UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

# PODOBNOSŤ A ROVNOĽAHLOSŤ V APLIKAČNÝCH A ZAUJÍMAVÝCH ÚLOHÁCH Z GEOMETRIE NA ZŠ A SŠ

**Práca ŠVOČ**

Študijný program: učiteľstvo matematiky a výtvarného umenia (Učiteľské štúdium, magisterský II. st., denná forma)

Školiace pracovisko: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta prírodných vied, Katedra matematiky

Školiteľ: PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.

Nitra 2013 Bc. Mária Borčinová

## Poďakovanie

Na tomto mieste by som chcela poďakovať PaedDr. Gabriele Pavlovičovej, PhD., za cenné rady, podnetné pripomienky a trpezlivosť pri tvorbe diplomovej práce.

Moje poďakovanie patrí aj Mgr. Alžbete Bakytovej, Mgr. Kataríne Páleníkovej, Pavlovi Borčinovi a mojej rodine.

# Abstrakt

Práca sa zaoberá tematikou podobnosti a rovnoľahlosti vo vyučovaní matematiky na základných a stredných školách. V úvodnej časti spracováva základné teoretické poznatky k danej problematike, následne sa zameriava na zastúpenie podobnosti a rovnoľahlosti v učive matematiky stanovenom v obsahu vzdelávania podľa ISCED 2 ISCED3 ako aj v učebniciach matematiky. Hlavú časť práce tvoria autorkine vlastné aplikačné a zaujímavé úlohy, v riešení ktorých sa využíva podobnosť a rovnoľahlosť. Jednotlivé námety sú spracované do gradovaných úloh, ktoré sú určené žiakom ZŠ a SŠ, no ich využiteľnosť je i v rámci vysokoškolskej prípravy budúcich učiteľov matematiky. Pri ich tvorbe sa autorka snažila o interdisciplinárny charakter vytvorených úloh a využila námety a poznatky aj z iných školských predmetov - hlavne výtvarného umenia, architektúry a geografie, ktoré majú taktiež motivačný charakter. Záverečná časť práce obsahuje spracovanie prípravy, priebehu a vyhodnotenia riešenia úloh žiakmi 7. ročníka základnej školy ako aj spätnú reflexiu od žiakov, s ktorými autorka pracovala.



Kľúčové slová: Podobnosť na ZŠ. Podobné zobrazenia. Rovnoľahlosť. Aplikačné úlohy.



# Abstract

The work is focused on the topic of similarity and homothety in the mathematical education at primary and secondary schools. Author starts with introduction about main theoretical knowledge connected with this topic and continues with curriculum of similarity and homothety which is stated in the National educational programs ISCED2 and ISCED3 and in mathematics school-books. The core of the work consists of author´s own application and interesting tasks which have graduate character and can be solved by pupils at the primary and secondary school but also in pregraduate teachers training at the university. When developing these tasks, author focused on the interdisciplinary character of them and found motives and information in other school subjects - especially in Art, Architecture and Geography. The last part includes background, realization and evaluation of pupil´s solutions of the tasks at the seventh grade of primary school and feedback from them.



Key words: Similarity. Similar transform. Enlargement. Application Tasks.

## Obsah

# Úvod

Pre mnohých ľudí je krása matematiky úplne skrytá. Už u mnohých absolventov stredných a základných škôl sa stretávame s názorom, že matematika predstavuje iba nudné počítanie umelo vytvorených príkladov a súhrn teoretických poznatkov bez ich praktického využitia v budúcom zamestnaní a živote. Otázne však je, čo je zdrojom uvedeného zmýšľania žiakov našich škôl. Formovanie žiakov, spôsob prezentácie problematiky učiteľom, alebo obsah daného učiva?

Vieme, že matematika je abstraktná veda. Umožňuje rozvoj ostaných prírodných vied a nachádza využitie v širokom spektre oblastí každodenného života. Poukázať na krásu matematiky a možnosti jej využitia i budovanie povedomia u žiakov je predovšetkým náplňou práce učiteľa.

V predkladanej práci chceme upriamiť pozornosť na príležitosť znovuobjavenia matematických aplikácií okolo nás prostredníctvom umenia a architektúry. Ukázať, že každý učiteľ má možnosť vytvoriť vlastné úlohy, ktoré žiakov inšpirujú, motivujú a poukážu na spojitosť matematiky a iných školských predmetov.

V našej práci sme sa rozhodli spracovať oblasť matematiky – podobné zobrazenia. Stanovili sme za cieľ teoreticky spracovať problematiku podobnosti a podobných zobrazení a ich využitia v konštrukčných a dôkazových úlohách; analyzovať učivo o podobnosti podľa ISCED2 a ISCED3A, vytvoriť sadu gradovaných aplikačných a zaujímavých úloh s dôrazom na hľadanie motivačných prvkov predovšetkým v umení a architektúre, vytvoriť pracovný list o podobnosti a analyzovať jeho riešenie žiakmi na ZŠ.

V prvej kapitole sú spracované dostupné teoretické poznatky z nasledovných oblastí podobnosti: podobné zobrazenia v rovine (podobnosť útvarov, podobnosť trojuholníkov a rovnoľahlosť), podobné zobrazenia v priestore (rovnoľahlosť v priestore).

Druhá kapitola upozorňuje na využiteľnosť podobných zobrazení – podobnosti aj v ďalších oblastiach a témach matematiky.

V tretej kapitole je analyzované učivo o podobnosti a podobných zobrazeniach z pohľadu štátneho vzdelávacieho programu. Zaujímalo nás, v akej forme a časovom období sa s podobnosťou žiaci stretnú. Štvrtá kapitola je venovaná úlohám o podobnosti, ktoré sa nachádzajú v učebniciach používaných na školách.

Obsahovou náplňou piatej kapitoly je niekoľko vytvorených zaujímavých úloh s námetmi čerpanými hlavne z architektúry, výtvarného umenia a geografie. Hlavným cieľom riešenia vytvorených úloh je podporiť tvorivosť, fantáziu a schopnosť učiteľov zaujať a motivovať žiakov, ktoré sú v dnešnej dobe veľmi žiadané. V práci chceme poukázať na možnosť nového, nekonvenčného vnímania matematiky a spôsobu prezentácie predkladaného učiva. Aby sme túto teóriu overili v praxi, niekoľko vybraných úloh sme predložili formou pracovného listu žiakom siedmeho ročníka.

Títo žiaci okrem riešenia daných úloh hodnotili aj ich náročnosť. Výsledky hodnotenia úspešnosti žiakov pri riešení vybraných úloh sa nachádza v šiestej kapitole.

Pracovný list a príklady žiackych riešení sú uvedené ako prílohy v našej práci.

# 1 Podobné zobrazenia

## Pojem geometrického zobrazenia v rovine a jeho základné druhy

Geometrickým zobrazením v rovine α rozumieme také zobrazenie množiny bodov roviny α na množinu bodov roviny α, keď každému bodu M ∈ $\alpha$ je priradený práve jeden bod $M' \in \alpha$. Bod M sa potom nazýva vzor, bod $M'$ jeho obraz v danom zobrazení. Skutočnosť, že k bodu $M$ ako vzoru je v množinovom zobrazení priradený bod $M'$ ako obraz, zapisujeme $M \longrightarrow M'$. Body $M$, pre obrazy ktorých platí $M' = M$, sa nazývajú samodružné body zobrazenia. Množinu obrazov všetkých bodov útvaru $U$ nazývame obrazom útvaru $U$ a označujeme ho $U'$. Ak $U' = U$, hovoríme, že útvar $U$ je samodružný útvar zobrazenia.

Ak každý obraz $M'$ je priradený k práve jednému bodu $M$ roviny $\alpha$, ide o prosté zobrazenie v rovine $\alpha$.

Zobrazenie v rovine $\alpha$ je identita, ak každý bod $X \in \alpha$ je samodružný. Ak zobrazenie $Z$ zobrazí bod $X$ do bodu $X'$, potom zobrazenie $Z^{-1}$ nazveme inverzným k zobrazeniu $Z$, ak zobrazí $X'$do $X$. Dve zobrazenia $Z_1, Z'_2$, sú navzájom rôzne, ak aspoň jeden bod má v obidvoch zobrazeniach rôzne obrazy.

Dva rôzne body $A, B$ roviny tvoria involutornú (vratnú) dvojicu zobrazenia $Z$ v rovine $\alpha$, ak bod $B$ je obrazom bodu $A$ a bod $A$ obrazom bodu $B$. Ak v zobrazení $Z$ sú všetky dvojice involutorné, potom zobrazenie $Z$ je involutorné zobrazenie. (Šedivý, 2001)

## 1.1 Podobné zobrazenia v rovine

V tejto kapitole sa teoreticky oboznámime s pojmom – podobné zobrazenie, vyslovíme jeho definíciu, vysvetlíme si pojmy s ním spojené, a uvedieme niektoré jeho vlastnosti.

Podobné zobrazenie je zvláštnym prípadom zobrazenia.

**Definícia.** *Zobrazenie roviny nazývame podobným zobrazením alebo podobnosťou s koeficientom $k \in R^+$, ak každej úsečke XY priraďujeme úsečku $X'Y'$, o ktorej platí*

$$X'Y' = k.\ XY\ .$$

Podobné zobrazenie zachováva pomer dĺžok úsečiek. Tento fakt je vyjadrený vzťahom

$$\frac{X'Y'}{XY} = k.$$

Bodom $X, Y$ hovoríme vzory, body $X', Y'$ sú ich obrazy.

Číslo $k$ sa nazýva koeficient podobnosti a rozlišujeme:

- Ak $k \neq 1$ , potom hovoríme o vlastnom podobnom zobrazení.
- Ak $\mathrm{k} = 1$ , potom hovoríme o nevlastnom podobnom zobrazení. Ide o zvláštne, tvz. zhodné zobrazenie.

*Poznámka:* Zobrazenie v rovine sa nazýva zhodným zobrazením alebo zhodnosťou, ak priraďuje každej úsečke $XY$ úsečku $X'Y'$ s ňou zhodnú $XY \cong X'Y', \quad XY = X'Y'$ .

V rovine poznáme tieto druhy zhodných zobrazení: identita, osová súmernosť, stredová súmernosť, posunutie, otáčanie.

Pre lepšiu predstavu uvádzame tabuľku od Brinckovej (2006, str.20), ktorá upresňuje vzťah medzi koeficientom k a zobrazeniami v geometrii.

| **Koeficient k a zobrazenia v geometrii** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Rovnoľahlosť | k ∈ (−∞,∞) | | | |
| Podobnosť | Zmenšenie k ∈ (0, 1) | | Zväčšenie k ∈ (1, ∞) | |
| Zhodnosť k = 1 | Stredová súmernosť | Osová súmernosť | Posunutie | Otočenie |

Tab. 1: Koeficient k a zobrazenia v geometrii

Každé podobné zobrazenie má tieto vlastnosti:

a) Obrazom priamky $AB$ je priamka $A'B'$; obrazy rovnobežných priamok sú rovnobežné priamky.

b) Obrazom polpriamky $AB$ je polpriamka $A'B'$; obrazy opačných polpriamok sú opačné polpriamky.

c) Obrazom polroviny $pA$ je polrovina $p'A'$; obrazy opačných polrovín sú opačné polroviny.

d) Obrazom uhla $\angle AVB$ je uhol $\angle A'V'B'$ zhodný s uhlom $\angle AVB$.

Podobné zobrazenie zachováva incidenciu, deliaci pomer, rovnobežnosť, podľa definície aj pomer úsečiek, resp. ich dĺžok. Z toho vyplýva, že podobné zobrazenie zachováva veľkosť uhla, t.j. obrazom uhla je uhol rovnakej veľkosti. (Šedivý, 2001)

### 1.1.1 Podobnosť útvarov

**Definícia.** *Dva geometrické útvary $U, U'$ sa nazývajú podobné útvary, ak existuje podobné zobrazenie, ktoré zobrazí útvar $U$ na útvar $U'$. Podobnosť útvarov $U, U'$ zapisujeme $U \sim U'$.*

t.j. Dva geometrické útvary sú podobné, ak majú rovnaký pomer vzdialenosti ľubovoľných dvoch sebe odpovedajúcich si bodov.

$$\frac{X'Y'}{XY} = \frac{Y'Z'}{YZ} = \frac{Z'U'}{ZU} = \frac{U'V'}{UV} = \ldots = k.$$

Koeficient podobnosti $k$ môže nadobúdať hodnoty:

a) $k > 1$, potom hovoríme, že ide o zväčšenie (obraz je „väčší“ ako vzor)

b) $k = 1$, potom hovoríme, že ide o zhodnosť (teda obraz a vzor sú rovnako „veľké“ ). Platí teda, že zhodnosť je len špeciálnym prípadom podobnosti.

c) $k < 1$, potom hovoríme, že ide o zmenšenie (teda obraz je menší ako vzor)

**Veta.** *Ak sú dva útvary podobné, potom sebe odpovedajúce uhly sú zhodné.*

*Poznámka:* Vzťah podobnosti je vzájomný, lebo ak sú strany druhého útvaru $k$ - násobkom strán prvého útvaru, sú strany prvého $\frac{1}{k}$- násobkom strán druhého útvaru.

Hodnota koeficientu podobnosti $k$ závisí od toho, ktorý útvar považujeme za vzor, a ktorý za obraz. V každom prípade platí:

Podobnosť útvarov je tranzitívna, t.j. Ak je útvar $U$ podobný útvaru $U'$ a útvar $U'$ zase podobný útvaru $U''$, potom sú podobné aj útvary $U$ a $U''$. Zapisujeme $\mathrm{U} \sim \mathrm{U}'$ súčasne $\mathrm{U}' \sim \mathrm{U}'' \Rightarrow \mathrm{U} \sim \mathrm{U}''$. Ak koeficient podobnosti $\mathrm{U} \sim \mathrm{U}'$ je $k$, koeficient podobnosti $\mathrm{U}' \sim \mathrm{U}''$ je $m$, potom koeficient podobnosti $\mathrm{U} \sim \mathrm{U}''$ je súčinom koeficientov podobnosti, t.j. $k.m$.

Ak sú dva útvary $\mathrm{U}, \mathrm{U}'$ podobné s koeficientom podobnosti k, potom pre ich obsahy $\mathrm{S}, S'$ platí

$$\frac{S'}{S} = k^2$$

Podobné útvary sú vždy dve kružnice, dva štvorce, každé dva rovnostranné trojuholníky, každé dva pravidelné šesťuholníky.

Dva kosodĺžniky sú podobné, ak odpovedajúce strany sú v rovnakom pomere a vnútorné uhly kosodĺžnika sú zhodné.

Dva lichobežníky sú podobné, keď sebe odpovedajúce si strany sú v rovnakom pomere. (Rumanová – Vallo, 2009)

### 1.1.2 Podobnosť trojuholníkov

Definovali sme podobné zobrazenie s koeficientom podobnosti $k$. Definícia aplikovaná na trojuholníky $ABC$, $A'B'C'$ tvrdí:

*Trojuholníky $ABC$, $A'B'C'$ sú podobné, ak platí*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

Ako sme už vyššie uviedli, číslo $k$ môže nadobúdať hodnoty $k < 1, k = 1, k > 1$.

Podobnosť trojuholníkov $ABC$, $A'B'C'$ zapisujeme $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, pričom sa kladie dôraz na poradie, v akom zapisujeme vrcholy trojuholníkov. Zápis totiž rešpektuje zhodnosť odpovedajúcich si uhlov pri jednotlivých vrcholoch.

Platia tieto vety o podobnosti dvoch trojuholníkov:

**Veta (**symbolicky označujeme ako **veta uu).** *Každé dva trojuholníky sú podobné, ak sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch.*

*Poznámka:* Nie je nutné požadovať, aby sa zhodovali aj v treťom uhle. Veľkosť tretieho uhla je daná súčtom veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka (v každom trojuholníku je súčet veľkostí vnútorných uhlov 180°. Ak teda poznáme dva uhly, tretí vypočítame).

**Veta** (symbolicky označujeme ako **veta sus**). *Každé dva trojuholníky sú podobné, ak majú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si strán a v uhle nimi zovretom sa zhodujú.*

**Veta** (symbolicky označujeme ako **veta Ssu**). *Každé dva trojuholníky sú podobné, ak majú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si strán a v uhle oproti dlhšej z nich sa zhodujú.*

**Veta** (symbolicky označujeme ako **veta sss**). *Každé dva trojuholníky sú podobné, ak sú odpovedajúce si strany úmerné .*

Uvedené vety o podobnosti trojuholníkov využijeme pri odvodení dôležitých geometrických viet – Euklidových viet a Pytagorovej vety. (Rumanová – Vallo, 2009)

### 1.1.3 Rovnoľahlosť (homotetia) v rovine

Špeciálnym a veľmi významným prípadom podobného zobrazenia v rovine je rovnoľahlosť (homotetia) so stredom $S$ a koeficientom $\kappa$ (čítaj kapa) $\kappa \in R, \kappa \neq 0, \kappa \neq 1$ definovaná takto:

a) *Obrazom bodu $S \in \alpha$ je bod $S' = S$*
b) *Obrazom bodu $X \in \alpha, X \neq S$, je bod $X'$ taký, že*

$$SX' = \kappa \, . \, SX$$

*ak* $\kappa > 0$, *potom bod* $X'$ *leží na polpriamke* $SX$,

*ak* $\kappa < 0$, *potom bod* $X'$ *leží na opačnej polpriamke k polpriamke* $SX$.

Bod $S$ nazývame stred rovnoľahlosti, reálne číslo κ koeficientom rovnoľahlosti.

