

# Matematika, hudba a diferenciálne rovnice

Milada Kazdová\*

<sup>TE</sup>Kolite : Mária Slavíková<sup>GE</sup>

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

## Abstrakt

V predloženom článku ukážeme, ako pomocou projektového vyučovania motivovať študentov k hľadaniu súvislostí medzi jednotlivými predmetmi. Predstavíme, že aj zdanlivo rozdielne obory ako sú hudba, matematika, fyzika a biológia majú veľa spoločného.

**Kľúčové slová:** projektové vyučovanie, diferenciálna rovnica, vnímanie zvuku, šírenie zvuku.

## Úvod

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že matematika, hudba a diferenciálne rovnice nemajú nič spoločné. Keď sa troška zamyslíme, zistíme, že sme všetci na strednej škole po ulici vo fyzike o kmitaní a vlnení, v biológii o ľudskom uchu, v hudobnej výchove o výške tónu a hudobnej stupnici. Všetci poznáme pojmy *príma, sekunda, tercie, kvarta, kvinta, sexta, septíma, oktava*. Na vysokej škole sme sa (aspoň okrajovo) zoznámili s diferenciálnymi rovnicami. Na nasledujúcich niekoľkých stranách si skúsime ukázať, že všetky tieto pojmy spolu celkom zaujímavo súvisia.

Aj keď budeme diskutovať o matematické aspekty hudby, nesmieme stratiť pohľad, ktorý vyvoláva sila hudby, ako médiá hudobnej interpretácie nálady a emócií.

*„Pre o rytmy a melódie, ktoré sú zložené zo zvukov sa podobajú pocitom, aj keď hudba nie je prípadom chuti, farieb a vôní? Môže to tak byť lebo pohyb ako dej je tiež pohyb? Energia tohto patrí pocitom a vytváraniu pocitov. Ale chuti a farby nie sú tými istými dejmi.“* Aristoteles.

Veľmi dobrou možnosťou ako motivovať študentov, aby sa nad pozadím hudby zamysleli je **projektové vyučovanie**. Študenti môžu samostatne a tvorivo pracovať, plánovať vlastnú prácu, niesť za svoju prácu zodpovednosť, spolupracovať, komunikovať, prezentovať svoju prácu a hodnotiť ako vlastnú prácu, tak i prácu kolegov.

Cieľom tejto práce je prezentovať súvis medzi hudbou, matematikou a fyzikou a ponúknuť tak atraktívnu formu práce so študentmi s využitím medzipredmetových vzťahov.

## 1 Projektové vyučovanie

Hlavným cieľom projektového vyučovania je **aktívne zapojiť študentov do poznávacieho procesu**. Účelia vytvárajú problémové scenáre a otázky, ktoré vedú študentov k tomu, aby rozmýšľali o tom, čo sa vlastne udia. Realizácia projektu závisí od študentov samotných, najmä od ich tvorivosti, fantázie, kritického myslenia, vnútornej motivácie, záujmov a potrieb.

### Typ projektu:

*krátkodobý* – plánovaný čas je 2-3 mesiace

### Veková skupina:

Tento projekt sa dá realizovať na strednej alebo vysokej škole.

Stredná škola: 2-3 ročník podľa zaradenia učiva mechanické kmitanie a vlnenie, goniometrické funkcie.

Vysoká škola: v rámci predmetov didaktika matematiky, didaktika fyziky.

### Vyučovacie predmety:

Matematika, fyzika, hudobná výchova, biológia.

### Podľa triedite ov:

Skupina študentov (cca 3-4).

### Téma, úloha:

*„Ako možno zachytiť hudbu?“*

Nájsť súvis medzi matematikou a hudbou; funkciami, resp. rovnicami opísať zvuk, melódiu,...

Stredná škola: V rámci matematiky vyučí goniometrické funkcie, vyučí znalosti z fyziky a biológie a opísať, ako vzniká zvuk, ako vníma zvuk ľudské ucho, ako fungujú hudobné nástroje atď.

Vysoká škola: Vyučí poznatkov zo strednej školy a aplikovať ich vo vysokoškolskom učive, najmä diferenciálnych rovnicach. Opísať vznik a vnímanie zvuku, fungovanie hudobných nástrojov. Pomocou vhodného softvéru ilustrovať niektoré tvrdenia.

### Výchovno-vzdelávacie ciele:

- 1) prehĺbovanie a rozširovanie poznania zainteresovaných predmetov, medzipredmetové vzťahy
- 2) rozvoj organizačných schopností a tímovej spolupráce študentov
- 3) vytváranie posterov a prezentácií

\* mika271@seznam.cz

<sup>GE</sup> Maria.Slavickova@fmph.uniba.sk

## 2 o je to zvuk?

Sprostredkovate om prenosu hudby je **zvuk**. Vlastné porozumenie hudbe je zalofené na elementárnych znalostiach podstaty zvuku a jeho vnímania.

