

Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Řešení úloh z oblasti
elektrických obvodů

Filip Devera

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:
Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

2012

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Řešení úhoh z oblasti elektrických obvodů vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání žádného jiného titulu.

.....

Datum

.....

Podpis

NÁZEV:

Řešení úloh z oblasti elektrických obvodů

AUTOR:

Filip Devera

KATEDRA:

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

VEDOUcí PRÁCE:

Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

ABSTRAKT:

Tématem této práce je řešení úloh z oblasti elektrických obvodů. Teorie elektrických obvodů je velmi široké téma, proto se tato práce zabývá pouze úzkou podskupinou. Jedná se pouze o elektrické obvody, ve kterých zdroje dodávají proud a napětí buď o konstantním stejnosměrném průběhu, nebo průběhu harmonickém. Dále se těmito obvody zabýváme pouze v ustáleném stavu. Může to působit jako velké zjednodušení dané problematiky, ale většina elektrických zařízení pracuje právě na stejnosměrné nebo harmonické napájení.

Tato práce si klade za cíl vymezit vztahy pro řešení vybraných elektrických obvodů z mnohem širší problematiky teorie elektromagnetického pole. Na základě těchto vztahů existují různé metody a postupy pro řešení elektrických obvodů. Na řešených příkladech pak bude ukázáno použití jednotlivých metod. Kromě fyzikálního popisu obvodů bude zapotřebí matematický aparát pro řešení rovnic a soustav rovnic, které získáme pomocí fyzikálních vztahů.

TITLE:

Solving problems from the domain of electrical circuits

AUTHOR:

Filip Devera

DEPARTMENT:

Department of Mathematics and Mathematical Education

SUPERVISOR:

Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

ABSTRACT:

The subject of this thesis is solving problem from the domain of electrical circuits. Because the theory of electrical circuits itself is a broad subject, this thesis is going to focus only on a small subcategory, mainly electrical circuits, where the power sources supply the current and voltage either at a constant direct flow or with a harmonic waveform. Furthermore these circuits will be discussed only in their stabilized state. This may seem as a gross simplification of the subject, but majority of electronic devices works with direct or harmonic power supply.

The goal set for this thesis is to define relationships for the design of selected electrical circuits derived from the much broader theory of electromagnetic field. Various methodologies and procedures for the design of electronic circuits exist, that are based on these relationships. These methods will be illustrated on solved examples. Aside from the physical characterization of circuits a mathematical apparatus will be needed to solve equations and system of equations, derived from the physical relationships.

Obsah

1	Úvod	6
2	Fyzikální předpoklady	7
2.1	Elektrický obvod	7
2.2	Základní veličiny	8
2.2.1	Elektrické napětí	10
2.2.2	Elektrický proud	11
2.2.3	Výkon	12
2.3	Pasivní prvky elektrického obvodu	12
2.3.1	Rezistor	13
2.3.2	Induktor	14
2.3.3	Kapacitor	15
2.4	Aktivní prvky elektrického obvodu	15
2.4.1	Zdroje elektrického napětí	16
2.4.2	Zdroje elektrického proudu	16
2.5	Kirchhoffovy zákony	17
2.5.1	První Kirchhoffův zákon	17
2.5.2	Druhý Kirchhoffův zákon	17
2.6	Speciální případy analýzy obvodů	18
2.6.1	Stejnoseměrný ustálený stav	18
2.6.2	Harmonický ustálený stav	19
2.7	Metody řešení elektrických obvodů	20
2.7.1	Postupné zjednodušování	20
2.7.2	Princip superpozice	23
2.7.3	Théveninův a Nortonův teorém	24
2.8	Obvodové rovnice	25
2.8.1	Metoda smyčkových proudů	26
2.8.2	Metoda uzlových napětí	27

3	Matematické předpoklady	29
3.1	Komplexní čísla	29
3.2	Soustavy lineárních rovnic	31
3.3	Fyzikální význam matematických vztahů	34
4	Řešené příklady	36
4.1	Stejnoseměrný ustálený stav	36
4.1.1	Příklad č. 1	36
4.1.2	Příklad č. 2	38
4.1.3	Příklad č. 3	42
4.1.4	Příklad č. 4	43
4.1.5	Příklad č. 5	45
4.2	Harmonický ustálený stav	46
4.2.1	Příklad č. 6	46
4.2.2	Příklad č. 7	48
4.2.3	Příklad č. 8	49
5	Závěr	54

Kapitola 1

Úvod

Tématem této práce je řešení úloh z oblasti elektrických obvodů. Obecně vzato je teorie elektrických obvodů velmi široké téma, proto se tato práce bude zabývat pouze úzkou podskupinou. Bude se jednat pouze o elektrické obvody, ve kterých zdroje dodávají proud a napětí buď o konstantním stejnosměrném průběhu, nebo průběhu harmonickém. Dále se těmito obvody budeme zabývat pouze v ustáleném stavu, nebudou nás tedy zajímat přechodové děje při zapínání a vypínání elektrických zařízení. Může to působit jako velké zjednodušení dané problematiky, ale je nutno si uvědomit, že většina elektrických zařízení pracuje právě na stejnosměrné nebo harmonické (střídavé) napájení.

Tato práce si klade za cíl vymezit vztahy pro řešení vybraných elektrických obvodů z mnohem širší problematiky teorie elektromagnetického pole. Na základě těchto vztahů existují různé metody a postupy pro řešení elektrických obvodů. Na řešených příkladech pak bude ukázáno použití jednotlivých metod. Kromě fyzikálního popisu obvodů bude zapotřebí matematický aparát pro řešení rovnic a soustav rovnic, které získáme pomocí fyzikálních vztahů. Jednoduše řečeno, v této práci by měly být shrnuty všechny předpoklady pro řešení daného druhu příkladů.

Teoretické předpoklady pro popis elektromagnetického pole jsou přejímány především z [1], pro elektrické obvody pak hlavně z [2], [3] a [4].

Kapitola 2

Fyzikální předpoklady

2.1 Elektrický obvod

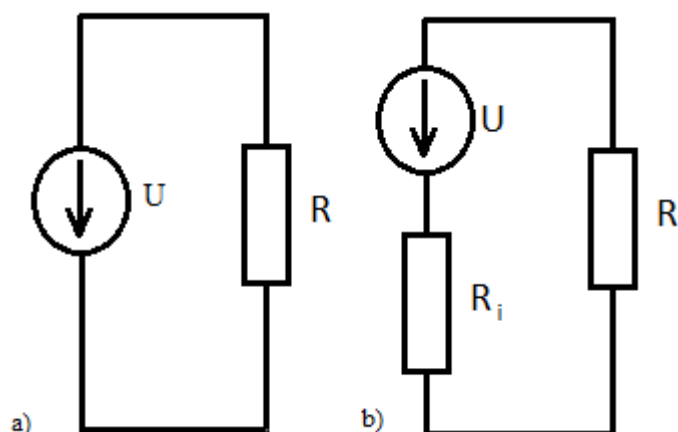
Elektrický obvod je vlastně idealizovaným modelem skutečného elektrického zařízení, jak plyne z [3]. Jde o vodivě propojené prvky (součástky) elektrického obvodu. V případě elektrických obvodů jde o idealizované součástky, reprezentující pouze jednu fyzikální veličinu. Děje na jednotlivých prvcích elektrického obvodu musí být jednoznačně popsány napětím a proudem. Předpokládáme, že elektromagnetické pole mimo prvky elektrického obvodu je nulové, nebo alespoň zanedbatelné.

Prvky elektrického obvodu se dělí na aktivní a pasivní. Aktivní jsou ty, které do obvodu dodávají elektrickou energii, tedy zdroje. Pasivní jsou ty, které elektrickou energii spotřebovávají, tedy přeměňují na jiný druh energie, nebo akumulují, ať už ve formě elektrického nebo magnetického pole. Jde například o rezistor, induktor a kapacitor. Dále lze prvky dělit podle počtu svorek (vývodů) na dvojpóly, trojpóly atd. Prvky mohou být buď lineární, nezávislé na přiloženém napětí a protékajícím elektrickým proudem, nebo nelineární. Pokud všechny prvky elektrického obvodu jsou lineární, nazývá se i obvod lineární. Vlastnosti prvků se mohou také měnit v závislosti na čase; klasickým příkladem je zdroj harmonického napětí, kde se napětí mezi svorkami periodicky mění podle předpisu $u = U_m \sin(\omega t)$. Podrobnějším popisem prvků elektrického obvodu se budeme zabývat v dalších kapitolách.

Grafickým znázorněním elektrického obvodu je schéma elektrického obvodu. Jednotlivé prvky elektrického obvodu jsou znázorněny domluvenými značkami. Propojeny jsou souvislou čarou, která představuje ideální vodič o nulovém odporu, kapacitě i indukčnosti. *Místo, kde jsou spojeny svorky minimálně dvou prvků, se nazývá uzel.* [4] Ve schématu se značí tečkou. Pokud se ve schématu vodiče kříží, ale není vyznačena tečka, znamená to, že nejsou na-

vzájem propojeny. Část elektrického obvodu nalézající se mezi dvěma uzly se nazývá větev. Jakýkoli uzavřený okruh v daném schématu se nazývá smyčka.

Jako jednoduchý příklad vytváření a použití teorie elektrických obvodů může posloužit obyčejná kapesní svítilna. Podobný příklad se vyskytuje v [3]. Svítilna obsahuje baterii o jmenovitém napětí 4,5 V, vypínač a žárovku. Nejjednodušeji můžeme modelovat toto zapojení jako spojení ideálního zdroje napětí s ideálním rezistorem (viz obr. 2.1a). Pro ne příliš přesné výpočty to



Obrázek 2.1: Schema obvodu modelujícího zapojení žárovky a baterky, kde žárovku považujeme za ideální rezistor a baterii za ideální zdroj napětí.

stačí. Při bližším zkoumání ale zjistíme, že baterie není ani zdaleka ideálním zdrojem, ale že čím větší proud z ní odebíráme, tím více klesá napětí. To lze modelovat jako seriové zapojení ideálního zdroje napětí o napětí 4,5 V a rezistoru R_i (viz obr. 2.1b). Vodiče, kterými jsme prvky obvodu propojili, jsme doposud považovali za ideální vodiče, ale nějaký odpor přeci jen mají. Žárovka se nechová jako lineární rezistor, její odpor se mění v závislosti na protékaném proudu atd. Zkrátka model reálného zapojení je možno zpřesňovat téměř do nekonečna. Je pouze na nás, jakou přesnost výsledku potřebujeme. Pokud chceme zjistit velikost proudu tekoucího žárovkou s přesností na mA, nebudeme do elektrického obvodu započítávat odpor vedení, který ovlivní výsledek v řádu μA .

2.2 Základní veličiny

Všechny fyzikální pojmy stanovené kvantitativně se stávají fyzikálními veličinami. [2] Bez veličin by ztrácelo jakékoli měření a výpočty smysl. Veličiny

a vztahy používané při řešení elektrických obvodů vychází z teorie elektromagnetického pole.

Elektrické a magnetické jevy způsobuje elektrický náboj. Značí se Q , q , jednotka je Coulomb [C]. Náboj je jednou ze základních vlastností hmoty stejně jako například hmotnost. *Existují dva druhy náboje, kladný a záporný.* [1] Neutrony náboj nenesou. Dle dohody protony mají kladný náboj, elektrony záporný o stejné absolutní hodnotě $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C. Tento takzvaný elementární náboj je dále nedělitelný. Je ovšem tak malý, že v makrosvětě, kde se obvykle zabýváme nábojem o velikosti v řádu μC až C, jej lze považovat za spojitou veličinu. Elektrický náboj, opět jako hmotnost, nelze vytvořit ani zničit. Existuje zákon zachování náboje.

Elektrické náboje Q_1, Q_2 na sebe působí silou \mathbf{F} (tučnou kurzívou budeme značit vektory), jejíž velikost v závislosti na velikosti nábojů, vzdálenosti r a permitivitě prostředí ε je popsána Coulombovým zákonem.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (2.1)$$

Tento vztah udává pouze velikost síly F , nikoli její směr. Dále platí, že dva náboje stejné polaroty se odpuzují, různé polaroty přitahují. Vezmeme-li toto v potaz, lze psát Coulombův zákon i pomocí vektorů. Elektrický náboj ve svém okolí vytváří elektrické pole. Základní veličinou popisující elektrické pole je vektor intenzity elektrického pole \mathbf{E} , jednotkou je volt na metr [V/m]. Jeden V/m odpovídá takovému poli, které by na náboj velikosti 1 C působilo silou 1 N, tedy

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}. \quad (2.2)$$

Z Coulombova zákona (2.1) lze tedy odvodit vztah pro intenzitu elektrického pole buzenou bodovým nábojem.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2} \mathbf{r}_0. \quad (2.3)$$

Vektor \mathbf{r}_0 je jednotkový vektor směřující od elektrického náboje Q k bodu, v němž určíme intenzitu elektrického pole \mathbf{E} . Někdy se k popisu elektrického pole používá i vektor elektrické indukce \mathbf{D} [C/m].

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \mathbf{r}_0. \quad (2.4)$$

Ta určuje vlastnosti elektrického pole nezávisle na prostředí.

Pohybující se náboj kolem sebe vytváří pole magnetické. Silové působení magnetického pole je dáno vztahem:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.5)$$

kde \mathbf{v} je rychlost náboje a \mathbf{B} je vektor magnetické indukce. Jednotkou magnetické indukce je tesla [T]. Magnetická indukce popisuje magnetické pole podobně jako vektor elektrické intenzity pole elektrické. Další významnou veličinou je magnetický tok Φ .

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.6)$$

Jednotkou magnetického toku je Weber [Wb]. Obdobně jako v elektrickém poli elektrická indukce \mathbf{D} udává vlastnosti pole nezávisle na prostředí, tak i v magnetickém poli se zavádí intenzita magnetického pole \mathbf{H} .

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.7)$$

μ je permeabilita prostředí.

Celkově lze elektromagnetické pole popsat čtyřmi Maxwellovými rovnicemi.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I, \quad (2.8)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.9)$$

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (2.10)$$

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.11)$$

Je zřejmé, že jejich použití pro praktické výpočty je dost obtížné. I to byl jeden z důvodů vzniku teorie obvodů, kde lze většinu případů popsat mnohem jednodušším matematickým aparátem pro vztahy mezi napětím a proudem.

2.2.1 Elektrické napětí

Elektrické napětí u_{ab} je integrální veličina vyjadřující práci vykonanou elektrickým polem při přenesení zkušební jednotkového náboje $Q = 1$ C z bodu A do bodu B po křivce C .[3] Lze tedy psát:

$$u_{ab} = \frac{W}{Q} = \frac{1}{Q} \int_{A(C)}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A(C)}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.12)$$

Předchozím vztahem máme dáno napětí mezi dvěma body elektrického pole, závislé ovšem na křivce C , po níž se náboj pohybuje. Abychom mohli elektrické napětí určit jednoznačně, pomůžeme si následující úvahou. Dle [3] vyjdeme z druhé Maxwellovy rovnice (2.9). Uzavřenou křivku zvolíme tak, aby

procházela body A a B . Tím je křivka rozdělena na dvě části C_1 a C_2 . Z rovnice plyne, že musí platit

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{B(C_1)}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{A(C_2)}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{B(C_1)}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{B(C_2)}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.13)$$

Pokud tedy je v daném prostoru magnetický indukční tok nulový nebo alespoň konstantní, můžeme říci, že člen $\frac{d\Phi}{dt}$ je nulový, a tedy napětí mezi body A a B po jakékoli dráze je stejné. Vzhledem k základním předpokladům elektrického obvodu, tedy že mimo prvky obvodu je elektromagnetické pole zanedbatelné, je tato podmínka splněna.

Elektrické napětí může mít různý průběh v závislosti na čase: $u = f(t)$. V této práci se budeme zabývat pouze dvěma možnostmi. Stejnoseměrným napětím, kde předpokládáme $u = \text{konst.}$ a napětím harmonickým, běžně označovaným jako střídavé: $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$. V tomto vztahu se U_m nazývá amplituda, znamená maximální hodnotu napětí, ω je úhlová frekvence a φ je fázový posun. V řešených úlohách budeme zadávat zdroje napětí vždy v tomto tvaru. Kromě amplitudy lze popsat průběh napětí takzvanou střední hodnotou U_s nebo efektivní hodnotou U_{ef} .

Střední hodnota napětí je vlastně jeho průměrná hodnota. Vypočítáme ji ze vzorce: $U_s = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$. V případě harmonického průběhu je ale problémem, že z tohoto vztahu získáme za jakýchkoli okolností nulu, což nám o velikosti napětí moc nevypraví. Abychom dostali smysluplnou hodnotu, počítáme průměr z absolutní hodnoty průběhu napětí:

$$U_s = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt. \quad (2.14)$$

Efektivní hodnota napětí popisuje výkon periodického napětí. Efektivní hodnota harmonického napětí U_{ef} má stejnou hodnotu jako stejnosměrné napětí U , které vzbudí na lineárním rezistoru stejný výkon jako výkon způsobený napětím harmonickým. Efektivní napětí se používá velmi často, například známých 230 V v síti je právě efektivní napětí. V případě harmonického stavu je vztah mezi amplitudou a efektivní hodnotou:

$$U_m = \sqrt{2}U_{ef}. \quad (2.15)$$

Z toho plyne, že amplituda napětí v zásuvce je přibližně 325 V.

