiatich siedmych riešiteľov, tento počet predstavuje 54% zo všetkých zapojených žiakov. Najzriedkavejšie, iba raz sa vyskytlo využitie obvodového a stredového uhla a tiež využitie obdĺžnika. Ďalším zriedkavým krokom bolo využitie šesťuholníka, ktoré sa vyskytlo u 2 riešiteľov.

Pri analýze jednotlivých úloh z korešpondenčných seminárov sme zhodnotili, že vzorové riešenia často vyžadovali matematický aparát nad rámec učebných osnov. V riešeniach tejto úlohy sme si mohli všimnúť, že aj keď napríklad rovnostranné a rovnoramenné trojuholníky a ich vlastnosti sú učivom až 8. ročníka, aj mnohí siedmaci ich dokázali úspešne využívať. Týmto sa potvrdzuje, že s týmito pojmami sa žiaci na školách veľmi často stretávajú už skôr ako sú v osnovách zaradené, tak ako sme uviedli v 2. kapitole.

Za originálne a tvorivé sme považovali riešenia s výskytom originálnych (málo frekventovaných) krokov. Avšak ak by bola v zadaní požiadavka aby riešitelia hľadali čo najviac možných prístupov k riešeniu, dalo by sa očakávať, že viacerí by našli pri riešení úlohy ďalšie prepojenia a vzťahy. Preto o riešiteľoch s menej originálnymi krokmi v riešení nemôžeme prehlásiť, že nie sú kreatívni. Myslíme si, že úlohy typu MSTs by mohli byť vhodnejšie na posudzovanie kreativity u riešiteľov. Pre opravovateľov by pravdepodobne znamenali komplikovanejšiu prácu pri opravovaní žiackych riešení, ale na druhej strane by MSTs úlohy mohli mať pozitívny vplyv na rozvíjanie matematickej kreativity.

Záver

Cieľom našej práce bolo analyzovať poznatky týkajúce sa matematického nadania, talentu a kreativity a navrhnúť systém kritérií na hodnotenie kreativity v žiackych riešeniach matematických úloh.

Na základe naštudovanej literatúry sme sformulovali náš pohľad na nadanie a talent. Prikláňame sa k názoru, že nadanie je v rôznom rozsahu pozorovateľné u každého človeka. Veríme, že je podmienené vrodenými vlohami a ďalej je potrebné ho rozvíjať, pričom na rozvíjaní nadania sa podieľajú vnútorné a vonkajšie faktory. Medzi vnútorné faktory zaraďujeme cieľavedomosť, vytrvalosť, vlastnú motiváciu, kreativitu, vedomostnú výbavu, hodnoty a celkový prístup jedinca. Ku vonkajším faktorom môžeme zahrnúť vplyv rodinného zázemia, pedagogické pôsobenie a motiváciu zo strany učiteľov, kolektív v ktorom sa daný jedinec pohybuje a ďalšie vonkajšie vplyvy. Menované faktory spolu navzájom interagujú a v prípade úspešnej interakcie vedú k realizácii nadania, teda k prejavom talentu.

Opierajúc sa o výskum autoriek Levav-Waynbergovej a Leikinovej (2012) sme ako kritériá na posudzovanie kreativity u žiakov navrhli správnosť riešenia, prepojenosť vedomostí, počet krokov, originalitu a pohľad späť. Pri analýze žiackych riešení úlohy z matematického korešpondenčného seminára Matik sme medzi dvadsiatimi deviatimi riešiteľmi, ktorí úlohu vyriešili správne, našli znaky tvorivosti u troch žiakov. Uvedomili sme si však, že na základe skúmaných riešení vybranej úlohy nemôžeme o zvyšných riešiteľoch prehlásiť, že nie sú kreatívni. Ak by bola úloha zadaná formou MSTs úlohy, teda ak by od riešiteľov vyžadovala čo najviac možných spôsobov riešenia, dalo by sa očakávať, že viacerí by našli pri riešení úlohy ďalšie prepojenia a vzťahy. Preto si dovoľujeme navrhnúť, aby sa v niektorej matematickej súťaži pre žiakov nadaných na matematiku objavili aj úlohy typu MSTs.