Zobrazenie bodu $X$ do bodu $X'$ v rovnoľahlosti so stredom $S$ a koeficientom rovnoľahlosti κ zapisujeme:

$$\mathrm{H}_{S,\kappa} : X \to X'$$

(čítame: v rovnoľahlosti $H$ so stredom $S$ a koeficientom κ sa $X$ zobrazí do $X'$)

Označenie rovnoľahlosti ako hototetia má základ v anglickom slove homothety, odkiaľ máme aj označenie rovnoľahlosti písmenom $H$.

Ak sa v rovnoľahlosti $\mathrm{H}_{S,\kappa} : X \to X'$ , potom existuje inverzné (vratné) zobrazenie, ktoré zobrazí bod $X'$ naspäť do bodu $X$ . Inverzné zobrazenie je tiež rovnoľahlosť, zapisujeme ju $H^{-1}$ , má stred: tiež v bode $S$ a koeficient rovnoľahlosti $\frac{1}{\kappa}$, t.j.

$$H^{-1}\ \ S, \frac{1}{\kappa}\ \ : X' \to X.$$

*Poznámka:* Ak je koeficient rovnoľahlosti $\kappa = -1$, hovoríme o stredovej súmernosti. Je to kvôli zhodným útvarom, ktoré v tomto zobrazení vznikajú. (stredová súmernosť je špeciálny prípad rovnoľahlosti). Pri koeficiente $\kappa = 1$, hovoríme zas o identite.

Rovnoľahlosť v rovine má tieto vlastnosti:

- Rovnoľahlosť $\mathrm{H}_{S,\kappa}$ je jednoznačne určená:
  a) Stredom rovnoľahlosti S a koeficientom κ,
  b) Stredom rovnoľahlosti S a dvojicou odpovedajúcich si bodov $\mathrm{X}, \mathrm{X}'$.
- Rovnoľahlosť $\mathrm{H}_{S,\kappa}$ má jediný samodružný bod a to bod S.
- Rovnoľahlosť $\mathrm{H}_{S,\kappa}$ má samodružné priamky II. druhu, ktoré prechádzajú stredom rovnoľahlosti.
- Obrazom priamky v rovnoľahlosti je priamka rovnobežná.
- Obrazom úsečky AB je v rovnoľahlosti $\mathrm{H}_{S,\kappa}$ rovnobežná úsečka $\mathrm{A'B'}$. Pre dĺžky úsečiek platí $\mathrm{A'B'} = \kappa\ .\ \mathrm{AB}$ .

**Veta.** *V rovnoľahlosti* $H_{S,\kappa} : X \to X'$

*1. každé dva rovnoľahlé body (vzor a jeho obraz) ležia na priamke prechádzajúcej stredom rovnoľahlosti*

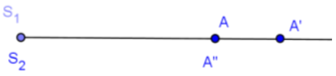
*2. každé dve rovnoľahlé priamky sú rovnobežné*

*3. každé dve rovnobežné a nezhodné úsečky sú rovnoľahlé dvomi spôsobmi.* (Rumanová – Vallo, 2009)

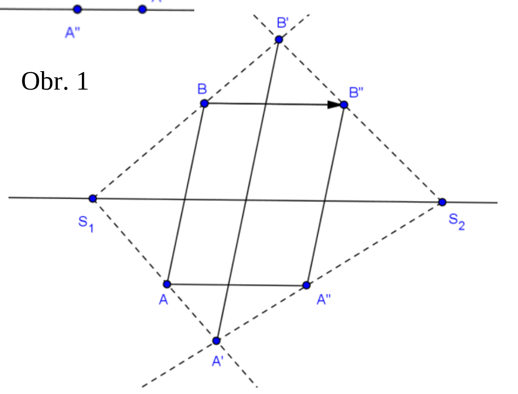
## Mongeho veta o skladaní rovnoľahlostí

**Veta**: *Nech sú dané dve rovnoľahlosti* $H_1\,{}_{S_1,\kappa_1}$ *a* $H_2\,{}_{S_2,\kappa_2}$ *. Zložením* $H_1 \circ H_2$ *môže vzniknúť*

1. *identita, ak* $S_1 = S_2$ *a* $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 1$.
2. *posunutie, ak* $S_1 \neq S_2$ *a* $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 1$
3. *rovnoľahlosť, ak* $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \neq 1$



Obr. 1



Obr. 2

Dôkaz:

1) Ak sa bod A v rovnoľahlosti $\mathrm{H}_1\,{}_{S_1,\kappa_1}$ zobrazí do bodu $\mathrm{A}'$, potom platí $S_1A' = \kappa_1 \cdot S_1A$ . V rovnoľahlosti $\mathrm{H}_2\,{}_{S_2,\kappa_2}$ sa bod $\mathrm{A}'$ zobrazí naspäť do bodu A, pretože $S_1 = S_2$ a $S_2A = \kappa_2 \cdot S_2A' = S_1A' = \kappa_2 \cdot \kappa_1 \cdot S_2A = 1 \cdot S_2A$

Zobrazenie je identita.

2) Pre obraz $A'B'$ úsečky $AB$ v rovnoľahlosti $\mathrm{H}_1\,{}_{S_1,\kappa_1}$ platí

$$A'B' = \kappa_1 \cdot AB .$$

Pre obraz $A''B''$ úsečky $A'B'$ v rovnoľahlosti $\mathrm{H}_2\,{}_{S_2,\kappa_2}$ platí

$$A''B'' = \kappa_2 \cdot A'B' .$$

Z toho vyplýva

$$A''B'' = \kappa_1 . \kappa_2 \cdot AB = 1 \cdot AB = AB .$$

Keďže $S_1 \neq S_2$, ide o zhodnosť, v ktorej obrazom úsečky je úsečka rovnobežná. Zobrazenie je posunutím s vektorom rovnobežným s $S_1S_2$.

3) Pre obraz $A'B'$ úsečky $AB$ v rovnoľahlosti $\mathrm{H}_1\,{}_{S_1,\kappa_1}$ platí

$$A'B' = \kappa_1 \cdot AB .$$

Pre obraz $A''B''$ úsečky $A'B'$ v rovnoľahlosti $\mathrm{H}_2\,{}_{S_2,\kappa_2}$ platí

$$A''B'' = \kappa_2 \cdot A'B' .$$

Z toho vyplýva $A''B'' = \kappa_1 . \kappa_2 \cdot AB \neq AB$ .

Obrazom úsečky $AB$ je rovnobežná úsečka $A''B''$. Zobrazenie je rovnoľahlosť $\mathrm{H}\,{}_{S,\kappa_1.\kappa_2}$ . stred S rovnoľahlosti H leží na priamke $S_1S_2$. (Šedivý – Vallo, 2011)

# 2 Podobnosť a rovnoľahlosť v učive ZŠ a SŠ

Pri tvorbe tejto kapitoly sme vychádzali zo Štátneho vzdelávacieho programu (ŠVP) vydávaného pre jednotlivé stupne vzdelania Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky. Budeme skúmať dva základné dokumenty a to:

- ŠVP pre 2. stupeň základných škôl (ISCED 2)
- ŠVP pre gymnáziá (ISCED 3A)

## 2.1 Podobnosť v učive matematiky na ZŠ podľa ISCED 2

Podľa Štátneho vzdelávacieho programu pre 2.stupeň základnej školy v Slovenskej republike - ISCED2 - nižšie sekundárne vzdelanie (str.14), je vzdelávací obsah predmetu – Matematika, rozdelený do piatich tematických okruhov: Čísla, premenná a počtové výkony s číslami; Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy; Geometria a meranie; Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika; Logika, dôvodenie, dôkazy.

ŠVP nám definuje hlavne obsahový štandard – odporúčané témy a pojmy viažuce sa na daný tematický celok. Oboznámme sa s tými témami, ktoré súvisia s podobnosťou a podobným zobrazením, alebo ich propedeutikou. Nie je presne určené, v ktorom ročníku sa má daná téma prebrať. Je len určená istá nadväznosť učiva. Preto nebudeme k jednotlivým témam priraďovať ročník, v ktorom by malo byť učivo vysvetlené žiakom, ale len uvedieme jednotlivé tematické celky preberané na ZŠ, ktoré túto tému obsahujú.

V tematickom celku „IV. Geometria a meranie“, je obsiahnutá téma :*Zväčšovanie a zmenšovanie geometrických tvarov vo štvorcovej sieti (propedeutika práce s pomerom)*. (ŠVP, Matematika – Príloha Isced 2, str.4)

Aj v témach ako *Pomer, rozdeľovanie celku v danom pomere; Mierka plánu a mapy. Riešenie úloh*; *Priama a nepriama úmernosť; Jednoduchá trojčlenka (aj zložená); Využitie priamej úmernosti v praxi (kontextové a podnetové úlohy*, ktoré tú obsahom tematického celku „IV. Pomer. Priama a nepriama úmernosť“, môžeme nájsť spojitosť s podobnosťou. (ŠVP, Matematika – Príloha Isced 2, 2010) Na prepojenosť týchto tém, poukazuje aj článok Brinckovej (2006) „Meníme postoje študentov k výkonom v matematike na 2. stupni ZŠ“, ktorý upozorňuje na vzťahy medzi jednotlivými zložkami matematiky (aritmetika – geometria – algebra), na prepojenie geometrického rámca s numerickým kontextom. Upozorňuje na fakt, že mnohé témy v školskej praxi na seba nadväzujú, hoci my si často bez upozornenia na ich súvis, daný fakt neuvedomíme. Brincková postupne prechádza od porovnávania čísel k zlomku, k pomeru a k úmere. Prostredníctvom skúmania pomerov zavádza číslo k – koeficient, prostredníctvom ktorého definuje zhodnosť, podobnosť a rovnoľahlosť.

Za ZŠ sa žiaci konkrétne s podobnosťou stretajú až v tematickom celku „VII. Podobnosť trojuholníkov“, ktorá obsahuje témy ako: *Podobnosť geometrických útvarov, pomer podobnosti. Úsečka rozdelená v danom pomere. Podobnosť trojuholníkov. Riešenie primeraných matematických (numerických) a konštrukčných úloh. Použitie podobnosti pri meraní výšok a vzdialeností, topografické práce v reálnych situáciách.* (ŠVP, Matematika – Príloha Isced 2, 2010))

Štátny vzdelávací program nám okrem obsahového štandardu – odporúčané témy a pojmy viažuce sa na daný tematický celok, odporúča aj výkonový štandard. Uvedomme si, že uvedený obsahový a výkonový štandard je minimálny predpísaný štandard a v rámci školského vzdelávacieho programu sa môžu niektoré učivá rozšíriť – doplniť.

| Tematický celok | Odporúčaný obsahový štandard | | Odporúčaný výkonový štandard |
|---|---|---|---|
| | Odporúčané témy | Odporúčané pojmy | |
| ***Geometria a meranie*** | Zväčšovanie a zmenšovanie geometrických tvarov vo štvorcovej sieti (propedeutika práce s pomerom). | Porovnanie pomerom,... | Vedieť rysovať trojuholník, štvoruholník, štvorec, obdĺžnik vo štvorcovej sieti.<br>Zväčšovať a zmenšovať útvary vo štvorcovej sieti podľa návodu alebo pomocou inej siete. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Pomer. Priama a nepriama úmernosť* | Pomer, rozdeľovanie celku v danom pomere.<br>Mierka plánu a mapy.<br>Riešenie úloh | Pomer, prevrátený pomer, postupný pomer, plán, mapa, mierka plánu a mapy,... | Vedieť vysvetliť pojmy pomer, prevrátený pomer, postupný pomer.<br>Vedieť zapísať a upraviť daný pomer.<br>Deliť dané číslo (množstvo) v danom pomere.<br>Zväčšiť (zmenšiť) dané číslo v danom pomere.<br>Chápať postupný pomer ako skrátený zápis jednoduchých pomerov.<br>Vedieť zapísať a upraviť postupný pomer.<br>Riešiť primerané jednoduché slovné úlohy na pomer rôzneho typu a praktické úlohy s použitím mierky plánu a mapy. |
| | Priama a nepriama úmernosť.<br>Jednoduchá trojčlenka (aj zložená).<br>Využitie priamej úmernosti v praxi (kontextové a podnetové úlohy). | Priama a nepriama úmernosť, trojčlenka, rovnica priamej a nepriamej úmernosti, tabuľka úmernosti,... | Riešiť úlohy s využitím vzťahu v priamej a nepriamej úmernosti.<br>Riešiť úlohy z praxe na priamu a nepriamu úmernosť.<br>Riešiť úlohy jednoduchou (aj zloženou) trojčlenkou. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***Podobnosť trojuholníkov*** | Podobnosť geometrických útvarov, pomer podobnosti | Geometrické útvary, rovinné, zhodnosť geometrických útvarov, podobnosť geometrických útvarov v rovine, podstata podobnosti, pomer podobnosti *k* dvoch geometrických útvarov, pomer, postupný pomer, rozdeliť úsečku podľa daného pomeru *k*,... | Vedieť vysvetliť podstatu podobnosti dvoch geometrických útvarov.<br>Rozhodnúť o podobnosti dvojice daných útvarov v rovine (štvorce, obdĺžniky, trojuholníky, atď.).<br>Vypočítať pomer podobnosti *k* pre dva rovinné útvary.<br>Vedieť použiť pomer podobnosti *k* dvoch podobných rovinných útvarov pri výpočtovej a primeranej konštrukčnej úlohe. |
| | Podobnosť trojuholníkov. Riešenie primeraných matematických (numerických) a konštrukčných úloh. | Trojuholník, podobnosť trojuholníkov, vety o podobnosti trojuholníkov (*sss, sus, uu*),... | Poznať základné vety o podobnosti trojuholníkov (*sss, sus, uu*).<br>Na základe viet o podobnosti trojuholníkov riešiť primerané matematické (numerické) a konštrukčné úlohy.<br>Vedieť použiť pomer podobnosti k dvoch podobných útvarov pri výpočtovej úlohe. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Použitie podobnosti pri meraní výšok a vzdialeností, topografické práce v reálnych situáciách. | Podobnosť útvarov v praxi, vety o podobnosti geometrických útvarov - trojuholníkov, pomer podobnosti, ... | Vedieť využívať vlastností podobností trojuholníkov pri riešení praktických úloh zo života pri meraní (odhadovaní) vzdialeností a výšok.<br>Riešiť jednoduché praktické topografické úlohy s využitím vlastností podobnosti trojuholníkov.<br>Vedieť určiť skutočnú vzdialenosť – mierka mapy a skutočné rozmery predmetov – mierka plánu. |

Tab. 2: Výkonový štandard (ŠVP, Matematika – Príloha Isced 2, str. 14 – 41)

Na základe týchto tematických celkov by mal žiak získať aj tieto kompetencie zahrnuté v ŠVP Matematika - príloha ISCED 2 (2010):

- „rieši modelovaním a výpočtom situácie vyjadrené pomerom, pracuje s mierkou máp a plánov,
- objavuje a rieši úlohy z praxe na priamu a nepriamu úmernosť,
- rozozná, pomenuje a opíše jednotlivé základné priestorové geometrické tvary, nachádza v realite ich reprezentáciu; dokáže špecifikovať ich jednotlivé prvky (telesová uhlopriečka, vzťah hrán),
- pozná, vie popísať, pomenovať, načrtnúť, narysovať a zostrojiť základné rovinné útvary, pozná ich základné prvky a ich vlastnosti a najdôležitejšie relácie medzi týmito prvkami a ich vlastnosťami,
- používa k argumentácii a pri výpočtoch vety o zhodnosti a podobnosti trojuholníkov,
- analyzuje a rieši aplikačné geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu."

Dosiahnuté postoje:

→ „je si vedomý toho, že pomer a mierka sú veľmi blízke dennému životu nie je ľahostajný k svojmu okoliu

→ získava istotu a kladný vzťah k využívaniu priamej a nepriamej úmernosti pri riešení bežných úloh zo života

→ dokáže sa sústrediť na objavovanie geometrických tvarov vo svojom okolí

→ snaží sa do primeraných praktických problémov vniesť geometriu

→ je naklonený v jednote používať odhad, meranie a výpočet

→ snaha o presnosť pri meraniach, konštrukcii a výpočtoch je pre neho samozrejmá

→ ochotne používa náčrty, rôzne spôsoby znázornenia geometrických telies a predmetov, vyvíja snahu o rozvoj vlastnej priestorovej predstavivosti

→ často sa opiera o svoje vedomosti a zručnosti z oblasti zhodnosti a podobnosti geometrických útvarov

→ trvá na používaní správnej geometrickej terminológie v praxi." (ŠVP, Matematika – Príloha ISCED 2, 2010, str. 44)

## 2.2 Podobnosť a rovnoľahlosť v učive matematiky na SŠ podľa ISCED 3

Obsahom vzdelávania matematiky na gymnáziách sú nasledovné témy spojené s podobnosťou:

- Čísla, premenná a počtové výkony s číslami: *Praktická matematika –mierky máp a plánov, a i.*
- Geometria a meranie - *Základné rovinné geometrické útvary.* - *Geometrické miesta bodov, konštrukcie.*- *Meranie, odhady.*- *Goniometria ostrého uhla.*- *Zhodnosť a podobnosť.*

Pravdaže ako to bolo aj na ZŠ, môžu školy daný obsah dopĺňať. V priebehu celého štúdia je potrebné zaraďovať: problémové úlohy; historické poznámky; rôzne malé projekty podporujúce medzipredmetové vzťahy, napr. Matematika a umenie, Euklides, Matematika a vesmír, Matematika a ťažisko, Matematika a biliard,; informácie dokumentujúce súčasné a historické použitie matematiky. (ŠVP, Matematika – Príloha ISCED 3, 2009)

Pozrime sa bližšie na obsahový štandard tematického celku „Zhodnosť a podobnosť".
V Školskom vzdelávacom programe Gymnázia Lipany obsahuje tento celok nasledovné témy: (ŠkVP - Matematika 1. - 3. ročník 4-ročného štúdia, str.26)

„Zhodnosť trojuholníkov - vety o zhodnosti trojuholníkov. Podobnosť trojuholníkov – vety o podobnosti trojuholníkov. Pomer obvodov a pomer obsahov podobných trojuholníkov. Pytagorova veta. Euklidove vety. Zhodné zobrazenia v rovine. Osová súmernosť. Stredová súmernosť. Otáčanie. Posunutie. Podobné zobrazenia v rovine. Rovnoľahlosť (každé dve nerovnaké rovnobežné úsečky, dve kružnice s rôznym polomerom, vonkajšie (vnútorné) dotyčnice dvoch kružníc). Geometria a architektúra.“

Nakoniec si uveďme, niektoré body z výkonového štandardu, ktoré má žiak vedieť.