Zvuk je pozd fne vlnenie vzduchu. **Vzduch** je **plyn**, t.j. jeho atómy a molekuly vzduchu nie sú tak viazané ako v pevných látkach a kvapalinách. Priemerná rýchlosť molekúl vzduchu pri normálnych podmienkach je približne 450-500 metrov za sekundu, o je výrazne rýchlejšie než expresný vlak pri plnej rýchlosti. Necítíme kolízie s na-ou pokofkou, pretože molekuly vzduchu sú extrémne ahké.

Vzduch sa skladá z ve kého po tu viazaných molekúl, ktoré do seba naráfajú o sa prejavuje ako tlak vzduchu. Ke objekt kmitá, spôsobuje to zvý-ení alebo znížení tlaku vzduchu. Tieto vlny vníma ucho ako zvuk. Zvukové vlny prená-ajú energiu. Energie je tým vä -ia, ím sa v zvukovej vlne zvä -uje a zmen-uje tlak.

Zvuk sa prená-a vzduchom rýchlosť ou približne 340 metrov za sekundu. Neznamená to, že by sa konkrétne molekuly pohybovali v smere vlny touto rýchlosť ou, ale ide skôr o lokálnu zmenu tlaku. Nie o podobné sa odohráva na povrchu mora pri pohybe v n. Je v-ak jeden ve ký rozdiel medzi zvukovým vlnením a vlnami na mori. Jednoducho povedané, v prípade vodných v n ide o to, že pohyb vlny je hore a dole, o je v pravom uhle k smeru -írenia v n. Takéto vlnenie sa nazýva **prie ne vlnenie**. al-ím príkladom prie neho vlnenia je elektromagnetické vlnenie. V prípade zvuku je -írenie pohybu vlny rovnaké ako smer -írenia v n. Toto **vlnenie** sa nazýva **pozd fne**.

Zvukové vlny majú -tyri hlavné vlastnosti, ktoré ovplyv ujú spôsob ich vnímania.

- ❖ **Amplitúda** o ve kos kmitov (vibrácií), je vnímaná ako hlasitos . Amplitúda befného zvuku je iba malá as milimetra.
- ❖ **Frekvencia kmitov/vibrácií** o udáva vý-ku alebo polohu tónu.
- ❖ **Frekven nému spektru zvuku** zodpovedá farba zvuku.
- ❖ **Doba trvania** o d flka doby, po ktorú zaznamenávame zvuky.

Teda stru ne:

Charakteristické vlastnosti zvuku:

Fyzikálne	Percep né
Amplitúda	Hlasitos zvuku
Frekvencia	Vý-ka/poloha tónu/hlasu
Spektrum	Zafarbenie hlasu/tónu
Doba trvania	D flka zvuku

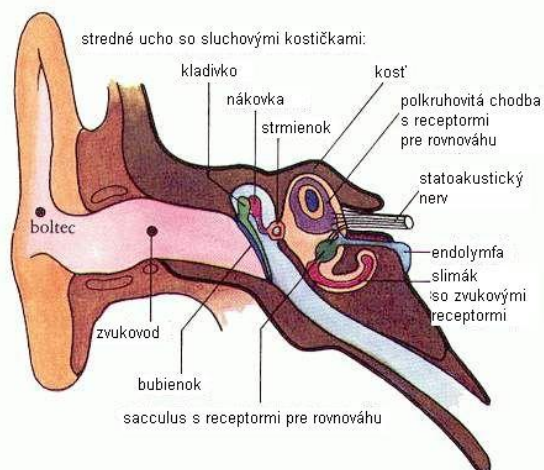
Prenos zvuku sprostredkúva naj astejšie vzduch, ale -íri sa aj vo vode, prípadne v iných kvapalinách a pevných látkach.

## 3 udké ucho

### 3.1 Anatomický opis

Aby sme dokázali porozumie zvuku, potrebujeme pozna vlastnosti a vnímanie udkého ucha.

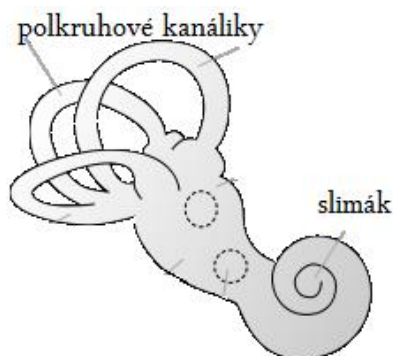
Ucho je rozdelené na tri asti: **vonkaj-ie ucho**, **stredné ucho** alebo *tympanon* a **vnútorne ucho** alebo *labyrinth*. Vonkaj-ie ucho je vidite ná as na vonkaj-ej strane hlavy.