2.2.2 Elektrický proud

Umístíme-li do elektrického pole vodič, tedy látku s volnými nosiči náboje, začne na tyto náboje působit síla. *Tím vzniká elektrický proud, který je de-*

finován jako množství náboje procházející plochou za jednotku času.[1] Elektrický proud je skalární, integrální veličina, jednotkou je ampér [A], který je jednou ze základních jednotek SI. Za kladný směr proudu považujeme směr pohybu kladných elektronů.[1]

Elektrický proud popisuje pohyb náboje celým průřezem, pohyb náboje v jednotlivém bodě popisuje vektor proudové hustoty \mathbf{J} [A/m²]. Jeho velikost je dána vztahem $J = \frac{dI}{dS}$, směr je směrem pohybu kladných nábojů. Zpětně tedy platí:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.16)$$

Zde je na místě vysvětlit pojem integrální veličina použitý už v souvislosti s napětím. Jde o veličiny vztažené vždy na nějakou křivku, plochu nebo objem. Napětí se vztahuje ke křivce vymezené krajními body, proud k průřezu vodiče. Oproti tomu diferenciální veličiny lze popsat v každém bodě, například proudovou hustotu.

2.2.3 Výkon

Byť se budeme ve většině této práce zabývat především elektrickým napětím a proudem, nelze zapomínat, že hlavním smyslem elektrických zařízení je přenos a přeměna energie. Bude nás tedy nutně zajímat, jakou energii a výkon do obvodu dodávají zdroje, stejně tak jaká práce je konána na spotřebičích. Výkon v elektrickém poli je dán vztahem:

$$p = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l})}{dt} = \frac{d(\int Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l})}{dt} = \frac{dQu}{dt} = ui. \quad (2.17)$$

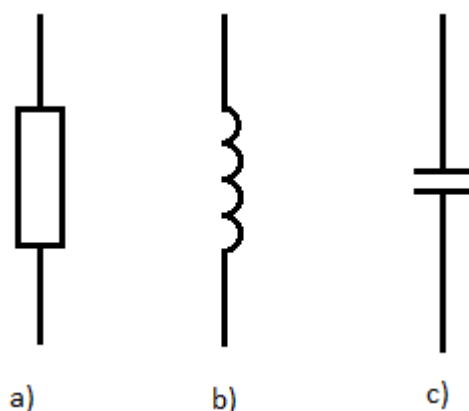
To je ovšem okamžitý výkon. Častěji nás bude zajímat výkon průměrný za čas, v případě periodických průběhů za periodu T .

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt. \quad (2.18)$$

Na tomto místě bychom se měli zabývat ještě dalšími veličinami: odporem, indukčností a kapacitou. Vzhledem k tomu, že se vážou ke konkrétním prvkům elektrického obvodu, zařadíme jejich popis až do následující kapitoly, zabírající se právě těmito prvky.

2.3 Pasivní prvky elektrického obvodu

Pasivní prvky jsou takové, které buď energii spotřebovávají, nebo v sobě akumulují. Řadíme mezi ně rezistor, induktor a kapacitor. Jejich schématické značky jsou na obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Schematické značky: a) rezistor, b) induktor, c) kapacitor

2.3.1 Rezistor

Rezistor je ideálním prvkem elektrického obvodu, jehož jedinou vlastností je elektrický odpor. Rezistor přeměňuje elektrickou energii na jiný druh energie, nejčastěji na energii tepelnou.

Elektrický odpor popisuje vztah mezi napětím a proudem v dané součástce. Připojíme-li na vodič zdroj elektrického napětí, vznikne v něm elektrické pole, které způsobí pohyb nosičů náboje, tedy elektrický proud. Pokud zvětšíme napětí, stoupne intenzita elektrického pole a tím i rychlost nosičů náboje, tedy proud. Lze tedy psát $i = f(u)$ [5].

Právě tuto závislost vyjadřuje odpor R , případně vodivost G Ohmovým zákonem:

$$u = Ri = \frac{i}{G}. \quad (2.19)$$

Jednotkou odporu je ohm $[\Omega]$, vodivosti siemens $[S]$. Odpor je opět integrální veličina, vztahuje se k celému objemu. Veličina popisující vlastnosti látky v bodě je rezistivita ρ , případně její převrácená hodnota konduktivita σ . Výsledný odpor R závisí jak na rezistivitě, tak na tvaru tělesa. Nemá smysl zde rozebírat tuto problematiku podrobněji. V úlohách, jež budeme v této práci řešit, budou zadány u rezistorů vždy odpory, nebude tedy nutné je dopočítávat. Pro ukázkou postačí uvést vztah ze střední školy, kdy předpokládáme těleso tvaru válce či hranolu o obsahu podstavy S , výšce l a pro všechny body tělesa konstantní rezistivitě ρ :

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (2.20)$$

Velikost odporu souvisí i s dalšími vnějšími vlivy, například s teplotou. Obecně

lze říci, že se vzrůstající teplotou roste u vodičů i odpor, u polovodičů je tomu obráceně.

V této práci se budeme zabývat jenom lineárními rezistory. Na lineárním rezistoru je voltampérová charakteristika, tedy závislost $i = f(u)$, lineární. Z toho plyne, že odpor je konstantní.

Existují samozřejmě i rezistory nelineární, kde je odpor funkcí buď napětí, nebo proudu. Jako příklad z běžného života může posloužit žárovka, čím větší proud jí protéká, tím více se zahřívá a tím se zvětšuje její odpor. Reálným prvkem, svými vlastnostmi se blížícím rezistoru, je součástka s krásným českým názvem odporník.

2.3.2 Induktor

Induktor je část obvodu, v níž se akumuluje energie ve formě magnetického pole. Jde vlastně o idealizovanou cívku, jeho jedinou vlastností je indukčnost L . Jednotkou indukčnosti je henry [H]. Stejně tak jako u rezistoru vyjadřoval odpor vztah mezi elektrickým napětím a proudem, u induktoru indukčnost udává vztah mezi proudem i a cívkovým magnetickým indukčním tokem Φ_c [3].

$$\Phi_c = Li, \quad (2.21)$$

Φ_c je součet indukčních toků procházejících závitů cívky. V případě, že všemi závitů prochází stejný magnetický indukční tok Φ , můžeme psát $\Phi_c = N\Phi$. N je počet závitů.

Ve zbytku práce se budeme zabývat pouze lineárními induktory, kde cívkový magnetický indukční tok je lineárně závislý na proudem a indukčnost je konstantní. Při analýze obvodů nás především zajímá vztah mezi napětím a proudem.

$$u(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (2.22)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^T u(t) dt + i(0). \quad (2.23)$$

Nás budou především zajímat speciální případy při stejnosměrném ustáleném stavu a harmonickém ustáleném stavu. Při stejnosměrném ustáleném stavu, kdy nedochází k žádné změně proudu, je $\frac{di}{dt} = 0$, tedy napětí na induktoru je vždy nulové a ten se chová jako vodič. V harmonickém ustáleném stavu, kde je průběh proudu $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, můžeme odvodit:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{dI_m \sin(\omega t + \varphi)}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.24)$$

2.3.3 Kapacitor

Poslední z pasivních prvků elektrického obvodu je ideální kondenzátor, kapacitor. Jeho hlavní a jedinou vlastností je kapacita C , udávaná ve Faradech [F]. Reálný kondenzátor může být konstruován různými způsoby. Pro naši představu bude nejvhodnější takzvaný deskový kondenzátor. Je tvořen dvěma rovnoběžnými elektrodami o ploše S , jež jsou od sebe vzdáleny d . Prostor mezi nimi vyplňuje dielektrikum (izolant) o permitivitě ε . Pro kapacitu tohoto kondenzátoru pak platí vztah:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}. \quad (2.25)$$

Kapacitor akumuluje energii ve formě elektrického pole. Kapacita je vztah mezi nábojem a napětím.

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (2.26)$$

Uvážíme-li, že elektrický proud je derivací náboje dle času, lze opět odvodit vztahy mezi napětím a proudem:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}, \quad (2.27)$$

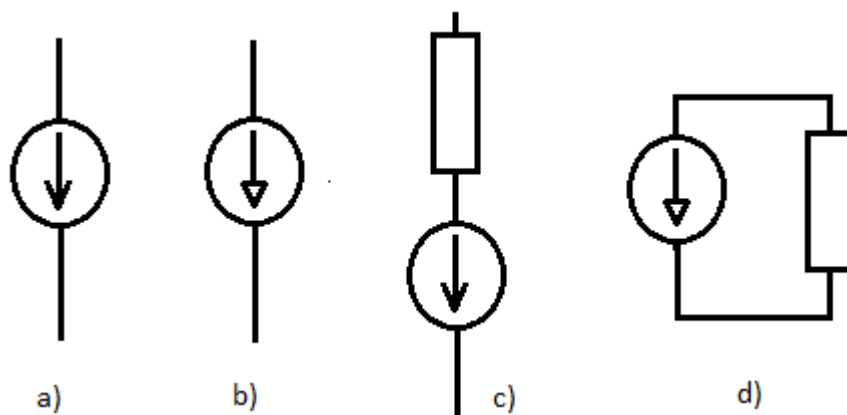
$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^T i(t) dt + u(0). \quad (2.28)$$

I v případě kapacitoru nás bude zajímat jeho chování při stejnosměrném nebo harmonickém ustáleném stavu. Z rovnice (2.27) vyplývá, že proud kapacitorem bude při stejnosměrném ustáleném stavu vždy nulový. Bude se tedy chovat jako rozpojený vodič, což napovídá i konstrukce deskového kondenzátoru. Při harmonickém ustáleném stavu musí platit následující vztah:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{dU_m \sin(\omega t + \varphi)}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.29)$$

2.4 Aktivní prvky elektrického obvodu

Základní aktivní dvojpóly jsou prvky elektrického obvodu, které modelují zdroje elektrické energie. [3] Rozeznáváme dva základní druhy, zdroje elektrického napětí a zdroje elektrického proudu.



Obrázek 2.3: Schematické značky: a) zdroj elektrického napětí, b) zdroj elektrického proudu, c) model reálného zdroje napětí, d) model reálného zdroje proudu

2.4.1 Zdroje elektrického napětí

Ideálním zdrojem napětí je takový dvojpól, mezi jehož svorkami je průběh napětí $u(t)$ nezávislý na odebíraném elektrickém proudu, jak plyne z [2]. Nás budou zajímat dva možné průběhy, jednak tzv. stejnosměrný, kdy $u(t) = \text{konst.}$, a harmonický, kde platí $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$. Bohužel nežijeme v ideálním světě, takže neexistují ani ideální zdroje elektrického napětí. Každý reálný zdroj napětí je schopen dodávat jen omezený výkon, tedy i omezený proud. Obvykle při větší zátěži, tedy při větším odebíraném proudu klesá napětí zdroje. Tato skutečnost se v rámci elektrických obvodů modeluje sériovým zapojením rezistoru a ideálního zdroje napětí (viz obr. 2.3c). Tento rezistor představuje takzvaný vnitřní odpor. U ideálního zdroje napětí je vnitřní odpor nulový. Toto zapojení představuje lineární závislost poklesu napětí na proudu. Výsledné napětí zdroje je dáno jeho jmenovitým napětím U_i (napětí ideálního zdroje napětí) a velikostí vnitřního odporu R_i .

Pro představu, reálným zdrojem napětí může být dynamo či alternátor (přeměna mechanické energie na elektrickou), akumulátory a monočlánky (chemická energie).

2.4.2 Zdroje elektrického proudu

Ideální zdroj proudu je takový dvojpól, kterým protéká proud daného průběhu $i(t)$ bez závislosti na napětí mezi jeho svorkami. I u zdroje elektrického proudu nás bude zajímat pouze pouze stejnosměrný a harmonický průběh. Ani zdroj elektrického proudu v reálném světě neexistuje. Ze své podstaty by

musel při rozpojených svorkách na nich dosahovat téměř nekonečné hodnoty napětí. Chování reálného zdroje se modeluje pomocí paralelní kombinace ideálního zdroje proudu a rezistoru R_i (viz obr. 2.3d). Toto zapojení respektuje, že čím větší je napětí na svorkách zdroje, tím menší proud je zdrojem do obvodu dodáván. U ideálního zdroje je vnitřní odpor nekonečný.

2.5 Kirchhoffovy zákony

2.5.1 První Kirchhoffův zákon

Pro analýzu elektrických obvodů mají Kirchhoffovy zákony veliký význam. První Kirchhoffův zákon popisuje proud v uzlu obvodu. Podle [3] vyjdeme ze zákona zachování náboje, který říká, že elektrický náboj nemůže ani vzniknout, ani zmizet, a zákona kontinuity:

$$\oiint \mathbf{J} \, d\mathbf{S} = 0. \quad (2.30)$$

Tento vztah neplatí zcela obecně, ale pro námi zkoumané případy ano. Tedy proudová hustota procházející uzavřenou plochou S je rovna nule. Můžeme dále říci, že mimo vodiče je elektrické pole nulové, tedy jediná místa, kde je proudová hustota nenulová, jsou právě vodiče. Každým z vodičů 1 až n protéká proud i_1 až i_n , $i_k = \oiint_S \mathbf{J}_k \, d\mathbf{S}$. Pro naše potřeby lze tedy formulovat první Kirchhoffův zákon:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (2.31)$$

Toto platí pro jakkoli velkou uzavřenou plochu, můžeme ji tedy libovolně zmenšovat. Daný vztah pak musí platit pro jakýkoli bod obvodu. Můžeme tedy tvrdit, že proud, který do daného bodu vteče, musí zase vytéct. Toho se využívá především při určování proudů v uzlech (místech, kde se stýkají tři a více vodičů). Dalším důsledkem je, že v každém bodě větve je stejný proud. Při používání prvního Kirchhoffova zákona musíme určit polaritu proudů. Například ty, co z uzlu vytékají, jako kladné, ty co do uzlu vtékají, jako záporné.

2.5.2 Druhý Kirchhoffův zákon

Druhý Kirchhoffův zákon vychází z Faradayova indukčního zákona (2.9). Pokud tedy uvažujeme uzavřený okruh (smyčku) tvořenou n prvky propojenými ideálním vodičem, jež neobjímá časově proměnný magnetický indukční tok, můžeme psát $\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0$. Z Ohmova zákona je zřejmé, že na ideálním vodiči,

který nemá žádný odpor, nemůže být při jakémkoli proudu žádné napětí. Veškeré napětí je tedy rozloženo na jednotlivých prvcích obvodu jako u_1 až u_n . Tedy lze psát druhý Kirchhoffův zákon ve tvaru:

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0. \quad (2.32)$$

Napětí mohou být jak kladná, tak záporná, je třeba zvolit směr smyčky a dodržovat správnou polaritu. *Pokud uzavřená dráha tvořená jednotlivými prvky obvodu a příslušnými spojovacími vodiči obepíná časově proměnný magnetický tok, je nutno do obvodu vložit další prvek modelující toto magnetické pole, tj. zapojit do obvodu induktor L , jehož svorkové napětí bude $u_L = \frac{d\Phi}{dt}$.* [3]

2.6 Speciální případy analýzy obvodů

V předchozích kapitolách jsme popsali obecné vztahy v elektromagnetickém poli a obecné vztahy pro elektrický proud a elektrické napětí na pasivních prvcích. Tato práce se zabývá pouze ustáleným stejnosměrným a ustáleným harmonickým stavem napětí a proudu. V této kapitole si tedy ukážeme zjednodušení, která platí pouze pro tyto konkrétní případy. Díky nim se zbavíme nepříjemného počítání diferenciálních rovnic mnoha proměnných, které by bylo pro běžného řešitele úlohy vybaveného pouze kalkulačkou obtížné, ba spíše nemožné.

2.6.1 Stejnosměrný ustálený stav

Toto je nejjednodušší případ pro analýzu elektrického obvodu. Předpokádáme, že všechny zdroje dodávají do obvodu konstantní napětí a proud neměnný v čase. Dále předpokládáme, že uplynul dostatečně dlouhý čas od spuštění systému, aby odezněly všechny přechodové jevy. Potom na rezistorech platí Ohmův zákon $U = RI$. Zde je také radno zmínit různé značení napětí a proudu někdy malými, někdy velkými písmeny. Velkými písmeny značíme časově neměnné hodnoty, zatímco malými funkce času. Induktor se chová jako zkrat, tedy jako kus vodiče bez jakýchkoli speciálních vlastností. Není na něm žádné napětí $u_L = L \frac{di}{dt} = 0$, jelikož nedochází k žádné změně proudu v čase. Odpovídá tomu i konstrukce cívky, která není nic jiného než vodič stočený do spirály, případně ještě uprostřed s ocelovým jádrem. Kapacitor se naopak chová jako rozpojený vodič. Odpovídá tomu i konstrukce deskového kondenzátoru, který sestává ze dvou rovnoběžných kovových desek oddělených dielektrikem. Proud kondenzátorem je zjevně nulový, neboť $i_c = C \frac{du}{dt}$

a průběh napětí je konstantní $u(t) = konst.$, takže jeho derivace bude vždy nula.