Dospeli sme tiež k záveru, že hodnotiť riešenia niektorých žiakov podľa nastavených kritérií bolo náročné. Každé riešenie bolo jedinečné presne tak, ako je jedinečný každý z riešiteľov.

Analýza žiackych riešení bola pre nás obohacujúcou skúsenosťou, pretože sme mali možnosť vyskúšať si jednu z činností, ktoré sú súčasťou práce učiteľa matematiky. Takto sme pri vypracovávaní našej práce popri množstve teoretických poznatkov nadobudli aj určité praktické zručnosti.

Literatúra:

Askew, M. 2001. Policy, practices and principles in teaching numeracy: What makes a difference? In P. Gates (Ed.), Issues in mathematics teaching (pp.105–119). London, GB: Routledge Falmer.

Burjan, V. 2005. Zamyslenie nad niektorými didaktickými a psychologickými aspektmi práce s matematickými talentami. In Ani jeden matematický talent nazmar (2005), JČMF, Hradec Králové.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. 2004. Proofs through exploration in dynamic geometry environment. International Journal of Science and Mathematics Education, 2, 339–352.

Clements, D. H. 2003. Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 151–173). Reston, VA: NCTM.

Clements, D. H., & Battista, M. T. 1992. Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 420–464). New York, NY: Macmillan.

Dhombres, J. 1993. Is one proof enough? Travels with a mathematician of the baroque period. Educational Studies in Mathematics, 24, 401–419.

Dočkal, V. 1999. Nadanie. In: Ďurič, L., Bratská, M. et al., Pedagogická psychológia. Terminologický a výkladový slovník (s. 190–193). SPN, Bratislava, ISBN 80-08-02498-4.

Ďurič, L., Bratská, M. et al. 1999. Pedagogická psychológia. Terminologický a výkladový slovník (s. 193–194). SPN, Bratislava, ISBN 80-08-02498-4.

Ervynck, G. 1991. Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 42–53). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Frensch, P., & Sternberg, R. 1992. Complex problem solving: Principles and mechanisms. Mahwah: Lawrence Erlbaum and Associates.

Hadamard, J. W. 1945. Essay on the psychology of invention in the mathematical field. Princeton: Princeton University Press. (page references are to Dover edition, New York 1954).

Herbst, P. 2002. Engaging students in proving: A double bind on the teacher. Journal for Research in Mathematics Education, 33, 176–203.

Hershkowitz, R. 1990. Psychological aspects of learning geometry. In J. Kilpatric, & P. Nesher (Eds.), Mathematics and cognition. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. 1992. Learning and teaching with understanding. In D. A. Ggrouws (Ed.), Handbook for research on mathematics teaching and learning (pp. 65–97). New York, NY: Macmillan.

Homola, M., Trpišovská, D. 1992. Psychologie osobnosti (Stručný výkladový slovník). UP, Olomouc.

House, P. A., & Coxford, A. F. 1995. Connecting mathematics across the curriculum: 1995 yearbook. Reston, VA: NCTM.

Hozová, L. 2003. Jak pečovat o matematické talenty. In Ani jeden matematický talent nazmar (2003), JČMF, Hradec Králové.

Hříbková, L. 2007. Přístupy ke studiu a vyhledávání nadaných v psychologii. In Ani jeden matematický talent nazmar (2007), JČMF, Hradec Králové.

Kieren, T. E. 1990. Understanding for teaching for understanding. The Alberta Journal of Educational Research, XXXVI, 191–201.

Krutetskii, V. A. 1976. In: J. Kilpatrick, I. Wirszup (Eds.) & J. Teller (Trans.), The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: University of Chicago Press.