Žiak vie:

- „použiť trojčlenku, priamu a nepriamu úmernosť na riešenie jednoduchých praktických úloh,
- základné rovinné útvary v jednoduchých prípadoch skonštruovať,
- použiť vhodnú metódu, nástroje a vzorce pri určovaní dĺžok (na papieri, v miestnosti, v prírode), obsahov, objemov a veľkostí uhlov,
- použiť geometriu pravouhlého trojuholníka na výpočet veľkosti uhlov a dĺžok strán,
- riešiť aplikované úlohy pomocou trigonometrie,
- určiť, či sú dané trojuholníky podobné,
- využívať vzťahy medzi podobnými trojuholníkmi na riešenie geometrických úloh,
- odvodiť Pytagorovu a Euklidove vety, počítať dĺžky i vzdialenosti pomocou týchto viet,
- zistiť približné rozmery nedostupných útvarov použitím podobnosti.“ (ŠVP, Matematika – Príloha ISCED 3, 2009, str. 10)

## 2.3 Podobnosť v učebniciach matematiky

Naše školstvo prechádza poslednými rokmi rôznymi zmenami, ktoré zasahujú aj do vyučovania matematiky. Práve Štátny vzdelávací program, ktorý nedefinuje, v ktorých ročníkoch sa žiaci majú učiť témy v ňom obsiahnuté, nás priviedol ku skúmaniu učebníc.

V tejto kapitole, preskúmame aktuálne učebnice schválené Ministerstvom školstva Slovenskej republiky, z ktorých by sa na našich školách malo vyučovať. Sú to učebnice od autorov J. Žabku a P. Černeka (5. – 8. ročník ZŠ), Kolbaskej (9. ročník ZŠ – 1.časť) a Zbynka Kubáčka (1. -2. ročník gymnázií). Pri skúmaní nám pomôžu aj staršie učebnice od O. Šedivého a kol. pre ZŠ, a Tomáša Hechta pre gymnázia a SOŠ.

Podľa nových učebníc od autorov J. Žabku a P. Černeka, sa žiaci základných škôl v rámci propedeutiky stretávajú s podobnosťou už v piatom ročníku, kedy sa učia zväčšovať alebo zmenšovať útvary. Učivo je obsiahnuté v 14. kapitole: „Zväčšovanie a zmenšovanie geometrických útvarov v štvorčekovej sieti“, ktorá obsahuje dve podkapitoly „Prenášame jednoduché útvary“ a „Hra na kopírky“. Autori približujú žiakom podobnosť hravou formou prekresľovania útvarov cez štvorčekový papier, pričom sa mení alebo nemení veľkosť štvorčekov. Žiaci prekresľujú rôzne tvary, od najjednoduchších geometrických tvarov po zložitejšie obrázky loďky, rakety, či vázy s kvetinami. „Hra na kopírky“ je hra určená pre dvojice žiakov, z ktorých jeden diktuje a druhý kreslí obrázok nakreslený v štvorčekovej sieti, pričom každý má inú veľkosť siete. Touto hrou sa končí daná kapitola.

Ďalšie témy z ktorých podobnosť vychádza, nájdeme ich v „Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2.ročník gymnázií s osemročným štúdiom - 2.časť“, tiež od autorov J. Žabku a P. Černeka. Učebnica obsahuje kapitolu: „Pomer, mierka mapy a plánu“ s podkapitolami: „Ako rozdeliť odmenu?“, „Rozdeľujeme v danom pomere.“, „Rôzne alebo rovnaké pomery? Úmera.“, „Postupný pomer.“, „Mierka“, „Znázorňujeme obdĺžnikový záhon“, „Dvakrát väčší záhon“, „Čo je mierka?“ a kapitolu „Priama a nepriama úmernosť“ , ktorá sa okrem iných častí obsahuje témy „Trojčlenka“ a „Trojčlenka a nepriama úmernosť“. Dané témy sú ďalšou propedeutikou podobnosti. Ako sme už spomínali, pomer, úmera a podobnosť spolu úzko súvisia, hoci sa na tento súvis často neupozorňuje.

Priamo s podobnosťou sa žiaci stretávajú až ku koncu svojho štúdia na ZŠ – v druhom polroku deviateho ročníka. Keďže druhá časť učebnice pre deviaty ročník od Kolbaskej ešte nie je k dispozícií, pozrieme sa na obsiahnutie tohto učiva v staršej učebnici od O. Šedivého a kol., ktorý toto učivo, ešte podľa starých učebných plánov, zaraďuje do prvého polroku deviateho ročníka, pričom pridáva aj rozširujúce učivo – Podobné zobrazenia. Učivo je spracované v tretej kapitole: „Podobnosť trojuholníkov“ s podkapitolami „Podobnosť geometrických útvarov“, „Podobnosť trojuholníkov“, „Použitie podobnosti pri riešení geometrických úloh“, „Použitie podobnosti v praxi“, „Podobné zobrazenia (rozširujúce učivo)“, „Rovnoľahlosť“, „Pantograf“ a „Kružnica v rovnoľahlosti“.

Podobnosť geometrických útvarov je vysvetľovaná aj pomocou štvorčekovej siete, s ktorou sa žiaci podľa nových plánov stretávajú v 5. ročníku, a zavádza sa pojem koeficientu podobnosti. V rámci podobnosti trojuholníkov sa žiaci mohli oboznámiť s vetami sss, sus a uu. V ďalších podkapitolách je rozpracované učivo zväčšovania a zmenšovania úsečky v danom pomere; mierky mapy, plánu ako koeficientu podobnosti, či rôzne príklady na využitie v praxi. V rozširujúcom učive sa žiaci mohli stretnúť aj s podobnými zobrazeniami, ktoré zahrňovali definíciu podobného zobrazenia resp. podobnosti, rovnoľahlosť, zobrazenie kružnice v rovnoľahlosti, konštrukcia dotyčníc, či sa mohli oboznámiť s pojmom Eulerovej priamky. Ako zaujímavosť je v učebnici uvádzaný prístroj na zväčšovanie a zmenšovanie rovinných útvarov, ktorý funguje na princípe rovnoľahlosti. S rozširujúcim učivom „podobné zobrazenia“ sa žiaci v súčasnosti na základnej škole nestretnú.

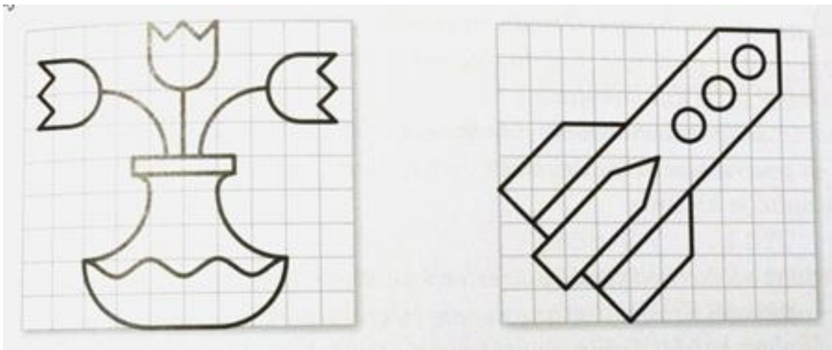
Na strednej škole sa začínajú používať schválené učebnice od Zbynka Kubáčka. Jeho kniha „Matematika pre 1. ročník gymnázia a 5. ročník gymnázia s osemročným štúdiom – 2. časť“ obsahuje 8. kapitolu: „Uhly, dĺžky, obsahy“, ktorej súčasťou sú aj state „Podobnosť trojuholníkov“ a „Tangens, sínus, kosínus“. Učivo je zrozumiteľne vysvetlené, pričom hneď od začiatku autor poukazuje na aplikáciu učiva v praxi. Autor zavádza pojem podobnosti a koeficientu podobnosti na vzorovom obrázku. Na praktických úlohách merania pozemku a výpočte šírky rieky, či výšky stromu, zdôrazňuje, že podobnosť zachováva uhly aj pomery strán. Podobnosť využíva aj pri dokazovaní Euklidových viet a Pytagorovej vety. Nakoniec autor používa podobnosť trojuholníkov na zavedenie pojmov tangens, sínus a kosínus uhla $\alpha$.

Podobne ako na základnej škole, aj na strednej ešte chýbajú učebnice. Preto uvádzame učivo o rovnoľahlosti nachádzajúce sa v „Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ, zošit 2: Geometrické zobrazenia“ od Tomáša Hechta. Celá piata kapitola je venovaná rovnoľahlosti. Rovnoľahlosť je vysvetlená a definovaná prostredníctvom úvah na niektorých príkladoch. Bližšie sa potom ešte autor zaoberá mnohouholníkmi a kružnicou v rovnoľahlosti, pričom rieši niekoľko príkladov a ponúka ďalšie cvičenia na upevnenie učiva. Väčšina gymnázií zaraďuje toto učivo do tretieho ročníka.

# 3 Úlohy o podobnosti v školskej geometrii

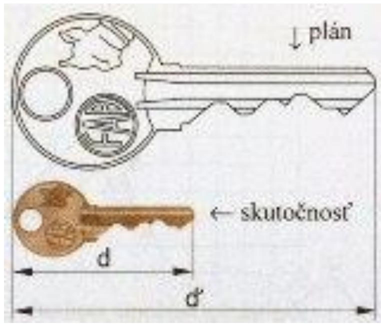
V tejto kapitole je uvedených niekoľko úloh, s ktorými sa žiaci stretávajú vo svojom štúdiu. Úlohy sú čerpané z kníh, ktoré sa používajú na našich školách a z internetovej stránky pre učiteľov.

**Úloha č. 1**: Skúste prekresliť obrázky najskôr do takej istej siete, potom do dvakrát väčšej aj dvakrát menšej. (Žabka, Černek, 2010a)



Obr. 3 Úloha č. 1

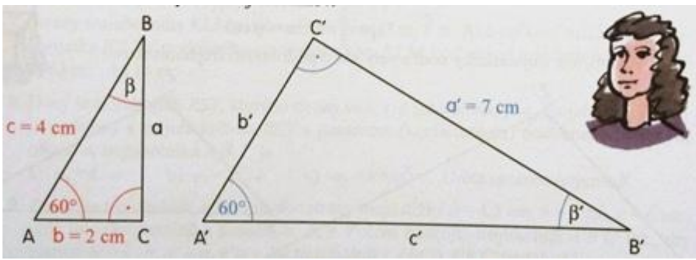
**Úloha č. 2**: Na obrázku je zobrazený kľúč väčší ako je v skutočnosti, aby bolo možné presne vybrúsiť jednotlivé zuby. Odmerajte kľúč na pláne a kľúč v skutočnosti a určte pomer podobnosti. (Šedivý a kol., 2003b)




Obr. 4 Úloha č. 2

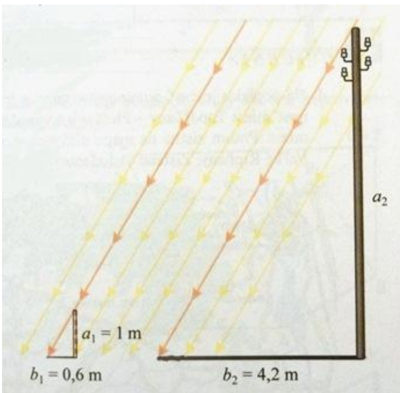
**Úloha č. 3:** Daná je úsečka AB, ktorej dĺžka je 9 cm. Zmeňte jej dĺžku v pomere $k = 4:3$. (Šedivý a kol., 2003b)

Úloha č. 4: Rozhodnite, či sú trojuholníky $ABC$ a $A'B'C'$ podobné. Určte dĺžky všetkých strán a veľkosti všetkých uhlov týchto trojuholníkov. (Šedivý a kol., 2003b)




Obr. 5 Úloha č. 4

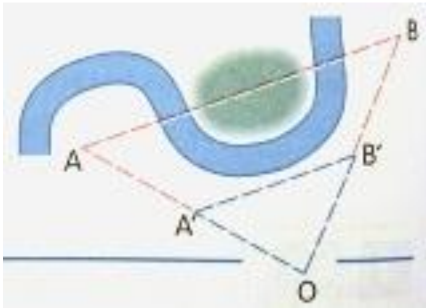
**Úloha č. 5:** Zvislá tyč vysoká 1 m vrhá na vodorovnú cestu tieň dlhý 60cm. Aký vysoký je telefónny stĺp, ktorého tieň na tejto ceste má v tú istú dobu dĺžku 4,2 m. (Šedivý a kol., 2003b)




Obr. 6 Úloha č. 5

**Úloha č. 6:** Miesta A, B na obrázku označujú umiestnenie stožiarov vysokého napätia. Ohyb rieky a močariská v ohybe nedovoľujú priamo odmerať ich vzdialenosť. Odôvodnite správnosť nasledujúceho postupu:

Zvolíme miesto O, ktorého vzdialenosti od miest A, B možno dobre odmerať. Ďalej určíme stred $A'$úsečky OA a stred $B'$ úsečky OB, potom vzdialenosť bodov $A'B'$ (ktorú vieme odmerať) sa rovná polovici hľadanej vzdialenosti miest A, B. (Šedivý a kol., 2003b)




Obr. 7 Úloha č. 6

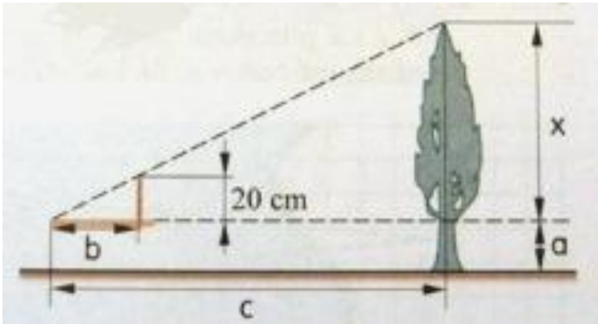
**Úloha č. 7:** Opäť treba vypočítať výšku stromu. Na to má poslúžiť pomôcka a údaje znázornené na obrázku. Vypočítajte výšku stromu x, ak sú dané tieto číselné údaje:

a) $a = 1{,}8\text{m}, b = 24\text{cm}, c = 20\text{m};$

b) $a = 1{,}8\text{m}, b = 14\text{cm}, c = 25m;$

c) $a = 1{,}8\text{m}, b = 18\text{cm}, c = 15\text{m};$

(Šedivý a kol., 2003b)




Obr. 8 Úloha č. 7

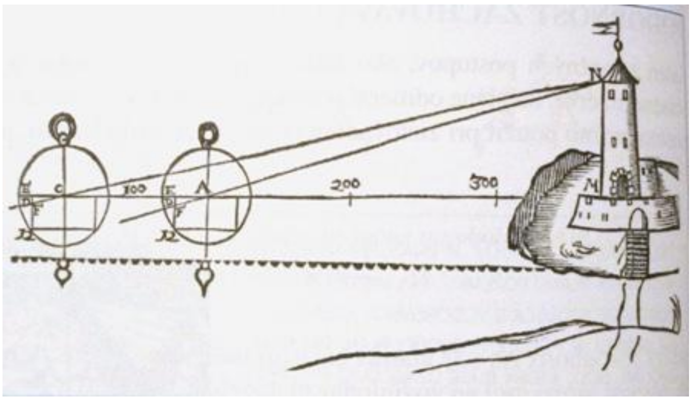
**Úloha č. 8:** Model automobilu Tatra, ktorý sa zúčastnil na pretekoch kamiónov Paríž – Dakar má tieto rozmery - dĺžka: 179 mm, šírka: 58 mm, výška:70 mm.