2.6.2 Harmonický ustálený stav

Popis obvodů s harmonickými průběhy je o dost složitější než předchozí případ. Budeme uvažovat pouze obvody, kde všechny zdroje, ať už napětí nebo proudu, mají stejnou frekvenci f . Jen pro úplnost, ve vzorcích se dost často užívá úhlová frekvence ω , vztah mezi těmito veličinami je:

$$\omega = 2\pi f. \quad (2.33)$$

Zdroje mezi sebou mohou být navzájem fázově posunuté a mohou mít různé amplitudy (maximální výchylky) I_m nebo U_m , značení dle toho, zda jde o zdroj proudu nebo napětí. Každý ze zdrojů napětí lze tedy popsat jako:

$$u(t) = U_m(\sin \omega t + \varphi). \quad (2.34)$$

Stejně tak pro zdroje proudu. Pro všechny zdroje v jednom obvodu je úhlová frekvence ω stejná, zatímco každý zdroj má vlastní amplitudu U_m , I_m a fázový posun φ . Dále platí, že součet dvou harmonických funkcí o stejné frekvenci je rovněž harmonická funkce o téže frekvenci.

Rovněž derivací i integrací harmonické funkce získáváme opět harmonickou funkci, byť fázově posunutou a s jinou amplitudou. Přesto by bylo řešení elektrických obvodů v harmonickém ustáleném stavu pomocí řešení rovnic s různými sinusoidami krajně obtížné. Z toho důvodu se používá Steinmetzova symbolická metoda. Musíme si uvědomit, že při stejné frekvenci je každá harmonická funkce jednoznačně určena amplitudou U_m a fázovým posunem φ . *Steinmetzova transformace je založena na vzájemně jednoznačném přiřazení harmonického časového průběhu $u(t) = U_m(\sin \omega t + \varphi)$ o frekvenci ω a odpovídajícího fázoru $\hat{U} = U_m e^{j\varphi}$.* [3] Pojmu komplexní číslo se budeme podrobněji věnovat v kapitole věnované matematice. Komplexní jednotka se běžně v elektrotechnice značí j , i je vyhrazeno pro elektrický proud a docházelo by ke zbytečným záměnám a nedorozuměním.

Nyní budeme popisovat vztah mezi napětím a proudem na pasivních prvcích elektrického obvodu. Rezistor nečiní žádné obtíže, stále platí, že $U = RI$, tedy i $u(t) = Ri(t)$. Horší to bude na prvcích, kde napětí je derivací proudu a obráceně, tedy na induktoru a kapacitoru. Pro induktor platí vztah:

$$u(t) = L \frac{dI_m(\sin \omega t + \varphi)}{dt} = \omega LI_m(\cos \omega t + \varphi) = \omega LI_m(\sin \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \quad (2.35)$$

Steinmetzovou transformací dostaneme vztah fázorů napětí a proudu:

$$\hat{U} = \omega L I_m e^{j\varphi + \pi/2} = j\omega L I_m e^{j\varphi} = j\omega L \hat{I}. \quad (2.36)$$

Obdobným způsobem získáme i vztah mezi fázory napětí a proudu na kapacitoru:

$$\hat{U} = \frac{1}{j\omega C} \hat{I} = -\frac{j}{\omega C} \hat{I}. \quad (2.37)$$

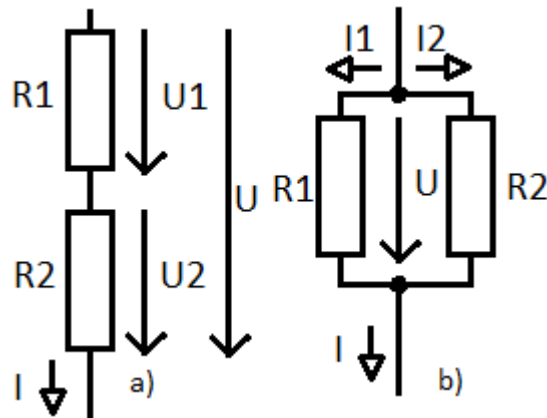
Když se podíváme na vztahy mezi napětím a proudem na všech třech pasivních prvcích, zjistíme, že je lze vždy zapsat ve tvaru $\hat{U} = Z\hat{I}$, kde Z je komplexní veličina, která se nazývá impedance, jejíž jednotkou je Ohm. Převrácenou hodnotou je admittance $Y = 1/Z$. Jak uvidíme dále, toto značení není samoučelné a umožní nám operovat s impedancemi v obvodech v harmonickém ustáleném stavu stejně jako s odpory v stejnosměrných ustálených obvodech. Podrobnější popis fázorů a práce s nimi nalezneme v [3] a [6].

2.7 Metody řešení elektrických obvodů

2.7.1 Postupné zjednodušování

Díky poznatkům z předchozí kapitoly jsme schopni řešit nejjednodušší obvod složený z jednoho zdroje a jednoho pasivního prvku. V praxi se samozřejmě budeme setkávat s mnohem komplikovanějšími zapojeními. Jedním z postupů je takzvané postupné zjednodušování, kdy nahrazujeme dva či více prvky prvkem jedním. Snahou je obvod zjednodušit tak, aby vznikl obvod elementární sestávající jen ze zdroje a jednoho pasivního prvku, a pak zpětně dopočítat jednotlivá napětí a proudy. Existují dva základní způsoby zapojení: sériový (za sebou) a paralelní (vedle sebe) (viz obr. 2.4). Oba způsoby se samozřejmě dají kombinovat. Začneme sériovým zapojením při stejnosměrném ustáleném stavu. Prozatím budeme uvažovat pouze zapojení dvou rezistorů ve stejnosměrném ustáleném stavu. Z prvního Kirchhoffova zákona plyne, že oběma rezistory protéká stejný proud I . Napětí na rezistoru R_1 je dle Ohmova zákona $U_1 = IR_1$ a na rezistoru R_2 pak $U_2 = IR_2$. Uvažujme celkové napětí U , které je součtem napětí na obou dvou rezistorech. $U = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$. Můžeme tedy nahradit seriovou kombinaci R_1 a R_2 jediným rezistorem R , aniž bychom tím nějak ovlivnili zbytek obvodu. Obdobně se dá nahradit i seriová kombinace více rezistorů. Pro n rezistorů platí:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (2.38)$$



Obrázek 2.4: a) seriové zapojení, b) paralelní zapojení

Při paralelní kombinaci si musíme uvědomit, že na všech rezistorech je stejné napětí U . Celkový proud I je součtem dílčích proudů I_1 a I_2 . Musí tedy platit $\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$. Můžeme celou rovnici vydělit U a po algebraické úpravě získáme vztah pro náhradní odpor za paralelní kombinaci odporů R_1 a R_2 :

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.39)$$

Tento vztah lze také popsat jako celkový součet vodivostí G daných rezistorů:

$$G = G_1 + G_2. \quad (2.40)$$

Obdobně jako v ustáleném stejnosměrném stavu rezistory, můžeme nahrazovat v harmonickém ustáleném stavu různé kombinace pasivních prvků. Napětí a proudy popíšeme fázory, pasivní prvky impedancemi. Pak platí opět Ohmův zákon $\hat{U} = Z\hat{I}$ i oba Kirchhofovy zákony. Odvození je obdobné jako v předchozím případě. Platí opět že n impedancí zapojených v serii lze nahradit jedinou, která je jejich součtem. Pro paralelní zapojení platí $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$. Jak vidno, jak u sériového, tak paralelního zapojení nezáleží na pořadí prvků. V dalším textu budeme formulovat vztahy pouze pro stejnosměrný ustálený stav. Pokud nebude výslovně řečeno jinak, platí tyto vztahy i pro harmonický ustálený stav, nahradíme-li napětí a proudy jejich fázory a odpory impedancemi pasivních prvků.

Při řešení úloh budeme ještě využívat takzvaný dělič napětí a dělič proudu. Dělič napětí je seriové zapojení dvou rezistorů, na něž je připojeno napětí U . Zajímají nás napětí na jednotlivých rezistorech. Stačí si uvědomit, že oběma rezistory protéká stejný proud, tedy musí platit vztah $\frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U_1}{R_1}$.

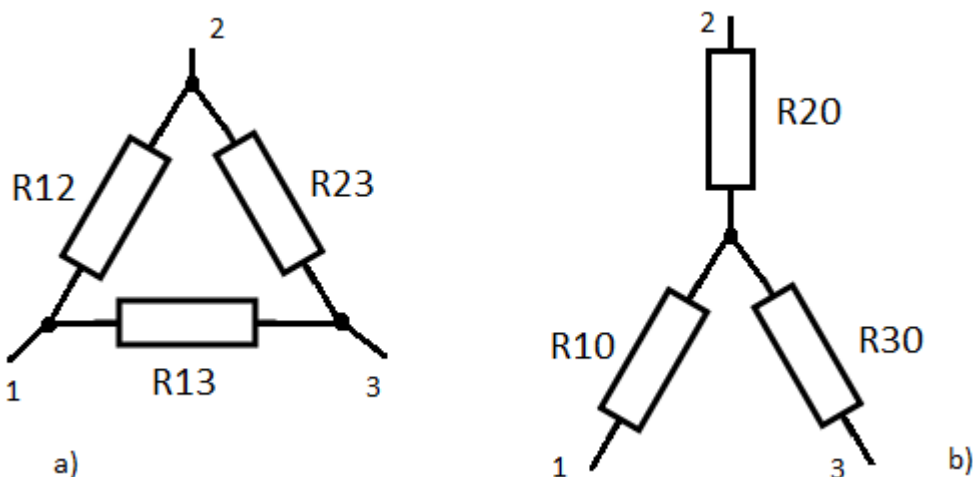
Po jednoduché úpravě získáme vzorec pro napětí na rezistoru R_1 :

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (2.41)$$

Dělič proudu je paralelní kombinace dvou rezistorů. Přitéká do ní proud I . Je zřejmé, že na obou rezistorech bude stejné napětí, $U_1 = U_2$. Z této rovnosti a Ohmova zákona lze vyvodit vztah:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.42)$$

Speciálním případem zjednodušení je tranzpozice hvězda - trojúhelník



Obrázek 2.5: a) trojúhelník, b) hvězda

(viz obr. 2.5). Snažíme se nahradit zapojení do trojúhelníku, se kterým se obvykle dost obtížně pracuje, zapojením do hvězdy. Chování zbytku obvodu však nesmí být touto změnou nijak změněno. Pro náhradu rezistorů, případně impedancí R_{12} , R_{23} a R_{13} za R_{10} , R_{20} , R_{30} vyjdeme ze soustavy rovnic:

$$R_{10} + R_{20} = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad (2.43)$$

$$R_{10} + R_{30} = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad (2.44)$$

$$R_{20} + R_{30} = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (2.45)$$

Aby se obvod i po transpozici choval stejně, musí platit, že celkový odpor mezi body 1 a 2 ve hvězdě, tedy seriové zapojení rezistorů R_{10} a R_{20} , musí být stejně veliký jako v trojúhelníku. Tam jde o seriovou kombinaci rezistorů R_{23} a R_{13} , která je celá paralelně s rezistorem R_{12} . Přesně tento vztah popisuje rovnice (2.43). Stejně popisují rovnice (2.44) a (2.45) rovnost odporů mezi body 1 a 3 a 2 a 3. Jednoduchými algebraickými úpravami získáme vzorce pro jednotlivé velikosti odporů nově vzniklé hvězdy:

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad (2.46)$$

$$R_{20} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad (2.47)$$

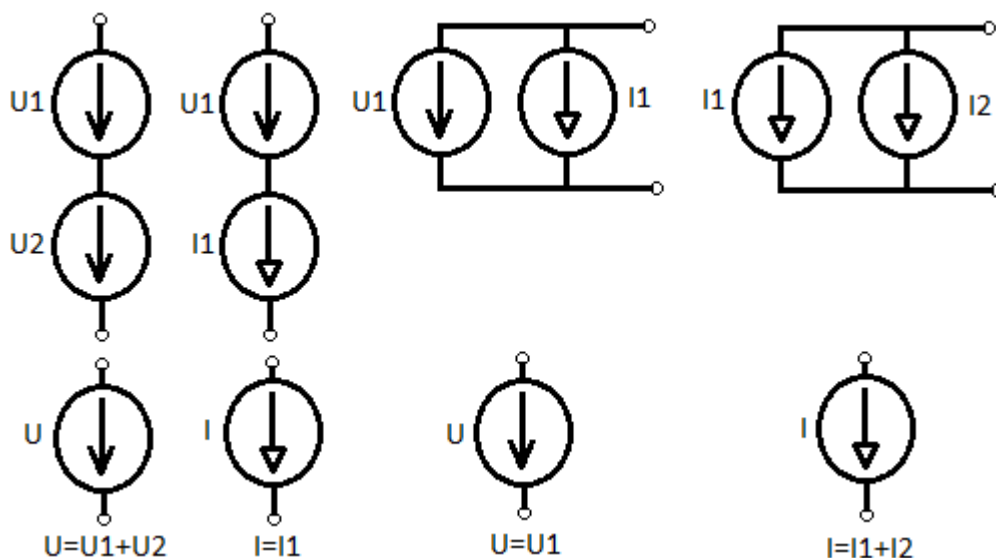
$$R_{30} = \frac{R_{23}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (2.48)$$

Zatím jsme se zabývali pasivními prvky. Nyní se podíváme na zjednodušení zapojení několika zdrojů. Seriové zapojení ideálních zdrojů napětí lze nahradit jediným zdrojem napětí o velikosti součtu dílčích zdrojů, v případě harmonického ustáleného stavu jako součet fázorů napětí. Podobně lze paralelně zapojené zdroje proudu nahradit jediným proudovým zdrojem, který je opět součtem jednotlivých proudů. V obou případech je nutno brát v úvahu orientaci jednotlivých zdrojů. Stejně orientované sčítáme, opačně orientované odčítáme. Tyto vztahy lze snadno odvodit z Kirchhoffových zákonů. Zapojení dvou a více ideálních zdrojů napětí paralelně nebo ideálních zdrojů proudu seriově se nepoužívá. V případě, že by měly všechny stejnou hodnotu dodávaného napětí, respektive proudu, šlo by je nahradit zdrojem jediným s týmiž vlastnostmi. Pokud by ovšem zdroje měly různé hodnoty, došlo by k paradoxu, neboť by mezi dvěma uzly musela být dvě různá napětí nebo v jedné větvi dva různé proudy. V praxi, kdy zdroje nikdy nejsou ideální a jsou schopny dodat pouze omezený výkon, se někdy používá paralelního zapojení stejných zdrojů napětí, aby se při stejném napětí dosáhlo vyššího výkonu.

Tím jsme vyčerpali případy, kdy jsou kombinovány stejné typy zdrojů. Může ještě nastat případ paralelní nebo seriové kombinace zdroje napětí a zdroje proudu. Při seriovém zapojení je rozhodující proud dodávaný zdrojem proudu, tedy se celé zapojení nahrazuje jediným zdrojem proudu. V případě paralelního zapojení je tomu naopak a celé zapojení se nahrazuje zdrojem napětí. Náhrada kombinací zdrojů je zobrazena na obrázku 2.6.

2.7.2 Princip superpozice

V elektrických obvodech s více zdroji elektrické energie se ne vždy podaří všechny zdroje nahradit zdrojem jediným. Lze použít takzvaný princip su-



Obrázek 2.6: Náhradní kombinací zdrojů

perpozice. Ten vychází z představy, že pokud jde o nezávislé zdroje, není velikost jimi dodávané energie nijak závislá na zdrojích ostatních. Tedy výsledné hodnoty napětí a proudů na jednotlivých prvcích obvodu jsou dány součtem příspěvků jednotlivých zdrojů. Obvody, s nimiž v této práci pracujeme, jsou lineární, a zdroje jsou vždy nezávislé, můžeme tedy princip superpozice bez obav používat.

Při výpočtu postupujeme tak, že si vytvoříme pomocná schemata, kde vždy ponecháme jen jeden zdroj a místo ostatních zdrojů elektrického napětí necháme zkrat, místo zdrojů elektrického proudu necháme rozpojené svorky. Tím získáme pro každý zdroj jedno schéma, pak už řešíme postupným zjednodušováním. Nakonec sečteme příspěvky všech zdrojů. Je nutné brát v potaz polaritu jednotlivých příspěvků. Shodné polaritu sčítáme, rozdílné odčítáme.

2.7.3 Théveninův a Nortonův teorém

Myšlenka Théveninova teorému, někdy též Théveninova poučka [2], spočívá v náhradě části obvodu, která je připojena ke zbytku obvodu dvěma svorkami, sériovým zapojením ideálního zdroje napětí a rezistoru. Každá část obvodu, která obsahuje jak zdroje, tak pasivní prvky, se chová jako reálný zdroj. Na výstupních svorkách má na prázdko napětí U_0 , které při zatížení lineárně klesá, což způsobuje pomyslný vnitřní odpor R_i . Zbývá jenom zjistit hodnoty těchto veličin. Napětí U_0 získáme, když vypočítáme napětí na výstupních svorkách nahrazované části obvodu bez zátěže. Odpor R_i zjistíme tak, že

v obvodu nahradíme všechny zdroje napětí zkratem (jejich vnitřní odpor je nulový) a všechny zdroje elektrického proudu vynecháme (mají nekonečný vnitřní odpor). Pomocí postupného zjednodušování pak dopočteme vnitřní odpor mezi svorkami.