Lawson, M. J., & Chinnappan, M. 2000. Knowledge connectedness in geometry problem solving. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 26–43.

Leikin, R. 2003. Problem-solving preferences of mathematics teachers: Focusing on symmetry. Journal of Mathematics Teacher Education, 6, 297–329.

Leikin, R. 2007. Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In The fifth conference of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME-5.

Leikin, R. 2009. Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 129–145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher (Chapter 9).

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. 2007. Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and schol practice in the use of connecting tasks. Educational Studies in Mathematics, 66, 349–371.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. 2009. Development of teachers' conceptions through learning and teaching: Meaning and potential of multiple-solution tasks. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9(4), 203–223.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I., & Mednikov, L. 2006. Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? Focus on Learning Problems in Mathematics, 28, 1–22.

Levav-Waynberg, A., Leikin, R. 2012. The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. Journal of Mathematical Behavior, 31, 73– 90.

Mareš, J. 2003. Žáci nadaní a talentovaní na matematiku. In Ani jeden matematický talent nazmar (2003) JČMF, Hradec Králové.

Novotná, J. 2005. How can we modify and motivate mathematical talents? Case of word problems. In Gagatsis, A., et al. (eds.) Proc. of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education MEDCONF 2005, Cyprus Mathematical Society, Nicosia, s. 523–532.

Novotná, J., Zhouf, J. 2005. Projekt MathEU: Identifikace, motivace a podpora matematických talentů v evropských školách. In Ani jeden matematický talent nazmar (2005), JČMF, Hradec Králové.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA.

Plucker, J. A. 1998. Je vzdělávání talentovaných žáků ještě životaschopné? Mareš, J. Žáci nadaní a talentovaní na matematiku. In Ani jeden matematický talent nazmar (2003) JČMF, Hradec Králové.

Poincaré, H. 1948. Science and method. New York: Dover.

Polya, G. 1954. Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics (Vol. II). Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. 1963. On learning, teaching, and learning teaching. American Mathematical Monthly, 70, 605–619.

Polya, G. 1973. How to solve it; A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Polya, G. 1981. Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving. New York: Wiley.

Renzulli, J. S. 1978. What makes giftedness? Re-examining a definition. Phi Delta Kappan 60 s. 180–184.

Renzulli, J. S. 1986: The three-ring conception of giftedness: a developmental model for creative productivity. In: Sternberg, R. J., Davidson, J. E. (Eds.): Conceptions of Giftedness, University Press, Cambridge, s. 53–92.

Semanišinová, I., Šveda, D. 2007. Ako sa prejavuje matematické nadanie. In Ani jeden matematický talent nazmar (2007) JČMF, Hradec Králové.

Sfard, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36.

Schoenfeld, A. H. 1983. Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography. The Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. H. 1988. When good teaching leads to bad results: The disasters of well-taught mathematics courses. Educational Psychologist, 23, 145–166.

Sierpinska, A. 1994. Understanding in mathematics. Washington, DC: Falmer.

Silver, E. A. 1997. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM-Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 3, 75–80.

Skemp, R. R. 1987. The psychology of learning mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sriraman, B. 2009. The characteristics of mathematical creativity. ZDM, 41, 13-27.

Sternberg, R. J. 1979. Human intelligence: Perspectives on its theory and measurement. Norwood: Ablex Publishing Co.

Sternberg, R. J. 1985. Human abilities: An information processing approach. New York: W. H. Freeman.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. 2000. The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook of creativity (pp. 93–115). Cambridge: Cambridge University Press.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. 1999. The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York, NY: The Free Press.

Torrance, E. P. 1974. The torrance tests of creative thinking. Technical-norms manual. Benseville, IL: Scholastic Testing Services.

Vaněk, V. 2003. Gymnázia s rozšírenou výukou matematiky. In Ani jeden matematický talent nazmar (2003), JČMF, Hradec Králové.

Vinner, S. 1989. Avoidance of visual considerations in calculus students. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, 149–156.