Určte rozmery skutočného automobilu, keď viete, že model bol vyrobený v podobnosti 1:43. (Šedivý a kol., 2003b)

**Úloha č. 9:** Aké rozmery má mať model postele, ak jej skutočné rozmery sú 110 cm a 200 cm? (Žabka – Černek, 2010)

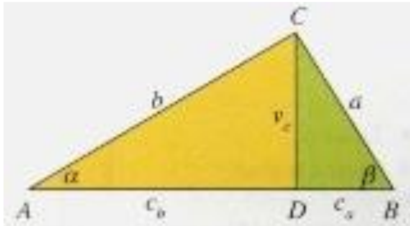
**Úloha č. 10:** Narysujte v mierke 1:700 obdĺžnikový pôdorys školy s rozmermi 80 m a 20 m. (Žabka – Černek, 2011)

**Úloha č. 11:** Podľa obrázka opíšte, ktoré údaje potrebujeme odmerať, aby sme zistili výšku veže (merať môžeme uhly a vzdialenosti). Potom zvoľte vhodné konkrétne hodnoty, ktoré budú predstavovať namerané údaje a zistite výšku veže. (Kubáček, 2010)




Obr. 9 Úloha č. 11

**Úloha č. 12:** Ukážte, že žltý a zelený trojuholník sú podobné pôvodnému trojuholníku $ABC$ (a teda žltý aj zelený trojuholník sú navzájom podobné). (Kubáček, 2010)




Obr. 10 Úloha č. 12

**Úloha č. 13:** Ukážte, že z podobnosti

a) zeleného trojuholníka $BCD$ a pôvodného trojuholníka $ABC$ vyplýva rovnosť

$$a^2 = c.c_a$$

b) žltého trojuholníka $CAD$ a pôvodného trojuholníka $ABC$ vyplýva rovnosť

$$b^2 = c.c_b$$

a) žltého a zeleného trojuholníka vyplýva rovnosť

$${v_c}^2 = c_a.c_b$$ (Kubáček, 2010)

**Úloha č. 14:** Ukážte, že z Euklidových viet o odvesne vyplýva Pytagorova veta. (Kubáček, 2010)

**Úloha č. 15:** Nech ABC je trojuholník. Zostrojte obraz trojuholníka ABC v zobrazení:

a) $H_{A,2}$ b) $H_{B,\frac{1}{4}}$ c) $H_{C,2,5}$ (Hecht – Černek, 2002)

**Úloha č. 16:** Daná je kružnica k(S,r), jej bod B a mimo nej bod A. zostrojte obraz kružnice k v zobrazení:

a) $H_{S,3}$ b) $H_{B,0,8}$ c) $H_{C,3,25}$ (Hecht – Černek, 2002)

**Úloha č. 17:** Dané sú body $A$ 0,0 , $B$ 3,4 , $C$ $-5,2$ , $D$ 4,0 . Zistite súradnice bodov $H_{A,2}$ $B$ , $H_{A,-\frac{1}{4}}$ $C$ , $H_{A,1,6}$ $D$ , $H_{A,-3,5}$ $C$ , $H_{A,2}$ $H_{A,2}$ $B$ , . (Hecht – Černek, 2002)

**Úloha č. 18:** Zostrojte si dve kružnice, pre ktoré je vzdialenosť stredov väčšia ako súčet polomerov. Zostrojte ich vnútorné dotyčnice. (Hecht – Černek, 2002)

**Úloha č. 19:** Dané sú 2 rôzne kružnice k, l a priamka p, ktorá pretína kružnicu k v bodoch X, Y. zobrazte priamku p v rovnoľahlosti, ktorá zobrazí kružnicu k na kružnicu l. (Hecht – Černek, 2002)

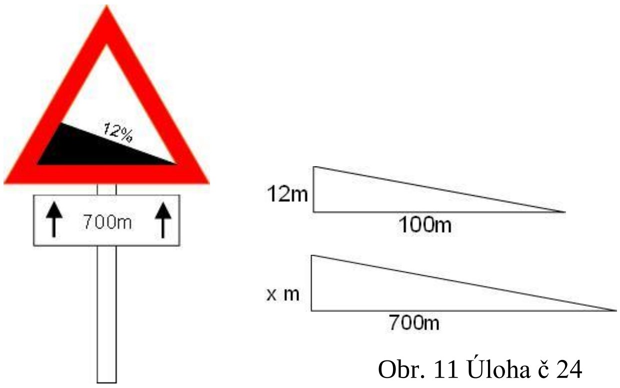
**Úloha č. 20:** Daná je kružnica k, mimo nej priamka p a na priamke p bod T. Zostrojte kružnicu l, ktorá sa dotýka priamky p v bode T a kružnice k. (Hecht – Černek, 2002)

**Úloha č. 21:** Daný je ostrý uhol XVY a v ňom bod Z. vpíšte do uhla XVY kružnicu k prechádzajúcu bodom Z. (Hecht – Černek, 2002)

**Úloha č. 22:** Dané sú rôznobežky p, r a mimo nich bod J. zostrojte na priamkach p, r zaradom body K, L tak, aby bod K bol stred úsečky JL. (Hecht – Černek, 2002)

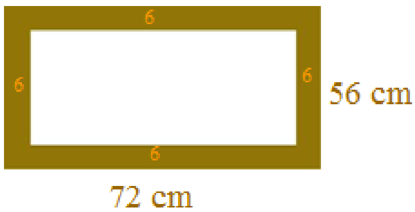
**Úloha č. 23:** Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané: $t_a = 6cm, a = 5cm, \sphericalangle ADC = 60°$, D je stred strany AB. (Hecht – Černek, 2002)

**Úloha č. 24:** Výstražná značka udáva nebezpečné klesanie. $12\%$ udáva, že na každých $100\ m$ dĺžky vo vodorovnom smere cesty klesá o $12\ m$. Aký je výškový rozdiel medzi miestom, ktoré je označené touto značkou, a miestom, kde po $700\ m$ nebezpečné klesanie končí?



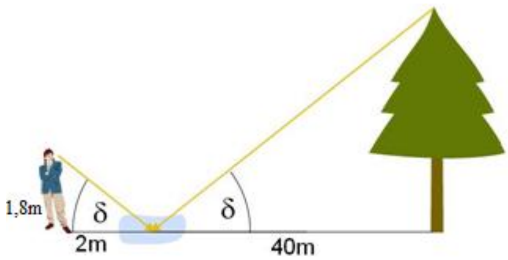
Obr. 11 Úloha č 24

**Úloha č. 25:** Rám obrazu je zhotovený z lišty širokej $6\ m$. Rozmery obrazu sú $72\ cm$ a $56\ cm$. Sú vnútorné a vonkajšie hranice rámu dva podobné obdĺžniky?



Obr. 12 Úloha č 25

**Úloha č. 26:** Vrch stromu sa zrkadlí v kaluži, ktorá je vzdialená $40\ m$. Ty stojíš od tejto kaluže $2\ m$. Aký vysoký je strom? (Načrtni si obrázok)



Obr. 13 Úloha č 26

# 4 Aplikačné a zaujímavé úlohy

V rámci tejto kapitoly sa zameriame na tvorbu niekoľkých vlastných úloh a niektorých riešení spojených s podobnosťou. Úlohy pozostávajú z motivačnej časti a niekoľkých rôzne náročných čiastkových úloh (podúloh), ktoré na ňu nadväzujú. Niektoré uvádzame riešené, iné neriešené. Úlohy majú svoj názov, ktorý ich charakterizuje, čím sa stávajú pre žiaka príťažlivejšie a pôsobia na neho viac motivačne.

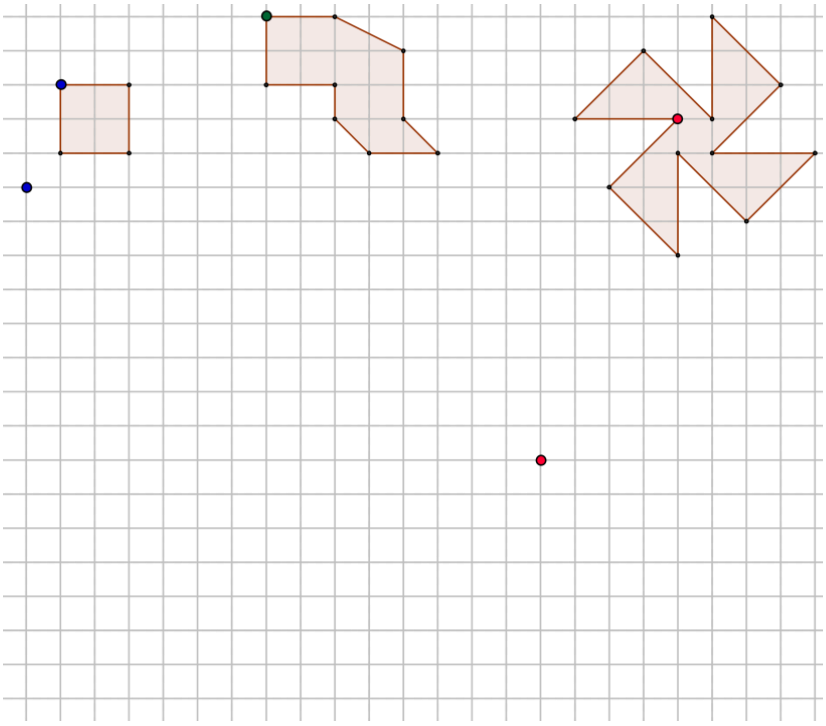
Pri tvorbe úloh využívame teoretické poznatky z matematiky aplikované v praktickom živote okolo nás. Motiváciu čerpáme hlavne v architektúre a umení, ktoré sú plné rôznych zaujímavých námetov – stačí len hľadať. Pri tvorbe motivačných častí sme sa snažili spájať poznatky aj z ďalších predmetov a to hlavne z výtvarnej výchovy a geografie. Myslíme si, že je dôležité dávať žiakom úlohy z ich konkrétnych skúseností. Tak si môžu žiaci názorne uvedomiť využitie teoretických matematických vedomostí v reálnych podmienkach.

Úlohy aj jednotlivé podúlohy sú usporiadané gradovane, postupne od najľahších po najťažšie. V rámci zadania dávame žiakom hotové prekreslené obrázky, ktoré už len zväčšujú, zmenšujú, alebo zobrazujú v rovnoľahlosti. Primerane veku je však vhodné dať žiakom prekresľovať obrázky ako samostatnú úlohu.

## 4.1 Geometrické útvary

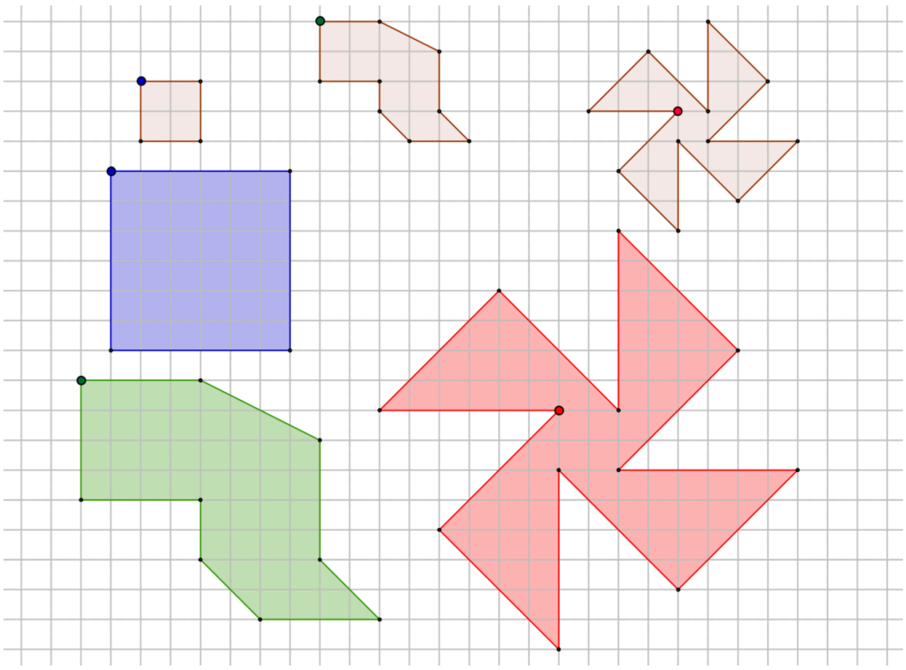
Paľko sa na hodine matematiky nudil a začal si kresliť obrazce na štvorčekový papier. Keď to pani učiteľka zbadala, dala mu nasledovné úlohy:

**Úloha č. 1:** Prekresli dané útvary v štvorcovej sieti. Vždy je zvýraznený začiatok nového útvaru. Štvorec zväčši trikrát a ďalšie dva útvary dvakrát.



Obr. 14 Geometrické útvary

*Riešenie:*

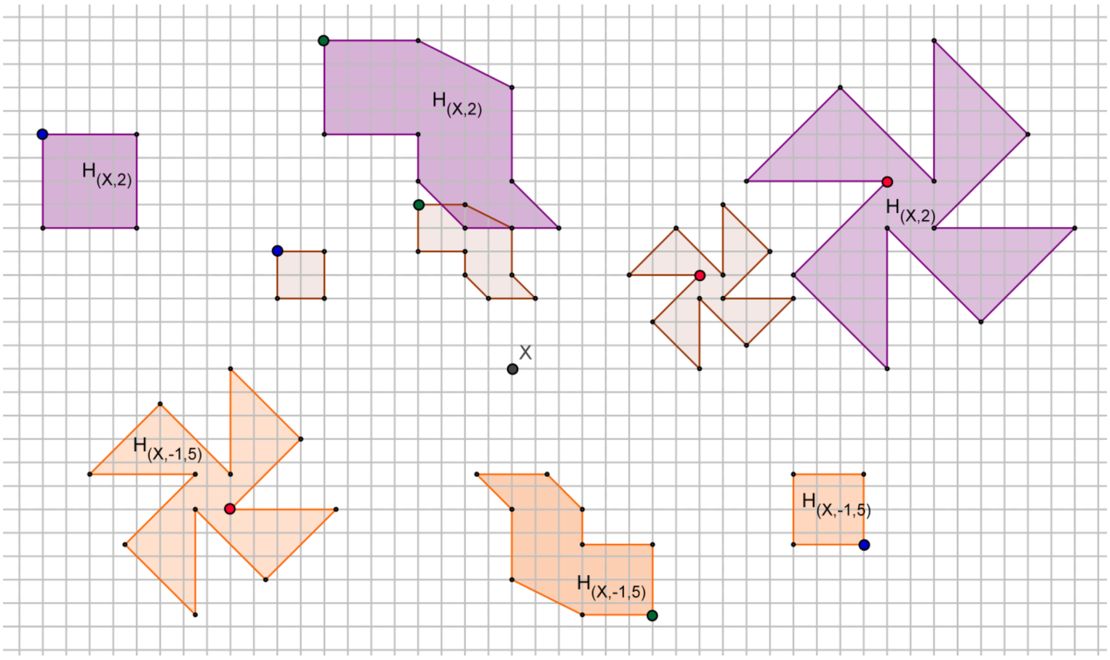


Obr. 15 Geometrické útvary – zväčšené.

**Úloha č.2**

Na Obr. 14 sú tri rôzne útvary, zvoľ si ľubovoľný bod $(X)$ na papieri a zobraz ich v rovnoľahlosti $H_{X,2}$ $a$ $H_{X;-1,5}$ .

*Riešenie:* Zvolili sme si bod $X$ a zobrazili útvary v danej rovnoľahlosti.




Obr. 16 Geometrické útvary zobrazené v rovnoľahlosti

**Námet na ďalšiu úlohu**

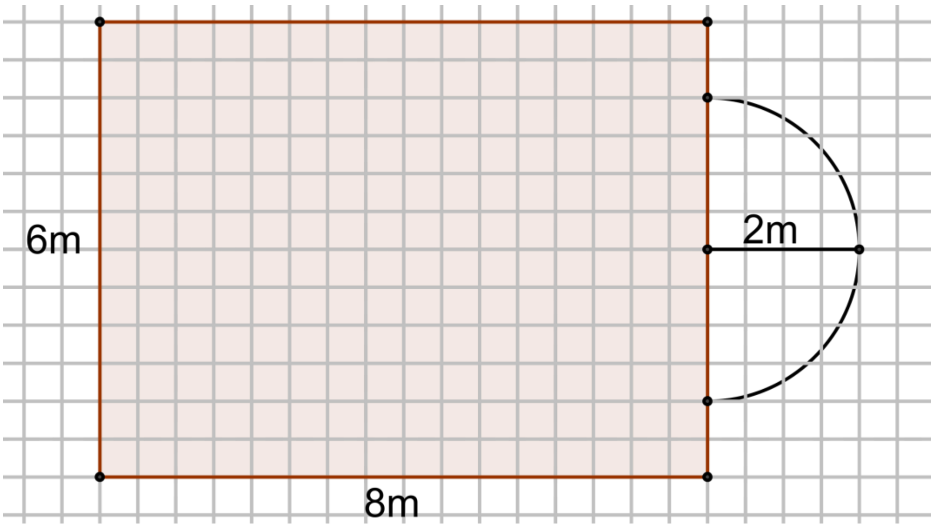
Namiesto geometrických útvarov môžeme do siete narysovať napríklad súhvezdia. Ďalej ich môžeme zväčšovať, zmenšovať, porovnávať, zobrazovať v danej rovnoľahlosti.

## 4.2 Kostolík

Obr. 17 Drážovský kostolík

Deti na školskom výlete za našimi pamiatkami navštívili aj známy Drážovský kostolík v blízkosti Nitry. Kostolík je postavený v románskom slohu. Jeho celková dĺžka je 10 metrov. Je zložený z jednej lode (obdĺžnik rozmerov 8m x 6m) a apsidy (polkruh nachádzajúci sa v strede kratšej strany lode s polomerom 2m).

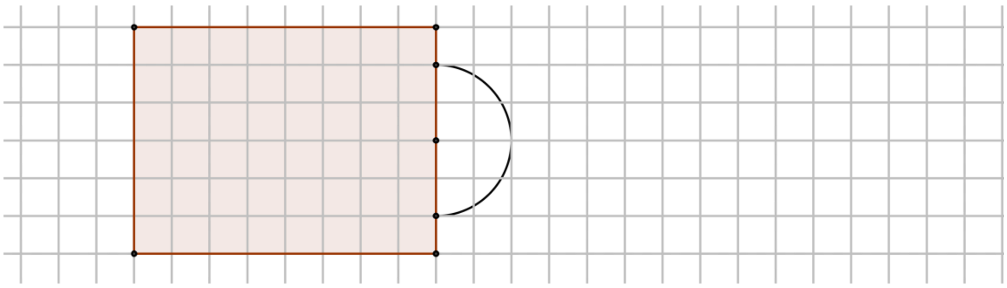
Na obrázku je v štvorčekovej sieti narysovaný jeho pôdorys.