Podobný význam má i Nortonův teorém. Podle něj lze nahradit libovolnou část obvodu spojenou se zbytkem obvodu dvěma svorkami paralelní kombinací ideálního zdroje proudu I_0 a rezistoru R_i , tedy vlastně reálným zdrojem proudu. Odpor rezistoru R_i získáme stejně jako v předchozím případě. Pro výpočet proudu I_0 musíme zkratovat výstupní svorky nahrazované části obvodu a dopočítat proud, který jimi poteče. Tento proud je pak námi hledaný proud I_0 .

2.8 Obvodové rovnice

Obvodové rovnice jsou obecně metody, jež umožňují daný elektrický obvod popsat soustavou n lineárních rovnic o n neznámých. Jejich výhodou je, že umožňují tuto soustavu sestavit mechanicky, tedy bez nějakého většího přemýšlení. Předchozí metody závisely do značné míry na řešitelově intuici. V následujících metodách se budeme hojně zabývat pojmy topologie obvodu jako uzel, větev a smyčka. V předchozím textu už byly popsány, neuškodí však drobné připomenutí. Uzel je bod obvodu, kde se setkávají dvě a více svorek prvků obvodu. Větev je část obvodu spojující dva uzly. *Uzavřená dráha tvořená větvemi, která prochází každým uzlem nejvýše jednou, se nazývá smyčka.* [3] Při tvorbě obvodových rovnic budeme vycházet z Kirchhoffových zákonů. Dle prvního Kirchhoffova zákona lze získat rovnici popisující vztahy v obvodu z každého uzlu, dle druhého zákona lze získat rovnici z každé smyčky.

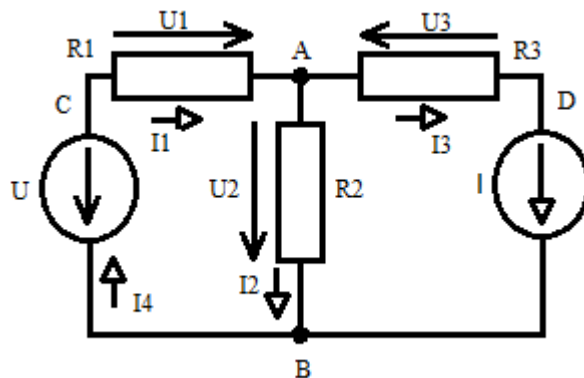
Pro příklad si ukážeme jednoduchý elektrický obvod (viz obr. 2.7). Jsou dány rezistory R_1 , R_2 , R_3 , stejnosměrné napětí U a proud I . Obvod má čtyři uzly označené A , B , C a D , pět větví a tři smyčky. Každé větvi přiřadíme proud I_1 až I_4 , zdrojem proudu teče samozřejmě proud I . A každému rezistoru přiřadíme napětí U_1 až U_3 . Smysl proudů i napětí si můžeme zvolit libovolně, pokud se rozhodneme špatně, vyjde nám příslušná hodnota záporná. Nyní zkusme získat rovnice pro všechny uzly, použijeme prvního Kirchhoffova zákona:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (2.49)$$

$$I_4 - I_2 - I = 0, \quad (2.50)$$

$$I_1 = I_4, \quad (2.51)$$

$$I = -I_3. \quad (2.52)$$



Obrázek 2.7: Ukázkový příklad

Jak je vidět, přínos rovnic z bodu C a D je mizivý, vyjadřují jen fakt, že dvěma prvky zapojenými v sérii prochází stejný proud. Proto také od této chvíle budeme za uzel považovat pouze bod, kde se stýká tři a více svorek obvodových prvků. Větev pak bude opět část obvodu spojující dva uzly. Z tohoto hlediska obsahuje obvod pouze dva uzly a tři větve. Pro uzly A a B pak můžeme vytvořit rovnice:

$$-I_1 + I_2 + I = 0, \quad (2.53)$$

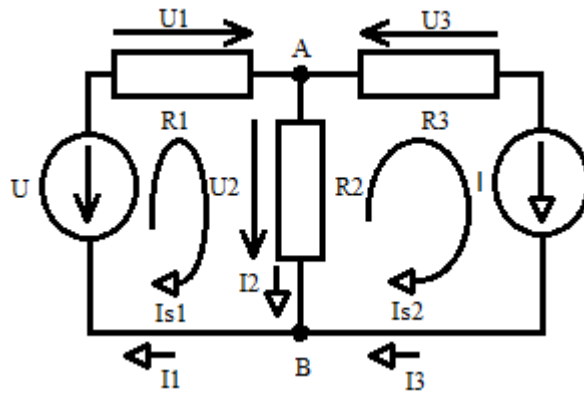
$$I_1 - I_2 - I = 0. \quad (2.54)$$

Na první pohled je zřejmé, že rovnice (2.53) popisující uzel A a rovnice (2.54) popisující uzel B jsou lineárně závislé, obdobně by to dopadlo i se třemi rovnicemi vzniklými aplikací druhého Kirchhoffova zákona na smyčky. Zavádí se proto pojem nezávislé uzly a nezávislé smyčky. *Ukazuje se obecně, že pro obvod s celkovým počtem n uzlů můžeme formulovat pouze $n - 1$ rovnic. Je to dáno tím, že obvod jako celek tvoří uzavřenou soustavu, takže součet všech proudů v obvodu musí být roven nule. Závislým uzlem může být kterýkoli uzel obvodu, zbylé uzly jsou pak nezávislé.*[4] Pro smyčky obecně platí, že počet s nezávislých smyček je dán počtem v všech větví obvodu, zmenšeného o počet $n - 1$ nezávislých uzlů, tj. $s = v - n + 1$. [4]

Podíváme-li se na náš obvod, uzly jsou v něm dva, tedy nezávislý pouze jeden. Co se smyček týče, větve jsou tři, uzly dva, tedy $s = 3 - 2 + 1 = 2$. Nezávislé smyčky jsou dvě.

2.8.1 Metoda smyčkových proudů

Konečně můžeme přistoupit k jednotlivým metodám. Metoda smyčkových proudů spočívá ve volbě nezávislých smyček. V těch si zvolíme orientaci tak-



Obrázek 2.8: Ukázkový příklad s vyznačenými smyčkovými proudy

zvaných smyčkových proudů. Jednotlivé smyčky pak popíšeme rovnicemi vycházejícími ze druhého Kirchhoffova zákona. V našem případě víme, že obvod obsahuje dvě nezávislé smyčky, zvolíme si například smyčky 1 a 2 a jim příslušející smyčkové proudy I_{s1} a I_{s2} (viz obr. 2.8). Ještě než přistoupíme k tvorbě rovnic, měli bychom si uvědomit vztah mezi smyčkovými proudy a proudy jednotlivých větví, $I_1 = I_{s1}$ a $I_{s2} = I_3$ a zároveň, neboť se v této větvi nachází zdroj elektrického proudu, musí se $I_3 = I$. Sestavovat obvodovou rovnici pro smyčku 2 tedy nemá smysl, neboť proud I_{s2} už známe. Proud I_2 získáme superpozicí proudu I_{s1} a I_{s2} . Proud I_2 má stejný smysl jako proud I_{s1} a opačný než I_{s2} . Jeho velikost je tedy rovna jejich rozdílu $I_2 = I_{s1} - I_{s2}$. Nyní tedy sestavíme rovnici pro smyčku 1:

$$I_{s1}R_1 + (I_{s1} - I)R_3 - U = 0. \quad (2.55)$$

Tato rovnice neříká nic jiného, než že součet všech napětí ve smyčce se rovná nule (druhý Kirchhoffův zákon). Začali jsme u rezistoru R_1 a pokračovali dále po směru smyčky. Napětí U se odčítá, neboť má opačný smysl než proud I_{s1} . Proud rezistorem R_3 je dán superpozicí proudů I_{s1} a I_{s2} . Proud $I_{s2} = I$, odpory rezistorů i hodnoty zdrojů známe, jde tedy o jednu rovnici o jedné neznámé, ze které není problém matematickými úpravami vyjádřit neznámou I_{s1} . S těmito znalostmi už snadno získáme proudy větvemi I_1 a I_3 a pomocí Ohmova zákona i napětí na rezistorech.

2.8.2 Metoda uzlových napětí

Rozhodneme-li se se použít metodu uzlových napětí, musíme si nejdříve zvolit takzvaný referenční uzel. Je to takový uzel, ke kterému budeme vztahovat ostatní napětí. Jeho volba je zcela libovolná, obvykle bývá výhodnější použít

uzel, z něhož vede nejvíce vodičů. V našem příkladu jsou oba uzly naprosto rovnocenné, za referenční si zvolíme uzel B . Označíme napětí mezi ostatními uzly a referenčním uzlem. V tomto případě zbývá jediný uzel A , napětí označíme U_A . Nyní už můžeme přikročit k vytváření rovnic. Pro referenční uzel se rovnice netvoří, zbývá tedy pouze uzel A . Z prvního Kirchhoffova zákona plyne, že součet všech proudů tekoucích do uzlu musí být nula. Můžeme tedy psát $I_1 - I_2 - I_3 = 0$. Jednotlivé proudy teď vyjádříme pomocí zadaných odporů a hodnot zdrojů a napětí U_A . $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$ a $U_A = U - U_1$ (U_1 má opačnou polaritu). $I_2 = \frac{U_A}{R_2}$ a $I_3 = I$. Nyní už víme vše pro vytvoření rovnice o jedné neznámé U_A :

$$\frac{U - U_A}{R_1} - \frac{U_A}{R_2} - I = 0. \quad (2.56)$$

Řešení takovéto lineární rovnice je látkou základní školy. Ve chvíli, kdy známe U_A , není problém už dopočítat ostatní neznámé veličiny.

Tím, že jsme se rozhodli považovat za uzel pouze místo, kde se stýkají minimálně tři svorky jsme sice zjednodušili soustavu rovnic, v tomto příkladě stačilo vyřešit rovnici jedinou, ale na druhou stranu jsme tím trochu zkomplikovali dopočítání jednotlivých hodnot. Kdybychom vytvořili rovnice pro všechny uzly, tedy i C a D , mohli bychom určit napětí na kterémkoli prvku obvodu pomocí uzlových napětí, například $U_3 = U_D - U_A$. Takhle známe pouze napětí na sériových kombinacích prvků, v tomto příkladu například na sériové kombinaci zdroje proudu a rezistoru R_3 . Pokud tato kombinace obsahuje zdroj elektrického proudu, musí podle prvního Kirchhoffova zákona téct všemi prvky stejný proud a napětí dopočítáme pomocí Ohmova zákona. Na R_3 bude tedy napětí $U_3 = IR_3$. Pokud budeme znát napětí na sériové kombinaci rezistorů, můžeme je považovat za dělič napětí nebo dle vztahu (??) dopočítat celkový odpor a pak už snadno zjistit proud tekoucí větví pomocí Ohmova zákona.

Toto by mělo jako ukázka použití metod postačit. Podrobněji se budeme zabývat řešením jednotlivých obvodů v části s řešenými příklady. Tam bude zadání včetně hodnot jednotlivých prvků a řešení dotažené až ke konkrétním hodnotám. V tomto příkladu jsme se zabývali obvodem v stejnosměrném ustáleném stavu. Kdyby šlo o harmonický ustálený stav, postupovali bychom stejně, jen bychom museli na začátku provést Steinmetzovu transformaci na fázory.

Kapitola 3

Matematické předpoklady

V předchozí kapitole jsme ukázali, jak pomocí rovnic popsat elektrický obvod. Výstupem všech uvedených metod byla lineární rovnice či soustava lineárních rovnic. V případě stejnosměrného ustáleného stavu byly tyto rovnice v oboru reálných čísel, v případě harmonického ustáleného stavu v oboru komplexních čísel. Z toho plyne i obsah této kapitoly. Bude třeba zavést pojem komplexní číslo, neboť jde o pojem, s nímž se čtenář pravděpodobně v běžném životě neseetká a jehož probírání v poslední době mizí i ze středních škol. Dalším tématem bude řešení soustav lineárních rovnic. Jako poslední bude vhodné zmínit některé matematické operace použité při popisu elektromagnetického pole, ne každému musí být zřejmý fyzikální význam vektorového součinu či dvojného integrálu.

3.1 Komplexní čísla

Předmětem našich úvah budou uspořádané dvojice $[a, b]$ reálných čísel; přitom dvojice $[a, 0]$ budiž pouze novým označením pro reálné číslo a , kdežto dvojice $[a, b]$, v nichž $b \neq 0$, budou novým předmětem našich úvah. Dvojice $[a, b]$ budeme nazývat komplexními čísly; číslo a nazýváme reálnou částí, číslo b imaginární částí čísla $[a, b]$. [7] Množinu všech komplexních čísel označíme \mathbb{C} , komplexní čísla budeme značit z . Dvě komplexní čísla se rovnají, pokud se rovnají jejich reálné části a zároveň se rovnají i jejich imaginární části.

$$\forall z_1 = [a_1, b_1], z_2 = [a_2, b_2] \in \mathbb{C} : z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2). \quad (3.1)$$

Nyní potřebujeme ještě zavést základní početní operace s komplexními čísly, sčítání a násobení:

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2], \quad (3.2)$$

$$[a_1, b_1][a_2, b_2] = [a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1]. \quad (3.3)$$

Pro běžné výpočty se používá často takzvaný algebraický tvar komplexního čísla:

$$z = [a, b] = a + bj, \quad (3.4)$$

kde j se nazývá komplexní jednotka. Pro komplexní jednotku j platí:

$$j^2 = -1. \quad (3.5)$$

Běžně se v matematice značí komplexní jednotka i , v elektrotechnice je ale zvykem používat j , aby nedocházelo ke zbytečným záměnám s elektrickým proudem. Snadno lze ověřit, že pro algebraický tvar platí jak definice sčítání, tak násobení. Zřejmou výhodou tohoto tvaru je, že v něm můžeme provádět běžné algebraické úpravy a operace jako v oboru reálných čísel. Zavádí se také pojem číslo komplexně združené:

$$\bar{z} = [a, -b]. \quad (3.6)$$

Jednou z jeho vlastností je, že součin $z\bar{z}$ je reálné číslo. Této vlastnosti lze využít například při zjednodušování zlomků, v nichž je čitatelem i jmenovatelem komplexní číslo. Už jsme zadefinovali sčítání a násobení komplexních čísel, odčítání není nic jiného než přičtení $-z = -a - bj$. Problém může být trochu s dělením, při něm právě využijeme čísla komplexně združeného:

$$z_2 \neq 0 : \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1j)(a_2 - b_2j)}{(a_2 + b_2j)(a_2 - b_2j)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1b_2 + b_1a_2}{a_2^2 + b_2^2}j. \quad (3.7)$$

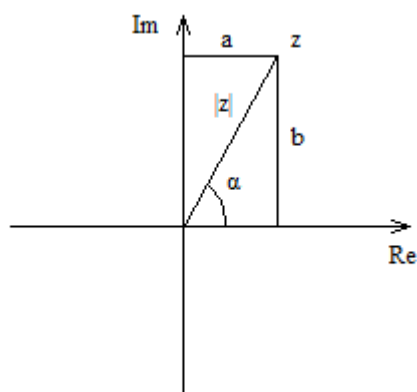
Komplexní číslo $[a, b]$ lze také chápat jako souřadnice bodů v rovině \mathbb{R}^2 . Tato rovina se nazývá komplexní nebo též Gaussova. Je dána dvěma navzájem kolmými osami. Na vodorovné se vynáší reálná část, na svislé imaginární část komplexního čísla. Algebraický tvar je vyjádření polohy bodu v kartézských souřadnicích. Polohu tohoto bodu lze určit také pomocí vzdálenosti od počátku soustavy souřadnic a úhlu. Vzdálenost mezi bodu z od počátku souřadnic se nazývá absolutní hodnota $|z|$, její velikost se dopočítá pomocí Pythagorovy věty:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (3.8)$$

Pro úhel α musí platit (viz obr. 3.1):

$$\sin \alpha = \frac{b}{|z|}, \quad (3.9)$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{|z|}. \quad (3.10)$$



Obrázek 3.1: Umístění komplexního čísla v Gaussově rovině

Tato soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení náležejících do množiny reálných čísel. Předpokládejme, že α_0 je jedním z řešení. Pak lze celou množinu řešení popsat vztahem s jedním parametrem: $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Úhel α se nazývá argument komplexního čísla. Dále se budeme snažit používat pouze argumenty náležející do intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$. Známe-li již absolutní hodnotu i argument komplexního čísla, můžeme je zapsat v takzvaném goniometrickém tvaru:

$$z = |z|(\cos \alpha + j \sin \alpha). \quad (3.11)$$

Třetí možností zápisu, kterou budeme hojně používat, je takzvaný exponenciální tvar, vycházející z Eulerova vzorce:

$$z = |z|(\cos \alpha + j \sin \alpha) = |z|e^{j\alpha}. \quad (3.12)$$

Násobení i dělení v exponenciálním tvaru snadné, využívají se stejné vztahy jako v oboru reálných čísel:

$$e^{j\alpha_1} e^{j\alpha_2} = e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (3.13)$$

$$\frac{e^{j\alpha_1}}{e^{j\alpha_2}} = e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (3.14)$$

Sčítání a odčítání je v tomto tvaru nemožné, pro jejich výpočet musíme komplexní čísla převést do algebraického tvaru.