Obr.3.1.1 udké ucho [Zdroj obrázka: [4]]

udské ucho prijíma zvuky v širokom rozsahu. Zvuk prichádza z okolia, u-ným boltcom je nasmerovaný do zvukovodu, dopadne na u-ný bubienok. Bubienok je blana (nie o ako tamburína), ktorá sa dopadom zvukovej vlny rozkmitá. Bubienku sa dotýka sústava kosti íek o kladivko, nákovka a strmienok. Kostí ky prená-ajú chvenie na oválne okienko, ktoré odde uje stredné a vnútorne ucho. Chvenie okienka spôsobuje zmeny tlaku vo vnútornom uchu (slimáku), ktoré je vyplnené kvapalinou. Dno slimáka tvorí bazilárna membrána, na ktorej je ulofený tzv. Cortiho orgán. Na om sa nachádzajú vláskové bunky. Bazilárna membrána reaguje na chvenie vnútornej tekutiny rozkmitaním na danom mieste membrány (v závislosti od frekvencie). Na tom mieste dochádza k vzájomnému pohybu vláskových buniek, o spôsobuje zmenu ich elektrického potenciálu; chvenie vnútornej tekutiny. Zmeny tlaku zachycujú nervy. Nervové impulzy sú potom vysielané do mozgu.

[Spracované podľa [3] a [5].]



Obr. 3.1.2: Vnútorne ucho [Zdroj obrázka: [6]]

### 3.2 Limity ľudského ucha

V hudbe meriame frekvenciu **Hertzoch** (Hz) alebo v cykloch za sekundu. ľudské ucho reaguje na frekvencie v približnom rozsahu od 20Hz do 20 000Hz.

Pre porovnanie v tabuľke [pod a[1]] nájdeme, aký rozsah je prítomný pre niektoré zvieratá:

Druh	Rozsah (Hz)
Korytnačka	20 - 1 000
Ľaba	100 - 3 000
Ľovek	20 - 20 000
Ťmpanz	100 - 20 000
Králik	300 - 45 000
Pes	50 - 46 000
Mačka	30 - 50 000
Myš	1 000 - 100 000
Delfín	1 000 - 130 000

Intenzitu zvuku meriame v *decibeloch* (dB). Nula decibelov reprezentuje silovú intenzitu  $10^{-12}$  Wattov na meter štvorcový, ktorá je niekde na hranici prítomnosti pre ľudské ucho.

### 3.3 Definície hudobných pojmov využitím znalostí z fyziky

#### Základný tón

Definuje [3] ako nosný tón zvuku (hlasu alebo hudobného nástroja). Je to tón, ktorý pri počutí zvuku subjektívne vnímame ako hlavný. Táto základná frekvencia je zároveň najnižšia frekvencia vo zvuku, pričom ostatné prítomné frekvencie sú jej násobkami.

#### Alikvótny tón

sú frekvencie prítomné vo zvuku, ktoré sú násobkami základnej frekvencie. Ak je tento násobok celočíselný, hovoríme o **harmonickom tóne**. Prvý harmonický tón je zhodný so základným tónom, druhý harmonický (alebo prvý alikvótny) má dvojnásobnú frekvenciu, tretí harmonický (druhý alikvótny) má trojnásobnú frekvenciu,... Ak násobok nie je celočíselný, nazývame **tón iastkový**[pod a[3]].

### 3.4 Ľovek a vnímanie hudby

Podľa [2] môžeme povedať, že sluchom rozlíšujeme predovšetkým periodické a neperiodické zvuky. Periodické zvuky sa nazývajú tiež **hudobné zvuky** alebo **tóny**. Medzi ne patria zvuky hudobných nástrojov a samohlásky re i. Najjednoduchší periodický zvuk je zvuk ladičky, ktorý má harmonický priebeh. Taký zvuk sa nazýva **jednoduchý tón**. Periodický zvuk, ktorý má zložitý priebeh, voláme **zložený tón**. Neperiodické zvuky vnímame ako **hluk**.

Zvuk ovplyvňuje vlastnosti zdroja zvuku, prostredie, v ktorom sa zvuk šíri, a subjektívne vlastnosti sluchu.

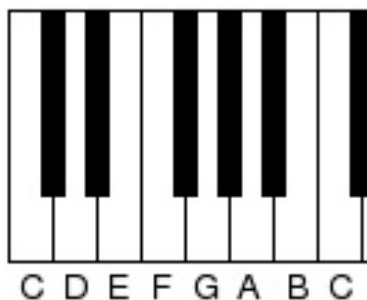
Pri vnímaní viacerých hudobných zvukov vieme rozlíšiť, ktorý zvuk je vyšší a ktorý nižší. Zvuk má tým väčšiu výšku, čím vyššia je frekvencia zvuku zdroja. **Výška zvuku určuje jeho frekvencia**. Pokiaľ máme jednoduchý tón (harmonický priebeh zvuku), určuje frekvencia absolútnu výšku tónu. Ak ide o zložený tón (zvuk nie je harmonický), obsahuje zložky s rôznymi frekvenciami a jeho výšku určuje najnižšia frekvencia.