Obr. 18 Pôdorys

**Úloha č.1**: Vedel by si tento pôdorys zmenšiť o polovicu (v pomere 1:0,5)? Pomôž si štvorčekovou sieťou.

*Riešenie:* Každý rozmer zmenšíme o polovicu.



Obr. 19 Zmenšený pôdorys

**Úloha č.2**: Pokús sa vypočítať v akej mierke bol narysovaný pôdorys na Obr. 18. ak dĺžka strany jedného štvorčeka v sieti je 0,5 cm.

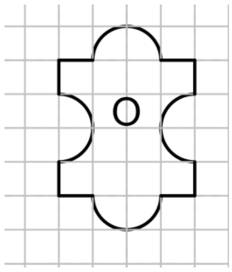
1cm na obrázku je v skutočnosti…………………

*Riešenie:* 1cm na obrázku je v skutočnosti 100 cm = 1 m.

## 4.3 Záhrada

Dávid bol cez leto na dovolenke v Indii. Zaujali ho krásne záhrady. Do školy doniesol obrázok tej najkrajšej. Zistil, že sa záhrada skladá z rovnakých častí, ktoré do seba jednoducho zapadajú – ako puzzle (Obr. 20). Dávid hneď aj doniesol nákres puzzle na štvorčekovom papieri (Obr. 21), ktorý pomenoval „obrazec $O$“.

Obr. 20 Geometrický vzor záhrady Anguri Bagh v pevnosti Arga (Arga, India)

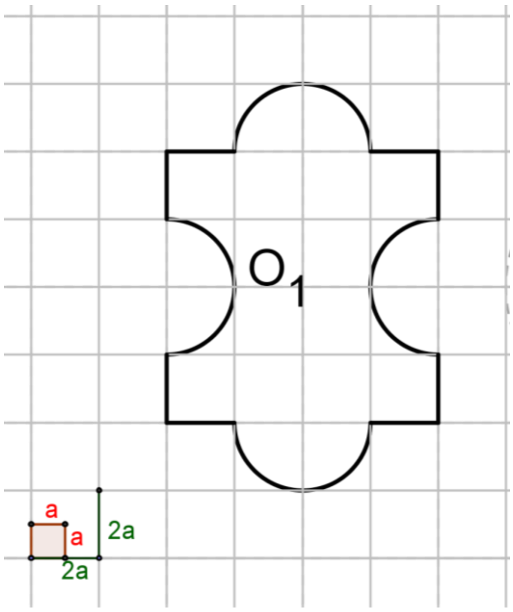



Obr. 21 „Obrazec O“

Následne zadal svojim spolužiakom tieto úlohy:

**Úloha č. 1:** Narysuj/nakresli dvakrát zväčšený obrazec tak, že zväčšíš mriežku. (nový štvorček bude dvakrát taký veľký ako ten pôvodný)

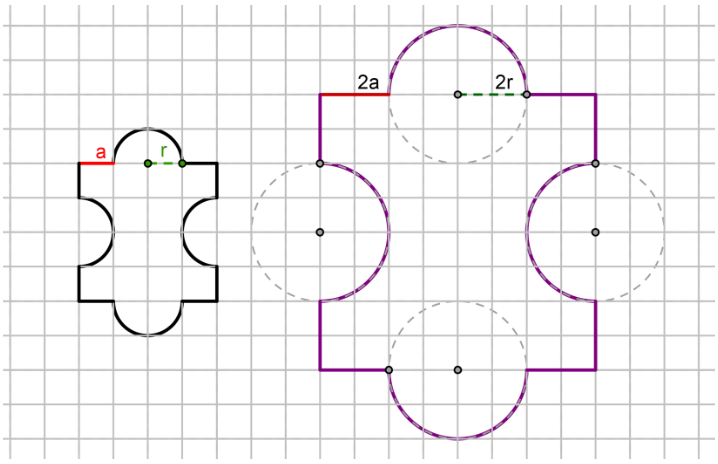
*Riešenie:* Každý rozmer štvorčeka sme dvakrát zväčšili a prerysovali/prekreslili Dávidov obrazec. Vznikol nám obrazec $O_1$.




Obr. 22 Zväčšený obrazec – Úloha č. 1

**Úloha č. 2:** Zväčši obrazec v tej istej mriežke, v ktorej bol nakreslený Dávidov obrazec. (ornament bude dvakrát väčší ako ten prvý)

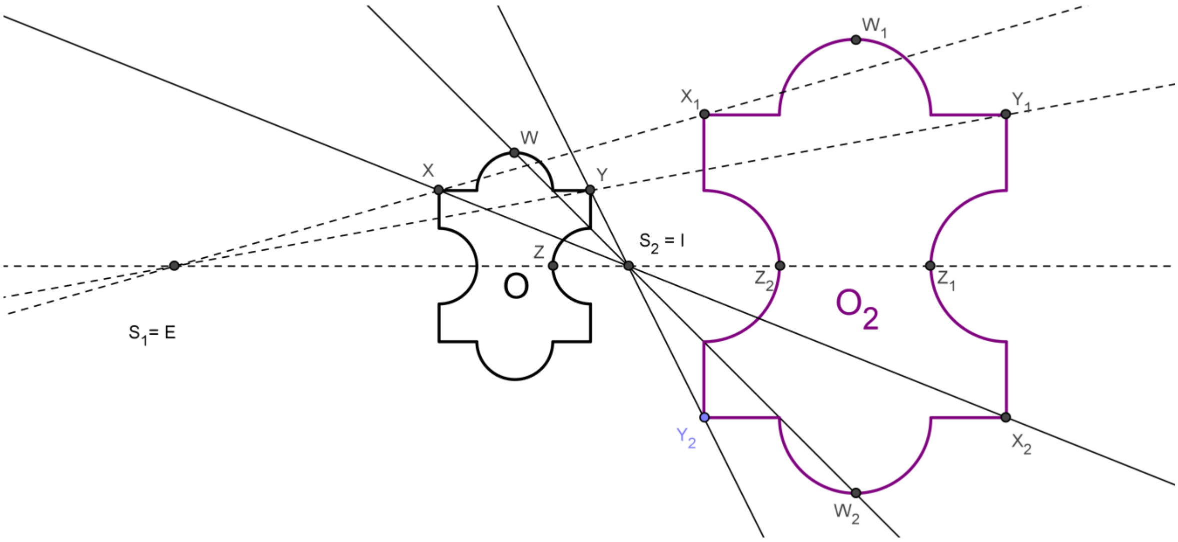
*Riešenie:* Každý rozmer obrazca sme zväčšili dvakrát.




Obr. 23 Zväčšený obrazec – Úloha č. 2

**Úloha č. 3:** Nájdi stredy rovnoľahlosti a koeficient podobnosti, v ktorých sa obrazec $O$ (pôvodný) zobrazil do obrazcu $O_2$ (zväčšený).

*Riešenie:* Narysovali sme oba obrazce vedľa seba. Označili niekoľko bodov, ktoré si v podobnosti zodpovedali a spojili ich priamkami. Na ich priesečníkoch vznikli body $S_1$ (externý stred rovnoľahlosti) a $S_2$ (interný stred rovnoľahlosti). Koeficient $k$ sme ľahko zistili z toho, že obrazec $O_2$ je dvakrát väčší ako obrazec $O$.




Obr. 24 Riešenie

$H_{S_1,2} : X \rightarrow X_1$ $\quad$ $H_{S_2,-2} : X \rightarrow X_2$

$Y \rightarrow Y_1$ $\quad$ $Y \rightarrow Y_2$

$Z \rightarrow Z_1$ $\quad$ $Z \rightarrow Z_2$

$W \rightarrow W_1$ $\quad$ $W \rightarrow W_2$

$H_{S_1 2} : O \rightarrow O_2$ $\quad$ $H_{S_2,-2} : O \rightarrow O_2$

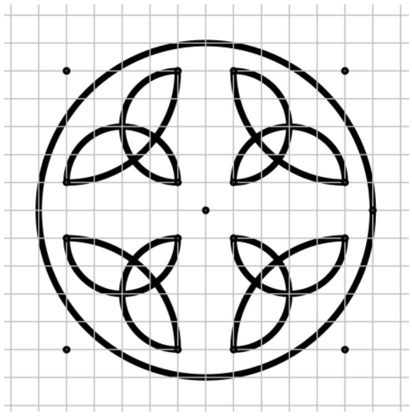
**Námet na ďalšiu úlohu** (pokračovanie na hodine výtvarnej výchovy)

Vytvorte si vlastné triedne puzzle. Každý nech navrhne jeden dielik tohto puzzle – jeden obrazec, ktorý môže ľubovoľne pokresliť a vyfarbiť. Nakoniec sa len obrazce zložia a vytvorí sa „triedne puzzle“, ktoré bude vystavené na nástenke v triede. Vaše puzzle spravte tak, aby bolo zložené z obrazcov sedemkrát väčších ako pôvodný obrazec O.

## 4.4 Prívesok

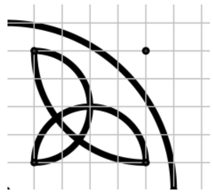
Na obrázku vidíš Jankin vzácny Keltský prívesok (Obr. 25). Pre Keltov tento symbol znamenal spojenie a neoddeliteľnosť troch. Janka znázornila motív z prívesku na štvorčekovom papieri. Teraz sa ho chce naučiť zväčšovať a zmenšovať. Vieš jej pomôcť?

Obr. 25 Prívesok



Obr. 26 Prerysovaný motív

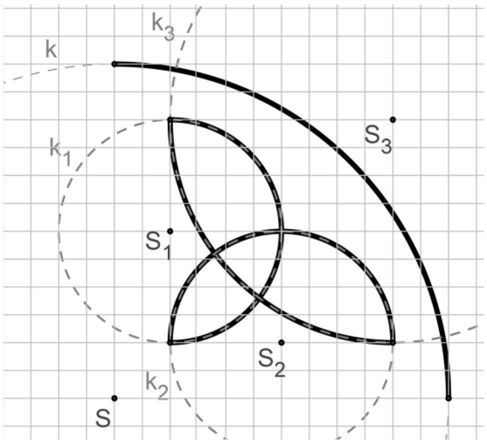
**Úloha č. 1:** Naučme sa meniť veľkosť obrázku na jednej časti vzoru (Obr. 27), ktorý je na prívesku. Zväčši danú časť dvakrát.



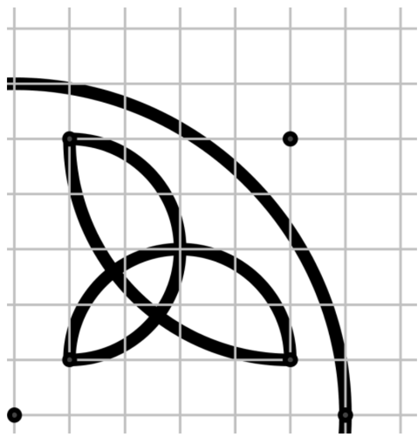
Obr. 27 Časť vzoru

Zväčšenie realizuj pomocou zväčšenia rozmerov mriežky, alebo priamo na pôvodnej mriežke.

*Riešenie:* Náš motív sa skladá z dvoch zhodných polkruhov a dvoch rôznych štvrťkruhov. Pri rysovaní tohto vzoru potrebujeme pravítko a kružidlo.



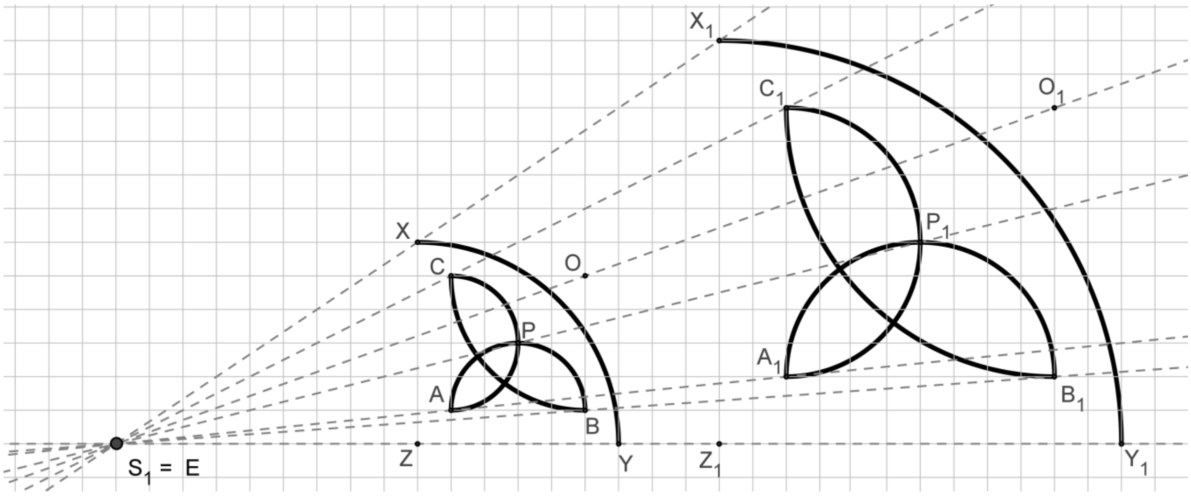

Obr. 28 Zväčšená časť vzoru 1



Obr. 29 Zväčšená časť vzoru 2

**Úloha č.2:** Nájdi stred rovnoľahlosti, v ktorej sa jedna časť vzoru zobrazila do druhej – zväčšenej a urči koeficient.

*Riešenie*: Narysovali sme oba obrazce vedľa seba, pomocou niekoľkých zodpovedajúcich si bodov, ktorými sme viedli priamky, sme získali stred rovnoľahlosti – tam, kde sa priamky preťali vznikol bod $S_1$. Koeficient $k$ sme ľahko odvodili z toho, že časť vzoru bola dvakrát zväčšená.




Obr. 30 Časť vzoru zobrazená v rovnoľahlosti

$H_{S_1,2}: X \to X_1$ $\quad H_{S_1,2}: A \to A_1$ $\quad H_{S_1,2}: O \to O_1$

$Y \to Y_1$ $\quad B \to B_1$ $\quad P \to P_1$

$Z \to Z_1$ $\quad C \to C_1$

**Úloha č.3:** Nech je daná časť vzoru v tvare uzla a bod S, ktorý nie je súčasťou tohto uzla. Zobraz tento uzol v rovnoľahlosti so stredom v bode S a koeficientom $\kappa_2 = -1{,}5$.

*Riešenie*: Máme daný uzol a bod S. V uzle si vyznačíme dôležité body, ktoré zobrazíme v rovnoľahlosti $H_{\mathrm{S},-1,5}$. Pomocou zobrazených bodov, už uzol ľahko dorysujeme. Na narysovanie nového uzla potrebujeme v rovnoľahlosti zobraziť stredy kružníc $S_1, S_2, O$ a body, ktoré určujú ich polomer $A, B, C$.

*Postup:*

1. $S'_1, S'_2, O'; H_{\mathrm{S},-1,5}: S_1 \to S'_1$

   $S_2 \to S'_2$

   $O \to O'$

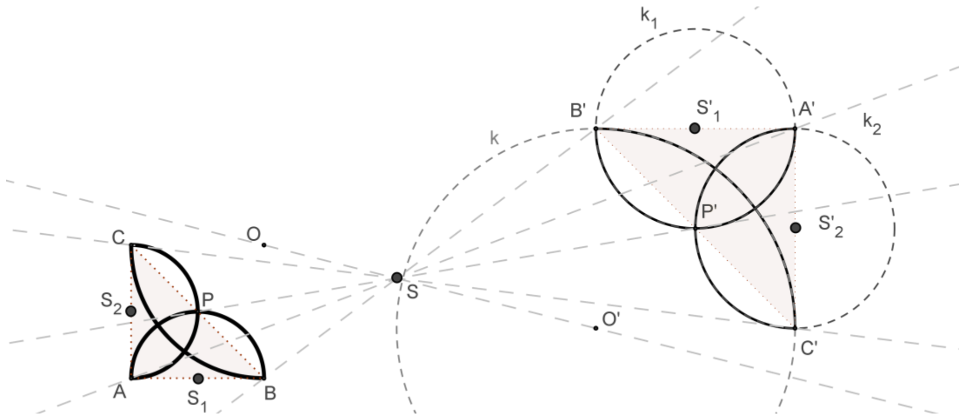
2. $A', B', C'; H_{\mathrm{S},-1,5}: A \to A'$

   $B \to B'$

   $C \to C'$

3. $k; k(O',\ O'C')$
4. $k_1; k_1(S'_1,\ S'_1B')$
5. $k_2; k_2(S'_2,\ S'_2A')$

6. uzol $A'B'C'$




Obr. 31 Postup konštrukcie

**Námet na ďalšiu úlohu**

Vedeli by ste odpovedať na otázku?

Koľko kruhov je možné vytvoriť doplnením jednotlivých časti vzoru celého prívesku?

*Riešenie:* Doplnením jednotlivých častí vzoru by sme vedeli vytvoriť až 12 kruhov. Spolu by bolo na obrázku 13 kruhov.