3.2 Soustavy lineárních rovnic

Výstupem obvodových rovnic bývá soustava n lineárních rovnic o n neznámých, které jsou lineárně nezávislé. Pokud jsou tyto předpoklady splněny,

bude mít soustava vždy právě jedno řešení. Tato jednoznačnost je velmi důležitá. Vytváříme-li nějaké zapojení a daná součástka vydrží maximálně proud 1 A, potřebujeme vědět jednoznačně, jaký proud jí poteče, ne nekonečně možných řešení.

Soustavu lineárních rovnic zapisujeme:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tento vztah lze zapsat i pomocí matic:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Naším cílem při řešení soustavy lineárních rovnic je nalézt vektor \mathbf{x} . K tomu budeme používat takzvanou rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, což je vlastně matice \mathbf{A} doplněná vektorem \mathbf{b} :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right). \quad (3.18)$$

Její levou stranu pak můžeme pomocí řádkových elementárních úprav upravit na horní trojúhelníkovou matici, podrobnější výklad matic nalezneme například v [9] a [10]. Tento postup se nazývá Gaussova eliminační metoda. Elementární úpravy jsou, jak je uvedeno například v [9], vzájemná výměna dvou řádků, vynásobení řádku nenulovou konstantou a přičtení k -násobku jednoho řádku k řádku jinému. Žádná z těchto úprav nemění řešení soustavy rovnic.

Nejlépe bude ukázat si tento postup na konkrétním příkladu. Máme danu soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tuto soustavu převedeme na rozšířenou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right). \quad (3.20)$$

Jelikož budeme v následujících krocích přičítat k ostatním řádkům násobky prvního řádku, bývá výhodnější, když je v levém horním rohu matice jednička. Mohli bychom celý první řádek vydělit třemi, tím bychom ale v matici získali zlomky, s nimiž by se nám dále špatně počítalo. Výhodnější bude prohodit první řádek s druhým:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right). \quad (3.21)$$

Chceme z levé strany matice získat horní trojúhelníkovou matici. Musíme

tedy mít první sloupec ve tvaru $\begin{matrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$. Abychom získali požadované nuly

ve druhém a třetím řádku, odečteme od druhého řádku trojnásobek řádku prvního a od třetího dvojnásobek prvního:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{array} \right). \quad (3.22)$$

Nyní můžeme druhý a třetí řádek vynásobit mínus jednou. Není to sice nutná úprava, ale obvykle se lépe počítá s kladnými čísly.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right). \quad (3.23)$$

Nyní už stačí odečíst od spodního řádku čtyřnásobek řádku druhého a máme kýženou trojúhelníkovou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -24 & -3 \end{array} \right). \quad (3.24)$$

Tu ještě můžeme upravit vydělením třetího řádku minus dvaceti čtyřmi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} \end{array} \right). \quad (3.25)$$

Ted' už stačí rozšířenou matici jen převést na soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_2 + 7x_3 &= 1, \\ x_3 &= \frac{1}{8}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

V té máme přímo vyjádřeno x_3 , to můžeme dosadit do druhé rovnice, z níž získáme x_2 : $x_2 = 1 - 7x_3 = \frac{1}{8}$. Stejně tak pak z první rovnice dostaneme i x_1 : $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = \frac{3}{8}$.

Mohli jsme také pokračovat v upravování matice na jednotkovou matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} \end{array} \right). \tag{3.27}$$

Z tohoto tvaru můžeme rovnou číst: $x_1 = \frac{3}{8}$, $x_2 = \frac{1}{8}$ a $x_3 = \frac{1}{8}$.

Existuje více způsobů řešení soustav lineárních rovnic, pro potřeby této práce, tedy řešení úloh s elektrickými obvody, je Gaussova eliminační metoda zcela postačující.

3.3 Fyzikální význam matematických vztahů

V kapitole věnované fyzikálním předpokladům řešení elektrických obvodů jsme používali, ve snaze dosáhnout přesných a co možná nejobecnějších vztahů, různé matematické vztahy a operace, jejichž význam v kontextu fyziky nemusí být čtenáři zcela zřejmý. Tato kapitola si nečiní nárok na přesnou matematickou definici daných operací, chce jen, aby si čtenář učinil určitou představu.

Každý fyzikální vztah lze popsat s různou mírou obecnosti. Jako příklad může posloužit vyjádření práce. Tu lze jednoduše vyjádřit jako $W = Fl$, W je práce, F je velikost síly a l je délka dráhy. Tento vztah se učí už na druhém stupni základní školy. Platí pouze, pokud je směr působení síly a směr dráhy stejný. Pro ostatní případy, kdy jsou směry obou veličin rozdílné, je tento vzorec nepoužitelný. Zpřesněním je začít chápat sílu a dráhu jako vektory. Pak je výsledná práce rovna skalárnímu součinu vektorů síly a dráhy: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$. Skalární součin je definován vzorcem: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \alpha$, kde u, v jsou velikosti vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} a α je velikost úhlu svíraného oběma vektory. Tento vztah je rozhodně mnohem obecnější, neřeší však jeden základní problém. Počítá s tím, že se oba vektory nemění. Pokud se bude měnit velikost a směr působící síly nebo směr dráhy, bude tento vztah nedostatečný.

Tento problém lze řešit rozdělením dráhy na několik úseků, a následným sečtením prací na všech úsecích: $W = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{l}_i$. Čím kratší tyto

úseky budou, tím přesnější bude výsledek. Budeme-li předpokládat rozdělení dráhy na nekonečně malé úseky, dostaneme se k integrálu $W = \int_A^B \mathbf{F} \, d\mathbf{l}$, kde A a B jsou okrajové body křivky, po níž počítáme práci.

V textu byly použity ještě další speciální druhy integrálů. \oint je integrál po uzavřené křivce, tedy křivka, po níž se integruje začíná i končí ve stejném bodě. Dvojný integrál \iint se používá při integraci přes nějakou plochu, je to dáno tím, že plocha je útvar dvojrozměrný. V případě, který v této práci nenastal, že bychom integrovali přes objem, by se použil integrál trojný. \iiint je integrál přes uzavřenou plochu. Uzavřenou plochu si můžeme představit jako povrch nějakého tělesa. Tyto způsoby zápisu jsou běžně používány v [1].

Zmiňovali jsme se již o skalárním součinu vektorů. Existuje ještě vektorový součin $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, kde \mathbf{w} je vektor kolmý na vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} . Jeho velikost je dána vztahem $w = uv \cos \alpha$.

Kapitola 4

Řešené příklady

Konečně máme veškeré znalosti k řešení konkrétních příkladů. Tato část si klade za úkol ukázat praktické použití jednotlivých metod. Použití té či oné metody je věc do značné míry závislá na řešiteli. V mnoha případech existuje několik možných postupů a nelze vždy rozhodnout, který je nejsnadnější.

V řešených příkladech se vždy pokusíme vysvětlit, proč používáme právě tu konkrétní metodu, případně nastínit další způsoby řešení. Hodnoty jsou voleny tak, aby se s nimi pokud možno dobře pracovalo. Smyslem je spíše nastínit postup, než se utápět v dlouhých výpočtech.

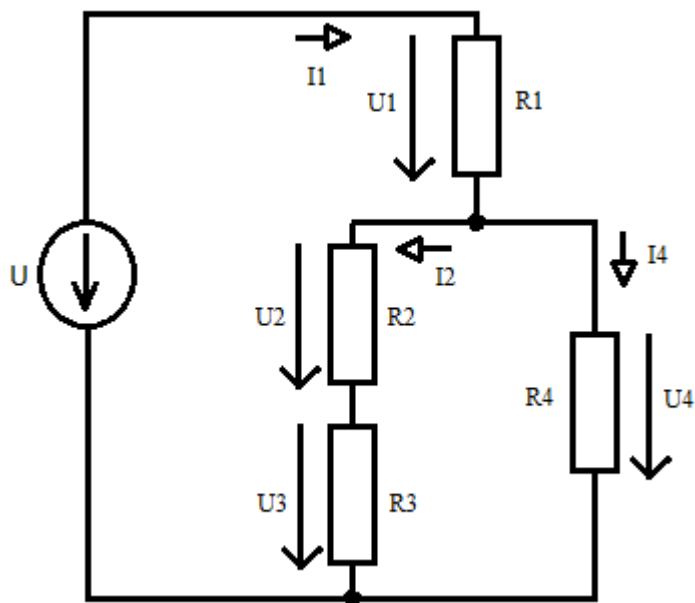
Zadání příkladů i jejich řešení jsou původní. Vzhledem k tomu, že existuje mnoho učebnic i sbírek příkladů, je možné, že se někde vyskytují příklady velmi podobné. Konečně, tvoříme-li obvod složený z jednoho zdroje a tří pasivních prvků, zas tak moc možností zapojení není. Zdrojem inspirace byla určitě literatura použitá při psaní této práce, především [2], [3] a [4].

4.1 Stejnoseměrný ustálený stav

4.1.1 Příklad č. 1

V prvním příkladu je dán obvod složený ze čtyř rezistorů a jednoho zdroje napětí (viz obr. 4.1). Hodnoty jednotlivých prvků jsou $U = 10 \text{ V}$, $R_1 = 25 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 200 \Omega$ a $R_4 = 100 \Omega$. Naším úkolem je zjistit hodnoty napětí a proudu všech prvků obvodu. Nyní je třeba zvolit si metodu, pomocí níž budeme postupovat. Vždy je možné použít obvodové rovnice, ale v tomto případě by to bylo jako „jít s kanonem na vrabce“. Použijeme postupné zjednodušování už proto, že v části věnované teorii jsme žádný ukázkový příklad nevedli.

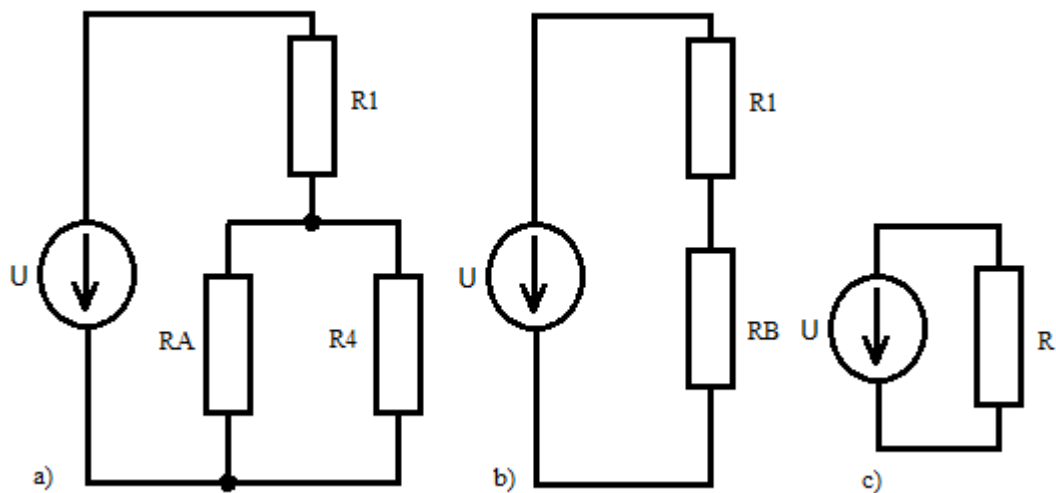
Pokusíme se zjednodušit obvod až na stav, kdy bude obvod složen z jedi-



Obrázek 4.1: Příklad č.1

ného zdroje napětí a jediného rezistoru R (viz obr. 4.2c). Nejdříve můžeme nahradit sériovou kombinací R_2, R_3 jediným rezistorem R_A , jehož odpor je roven součtu obou nahrazovaných odporů (viz obr. 4.2a). $R_A = R_2 + R_3$. Nyní můžeme nahradit paralelní kombinaci rezistorů R_A a R_4 rezistorem R_B (viz obr. 4.2b). $R_B = \frac{R_A \cdot R_4}{R_A + R_4}$. Počet rezistorů se zmenšil na dva. Jejich sériovou kombinaci můžeme opět nahradit rezistorem R (viz obr. 4.2c). $R = R_1 + R_B$ Druhou možností bylo použít vzorec pro dělič napětí. V tuto chvíli můžeme použít Ohmův zákon pro výpočet proudu I : $I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + \frac{(R_2 + R_3)R_4}{R_2 + R_3 + R_4}} = 0,1$ A. Podíváme-li se blíže na původní schéma, je zřejmé, že proud I je totožný s proudy protékajícími zdrojem napětí a rezistorem R_1 . Tedy $I_U = I_1 = I = 0,1$ A. Rovnou můžeme dopočítat i napětí na rezistoru R_1 : $U_1 = IR_1 = 0,1 \cdot 25$ V = 2,5 V. Bude výhodné dopočítat i napětí na pomocném rezistoru R_B , je to vlastně napětí mezi uzly původního obvodu. Lze to opět učinit pomocí Ohmova zákona, zde bude ale jednodušší použít druhý Kirchhoffův zákon. $U_B = U - U_1 = 7,5$ V.

Napětí mezi uzly obvodu je rovno napětí na rezistoru R_4 . Tedy $U_4 = U_B = 7,5$ V a $I_4 = \frac{U_4}{R_4} = 0,075$ A. Teď už nám zbývá jen dopočítat proud větví s rezistory R_2 a R_3 a napětí na těchto rezistorech. Jednou z možností je uvědomit si, že proud náhradním rezistorem R_A je stejný jako proud rezistory R_2 a R_3 a napětí $U_A = U_B = 7,5$ V. Pak $I_A = I_2 = I_3 = \frac{U_A}{R_A} = 0,025$ A.



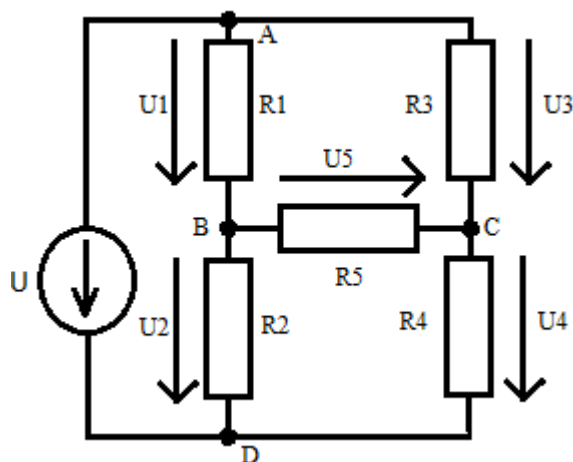
Obrázek 4.2: Příklad č.1, postupné zjednodušení: a) náhrada sériové kombinace R_2 , R_3 rezistorem R_A , b) náhrada paralelní kombinace R_A , R_4 jediným rezistorem R_B , c) konečná úprava na elementární obvod

Pomocí Ohmova zákona už snadno dopočítáme napětí na zbylých rezistorech. $U_2 = I_2 R_2 = 2,5 \text{ V}$, $U_3 = I_3 R_3 = 5 \text{ V}$.

4.1.2 Příklad č. 2

Ve druhém příkladu řešíme úlohu se zapojením, které se někdy označuje jako můstek (viz obr. 4.3). Ve schematu jsou vyznačeny jen orientace napětí, předpokládejme, že proudy jednotlivými rezistory mají stejnou polaritu jako napětí. Hodnoty jednotlivých prvků jsou $U = 100 \text{ V}$, $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 400 \Omega$, $R_3 = 300 \Omega$, $R_4 = 150 \Omega$ a $R_5 = 500 \Omega$. Naším úkolem je spočítat hodnoty proudu a napětí příslušející rezistoru R_2 .