Absolútnu výšku nevieme určiť priamo sluchom, preto výšku tónov navzájom porovnávame a určujeme **relatívnu výšku tónu**, o ktorú je pomer frekvencie daného tónu k frekvencii základného tónu. Základný tón bol medzinárodnou dohodou stanovený na 440 Hz a v hudbe ho značíme A1.

V hudbe vyjadrujeme relatívne výšky **hudobnými intervalmi**. Základný interval je *oktáva* a tá zodpovedá pomeru frekvencií 2:1 (relatívna výška je 2-násobok základnej frekvencie). Na klaviatúre klávesových nástrojov je medzi prvým tónom (*prímou*) a ôsmym tónom (*oktávou*) 12 kláves a 7 bielych a 5 čiernych.



Obr. 3.4.1 Príklad klávesového nástroja - vľavo klavír, vpravo akordeón (údovú harmoniku) [Zdroj obrázok: [8],[10]]



Obr. 3.4.2 Klaviatúra klávesových nástrojov

Relatívna výška 2 je teda rozdelená na 12 rovnakých intervalov (poltónov) s relatívnou výškou  $\sqrt[12]{2} = 1,06$ .

Relatívne výšky hudobných intervalov sa vyjadrujú aj pomerom celých čísel: ókta 2/1, kvinta 3/2, kvarta 4/3, veľká tercia 5/4, malý poltón 25/24.

## 4 Kmitajúca struna

Uvažujme kmitajúcu strunu, ktorá je uchytená na oboch koncoch. Predpokladajme najprv, že na strune je v strede zavesené závažie s hmotnosťou  $m$ . (obr. 4.1) Struna vyvíja silu  $F$  vzhľadom k rovnovážnej polohe, ktorá je úmerná vzdialenosti  $y$  od rovnovážnej polohy. Ak  $k$  je tuhosť pružiny, potom

$$F = -ky$$

Z Newtonových zákonov pohybu vieme, že:  $F = m \cdot a$ , pričom  $a = \frac{d^2 y}{dt^2}$ .

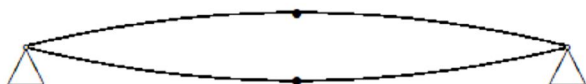
Kombináciou oboch rovníc dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0,$$

ktorej riešením je

$$y = A \cos(t\sqrt{k/m}) + B \sin(t\sqrt{k/m}),$$

kde konštanty  $A$ ,  $B$  sú určené počiatočnou rýchlosťou na okrajoch.



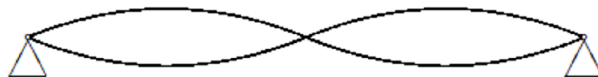
Obr.4.1 [Zdroj obrázka: [1]]

Keďže hmotnosť na strune rovnomerne rozložená, je možných viacero kmitajúcich módov. Napríklad stred struny má ostať stacionárny, pretože obe polovice kmitajú s opačnými fázami. Na gitare toho docielime stlačením stredu struny a brnknutím. Efektom bude zvuk presne o oktávu vyššie než je

prírodná výška struny (presne dvakrát takej frekvencie).

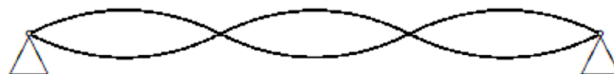
Keď polovica struny kmitá istou sínusoidou, pohyb bodu, ktorý nie je stredom struny, opisuje funkcia

$$y = A \cos(2t\sqrt{k/m}) + B \sin(2t\sqrt{k/m}).$$



Obr.4.2 [Zdroj obrázka: [1]]

Keď je bod presne v tretine dĺžky struny od jedného konca stlačený, je výsledkom zvuk oktávy a presnej päťtiny nad pôvodnou výškou struny resp. presne trojnásobnej frekvencie. Keď tri asti struny kmitajú ako istá sínusoida a stredná tretina má opačnú fázu, potom je pohyb nestacionárneho bodu na strune opísaný funkciou



Obr.4.3 [Zdroj obrázka: [1]]

Vo všeobecnosti platí vzťah:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt\sqrt{k/m}) + B_n \sin(nt\sqrt{k/m})).$$

[Spracované podľa [1].]

## 5 Prečo sínusové vlnenie

Aký je význam sínusových vlnení v diskusii o vnímaní výšky (polohy) tónu? Mohli by sme diskutovať podobným spôsobom, keby sme použili nejakú inú skupinu periodických vlnení, ktoré idú podobne hore a dole?