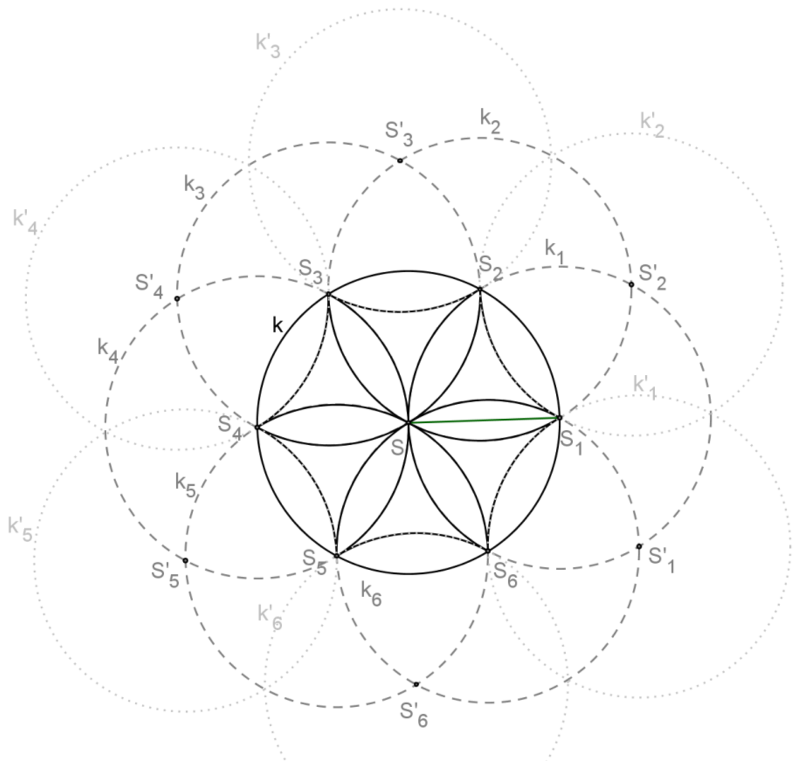
## 4.5 Kvet

Obr. 32 Kvet

Vedeli by ste zostrojiť ornament na obrázku? Tento znak bol v slovanských krajinách považovaný za solárny symbol, niekedy bol znakom boha Perúna (slovanský Jupiter). V súčasnosti sa používa hlavne ako dekoračný prvok (rozeta kvetu života).

**Úloha č.1:** Skonštruuj ornament na obrázku. Polomer kružnice zvoľ 2 cm. (ornament bude dvakrát väčší ako na Obr. 32).

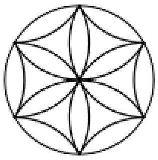
*Riešenie:* Postupujeme ako pri konštrukcii pravidelného šesťuholníka. Zostrojíme kružnicu o polomere r. Zvolíme si ľubovoľný bod $S_1$ na kružnici $k$, z ktorého zostrojíme kružnicu $k_1$ s polomerom r. Prienikom kružníc $k$ a $k_1$ vzniknú body, ktoré sú na Obr. 33 označené $S_2, S_6$. Postup opakujeme, kým takto na kružnici $k$ nezískame šesť bodov. Zostrojením kružníc $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ sme na priesečníku dvoch susedných kružníc získali body $S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, S'_5, S'_6$. Tieto body využijeme ako stredy na zostrojenie kružníc $k'_1, k'_2, k'_3, k'_4, k'_5, k'_6$. Vo vnútornom priestore kružnice $k$ sme takto získali žiadaný ornament.




Obr. 33 Konštrukcia ornamentu (kvetu života)

**Úloha č.2:** Narysuj aspoň dva ďalšie ornamenty, každý s iným polomerom. K jednotlivým ornamentom napíš, koľkokrát si ich zväčšil / zmenšil v porovnaní s ornamentom z úlohy 1.

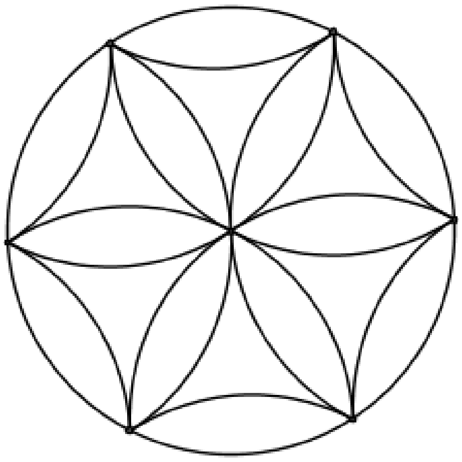
*Riešenie*: Nové útvary budeme porovnávať pomocou zmenšených / zväčšených polomerov a nazveme ich postupne $U_1$, $U_2$, $U_3$,……… $U_{\mathrm{n}}$.



$r_1 = \frac{1}{2}r$;

$U_1 = \frac{1}{2}U$;

Obr. 34 $U_1$

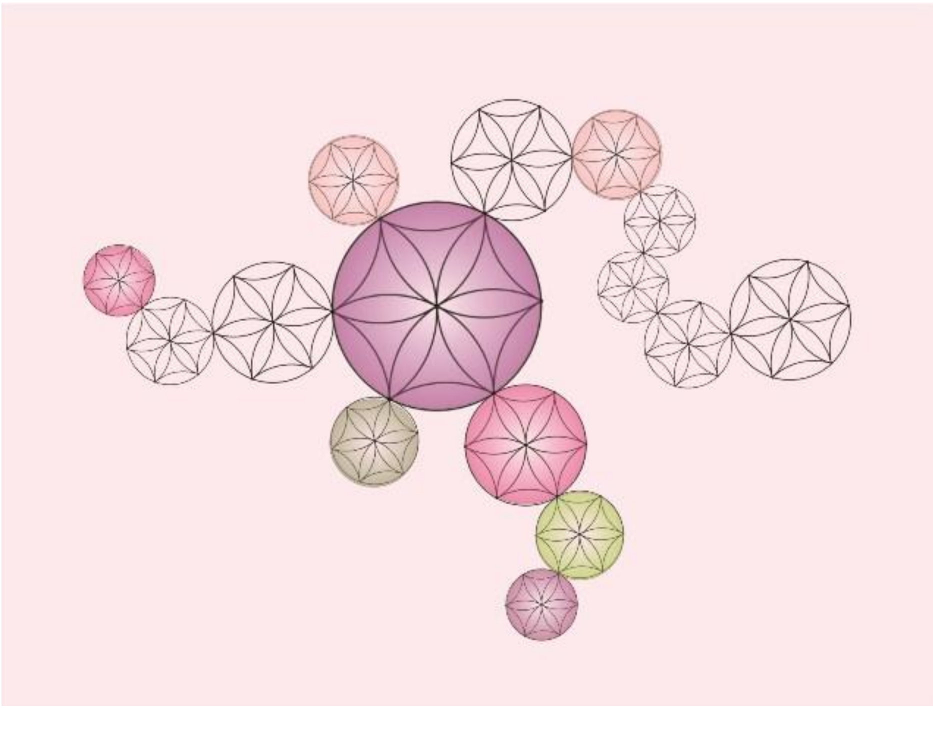


$r_2 = \frac{3}{2}r$; $U_2 = \frac{3}{2}U$

Obr. 35 $U_2$

**Námet na ďalšiu úlohu** (pokračovanie na hodine výtvarnej výchovy)

Vytvor z ornamentu „geometrický obraz“. V obraze môžeš kombinovať ornamenty rôznej veľkosti a rôzne ich aj usporiadať. Nezabudni obraz aj vyfarbiť.

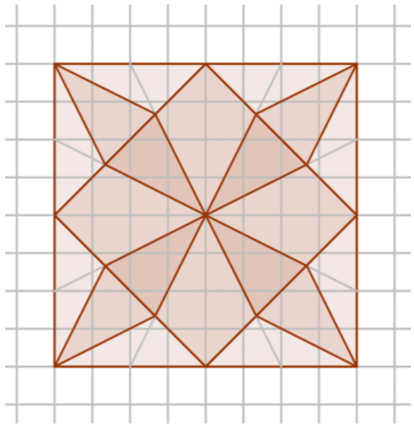


Obr. 36 Návrh obrazu

## 4.6 Klenba

Tento krásny strop (Obr. 37) by ste mohli nájsť v Južnom Česku, v dedinke Prachatice. Krásna hviezdicová klenba je typická pre obdobie gotiky. Jej pôdorys sme narysovali do štvorčekovej siete (Obr. 38).

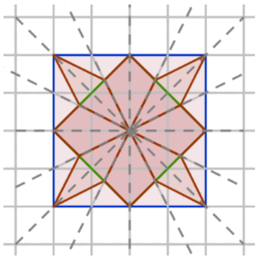
Obr. 37 Strop



Obr. 38 Pôdorys klenby

**Úloha č.1:** Narysuj / nakresli o polovicu menší pôdorys klenby na štvorčekový papier.

*Riešenie:* Pri rysovaní vychádzame zo základného štvorca (4x4 štvorčeky). Strany tohto štvorca rozdelíme na štyri rovnaké časti. Jeho vrcholy a body vzniknuté na jeho stranách spojíme so stredom štvorca. Ďalej do tohto štvorca vpíšeme druhý štvorec – jeho vrcholy sú stredy strán prvého štvorca. Vytvorili sme všetky body, ktoré tvoria základ vzoru.

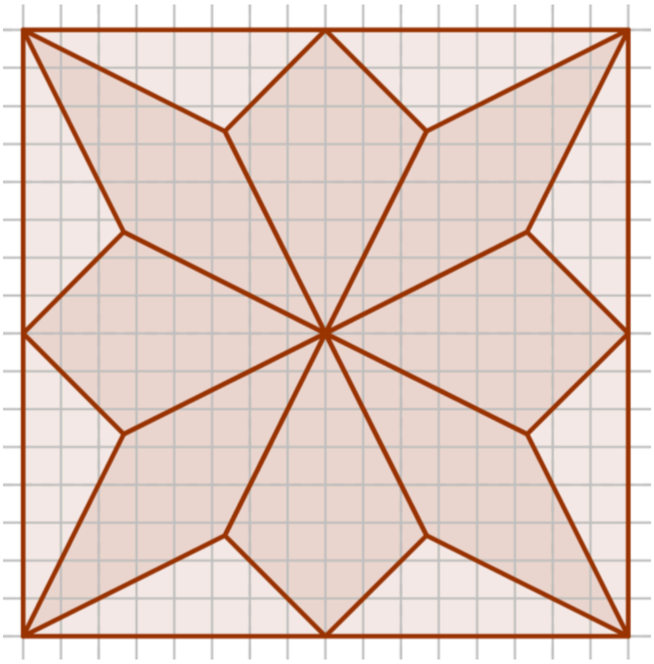


Obr. 39 Pôdorys klenby o polovicu zmenšený

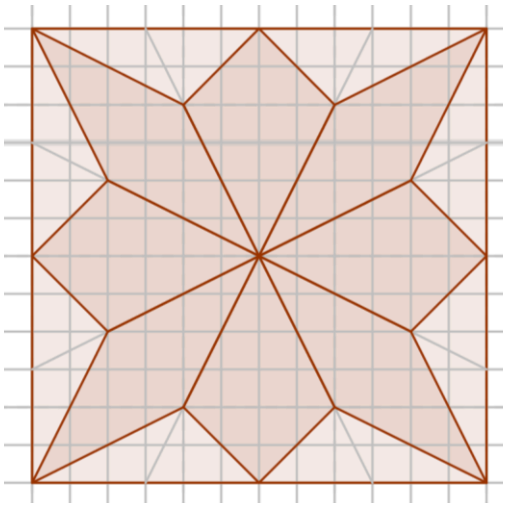
**Úloha č.2:** Narysuj/nakresli pôdorys klenby (Obr. 38) na štvorčekový papier

a) zväčšený dvakrát
b) zväčšený 1,5 krát.

*Riešenie:*



Obr. 40 Dvakrát zväčšený

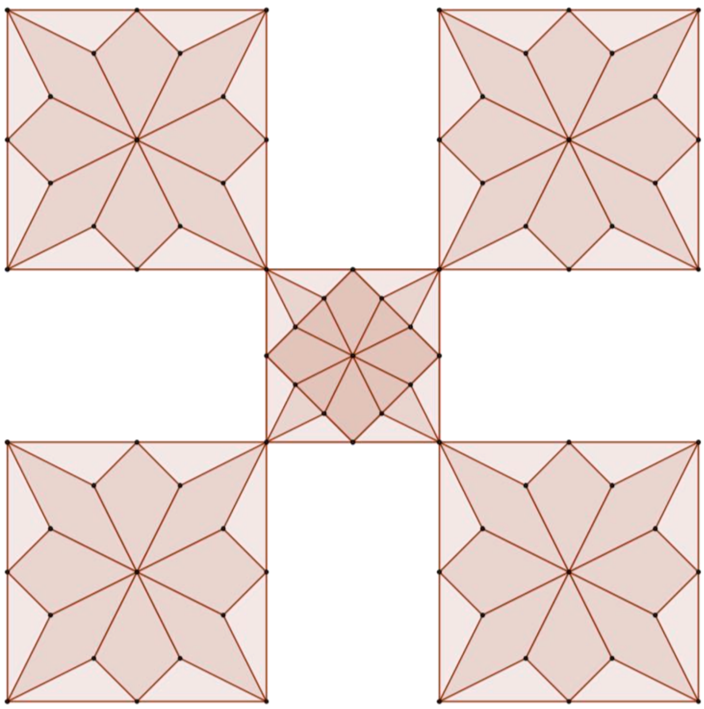


Obr. 41 1,5- krát zväčšený

Zväčšovanie môžeme realizovať na tej istej mriežke, pričom obrazec požadovane zväčšíme, alebo priamo si zväčšíme štvorčekovú sieť.

**Úloha č.2:** Narysuj vzor klenby na čistý papier, a postupne ho zobraz v rovnoľahlosti so stredmi v jednotlivých vrcholoch vonkajšieho štvorca a s koeficientom -1,5.

*Riešenie:*

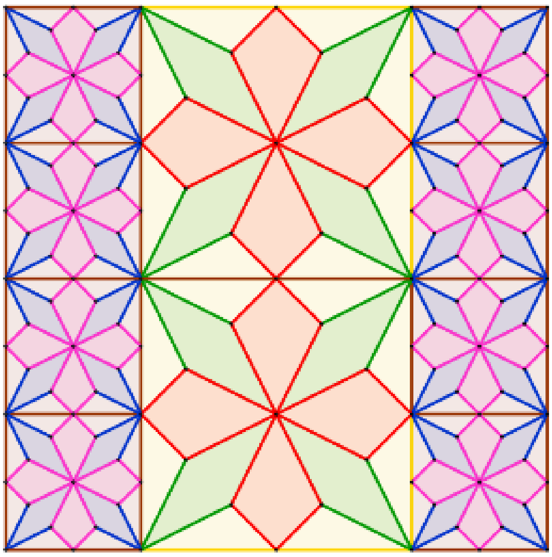


Obr. 42 Riešenie úlohy

**Námet na ďalšiu úlohu** (pokračovanie na hodine výtvarnej výchovy)

Vytvor návrh na vitrážne okno (okno zasklené malými kúskami farebného skla), pričom využi aj rôzne veľkosti vzoru. Nezabudni svoj návrh realizovať aj farebne. Porovnaj veľkosti vzorov s pôvodným. Aké zväčšenie, zmenšenie nastalo?

*Riešenie:*



Obr. 43 Návrh na vitrážne okno

## 4.7 Rozeta – kvet.

Katka bola na výlete v Poľsku. Cestou do Varšavy sa zastavili v kostole sv. Mazimierza v Pruszkove, kde ju zaujala prekrásna rozeta (kruhové vitrážne okno) na kostolnom priečelí. Katke sa okno zapáčilo a hneď po návrate domov sa aj pokúšala vzor tohto okna čo najvernejšie narysovať. Veľmi sa jej zatiaľ nedarí, preto vás prosí o pomoc. Katka zistila, že polomer vonkajšieho kruhu je 3-krát väčší ako polomer vnútorného a okno je široké 6 m.

Obr. 44 Rozeta

**Úloha č.1:** Narysuj vzor okna v mierke 1:50.

*Riešenie:* Vnútorný kruh si označme $k$ a vonkajší $k'$. Polomer vonkajšieho kruhu $r'$ je $3m$ – takže polomer vnútorného kruhu je $r$ je $1m$. V mierke 1:50 použijeme polomer $r = 2cm$ a $r' = 6cm$.