Wallas, G. 1926. The art of thought. New York: Harcourt, Brace & Jovanovich.

Internetové zdroje:

www.pikomat.sk

www.strom.sk

www.riesky.sk

www.kms.sk

www.sezam.sk

www.maks.sk

www.matmix.sk

www.taktik.sk

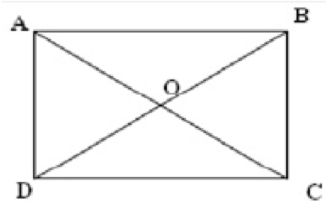
www.gjh.sk

www.statpedu.sk

Príloha 1

<u>Príklad úlohy typu MST:</u>

Dokážte, že rovnobežník so zhodnými uhlopriečkami je obdĺžnik. Nájdite čo najviac možných spôsobov riešenia.



Obr. 1

Predvedené riešenia (Levav-Waynbergová & Leikinová, 2012):

1. Trojuholník ADC je zhodný s trojuholníkom BCD (sss). A teda uhly ADC a BCD sú zhodné. Keďže ide o rovnobežník, v ktorom sú strany AD a BC rovnobežné, súčet uhlov ADC a BCD je 180°. Veľkosť každého z nich je teda 90°. Rovnobežník s vnútorným uhlom o veľkosti 90° je určite obdĺžnik.
2. Keďže vieme, že uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom rozpoľujú, bod O je stredom úsečky BD a úsečka CO je ťažnicou v trojuholníku BCD. Ďalej, keďže uhlopriečky v našom rovnobežníku sú zhodné, vieme, že dĺžka ťažnice CO je polovica z dĺžky BD. Využijeme tvrdenie, že ak dĺžka ťažnice na stranu trojuholníka sa rovná polovici dĺžky tejto strany, potom uhol oproti tejto strane je pravý. Na základe tohto tvrdenia vieme, že uhol BCD má 90°. Z toho môžeme podobne ako v prvom prípade usúdiť, že rovnobežník ABCD je obdĺžnik.
3. Uhol ACD označíme ako α a uhol BCA označíme ako β. Využitím rovnobežnosti a vlastností rovnoramenných trojuholníkov možno ukázať, že veľkosť každého vnútorného uhla rovnobežníka ABCD sa rovná $\alpha + \beta$. Všetky štyri vnútorné uhly sú zhodné a teda rovné $360°/4 = 90°$. Opäť sme ukázali, že ABCD je obdĺžnik.

Táto úloha bola použitá pri osobnom rozhovore so študentom, ktorý sa zúčastnil výskumu autoriek Levav-Waynbergovej a Leikinovej (2012) zameranom na MSTs úlohy. Vo svojej triede, ktorá bola vo výskume zaradená do kontrolnej skupiny, patrí medzi snaživých žiakov s kladným vzťahom k matematike a na tento rozhovor sa prihlásil dobrovoľne. Bol požiadaný o to, aby k úlohe našiel čo najviac rôznych postupov riešenia. Takéto zadanie bolo pre neho nové, doteraz sa s požiadavkou, aby vyriešil úlohu viacerými spôsobmi priamo nestretol.

Vo svojom prvom riešení postupoval študent tak, ako je uvedené v bode 1. vyššie. Potom ho zadávateľ požiadal o nájdenie nového dôkazu. Spočiatku mal študent problémy odpútať sa od prvého postupu riešenia a začať dôkaz nanovo, bez opierania sa o to, k čomu dospel v prvom riešení. Po chvíľke úvah sa študentovi podarilo prísť k druhému spôsobu riešenia (bod 2.). V treťom riešení chcel študent využiť zhodnosť trojuholníkov AOB s DOC a trojuholníkov AOD s BOC, no po chvíľke sa zastavil s tvrdením, že by išlo o to isté riešenie ako v bode 1. K poslednému spôsobu dôkazu (bod 3.) výrazne dopomohol zadávateľ úlohy.