Odpoveď spočíva v diferenciálnej rovnici pre jednoduchý harmonický pohyb, ktorý budeme rozoberať neskôr. Struna povedaná, riešením diferenciálnej rovnice

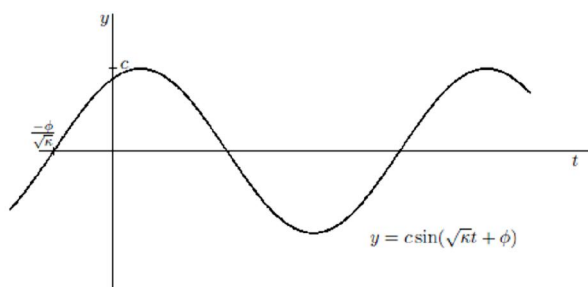
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\kappa y$$

sú funkcie

$$y = A \cos \sqrt{\kappa t} + B \sin \sqrt{\kappa t}$$

alebo ekvivalentne

$$y = c \sin(\sqrt{\kappa t} + \phi)$$



Obr. 5.1 [Zdroj obrázka: [1]]

Uvedená diferenciálna rovnica ukazuje, o sa stane, ke objekt je predmetom sily vo i rovnováhnej polohe a ve kos sily je úmerná vzdialenosti od rovnováhy.

V prípade uškého ucha môfle by diferenciálna rovnica považovaná za aproximáciu pohybovej rovnice konkrétneho bodu na bazilárnej membráne alebo niekde inde na prenosovom re azci medzi vonkaj-ím vzduchom a slimákom.

Teraz si uvedieme nieko ko postrehov o sa týka nepresností:

Môfleme pouffi parciálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu na opis pohybu na povrchu bazilárnej membrány. To nemôfle reálne ovplyvni výsledky analýzy okrem vysvetlenia vzniku kon-tanty .

Môfleme uvařova pohyb ako nútený tmený harmonický pohyb, v ktorom je doba tmenia úmerná rýchlosti, o plynie z viskozity kvapalín a faktu, fle bazilárna membrána nie je perfektne elastická. Nútený tmený harmonický pohyb je tiefl sínusoidný, ale skladá sa z rýchlo sa rozpadajúcich premenlivých astí. Rezonantná frekvencia odpovedá maximálnej odozve tmiaceho systému na prichádzajúcu sínusovú vlnu.

Pre dos hlasitý zvuk môfle by obnovenie sily nelineárne. To je vidno na možnom vzniku niektorých zaujímavých akustických javov.

Vä -ina hudobných nôt sa neskladá z jednoduchých sínusových v n. Napríklad ke hráme na gitaru, je výsledkom periodická vlna, ktorú ale obvykle tvorí suma zo sínusových v n s rozdielnymi amplitúdami. Teda máme rozdielne vrcholy amplitúd vibrácií bazilárnej membrány a komplex signálov je poslaný do mozgu.

## 6 Harmonický pohyb

V asti 4 sme si odvodili vznik diferenciálnej rovnice 2. rádu

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0.$$

Ozna me

$$y' = \frac{dy}{dt}, y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Dostávame

$$y'' + ky / m = 0.$$

Rie-ením tejto rovnice sú funkcie

$$y = A \cos(t\sqrt{k/m}) + B \sin(t\sqrt{k/m})$$

Skuto nos , fle sa jedná o rie-enie tejto diferenciálnej rovnice je vysvetlením, pre o je sínusoida, a nie dajaká iná pravidelne oscilujúca vlna, základom harmonickej analýzy periodických v n. Teda diferenciálnou rovnicou pre pohyb konkrétneho bodu sa na bazilárnej membráne v slimákovi riadi ušké vnímanie zvuku.

## 7 Sínusové vlny a frekvencia spektra

Uhly sa v matematike meria v radiánoch a v jednom cyklu máme  $2\pi$  radiánov. Sínusová vlna s frekvenciou  $\nu$  v Hertzoch, vrcholom amplitúdy  $c$  a fázou  $\phi$  bude kore-pondova so sínusovou vlnou formy

$$c \sin(2\pi\nu t + \phi).$$

Veli ina  $\omega = 2\pi\nu$  sa nazýva **uhlová rýchlos** . Uhol  $\phi$  nám ur uje, kde sínusoida pretne asovú os. Napríklad kosínusoida je príbuzná sínusoida platí totiž vz ah

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

teda kosínusoida je sínusoida s rozdielnou fázou.



440 Hz

Obr.7.1 [Zdroj obrázka: [1]]

V sú asnosti sa v-etky nástroje ladia na tzv. komorné A, ktorému odpovedá frekvencia 440Hz. Vlna, ktorá reprezentuje túto šladiacu kon-tantuň má formu

$$c \sin(880\pi t + \phi).$$

Toto môfleme previes na lineárnu kombináciu sínusov a kosínusov pouffitím -tandardných vzorcov pre sínus a kosínus sú tu:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

Teda máme

$$c \sin(\omega t + \phi) = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

kde  $a = c \sin \phi$  a  $b = c \cos \phi$ .