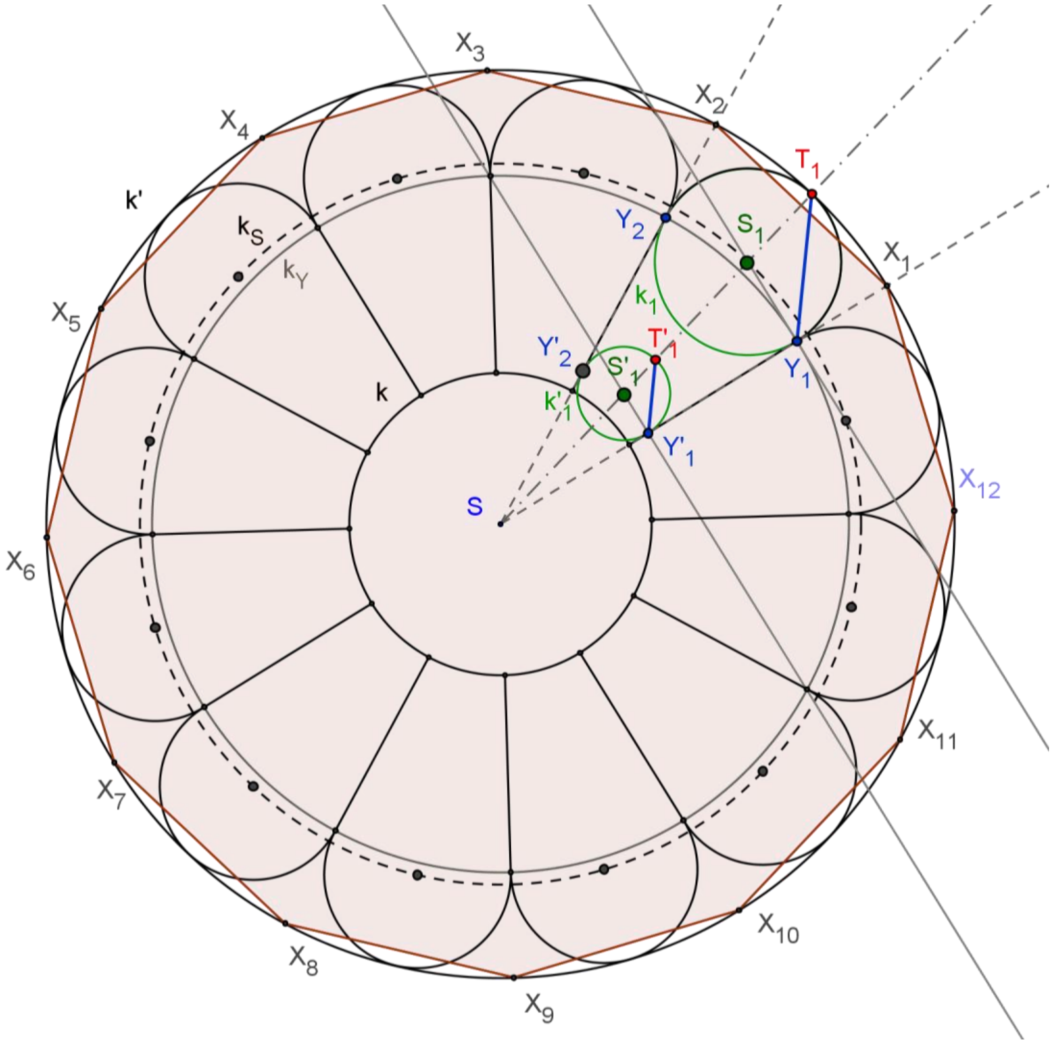
(Obr. 45) Základom konštrukcie je pravidelný 12-uholník.

Narysujeme kružnice $k$ a $k'$. Na kružnici $k'$ zostrojíme pravidelný šesťuholník (Zostrojíme kružnicu s polomerom r. Úsečku dĺžky r nanesieme šesťkrát za sebou ako tetivu. Vzniknuté body sú vrcholy pravidelného šesťuholníka). Zostrojíme osi strán pravidelného šesťuholníka. Priesečníky týchto osí s kružnicou $k'$ spolu s vrcholmi šesťuholníka sú vrcholy pravidelného dvanásťuholníka $X_1X_2X_3X_4 \dots X_{11}X_{12}$.

***Riešenie 1a:*** Zostrojíme osi strán pravidelného dvanásťuholníka. Na každej osi sa bude nachádzať stred $S_1$ $(S_2, \dots, S_{12})$ kružnicového oblúku $Y_1T_1Y_2$ $(Y_2T_2Y_3, \dots, Y_{12}T_{12}Y_1)$ kružnice $k_1$ $(k_2, \dots, k_{12})$, ktorá sa dotýka kružnice $k'$ z vnútornej strany – v bode $T_1$ $(T_2, \dots, T_{12})$. Kružnica $k_1$ $(k_2, \dots, k_{12})$ je vpísaná do kruhového výseku $X_1SX_2$ $(X_2SX_3, \dots, X_{12}SX_1)$. Jeho strán sa dotýka v bodoch $Y_1, Y_2$ $(Y_2, Y_3; \dots; Y_{12}, Y_1)$

Na zostrojenie kružnice $k_1$ využijeme jej rovnoľahlosť $(H_{S,\kappa})$ s kružnicou $k'_1$ – pomocná kružnica. V nej sa body $T_1, Y_1$ zobrazia na body $T'_1, Y'_1$ kružnice $k'_1$.

Stredy $S_2, \dots, S_{12}$ kružníc $k_2, \dots, k_{12}$ budú ležať na kružnici $k_S(S;\ SS_1)$ a dotykové body $Y_2, \dots, Y_{12}$ na kružnici $k_Y(S;\ SY_1)$.



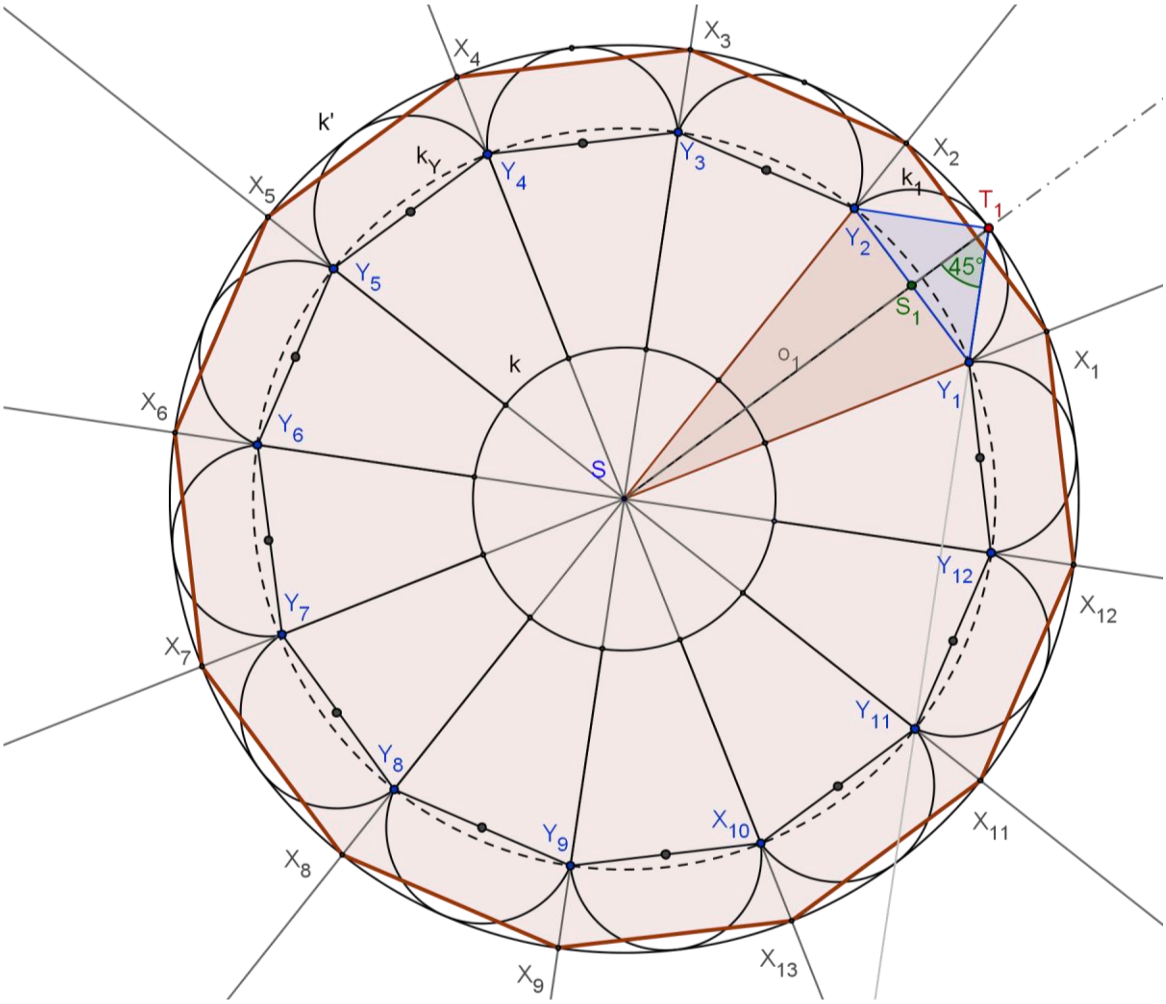

Obr. 45 Konštrukcia vzoru (a)

Postup:

1. $k, k';\ k(S; 2cm),\ k'(S; 6cm)$.
2. pravidelný dvanásťuholník $X_1X_2X_3X_4 \dots X_{11}X_{12}$.
3. osi strán pravidelného dvanásťuholníka. $o_1, o_2, \dots, o_{12}$
4. $k_1'; k_1'\ S_1', r_1'\ , S_1' \epsilon\ o_1, k_1'$ sa dotýka $SX_1$ a $SX_2$ v bodoch $Y'_1$ a $Y'_2$
5. $T'_1, T_1;\ T'_1 \epsilon o_1 \cap k_1', T_1 \epsilon o_1 \cap k'$
6. $k_Y; k_Y\ S;\ SY_1\ \ , Y_1 \epsilon SX_1, Y_1T_1 \parallel Y'_1T'_1$
7. $k_S; k_S(S;\ SS_1\ ),\ S_1 \epsilon\ o_1 \cap S_1Y_1, S_1Y_1 \perp SX_1$
8. $Y_1, Y_2, \dots, Y_{12}; Y_1, Y_2, \dots, Y_{12} \epsilon k_Y \cap SX_1, SX_2, \dots \dots SX_{12},$
9. $S_2, \dots, S_{12};\ S_2, \dots, S_{12} \epsilon k_S \cap ST_1, ST_2, \dots \dots ST_{12},$
10. $k_1, k_2, \dots, k_{12}; k_1, k_2, \dots, k_{12}(S_1, S_2, \dots, S_{12};\ S_1Y_1\ )$
11. vzor

***Riešenie 1b:*** Predpokladajme, že „lupienok“ tohto vzoru sa skladá z rovnoramenného trojuholníka $Y_1SY_2$ a polkruhu $k_1$ zostrojeného nad jeho základňou. (a nie z výseku, v ktorom je skonštruovaná kružnica dotýkajúca sa jeho ramien a kružnicového oblúku.) Polkruh $k_1$ s priemerom $Y_1Y_2$ sa dotýka kružnice $k'$ v bode $T_1$. Vieme, že trojuholník $Y_1T_1Y_2$ je pravouhlý (Tálesová kružnica) a zároveň aj rovnoramenný, lebo $T_1 \in o_1$.

Body $Y_1, Y_2, \dots, Y_{12}$ ležia na kružnici $k_Y$ a bod $S_1$ $(S_2, \dots, S_{12})$ leží na $o_1$ $(o_2, \dots, o_{12})$ a $Y_1Y_2$ $(Y_2Y_3, \dots Y_{12}Y_1)$, pričom $Y_1Y_2$ $(Y_2Y_3, \dots Y_{12}Y_1), \perp o_1$ $(o_2, \dots, o_{12})$.




Obr. 46 Konštrukcia vzoru (b)

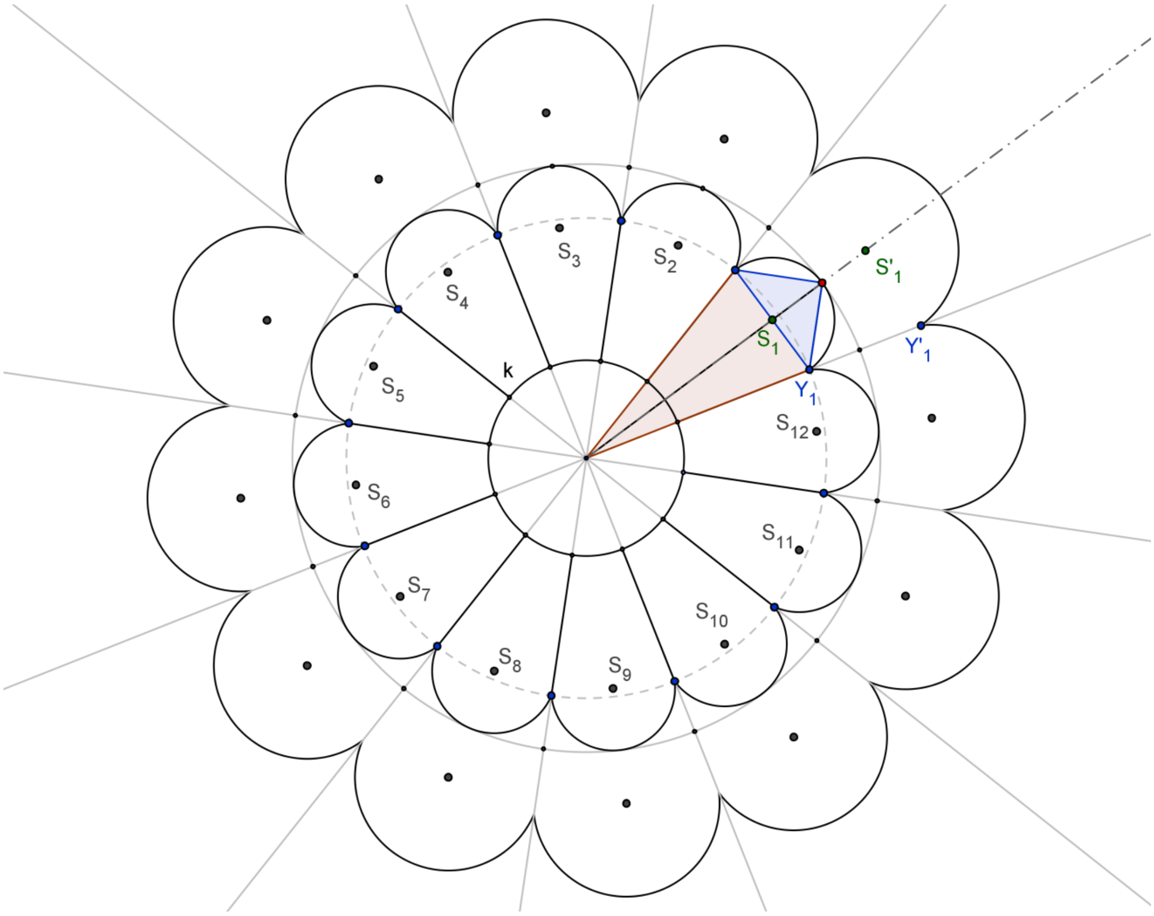
Postup:

1. $k, k'; k(S; 2cm), k'(S; 6cm)$.
2. pravidelný dvanásťuholník $X_1X_2X_3X_4 \dots X_{11}X_{12}$.
3. osi strán pravidelného dvanásťuholníka. $o_1, o_2, \dots, o_{12}$
4. $T_1; T_1 \epsilon o_1 \cap k'$
5. $Y_1; Y_1 \epsilon ST_1 \cap T_1Y_1,\ \measuredangle ST_1Y_1 = 45°$
6. $k_Y; k_Y\ S;\ SY_1$

7. $Y_2, \dots, Y_{12}; Y_2, \dots, Y_{12} \epsilon k_Y \cap SX_2, \dots, SX_{12}$
8. $S_1, S_2, \dots, S_{12};\ S_1, S_2, \dots, S_{12} \epsilon o_1, o_2, \dots, o_{12} \cap Y_1Y_2, Y_2Y_3, \dots, Y_{12}Y_1,$

   $Y_1Y_2\ (Y_2Y_3, \dots\ Y_{12}Y_1) \perp o_1\ (o_2, \dots, o_{12}).$
9. Polkružnice $k_1, k_2, \dots, k_{12}; k_1, k_2, \dots, k_{12}(S_1, S_2, \dots, S_{12};\ S_1Y_1\ )$
10. vzor

**Úloha č.2:** Narysuj vzor s dvomi radmi „lupienkov". Druhý rad získaj pomocou rovnoľahlosti so stredom v bode S a koeficientom 1,5 v ktorej sa zobrazia oblúky $k_1, k_2, \dots, k_{12}$ do oblúkov $k'_1, k'_2, \dots, k'_{12}$.




Obr. 47 Konštrukcia druhého radu.

**Námet na ďalšiu úlohu** (pokračovanie na hodine výtvarnej výchovy)

Keď ste už prišli na to ako narysovať okno (tvar kvetu), vytvorte si v triede lúku plnú kvetov. Každý narysujte ľubovoľne veľký kvet a vyfarbite ho, fantázií sa medze nekladú. Vystrihnite a nalepte ho na vašu lúku (výkres zelenej farby).

# 5 Riešenie vybraných úloh žiakmi a ich hodnotenie

Ako praktickú časť diplomovej práce uvádzame aplikovanie niektorých úloh na hodine matematiky.

## 5.1 Príprava úloh a realizácia ich riešenia

Žiakom sme dali vypočítať niektoré z úloh Kostolík a Záhrada. K nim sme priložili štandardné úlohy na precvičenie zväčšovania a zmenšovania geometrických útvarov.

Na začiatku práce stála pred nami otázka, akou formou by malo prebiehať vyučovanie a ako prezentovať dané úlohy. Jednou možnosťou by bolo zadať žiakom domácu úlohu – preopakovanie celku z piateho ročníka „Zväčšovanie a zmenšovanie geometrických tvarov“. Ďalej by sme pokračovali postupným zadávaním aplikačných úloh, pričom by ich žiaci vypracovávali do zošita. Daný spôsob by bol zaujímavý, no nastala tu otázka, či by si všetci žiaci splnili svoju povinnosť ohľadom domácej úlohy, a následne na to vedeli riešiť daný typ úloh.