Pokusme se opět použít metodu postupného zjednodušování. V tomto elektrickém obvodu se nenachází žádná sériová nebo paralelní kombinace, již bychom mohli zjednodušit. Musíme si povšimnout, že trojice rezistorů R_1 , R_3 a R_5 jsou zapojeny do trojúhelníku a je možno je nahradit zapojením do hvězdy. To samé platí i pro rezistory R_2 , R_4 a R_5 . Vzhledem k tomu, že nás především zajímá rezistor R_2 , je vhodné uchovat jej i v upraveném obvodu. Je výhodnější provést transformaci s prvně zmíněnou trojicí, tedy s rezistory R_1 , R_3 a R_5 (viz obr. 4.4a). Velikosti odporů R_A , R_B a R_C dopočítáme pomocí vzorce pro transfiguraci hvězda-trojúhelník:



Obrázek 4.3: Příklad č. 2

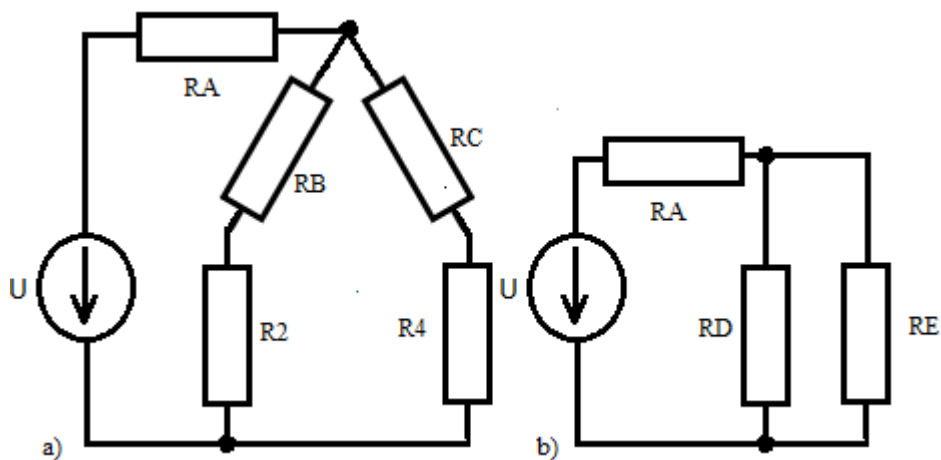
$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_5}, \quad (4.1)$$

$$R_B = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_3 + R_5}, \quad (4.2)$$

$$R_C = \frac{R_3 R_5}{R_1 + R_3 + R_5}. \quad (4.3)$$

Po dosazení hodnot získáme $R_A = 60 \Omega$, $R_B = 100 \Omega$ a $R_C = 150 \Omega$. V tuto chvíli se už schéma velmi podobá schématu z předchozího příkladu. Můžeme už tedy nahradit sériovou kombinací rezistorů R_2 a R_B rezistorem R_D : $R_D = R_2 + R_B = 500 \Omega$. Je dobré si už v tuto chvíli uvědomit, že proud tekoucí rezistorem R_2 a rezistorem R_D je stejný. Stejně tak nahradíme i druhou sériovou kombinaci, tedy rezistory R_C a R_4 rezistorem R_E (viz obr. 4.4b). Jeho odpor je roven součtu obou odporů nahrazovaných, tedy 300Ω . Nyní nahradíme paralelní kombinaci rezistorů R_D a R_E rezistorem R_F : $R_F = \frac{R_D R_E}{R_D + R_E} = 187,5 \Omega$. Pro další výpočty je dobré si zapamatovat, že napětí na rezistorech R_D , R_E a R_F je stejné. Z původního obvodu nám už zbyl jen zdroj napětí a dva sériově zapojené rezistory. Mohli bychom použít další zjednodušení, rozhodně by to nebyla chyba. Můžeme ale také, a tento postup zvolíme, použít vzorec pro dělič napětí. Tím získáme napětí na rezistoru R_F : $U_F = U \frac{R_F}{R_A + R_F} = 75,75 \text{ V}$. Jak bylo již dříve řečeno, $U_F = U_D$ a proud rezistorem R_D je roven proudu rezistorem R_2 . V tuto chvíli už můžeme vypočítat proud I_2 , $I_2 = \frac{U_F}{R_D} = 0,15 \text{ A}$. Pomocí Ohmova zákona dopočítáme napětí $U_2 = I_2 R_2 = 60,60 \text{ V}$ a tím máme zadání úlohy splněno.

Oba výsledky vyšly jako periodická desítná čísla. Obvykle se výsledek zaokrouhluje, buď je přímo součástí zadání, s jakou přesností potřebujeme



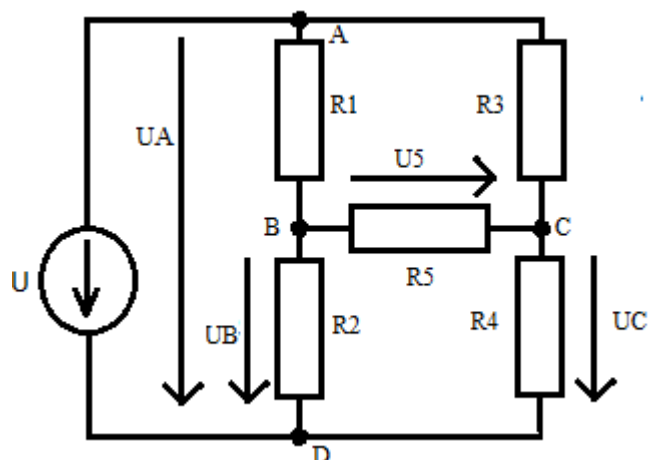
Obrázek 4.4: Příklad č. 2, postupné zjednodušování

výsledky, nebo, jako v tomto případě, to zůstává na úsudku řešitele. Výsledek by měl být ve formě celého nebo desetinného čísla. Na druhou stranu je snaha, aby zaokrouhlení co možná nejméně výsledek ovlivnilo, proto se při řešení, kdy by muselo dojít k zaokrouhlování již v průběhu výpočtu, snažíme dosadit konkrétní hodnoty co možná nejpozději. V příkladech, které jsme zatím řešili vycházela „hezká“ čísla, takže nebylo třeba čekat na dosazení hodnot až do posledního vzorce.

Pomocí transpozice z trojúhelníku na hvězdu a následným zjednodušováním jsme dospěli k požadovaným výsledkům. Postup to sice nebyl příliš složitý, ale dost zdlouhavý. Navíc kdybychom, jako v předchozím příkladu, měli dopočítat všechny proudy a napětí v obvodu, byla by před námi ještě dlouhá cesta. Pokusme se nyní řešit stejné zadání pomocí obvodových rovnic. Obvod má 4 uzly a 6 větví. Pro metodu smyčkových proudů potřebujeme tedy $6-4+1=3$ rovnice pro tři smyčkové proudy. Pro metodu uzlových napětí máme $4-1=3$ nezávislá uzlová napětí. Vypadá to, že v obou případech budeme muset řešit soustavu tří rovnic o třech neznámých. Při pohledu na schéma vidíme, že napětí mezi uzly A a D je rovno napětí zdroje. Tedy stačí dopočítat pouze dvě uzlová napětí, a proto použijeme metodu uzlových napětí. Za referenční uzel zvolíme uzel D . Uzlová napětí U_A , U_B a U_C jsou napětí mezi uzly A , B a C a uzlem D (viz obr. 4.5). Známe už napětí U_A , stačí tedy vytvořit rovnice pouze pro uzly B a C . Pro B to bude:

$$\frac{U_B}{R_2} - \frac{U - U_B}{R_1} + \frac{U_B - U_C}{R_5} = 0. \quad (4.4)$$

Tato rovnice popisuje první Kirchhoffův zákon v uzlu B . Napětí $U_B = U_2$, tedy zlomek $\frac{U_B}{R_2}$ je vlastně proud tekoucí větví s rezistorem R_2 . Obdobně jsou



Obrázek 4.5: Příklad č. 2, uzlová napětí

vyjádřeny i ostatní proudy vtékající a vytékající z uzlu B . Stejně sestavíme i rovnici pro uzel C :

$$\frac{U_C}{R_4} - \frac{U - U_C}{R_3} - \frac{U_B - U_C}{R_5} = 0. \quad (4.5)$$

Máme tedy soustavu rovnic:

$$(R_1 R_5 + R_2 R_5 + R_1 R_2) U_B - R_1 R_2 U_C = R_2 R_5 U, \quad (4.6)$$

$$-R_3 R_4 U_B + (R_3 R_4 + R_4 R_5 + R_3 R_5) U_C = R_4 R_5 U. \quad (4.7)$$

Dosadíme známé hodnoty a soustavu rovnic upravíme:

$$19U_B - 4U_C = 1\,000, \quad (4.8)$$

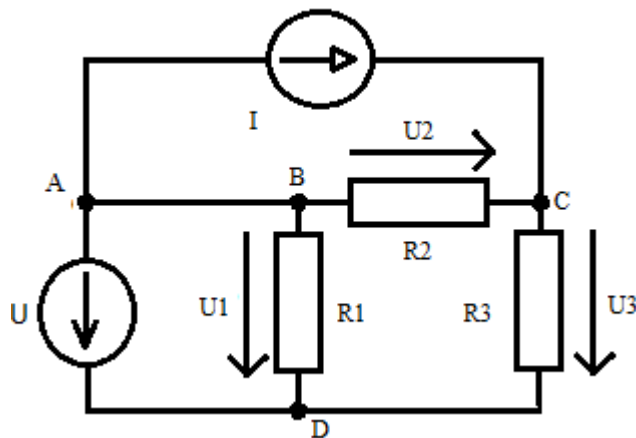
$$-3U_B + 18U_C = 500. \quad (4.9)$$

Soustavu převedeme na rozšířenou matici:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 19 & -4 & 1\,000 \\ -3 & 18 & 500 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -\frac{500}{3} \\ 19 & -4 & 100 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -\frac{500}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1\,250}{33} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2\,000}{33} \\ 0 & 1 & \frac{1\,250}{33} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Napětí $U_B = \frac{2\,000}{33}$ V, napětí $U_C = \frac{1\,250}{33}$ V. Napětí U_B je totožné s napětím U_2 , máme tedy už výsledek $U_2 = 60,60$ V. Proud bychom dopočítali opět Ohmovým zákonem. Tento postup byl sice rychlejší, ale tato rychlost byla vykoupena relativně nepříjemnými výpočty v matici. Velkou výhodou tohoto způsobu je, že nyní by už bylo snadné dopočítat ostatní napětí v obvodu. Například $U_5 = U_B - U_C$.

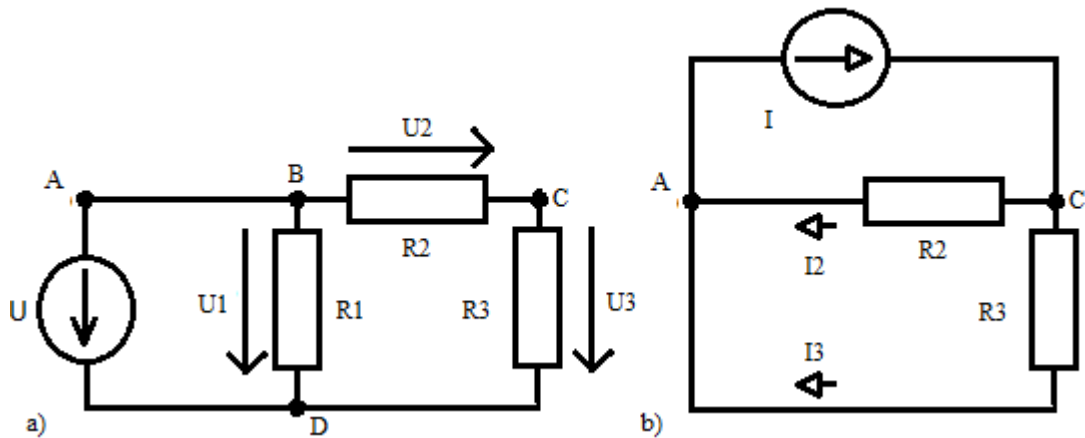
4.1.3 Příklad č. 3



Obrázek 4.6: Příklad č. 3

Máme spočítat všechna napětí i proudy v daném obvodu (viz obr. 4.6). $U = 50 \text{ V}$, $I = 0,1 \text{ A}$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ a $R_3 = 300 \Omega$. Doposud jsme počítali pouze příklady, v nichž byl jen jeden zdroj. V tomto příkladu se vyskytují už zdroje dva, jeden zdroj elektrického proudu a jeden zdroj elektrického napětí. V tomto případě je nelze nahradit zdrojem jediným. Musíme tedy využít buď princip superpozice, nebo opět obvodové rovnice. Relativně malý počet prvků slibuje, že výpočet pomocí superpozice by mohl být celkem snadný. Oproti tomu by bylo třeba 2 uzlových napětí nebo 3 smyčkových proudů.

Nejdříve spočítáme napětí, která dodává zdroj elektrického napětí U . Vytvoříme si pomocné schéma, kde všechny ostatní zdroje elektrického napětí nahradíme zkratem (ideální zdroj napětí má nulový vnitřní odpor) a zdroje elektrického proudu prostě vynecháme (ideální zdroj proudu má nekonečný odpor). V našem příkladě nám zůstává jediný zdroj proudu, můžeme vynechat celou větev, v níž leží (viz obr. 4.7a). Nyní je už výpočet snadný. V tomto pomocném obvodu je napětí na rezistoru R_1 rovno napětí U , tedy $U_{1u} = 50 \text{ V}$. Stejně napětí je i na sériové kombinaci R_2 , R_3 . K dopočítání napětí na těchto rezistorech lze použít buď náhradu rezistorem jediným, nebo vzorcem pro dělič napětí. Oba postupy jsou natolik snadné, že nijak nezáleží na tom, který použijeme. Zkusme třeba dělič napětí: $U_{2u} = U \frac{R_2}{R_2+R_3} = 20 \text{ V}$, $U_{3u} = U \frac{R_3}{R_2+R_3} = 30 \text{ V}$. Mohli bychom rovnou dopočítat i příspěvek proudu dodávaný zdrojem napětí, ale s tím můžeme počkat, až budeme počítat celkový proud a ne jen jeho části. Nyní spočteme obdobným způsobem příspěvky zdroje elektrického proudu. Opět vytvoříme náhradní schéma, kde



Obrázek 4.7: Příklad č. 3, pomocné schéma: a) pro zdroj napětí, b) pro zdroj proudu

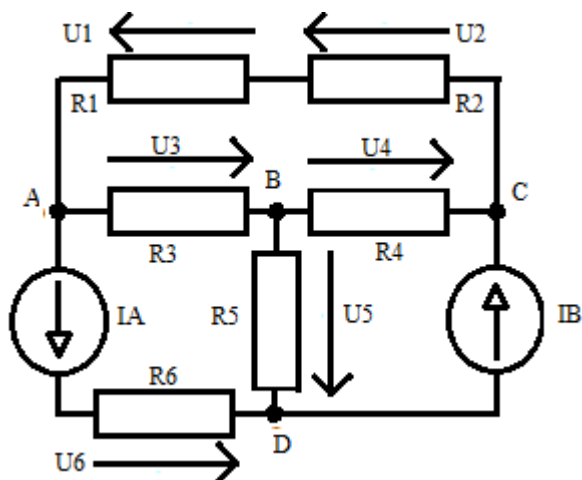
zdroj proudu nahradíme vodičem (viz obr. 4.7b). Ve schématu je vynechána celá větev s rezistorem R_1 . To si můžeme dovolit, protože uzly A a D jsou přímo vodičivě spojeny, čili mezi nimi musí být nulové napětí. Tedy je nulové napětí i na rezistoru R_1 a protéká jím i nulový proud. Proto známe velikost napětí na R_1 a jeho vynechání zbytek obvodu nijak nezmění. Obvod, který zbyl, není nic jiného než prouduvý dělič. Nic tedy nebrání dopočítat proudy rezistorů. $I_{2i} = I \frac{R_3}{R_2+R_3} = 0,06$ A, $I_{3i} = I \frac{R_2}{R_2+R_3} = 0,04$ A, z čehož snadno dopočteme Ohmovým zákonem napětí. $U_{2i} = 12$ V, $U_{3i} = 12$ V. Napětí bylo možno zjistit i náhradou paralelní kombinace.

Teď už můžeme sečíst příspěvky napětí obou zdrojů, ale pozor, napětí U_{2i} má opačnou orientaci než napětí U_2 v původním schématu, je tedy potřeba toto napětí odečíst! $U_1 = U_{1u} + U_{1i} = 50$ V, $U_2 = U_{2u} - U_{2i} = 8$ V a $U_3 = U_{3u} + U_{3i} = 42$ V. V tuto chvíli už dopočteme proudy snadno z Ohmova zákona: $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = 0,5$ A, $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 0,04$ A a $I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 0,14$ A.

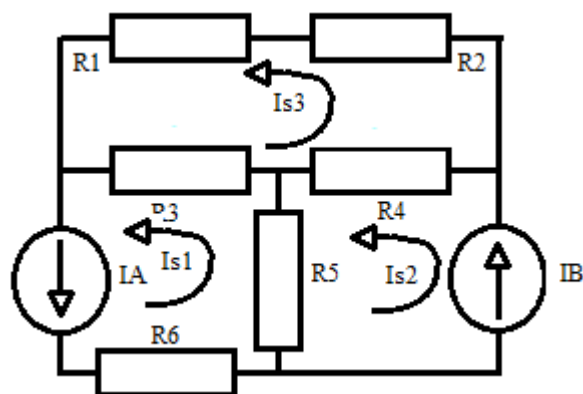
4.1.4 Příklad č. 4

V obvodu (viz obr. 4.8) jsou zadány hodnoty součástek $R_1 = R_2 = R_4 = R_6 = 200 \Omega$, $R_3 = R_5 = 100 \Omega$, $I_A = 0,5$ A a $I_B = 0,1$ A.