Obrátene, pokia poznáme  $a, b, c$ ; vieme  $\phi$  získa pres

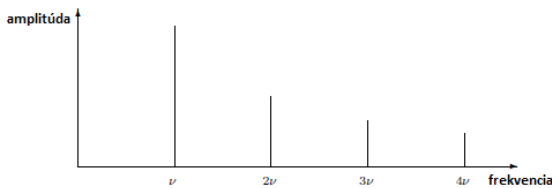
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{tg } \phi = \frac{a}{b}.$$

Teraz si vysvetlíme pojem **spektrum**, ktorý hrá dôleffitú úlohu v porozumení hudobným notám.



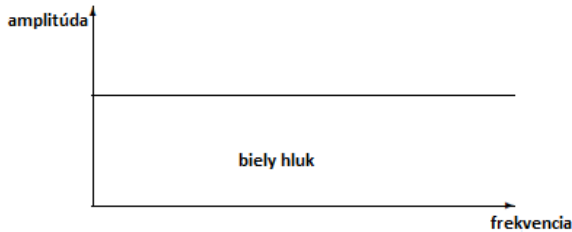
Spektrum zvuku je graf ukazujúci amplitúdy premenlivých rozdielnych frekvencií zvuku. Teraz to ponecháme ako intuitívnu predstavu ilustrovanú obrázkom spektra kmitajúcej struny s frekvenciou základného tónu

$$v = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi}$$



Obr.7.2 [Pod a [1]]

Tento graf ilustruje zvuk s nespojitým frekvencným spektrom s frekvenciou zloženou z celo íselných násobkov frekvencie základného tónu a s amplitúdou zníženou vo vyšších frekvenciách. Niektoré zvuky, ako napríklad *biely -um*, majú spojité frekvencné spektrum ako v diagramu nižšie. Tieto pojmy nadobudnú hlbší zmysel vo Fourierovej teórii a teórii rozdelenia.



Obr.7.3 [Pod a [1]]

## 8 Trigonometrické identity a rytmus

o sa stane, keď sa zahrajú dve vlny sínusoida a kosínusoida v rovnakom tlese?

Odpove na túto otázku leží v trigonometrických identitách

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

Pretože  $\sin(-B) = -\sin B$

$$\cos(-B) = \cos B,$$

nahradíme  $B$  za  $-B$  a dostaneme

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

Keď sítujeme rovnice

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

o môžeme prepísať ako

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} (\sin(A + B) + \sin(A - B))$$

Podobné úpravy urobíme pre rovnice

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

a dostaneme

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$$

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B,$$

Alebo

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} (\cos(A + B) + \cos(A - B))$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} (\cos(A - B) - \cos(A + B)).$$

To nám umožní napísať súčin sínusov a kosínusov ako súčet alebo rozdiel sínusov a kosínusov.

Teraz nás bude zaujímať opačný proces: nech  $u = A + B, v = A - B$ . Riešením pre  $A$  a  $B$  dostávame

$$A = \frac{1}{2}(u + v)$$

$$B = \frac{1}{2}(u - v).$$

Substitúciou v rovniciach

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

získame

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{1}{2}(u + v) \cos \frac{1}{2}(u - v)$$

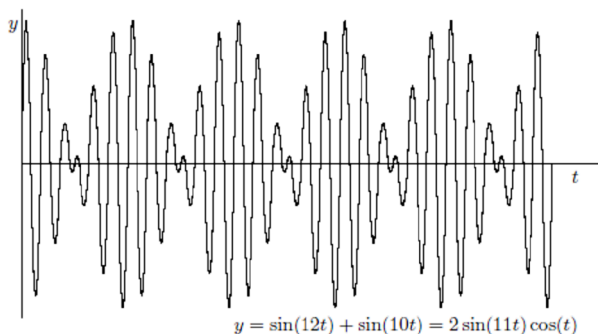
$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{1}{2}(u + v) \cos \frac{1}{2}(u - v)$$

$$\cos v - \cos u = 2 \sin \frac{1}{2}(u + v) \sin \frac{1}{2}(u - v).$$

To nám umožní písať súčty a rozdiely sínusoid a kosínusoid ako súčiny sínusov a kosínusov.

**Príklad (prebraný z [1]):**

Pri ladení pianu sa porovnávajú dve z troch strún toho istého tónu a po ňom uderov za sekundu. Keď jedna alebo dve noty majú výšku  $A$  (440 Hz), o sa stane s frekvenciou kmitania struny?