Obvod obsahuje šest větví a čtyři uzly. V metodě uzlových napětí budeme muset hledat tři uzlová napětí, v metodě smyčkových proudů tři smyčkové proudy. Pokud vhodně zvolíme smyčkové proudy (viz obr. 4.9), vidíme, že $I_{s1} = I_A$ a $I_{s2} = I_B$. Stačí tedy dopočítat pouze proud I_{s3} . Začneme na rezistoru R_2 a budeme postupovat po směru smyčky:



Obrázek 4.8: Příklad č. 4



Obrázek 4.9: Příklad č. 4, volba smyčkových proudů

$$R_2 I_{s3} + R_1 I_{s3} + R_3 (I_{s3} - I_A) + R_4 (I_{s3} - I_B) = 0. \quad (4.11)$$

Dosazením hodnot a upravením rovnice získáme $600I_{s3} = 60$ A, tedy $I_{s3} = 0,1$ A. Nyní už snadno dopočítáme proudy jednotlivými součástkami: $I_1 = I_2 = I_{s3} = 0,1$ A, $I_3 = I_{s3} - I_A = -0,4$ A, $I_4 = I_{s3} - I_B = 0$ A, $I_5 = I_B - I_A = -0,4$ A a $I_6 = I_A = 0,5$ A. Napětí vypočítáme snadno pomocí Ohmova zákona: $U_1 = U_2 = 20$ V, $U_3 = -40$ V, $U_4 = 0$ V, $U_5 = -40$ V a $U_6 = 100$ V.

Na ukázkou sestavíme ještě soustavu rovnic pro metodu uzlových napětí. Za referenční bod zvolíme bod D , snažíme se dopočítat tři uzlová napětí: U_A ,

U_B a U_C . Vznikne soustava rovnic:

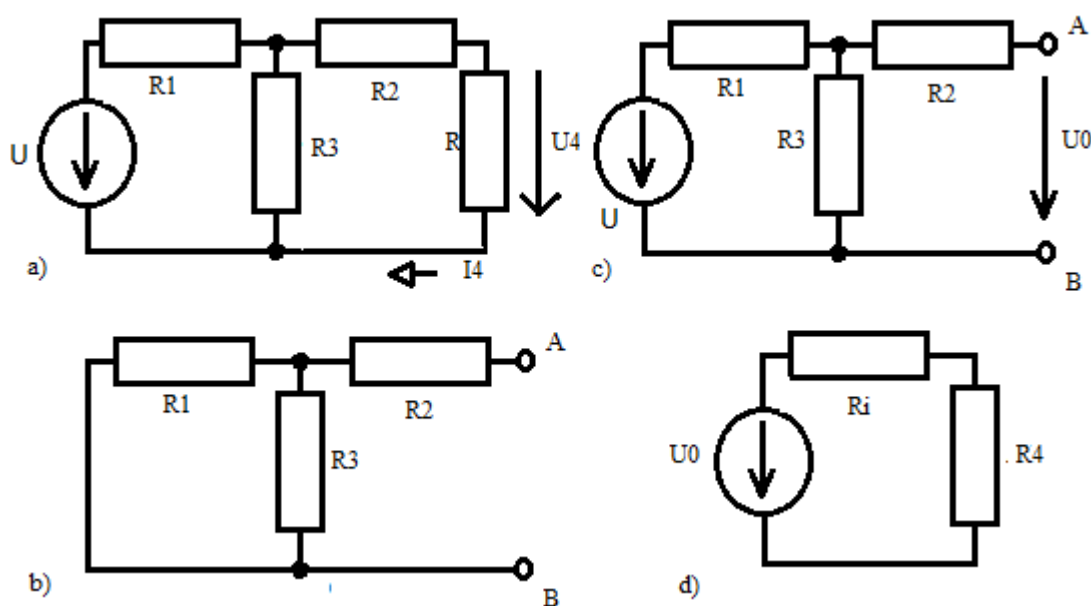
$$I_A + \frac{U_A - U_B}{R_3} + \frac{U_A - U_C}{R_1 + R_2} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{U_B}{R_5} + \frac{U_B - U_C}{R_4} + \frac{U_B - U_A}{R_3} = 0, \quad (4.13)$$

$$-I_2 + \frac{U_C - U_B}{R_4} + \frac{U_C - U_A}{R_1 + R_2} = 0. \quad (4.14)$$

Samozřejmě i tuto soustavu rovnic by bylo lze řešit a výsledek by nutně musel být stejný jako v předchozím případě. Rozhodně však jde o postup výrazně složitější.

4.1.5 Příklad č. 5



Obrázek 4.10: Příklad č. 5

Je zadán elektrický obvod (viz obr. 4.10a) s jedním zdrojem elektrického napětí $U = 50 \text{ V}$ a čtyřmi rezistory: $R_1 = 200 \text{ } \Omega$, $R_2 = 100 \text{ } \Omega$, $R_3 = 50 \text{ } \Omega$ a $R_4 = 60 \text{ } \Omega$. Naším úkolem je zjistit napětí a proud na rezistoru R_4 .

Samozřejmě by k řešení bylo možné použít obvodové rovnice. Obvod je dost jednoduchý, takže by nebyl problém použít metodu postupného zjednodušování. Na tomto příkladu si ale ukážeme použití Théveninova teorému.

Budeme nahrazovat část obvodu se zdrojem napětí a rezistory R_1 , R_2 a R_3 . Rezistor R_4 představuje zátěž. Vybranou část obvodu chceme nahradit sériovým zapojením ideálního zdroje napětí R_1 a rezistoru R_i (viz obr. 4.10d). Pro výpočet odporu rezistoru R_i vytvoříme pomocné schéma (viz obr. 4.10b). V nahrazované části obvodu a nahradíme všechny zdroje napětí zkratem a všechny zdroje proudu vynecháme. Pak dopočítáme celkový odpor mezi svorkami A a B . Ten získáme snadno postupným zjednodušováním. Jde vlastně o paralelní kombinaci rezistorů R_1 a R_3 , která je v sérii s rezistorem R_2 . Celkový odpor tedy získáme:

$$R_i = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2 = 140 \Omega. \quad (4.15)$$

Pro výpočet napětí U_0 použijeme schéma nezatíženého nahrazovaného obvodu (viz obr. 4.10c). Hledané napětí je napětí mezi svorkami A a B . Rezistorem R_2 neteče žádný proud, není na něm tedy ani žádné napětí, proto musí platit, že $U_3 = U_{AB}$. Napětí na rezistoru R_3 už získáme snadno, například vzorcem pro dělič napětí: $U_0 = U_3 = U \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 10 \text{ V}$.

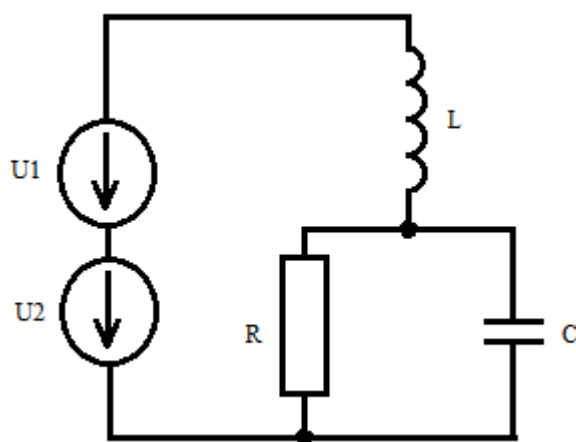
Teď už stačí pouze nahradit vybranou část obvodu zdrojem napětí U_0 a rezistorem R_i (viz obr. 4.10c), jejichž hodnoty jsme právě dopočítali. Zbyde zdroj napětí a dva sériově zapojené rezistory. Zajímá nás napětí a proud rezistorem R_4 . Napětí získáme opět pomocí vzorce pro dělič napětí a proud pak snadno dostaneme Ohmovým zákonem: $U_4 = U_0 \frac{R_4}{R_i + R_4} = 3 \text{ V}$, $I_4 = \frac{U_4}{R_4} = 0,05 \text{ A}$.

4.2 Harmonický ustálený stav

4.2.1 Příklad č. 6

Toto je první příklad, v němž jsou zdroje harmonického napětí. Hodnoty prvků obvodu (viz obr. 4.11) jsou: $u_1 = 50 \sin(150t) \text{ V}$, $u_2 = 20 \sin(150t + \frac{\pi}{4}) \text{ V}$, $R = 100 \Omega$, $L = 20 \mu\text{H}$ a $C = 10 \mu\text{F}$. Naším úkolem je opět dopočítat všechna napětí a proudy v obvodu.

Úhlové rychlosti obou dvou zdrojů jsou stejné, $\omega = 150 \text{ rad/s}$. Nejdříve převedeme známá napětí a proudy na fázory a vlastnosti pasivních prvků vyjádříme impedancemi. Ze zadání známe impedance obou zdrojů: $U_{m1} = 50 \text{ V}$, $U_{m2} = 20 \text{ V}$ i jejich fázové posunutí: $\varphi_1 = 0 \text{ rad}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$. Můžeme tedy už psát oba dva fázory: $\hat{U}_1 = 50 \text{ V}$, $\hat{U}_2 = 20e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ V}$. Impedance pasivních prvků získáme prostým dosazením do vzorce: $Z_R = R$, $Z_L = j\omega L$ a $Z_C = -\frac{j}{\omega C}$, nyní už můžeme postupovat obdobně jako v příkladech se stejnosměrnými zdroji. Obvod je celkem jednoduchý, nejsnazší bude asi postupné zjednodušování.



Obrázek 4.11: Příklad č. 6

Oba sériově zapojené zdroje napětí můžeme nahradit jediným zdrojem:

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = (50 + 20e^{\frac{\pi}{4}j}) \text{ V.} \quad (4.16)$$

Abychom mohli oba fázory sečíst, musíme je převést do algebraického tvaru:

$$\hat{U} = \left(50 + \frac{20\sqrt{2}}{2} + j\frac{20\sqrt{2}}{2}\right) \text{ V} = (50 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2}j) \text{ V.} \quad (4.17)$$

Dále můžeme nahradit paralelní kombinaci rezistoru a kapacitoru prvkem o impedanci $Z_A = \frac{Z_R Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{-\frac{jR}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{-jR}{R\omega C - j} = \frac{R - jR^2\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1}$. Máme tedy zjednodušený obvod sestávající pouze z jednoho zdroje napětí a dvou pasivních prvků. Celková impedance obou prvků $Z = Z_L + Z_A$ už lze použít pro výpočet proudu, který teče zdroji a induktorem L : $\hat{I}_L = \frac{\hat{U}}{Z}$. Po dosazení číselných hodnot získáme $Z = \frac{100 - 15j}{1,022 \cdot 5} \Omega$ a proud induktorem: $\hat{I}_L = \frac{\hat{U}}{Z} = \left(1,022 \cdot 5 \frac{5 \cdot 000 + 850\sqrt{2} + (850 + 1 \cdot 150\sqrt{2})j}{1 \cdot 225}\right) \text{ A} \doteq (5,177 + 2,067j) \text{ A}$. Rovnou můžeme dopočítat napětí na induktoru: $\hat{U}_L = Z_L \hat{I}_L \doteq (-0,0031 + 0,0078j) \text{ V}$. Napětí na rezistoru i kapacitoru je rovno napětí na náhradním prvku Z_A : $\hat{U}_R = \hat{U}_C = \hat{U} - \hat{U}_L \doteq (64,139 + 14,134j) \text{ V}$. Proudů kapacitorem i rezistorem dopočítáme opět pomocí Ohmova zákona: $\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_R}{R} \doteq (0,641 + 0,141j) \text{ A}$, $\hat{I}_C = \frac{\hat{U}_C}{\frac{1}{j\omega C}} \doteq (-0,021 + 0,096j) \text{ A}$.

Teď už máme vyjádřeny všechny neznámé proudy a napětí. Jsou ale zatím ve formě fázorů, potřebujeme je tedy převést zpět na harmonické funkce. Nejdříve převedeme fázory z algebraického tvaru na tvar exponenciální. Začneme třeba napětím \hat{U}_L . Z předchozích výpočtů víme, že

$\hat{U}_L \doteq (-0,003\ 1 + 0,007\ 8j)$ V. Pro převod do exponenciálního tvaru potřebujeme zjistit amplitudu U_{mL} a fázový posun φ_{u_L} . Amplitudu získáme pomocí Pythagorovy věty, kde amplituda je pomyslnou přeponou pravoúhlého trojúhelníku a reálná a imaginární část komplexního čísla jsou jeho odvěsny. $U_{mL} \doteq \sqrt{0,003\ 1^2 + 0,007\ 8^2}$ V $\doteq 0,008\ 4$ V. Fázový posun získáme pomocí soustavy rovnic:

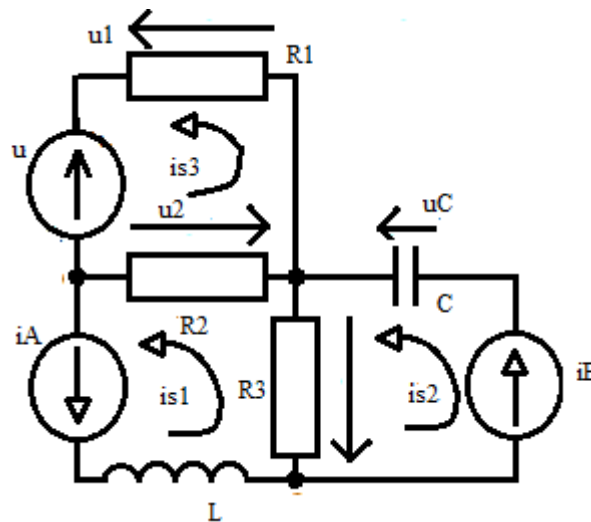
$$\sin \varphi = \frac{0,007\ 8}{0,008\ 4}, \quad (4.18)$$

$$\cos \varphi = \frac{-0,003\ 1}{0,008\ 4}. \quad (4.19)$$

Takže $\varphi \doteq 1,951$ rad. Fázor v exponenciálním tvaru pak zapíšeme: $\hat{U}_L \doteq 0,0084e^{1,951j}$ V a zpětnou Steinmetzovou transformací získáme už kýžený výsledek: $u_L \doteq 0,008\ 4 \sin(150t + 1,951)$ V. Stejně bychom pokračovali i u ostatních proudů a napětí.

Z příkladu je vidět, že způsob řešení stejnosměrných obvodů a obvodů v harmonickém ustáleném stavu se příliš neliší. Hlavní obtíží v harmonickém ustáleném stavu je často nepříjemné počítání s komplexními čísly.

4.2.2 Příklad č. 7



Obrázek 4.12: Příklad č. 7

Na obr. 4.12 je už komplikovanější obvod. Jsou dány dva zdroje elektrického proudu: $i_A = 0,5 \sin(200t)$ A, $i_B = \sin(200t + \frac{\pi}{2})$ A, jeden zdroj elektrického napětí $u = 20 \sin(200t)$ V, tři rezistory $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$,

$R_3 = 500 \Omega$, kapacitor $C = 200nF$ a induktor $L = 10 mH$. Naším úkolem je dopočítat všechna napětí a proudy pasivních prvků obvodu.

Jelikož obvod obsahuje tři zdroje, použití principu superpozice by bylo dost náročné. Nezbyvá nám, než použít obvodové rovnice. Obvod má 5 větví a 3 uzly. Pro metodu smyčkových proudů budeme potřebovat dopočítat tři smyčkové proudy, pro metodu uzlových napětí pouze dvě napětí. Z toho by bylo možné usoudit, že je výhodnější použít metodu uzlových napětí. Pokud však zvolíme vhodně smyčkové proudy (viz obr. 4.12), je zřejmé, že proud $i_{s1} = i_A$ a $i_{s2} = i_B$. Zbývá dopočítat pouze proud i_{s3} . Nejdřív převedeme napětí a proudy na fázory: $\hat{I}_A = 0,5 A$, $\hat{I}_B = e^{j\frac{\pi}{2}} A = j A$ a $\hat{U} = 20 V$. Teď spočteme impedance jednotlivých pasivních součástí: $Z_1 = R_1 = 100 \Omega$, $Z_2 = R_2 = 200 \Omega$, $Z_3 = R_3 = 500 \Omega$, $Z_L = j \omega L = 0,2 \Omega$ a $Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{4} 10^5 \Omega$. Teď už nic nebrání vytvoření rovnice:

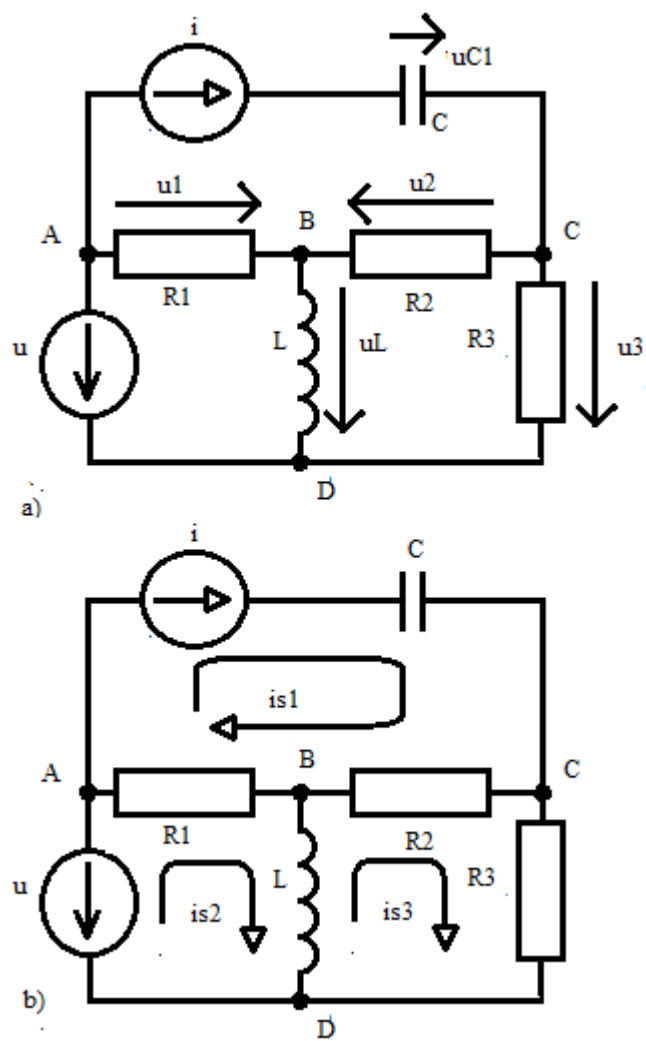
$$R_1 \hat{I}_{s3} + R_2 (\hat{I}_{s3} - \hat{I}_A) = \hat{U}. \quad (4.20)$$

Po dosazení a upravení získáme: $\hat{I}_{s3} = 0,4 A$. Nyní už snadno dohledáme všechny proudy: $\hat{I}_1 = \hat{I}_{s3} = 0,4 A$, $\hat{I}_2 = \hat{I}_{s3} - \hat{I}_A = -0,1 A$, $\hat{I}_3 = \hat{I}_B - \hat{I}_A = (-0,5 + j) A$, $\hat{I}_L = \hat{I}_{s1} = 0,5 A$, $\hat{I}_C = \hat{I}_{s2} = j A$. Jednotlivá napětí získáme pomocí Ohmova zákona: $\hat{U}_1 = R_1 \hat{I}_1 = 40 V$, $\hat{U}_2 = R_2 \hat{I}_2 = -20 V$, $\hat{U}_3 = R_3 \hat{I}_3 = (-250 + 500j) V$, $\hat{U}_L = j \omega L \hat{I}_L = j V$, $\hat{U}_C = \frac{-j \hat{I}_C}{\omega C} = 25\,000 V$. Teď už stačí převést fázory na harmonické funkce a máme hotovo. $u_1 = 40 \sin(200t) V$, $i_1 = 0,4 \sin(200t) A$, $u_2 = -20 \sin(200t) V$, $i_2 = -0,1 A$, $u_3 = 559 \sin(200t + 2,247) V$, $i_3 = 1,118 \sin(200t + 2,247) V$, $u_L = \sin(200t + \frac{\pi}{2}) V$, $i_L = 0,5 \sin(200t) A$, $u_C = 25\,000 \sin(200t) V$ a $i_c = \sin(200t + \frac{\pi}{2}) A$.