Obr.8.1 [Zdroj obrázka: [1]]

Riešenie:

Predpokladajme, že ladiť piana ladiť jednu z troch strún odpovedajúci tónu A1 na 440Hz. Druhá struna je stále mimo ladenia a rezonuje na 436Hz. Tretia struna je t mená, aby nezasahovala do ladenia druhej struny. V tomto momente budeme ignorovať fázu a amplitúdu, dve struny dohromady majú zvuk  $\sin(880\pi t) + \sin(872\pi t)$ .

Použitím rovnice

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{1}{2}(u + v) \cos \frac{1}{2}(u - v)$$

môžeme prepísať tento súčet ako  $2 \sin(876\pi t) \cos(4\pi t)$ .

To znamená, že dostaneme sínusoidu s frekvenciou 438Hz (priemer frekvencií oboch strún), ale s amplitúdou prispôbenou „pomalej“ kosínusoide s frekvenciou 2Hz (polovica rozdielu medzi frekvenciami dvoch strún). Kosínusoida má dva extrémny v rámci periódy, teda počet úderov za sekundu je štyri, nie dva. Po štyroch úderov za sekundu je presne rozdiel medzi dvoma frekvenciami. Ladiť piana ladiť druhú strunu a ľi kým neeliminuje počet úderov.

## 9 Ako fungujú niektoré hudobné nástroje

Existuje veľa hudobných nástrojov.

Bežne rozlíšujeme tieto typy nástrojov:

- Strunové
- Sláikové
- Kovové
- Dychové
- Klávesové
- At .

### Zobcová flauta

Zvuk rezonuje medzi otvorom pri zobci a ústím flauty. Prvotným impulzom je stlačenie vzduchu, ktoré zabezpečí fúknutie do zobca nástroja. Vlnová dĺžka základného tónu určuje dĺžka tubusu hudobného nástroja, v ktorého vnútri sa nachádza stpec vzduchu. Vďaka konštantnej rýchlosti zvuku meníme otváraním dierok jeho vlnovú dĺžku

a frekvenciu. V tubuse vznikajú stojaté vlnenia, ktoré v závislosti od rezonančných vlastností nástroja, delia jeho dĺžku na polovicu, tretinu, ... V jeho zvukovom prejave sa objavujú zvukové frekvencie, ktorých hlasitosť charakterizuje zvuk (farbu) hudobného nástroja a vďaka ktorému ho vieme odlíšiť od iných.

### Gitara

Patrí medzi strunové nástroje. Gitara patrí medzi inštrumenty, ktorých povrch sa chveje, a tak rozkmitáva vzduch vo svojom okolí. Brnknutím do struny sa táto rozozvučí svojou typickou frekvenciou. Keď sa ide o kmitanie, vznikajú na strune tiež stojaté vlnenia, ktoré dodávajú zvuku gitary harmonické tóny. Ale nielen chvejúca sa struna vytvára akustický vnem gitarového zvuku. Vlnenie zosilnené rezonanciami v ozvučnici sa prenáša na celú konštrukciu nástroja a prispieva k celkovému dojmu zo zvuku.

### inela

tvorí celé spektrum alikvótnych tónov od základnej frekvencie v závislosti od priemeru inely a použitého materiálu.

### Akordeón

je hudobný nástroj, pri ktorom sú zdrojom zvuku kovové jazýčky, ktoré sú rozochvievané prúdom vzduchu. Ten je získavaný pohybom mechu. Pre ovládanie nástroja slúžia dve skupiny kláves.

### Klavír

je strunový úderový hudobný nástroj, ktorého zvuk vzniká chvením strún rozkmitaných úderom drevených kladiviek.

Veľký klavír nazývame *krídlo* a má pod a tvaru rezonančnej skrine, struny sú v ňom umiestnené vodorovne.

Menší, bežný klavír voláme *pianino* a jeho rezonančná skriňa, a teda aj struny, je umiestnená zvisle.

Klavírna mechanika sa skladá z rady pák, ktoré prepojujú klávesu s kladivkom a dusítkom strún. Pri stisku klávesy sa zo struny zdvihne dusítko, plstená krátka lišta, ktorá bráni strune znieť. Ako náhle sa struna uvoľní, dopadne na u plstene kladivko a rozoznie ju. Po dopade odskočí, aby strunu netlmilo a mohlo udeť znova. Keď hrá, pustí klávesu, dopadne dusítko späť na strunu a tá stíchne.

[Spracované podľa [3] a [9].]

## 10 Projekt na Sú

Otázky, na ktoré sa v rámci zadaného projektu na STM budeme snažiť odpovedať:

- o čo je zvuk?
- Ktorý je pre nás príjemný, resp. nepríjemný? o to ovplyvňuje uje?
- Ako je vnímanie zvuku subjektívne? i existuje objektívne meranie zvuku, jeho kvality, ...

- Ako funguje ľudské ucho?
- Pre o niektoré zvuky bolia? Ktoré sú to...?
- Kmitanie a vlnenie > sínusoida > vlastnosti tejto funkcie > posuny,  $a \cdot \sin(bx+c)$  o možno priradi jednotlivým parametrom
- Ako delíme hudobné nástroje a aký je princíp ich fungovania?
- Ako funguje gitara, resp. iný zvolený nástroj, priama demonštrácia pri prezentovaní projektu

Študenti by mali svoje zistenia prezentovať vo forme posterov ako aj na hodine pred spolužiakmi, resp. vytvoriť celoškolskú prednášku, kde by tieto zaujímavosti mohli prezentovať aj ostatným študentom – koly a ďalším záujemcov o problematiku.

## 11 Projekt na Vü

Projekt na Vü od projektu na S<sup>TM</sup> bude líti len tým, keď študenti by mali dotiahnuť stredoškolské riešenie vyúžitím vyšej matematiky (diferenciálne rovnice).

Ako sme spomínali v úvode, projekt je vhodný pre budúcu úroveň matematiky, no to nevyhnutne zapojenie záujemcov aj z iných odborov, ktorých prezentovaná problematika zaujíma.

Ďalším vyúžitím je aj motivácia pre preberanie diferenciálnych rovníc na matematickej analýze. Pri zavedení ďalších pojmov, ako Superpozícia, Tlmený harmonický pohyb, Rezonancia, a pod. vznikajú ďalšie zaujímavé rovnice a úlohy, ktoré môžu študenti na hodine riešiť. Predpokladáme, keď širší kontext úlohy by mohol byť motivačný a viesť študentov k prehĺbeniu záujmu o používanie diferenciálnych rovníc a hľadanie súvislostí aj v iných, napr. humanitných predmetoch.

## Záver

V článku sme prezentovali súvis medzi hudbou, matematikou a fyzikou. Spísali sme stručne základnú teóriu o ľudskom vnímaní a šírení zvuku, ktorá môže byť pomôckou pre učiteľa, ktorý by sa so svojimi žiakmi, resp. študentmi chcel do projektu pustiť. Ale sme navrhli sadu otázok, ktoré by projekt mohol riešiť. Je na každom učiteľovi, aby si projekt prispôbil nielen podľa svojej stránky (môže ísť o projekt dlhodobý), ale aj podľa obsahu (môže sa venovať ďalším aspektom, napr. kultúrnym, sociálnym, ...).

## Poďakovanie

V tejto súvislosti by som chcela poďakovať mojej kolektive PaedDr. Márii Slavíckovej, PhD. za pomoc, odborné vedenie, pripomienky a čas, ktorý mi venovala pri písaní tejto práce.

## Literatúra

- [1] BENSON D., 2008. *Music: A Mathematical Offering*. <http://www.maths.abdn.ac.uk/bensonj/html/maths-music.html>
- [2] LEPIL O., HOUDEK V., PECHO A., 1986. *Fyzika pre 3. ročník gymnázia*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava.
- [3] ADAM P., 2006. *Diplomová práca o Úvod do metód spracovania zvuku v súasnom multimediálnom prostredí*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského Bratislava.
- [4] ľudské telo [online, marec 2013] <http://ludske-telo.webnode.sk/obrazky/>
- [5] Zvuk [online, marec 2013] [http://www.zsondrejov.cz/Vyuka/F-9H/Zvuk\\_07.pdf](http://www.zsondrejov.cz/Vyuka/F-9H/Zvuk_07.pdf)
- [6] ľudské ucho [online, marec 2013] [http://www.oskole.sk/userfiles/image/2011/avgust/Pr%C3%ADrodoveda%20Z%C5%A0%207%20-%20SLuch\\_html\\_55e74acd.png](http://www.oskole.sk/userfiles/image/2011/avgust/Pr%C3%ADrodoveda%20Z%C5%A0%207%20-%20SLuch_html_55e74acd.png)
- [7] Zvuk [online, marec 2013] [http://zvuk.atrip.sk/index.php?site=2\\_2](http://zvuk.atrip.sk/index.php?site=2_2)
- [8] Akordeón [online, marec 2013] <http://img1.hyperinzerce.cz/x-cz/inz/2730/2730416-akordeon-harmonika-royal-standard-montana-120-1.jpg>
- [9] Wikipedia [online, apríl 2013] <http://www.wikipedia.cz>; <http://www.wikipedia.sk>
- [10] Klavír [online, marec 2013] [http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSOSakbNqnEv3aChnto\\_DCsqSgaNrzpldXU9sdlRteTLxv6tIivGg](http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSOSakbNqnEv3aChnto_DCsqSgaNrzpldXU9sdlRteTLxv6tIivGg)