4.2.3 Příklad č. 8

V obvodu (viz obr. 4.13a) jsou dány hodnoty prvků obvodu: $u = 25 \sin(200t) V$, $i = 0,2 \sin(200t) A$, $R_1 = R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 100 \Omega$, $L = 0,1 H$ a $C = 25 \mu F$. Naším úkolem je opět dopočítat všechny hodnoty proudů a napětí na pasivních prvcích. Obvod obsahuje 6 větví a 4 uzly. Pro metodu smyčkových proudů bude tedy potřeba dopočítat 3 smyčkové proudy, pro metodu uzlových napětí 3 napětí. Podívejme se, zda některé z těchto neznámých nemůžeme vyjádřit přímo pomocí zadaných zdrojů. Pokud zvolíme za referenční uzel bod D , můžeme rovnou říci, že $u_A = u$. V případě smyčkových proudů (viz obr. 4.13b) je zřejmé, že $i_{s1} = i$. V obou dvou případech budeme tedy muset řešit dvě rovnice o dvou neznámých. Je jedno, kterou metodu zvolíme.

Použijme třeba metodu uzlových napětí. Jak již bylo řečeno, za referenční uzel zvolíme uzel D . Napětí u_A známe, stačí tedy dopočítat napětí



Obrázek 4.13: Příklad č. 8: a) Schéma obvodu, b) Vyznačené smyčkové proudy

u_B a u_C . Než začneme sestavovat rovnice, musíme opět převést napětí u a proud i na fázory: $\hat{U} = 25$ V, $\hat{I} = 0,2$ A. Fázový posun obou dvou zdrojů je nula, tedy činitel $e^{j\varphi}$ se rovná jedné. Dále dopočítáme impedance pasivních prvků. S rezistory není problém, neboť $Z = R$, impedance kapacitoru je $Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -200j \Omega$ a $Z_L = j\omega L = 20j \Omega$. Rovnice vytvoříme stejným způsobem jako v předchozích případech. Nejdříve pro uzel B :

$$\frac{\hat{U}_B}{Z_L} - \frac{\hat{U} - \hat{U}_B}{R_1} - \frac{\hat{U}_C - \hat{U}_B}{R_2} = 0 \quad (4.21)$$

a pro uzel C :

$$\frac{\hat{U}_C}{R_3} + \frac{\hat{U}_C - \hat{U}_B}{R_2} - \hat{I} = 0. \quad (4.22)$$

Obě rovnice upravíme:

$$(R_1 R_2 + R_2 Z_L + R_1 Z_L) \hat{U}_B - (R_1 Z_L) \hat{U}_C = Z_L R_2 \hat{U}, \quad (4.23)$$

$$-R_3 \hat{U}_B + (R_2 + R_3) \hat{U}_C = R_2 R_3 \hat{I} \quad (4.24)$$

a dosadíme hodnoty a zkrátíme:

$$(5 + 4j) \hat{U}_B - (2j) \hat{U}_C = 50j \text{ V}, \quad (4.25)$$

$$-2 \hat{U}_B + 3 \hat{U}_C = 20 \text{ V}. \quad (4.26)$$

Pro výpočet bude výhodnější přehodit pořadí neznámých. V maticích můžeme soustavu rovnic zapsat:

$$\begin{pmatrix} -2j & 5 + 4j \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_C \\ \hat{U}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50j \\ 20 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Z toho již vytvoříme rozšířenou matici a pomocí Gaussovy eliminace vypočítáme napětí \hat{U}_B a \hat{U}_C .

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2j & 5 + 4j & 50j \\ 3 & -2 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 + 2,5j & -25 \\ 3 & -2 & 20 \end{array} \right) \sim \quad (4.28)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 + 2,5j & -25 \\ 0 & 4 - 7,5j & 95 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 + 2,5j & -25 \\ 0 & 1 & \frac{190}{289}(8 + 15j) \end{array} \right). \quad (4.29)$$

Teď už známe fázor napětí \hat{U}_B : $\hat{U}_B = \frac{190}{289}(8 + 15j)$ V, dopočítáme \hat{U}_C : $\hat{U}_C = (-25 - (-2 + 2,5j)\frac{190}{289}(8 + 15j))$ V = $(-25 - \frac{190}{289}(-53,5 - 10j))$ V = $(\frac{2 \cdot 940}{289} + \frac{1900}{289}j)$ V. Ze znalostí těchto napětí můžeme dopočítat fázory napětí na jednotlivých prvcích obvodu a dále pomocí Ohmova zákona i jednotlivé proudy. Začneme těmi napětími, která není třeba dopočítávat. Je

zřejmé, že $\hat{U}_L = \hat{U}_B$ a $\hat{U}_3 = \hat{U}_C$. Jako výsledek potřebujeme časový průběh, fázory tedy nejdříve převedeme na exponenciální tvar, z něhož už bude vidět amplituda a fázový posun. Amplitudu napětí na induktoru získáme pomocí Pythagorovy věty: $U_{mL} = \left(\frac{190}{289}\sqrt{8^2 + 15^2}\right) \text{ V} = \frac{190}{17} \text{ V}$. Fázový posun dostaneme pomocí goniometrických funkcí. Do této chvíle jsme postupovali matematicky korektně, tedy výsledky jsou zatím přesné. Teď bychom mohli vyjádřit fázový posun pomocí cyklometrické funkce, bylo by to však dost nepraktické, navíc se s touto hodnotou už dále nepočítá, je součástí výsledku. Budeme zaokrouhlovat, musíme si zvolit přesnost, na niž budeme zaokrouhlovat, řekněme, že napětí budeme zaokrouhlovat na dvě desetinná místa, fázový posun na tři a proudy na čtyři. Fázový posun φ můžeme vypočítat ze vztahu $\text{tg } \varphi = \frac{15}{8}$. Toto je asi nejjednodušší způsob výpočtu fázového posunu. Je třeba dávat pozor, zda vypočítaný úhel odpovídá kvadrantu, v němž komplexní číslo leží v Gaussově rovině. V tomto případě kalkulačka ukazuje $\varphi \doteq 1,081 \text{ rad}$, vše je v pořádku. Zokrouhlíme i amplitudu: $U_{mL} \doteq 11,18 \text{ V}$. Můžeme tedy psát exponenciální tvar fázoru \hat{U}_L : $\hat{U}_L \doteq 11,18e^{1,081j} \text{ V}$ a ten už snadno převedeme na časový průběh napětí $u_L \doteq 11,18 \sin(200t + 1,081) \text{ V}$. Obdobně převedeme i ostatní fázory, postup je stále stejný, nebudeme jej už podrobně popisovat. Proud induktorem získáme pomocí Ohmova zákona: $\hat{I}_L = \frac{\hat{U}_L}{Z_L} = \frac{19}{578}(15 - 8j) \text{ A} \doteq 0,5588e^{-0,490j} \text{ A}$, $i_L \doteq 0,5588 \sin(200t - 0,490) \text{ A}$.

Jak již bylo výše řečeno, známe i fázor napětí na rezistoru R_3 , $\hat{U}_3 = \hat{U}_C = \left(\frac{2 \cdot 940}{289} + \frac{1 \cdot 900}{289}j\right) \text{ V} \doteq 12,11e^{0,574j} \text{ V}$, $u_3 \doteq 12,11 \sin(200t + 0,574) \text{ V}$. Spočítáme i proud: $\hat{I}_3 = \frac{\hat{U}_3}{R_3} = \left(\frac{294}{2 \cdot 890} + \frac{19}{289}j\right) \text{ A} \doteq 0,1211e^{0,574j} \text{ A}$, $i_3 \doteq 0,1211 \sin(200t + 0,574) \text{ A}$.

Napětí na rezistoru R_1 lze dopočítat z již známých uzlových napětí. Napětí mezi uzly B a D musí být stejné, ať jdeme jakoukoli cestou, musí tedy platit: $\hat{U}_B = \hat{U} - \hat{U}_1$, $\hat{U}_1 = \left(\frac{5 \cdot 705}{289} - \frac{2 \cdot 850}{289}j\right) \text{ V} \doteq 22,07e^{-0,463j} \text{ V}$, $u_1 \doteq 22,07 \sin(200t - 0,463) \text{ V}$. Obvyklým způsobem získáme elektrický proud: $\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{R_1} = \left(\frac{1 \cdot 141}{2 \cdot 890} - \frac{57}{289}j\right) \text{ A} \doteq 0,4414e^{-0,463j} \text{ A}$, $i_1 \doteq 0,4414 \sin(200t - 0,463) \text{ A}$.

Z rezistorů nám už zbývá pouze R_2 . Jemu příslušející napětí a proud získáme obdobně jako u R_1 : $\hat{U}_2 = \hat{U}_C - \hat{U}_B = \left(\frac{1 \cdot 420}{289} - \frac{950}{289}j\right) \text{ V} \doteq 5,91e^{-0,590j} \text{ V}$, $u_2 \doteq 5,91 \sin(200t - 0,590)$, $\hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_2}{R_2} = \left(\frac{284}{2 \cdot 890} - 19289j\right) \text{ A} \doteq 0,1182e^{-0,590j} \text{ A}$, $i_2 \doteq 0,1182 \sin(200t - 0,590) \text{ A}$.

Posledním prvkem obvodu, jehož napětí a proud potřebujeme zjistit, je kapacitor C . U něj nám zjištěná uzlová napětí nepomohou, stačí si ale uvědomit, že leží ve stejné větvi jako zdroj elektrického proudu. Proud kapacitorem musí být stejný jako proud dodávaný zdrojem: $\hat{I}_C = \hat{I} = 0,2 \text{ A}$, $i_C = 0,2 \sin(200t) \text{ A}$, $\hat{U}_{C1} = Z_C \hat{I}_C = -40j \text{ V}$, $u_{C1} = 40 \sin(200t - \frac{\pi}{2}) \text{ V}$.

Značení \hat{U}_{C1} bylo zvoleno, aby nedošlo k záměně s uzlovým napětím \hat{U}_C mezi uzly C a D , které bylo v průběhu výpočtu použito.

Kapitola 5

Závěr

Nyní už zbývá pouze zhodnotit výsledek této práce. Ve fyzikální části bylo obecně popsáno elektromagnetické pole, zavedeny základní veličiny a vztahy mezi nimi. Postupně byly odvozeny vztahy potřebné pro práci s příklady s elektrickými obvody. A ty ještě konkretizovány na naše dva konkrétní případy, tedy pro obvody pouze s lineárními, nezávislými prvky v stejnosměrném nebo harmonickém ustáleném stavu. Z těch pak byly odvozeny metody pro řešení úloh s elektrickými obvody.

Tyto metody lze rozdělit do dvou základních skupin. Obvodové rovnice, které lze použít vždy, a metody, které lze použít jen v určitých konkrétních případech. Myslím tedy, že cíle vymezit vztahy pro řešení vybraných elektrických obvodů z mnohem širší problematiky teorie elektromagnetického pole bylo dosaženo.

Další část práce je věnována matematice, jež je potřeba pro řešení příkladů. Tato část působí proti části fyzikální dost neuspořádaně. Je to dáno výsledky části fyzikální. Výstupem všech popsaných metod jsou lineární rovnice nebo soustavy lineárních rovnic, a to v oboru reálných nebo komplexních čísel. Bylo tedy zapotřebí popsat komplexní čísla, předpokládám, že základní početní operace s reálnými čísly nepotřebují bližší vysvětlení, a řešení soustav lineárních rovnic.

V kapitole věnované komplexním číslům byl tento číselný obor definován a uvedeny základní početní operace a formy zápisu. Kapitola věnovaná řešení lineárních rovnic může působit poněkud stroze. Je zde popsán jediný způsob řešení soustav lineárních rovnic. Pro řešení příkladů je Gaussova eliminační metoda zcela dostačující. Text je věnován spíše konkrétnímu použití, než teorii. Další metody i teorii lze dohledat v příslušné literatuře, např. [9].

Řešeným příkladům je věnována samostatná část práce. Nabízela se možnost dát ke každé metodě příklad už ve fyzikální části práce. Toto řešení by však mělo několik nevýhod. Jednak bychom řešili příklady ještě před zave-

dením matematického aparátu, jednak je v některých příkladech nastíněno několik možných způsobů řešení. V neposlední řadě takové umístění přímo napovídá, jakou metodou se má daný příklad řešit, a řešitel mnohdy nezávází všechny možnosti.

V práci bylo uvedeno více příkladů na obvody se zdroji stejnosměrného napětí i proudu, než na obvody v harmonickém ustáleném stavu. V obou případech je postup řešení téměř stejný, v harmonickém ustáleném stavu je jen rozšířen o převod napětí a proudů na fázory a popis pasivních prvků pomocí impedancí. Smyslem řešených příkladů bylo ukázat použití jednotlivých metod, ne se utápět ve zdlouhavých výpočtech, proto byly výhodnější příklady se stejnosměrnými obvody.

Literatura

- [1] NOVOTNÝ, K. *Teorie elektromagnetického pole I*. Vydání druhé. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2005. 187 s. ISBN 80-01-03226-4.
- [2] BLAHOVEC, A. *Elektrotechnika I*. Páté vydání. Praha: Informatorium, 2005. ISBN 80-7333-043-1.
- [3] HAVLÍČEK, V., POKORNÝ, M., ZEMÁNEK, I. *Elektrické obvody I*. Vydání první. Praha : Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2005. 289 stran. ISBN 80-01-03299-X
- [4] BRANČÍK, L. *Elektrotechnika 1 : Přednášky*. Vydání první. Brno : Ing. Zdeněk Novotný CSc., Ondráčkova 105, 628 00 Brno, 2003. ISBN 80-214-2501-6.
- [5] ČAJKA, J., KVASIL J. *Teorie lineárních obvodů : Analýza lineárních a linearizovaných obvodů*. Vydání první. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, n.p, Spálená 51, 113 02 Praha 1, 1979. 360 stran, 242 obrázků, 10 tabulek.
- [6] MARTIN, Č. *Elektrické obvody - cvičení* [online]. Poslední změna 25. dubna 2012 [cit. 12-5-2012]. Dostupné z WWW: <http://www.mti.tul.cz/files/elo/priklady_ELO.pdf>
- [7] JARNÍK, V. *Diferenciální počet (I)*. Vydání 7. nezměněné. Praha : Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1984. 392 stran, 59 obrázků.
- [8] BRABEC, J., MARTAN, F., ROZENSKÝ, Z. *Matematická analýza 1*. Vydání první. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, n.p, Spálená 51, 113 02 Praha 1, 1985. 488 stran, 158 obrázků, 1 tabulka.
- [9] HAVEL, V., HOLENDÁ, J. *Lineární algebra*. Vydání první. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, n.p, Spálená 51, 113 02 Praha 1, 1984. 340 stran, 49 obrázků.

- [10] BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra*. Vydání druhé. Praha : MATFYZPRESS, 2002. ISBN 80-85863-92.