Rozhodli sme sa vypracovať pre žiakov „pracovný list“- ktorý zahŕňal precvičenie zväčšovania a zmenšovania geometrických útvarov a následne aj aplikačné úlohy Kostolík a Záhrada, ktoré by mali vedieť riešiť. Pracovný list sme prispôsobili tak, aby naplno využil čas jednej vyučovacej hodiny. Na jeho konci sme zadali žiakom niekoľko otázok na ohodnotenie úloh a tak sme získali spätnú väzbu. Formuláciu jednotlivých zadaní sme prispôsobili veku žiakov a terminológii v rámci učebníc.

Aj keď sa zväčšenie a zmenšenie útvarov robí prostredníctvom zmeny veľkosti jedného alebo viac z ich základných parametrov (dĺžka strany, polomer,...) v texte bol použitý jednoduchý termín zväčšenie a zmenšenie útvarov niekoľkokrát. Sme si vedomí, že niektoré zadania by bolo vhodné formulovať korektnejšie. V záujme žiakov, aby neboli pomýlení, použili sme terminológiu s ktorou sa už stretli.

Žiaci vypracovávali úlohy samostatne z nasledovných dôvodov:

- primeraná vedomostná náročnosť predložených úloh. Náročnosť spočívala v porozumení textu – zadania úlohy.
- Pri analýze riešení bolo žiadané odhaliť, ako jednotliví žiaci rozumejú daným pojmom. Pri riešení úloh v skupine, by sa tak mohla vytvoriť situácia, pri ktorej by sa na riešení úloh podieľali len pohotovejší žiaci a ostatní by sa neprejavili, tzv. sa skryli za kolektív. Samostatná práca žiakov je tak najlepší

spôsob ako otestovať ich schopnosti pracovať a porozumieť zadaniu úloh. Jednoduchým štatistickým vyhodnotením výsledkov jednotlivých žiakov následne môžeme presnejšie odhadnúť náročnosť zadaných úloh vo vzťahu k celej skupine žiakov a rovnako aj overiť ich vedomostnú úroveň.

- Samostatne pracujúci  žiaci môžu klásť doplňujúce otázky. Je tak možné vytvoriť si obraz o ich spôsobe, akým premýšľajú nad zadanými úlohami.

Priestor na realizáciu nám poskytla Základná škola s materskou školou vo Svinnej. Úlohy boli predložené žiakom siedmeho ročníka, počas hodiny matematiky. Hodina bola štvrtou hodinou v rozvrhu. V čase písania práce bolo v triede prítomných 16 žiakov, z ktorých jeden je integrovaný. Ten po konzultácii s ich učiteľkou matematiky dané úlohy neriešil. Úlohy riešilo 15 žiakov, 9 dievčat a 6 chlapcov.

Žiaci siedmeho ročníka boli vybraní zámerne z toho dôvodu, že žiaci tohto ročníka sa ešte s podobnosťou (ako samostatným učivom základnej školy) nestretli. V piatom ročníku prebrali tému zväčšovanie a zmenšovanie útvarov v štvorcovej sieti, ktoré je propedeutikou podobnosti Pracovný list sme prispôsobili prebranému učivu z piateho ročníka a použili sme aj jeho terminológiu.

Žiaci boli prostredníctvom svojej učiteľky informovaní aké úlohy budú riešiť. Mali si priniesť rysovacie potreby. Žiakom bolo zdôraznené, že dané úlohy sa nebudú hodnotiť známkou. Pracovný list mal len preveriť ich vedomosti z danej problematiky a ukázať im odlišné typy úloh ako tie, s ktorými sa v učive stretávajú.

Po krátkom predstavení pracovného listu a zadaní inštrukcií, žiaci začali pracovať samostatne. Ojedinelé organizačné otázky, boli v krátkosti zodpovedané.

Žiaci sa počas svojej práce mohli na čokoľvek pýtať. Často kládli  otázky typu, či je ich riešenie správne. Žiakom sme sa snažili priamo neodpovedať a skôr ich iba naviesť k spôsobu, ktorým by si mohli overiť svoje riešenie. Na otázky smerujúce k nepochopeniu úloh, sme reagovali spoločným prečítaním nepochopenej úlohy, pričom sme sa snažili upozorniť žiaka na podstatné časti zadania, resp. bolo zadanie  preformulované.

V triede sa prejavila individualita žiakov. Šikovnejší žiaci, prevažne chlapci pracovali vo väčšej miere samostatne, bez otázok. Väčšinou dievčatám záležalo na tom, aby úlohy vypočítali správne, preto sa často pýtali a dožadovali potvrdenia správnosti ich riešenia. Najslabší žiaci riešili najskôr úlohy, ktoré im problém nerobili, neskôr pri zvyšných očakávali radu od spolužiakov. Pri zámerne formulovaných,  nie úplne jasných odpovediach na otázky ohľadom riešenia daných úloh, sa na konci hodiny obrátili na šikovného spolužiaka s prosbou o odpísanie riešení. Ak išlo len o konzultovanie riešenia medzi spolužiakmi, žiaci napomínaní neboli. Práve diskusie medzi žiakmi dokážu často pomôcť v procese učenia sa a napomôcť porozumeniu učiva. Spôsob, ktorým si vedia žiaci medzi sebou vysvetliť daný problém je často pre učiteľa nerealizovateľný. Pravdaže, takéto diskutovanie musí byť kontrolované učiteľom, aby žiaci neskĺzli do nesprávnych tvrdení.

Jeden žiak v triede bol veľmi šikovný a posledných 10 minút vyučovacej hodiny už nemal čo riešiť. Väčšina ostatných žiakov v snahe o dosiahnutie čo najlepšieho vypracovania, nesledovala čas a v závere hodiny ich prepadol stres. Usudzujeme, že okrem iného, aj z tohto dôvodu sa u niektorých objavovali chyby z nepozornosti. Dobré riešenie bolo niekedy vygumované a nahradené riešením chybným.

Pri riešení aplikačných úloh bola žiakom ponúknutá možnosť výberu či budú rysovať (vybralo si to 7 žiakov) alebo kresliť (využilo to 8 žiakov). Podľa doplňujúcich informácií od ich učiteľky, si možnosť kresliť prirodzene vybrali žiaci, ktorí už v predchádzajúcom období mali problémy pracovať s rysovacími pomôckami. Hlavne pri kreslení polkružnice voľnou rukou tak vznikli viaceré nesprávne riešenia.

## 5.2 Hodnotenie úloh

V nasledujúcej časti budú postupne uvedené jednotlivé časti pracovného listu a znázornená úspešnosť žiakov pri ich riešení. V prílohe práce je možné vidieť vybrané konkrétne riešenia žiakov.

V úlohe č. 1 mohli žiaci získať nasledujúci počet bodov:

0 bodov: správne tvrdenie bolo označené ako nepravdivé
nesprávne tvrdenie bolo označené ako pravdivé

1 bod: správne tvrdenie bolo označené ako pravdivé
nesprávne tvrdenie bolo len označené ako nepravdivé, bez písania opravného tvrdenia

2 body: nesprávne tvrdenie bolo označené ako nepravdivé, opravné tvrdenie nebolo pravdivé

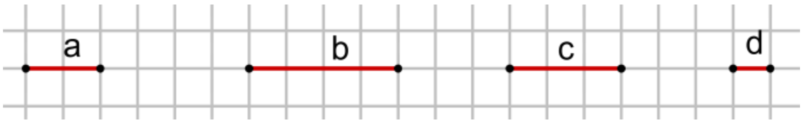
3 body: nesprávne tvrdenie bolo označené ako nepravdivé, opravné tvrdenie bolo napísane správne.

Pre každé tvrdenie sme vypočítali celkovú úspešnosť jeho riešenia žiakmi. Tú sme vypočítali použitím vzorca: $\frac{priemerný\ bodový\ zisk\ žiakov}{maximálny\ možný\ bodový\ zisk\ tvrdenia} . 100$ a výsledok sme zaokrúhlili na celé čísla.

## Úloha č. 1

Ktoré tvrdenia sú pravdivé/nepravdivé? Nepravdivé tvrdenia oprav na pravdivé.

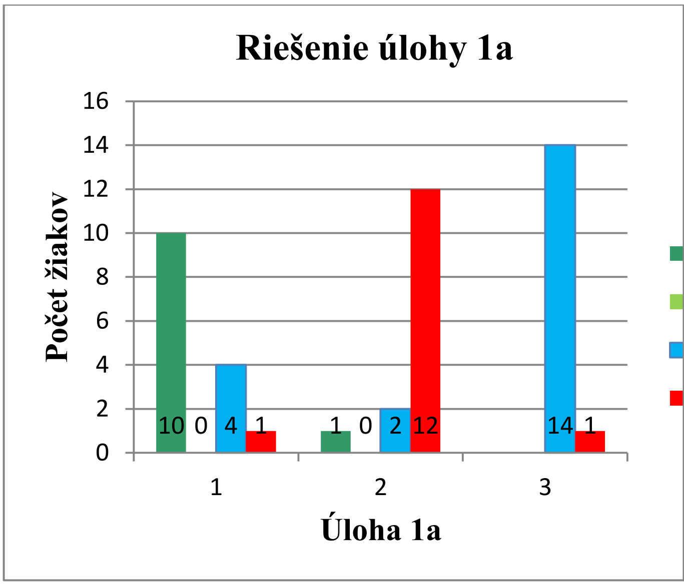
**1a)** Sú dané úsečky *a, b, c, d*.



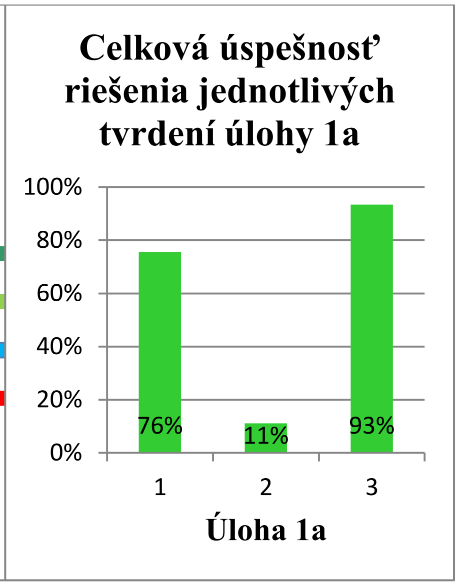

Obr. 48 Zadanie úlohy č. 1

Zlé preškrtni

- 1. Úsečka *b* je trikrát dlhšia ako úsečka *a*. *Pravdivé / nepravdivé*
2. Úsečka *c* nie je 1,5-krát dlhšia ako úsečka *a*. *Pravdivé / nepravdivé*
3. Úsečka *d* je o polovicu kratšia ako úsečka *a*. *Pravdivé / nepravdivé*




Graf 1 Riešenie úlohy 1a

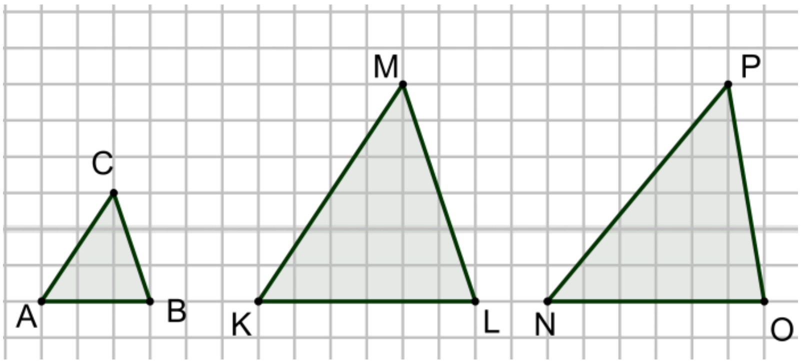



Graf 2 Celková úspešnosť

Ako môžeme vidieť z uvedeného grafu, najúspešnejší boli žiaci pri tvrdení 3 c. Takmer všetci žiaci potvrdili pravdivosť tvrdenia, len jednému sa zdalo tvrdenie nepravdivé. Pri riešení prvého tvrdenia boli žiaci takmer rovnako úspešní, 14 žiakov dobre definovalo nepravdivosť tvrdenia, z toho 10 žiakov toto tvrdenie aj dobre opravilo. Najmenej úspešní, (dokonca i v kontexte celého pracovného listu) boli žiaci pri riešení tvrdenia b úlohy 1a. Traja žiaci zistili, že tvrdenie je nepravdivé a dokonca len jeden ho vedel aj opraviť.

Tvrdenie b bolo do listu zaradené zámerne, za účelom zistenia, či vedia žiaci logicky vyriešiť negatívne formulované tvrdenie. Je zrejmé, že sa žiaci s podobným typom zadania ešte nestretli. Až dvanástim žiakom sa zdalo tvrdenie pravdivé.

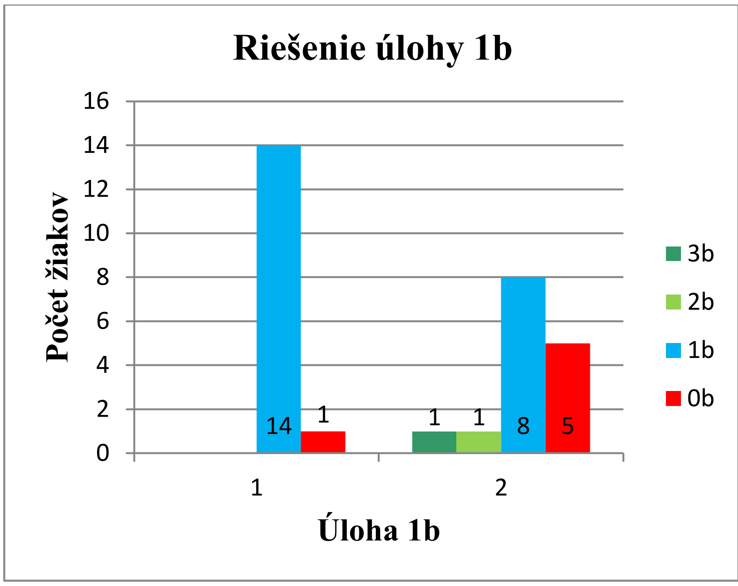
**1b)** Sú dané: $\triangle\ ABC, \triangle\ KLM, \triangle\ NOP$.

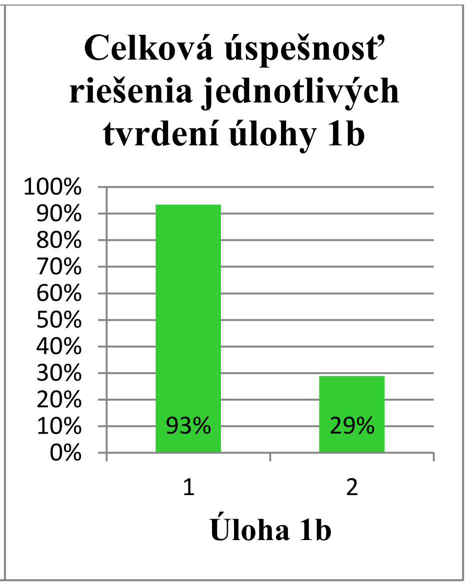



Obr. 49 Zadanie úlohy 1b

- 1. Trojuholník $KLM$ je dvakrát väčší ako $\triangle\ ABC$. *Pravdivé / nepravdivé*

2. Trojuholník $NOP$ je dvakrát väčší ako $\triangle\ ABC$. *Pravdivé / nepravdivé*



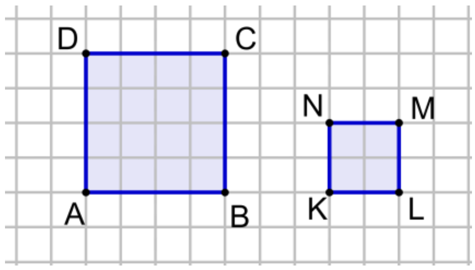




Graf 3 Riešenie úlohy 1b

Graf 4 Celková úspešnosť

Úloha 1b bola zostavená z jedného pravdivého a z druhého nepravdivého tvrdenia. Riešenie prvého tvrdenia bolo pre žiakov jednoduché, len jeden odpovedal nesprávne. S riešením druhého tvrdenia mali žiaci ťažkosti. Desať žiakov aj zistilo, že trojuholníky nie sú podobné, ale nevedeli ako tvrdenie opraviť. Až osem žiakov sa o opravu ani nepokúsilo a preskočilo opravu nepravdivého tvrdenia. Len jeden žiak opravil dané tvrdenie správne. Piati žiaci získali nula bodov.

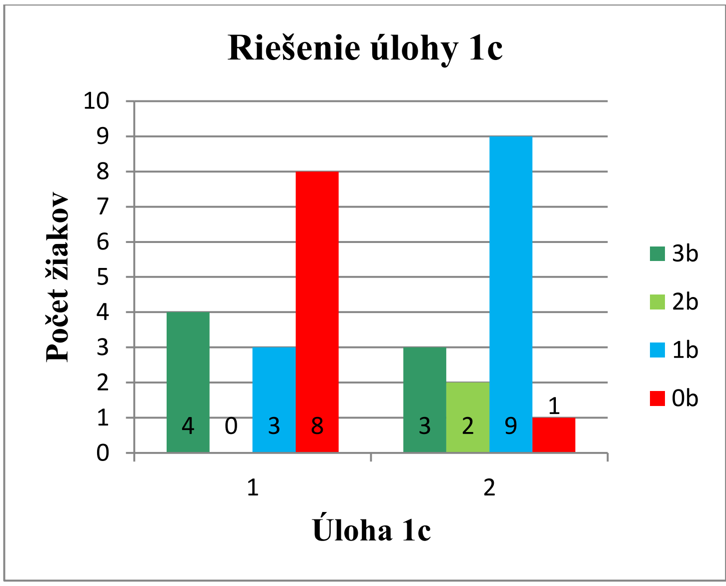
**1c)** Dané sú štvorce $ABCD\ a\ KLM$.



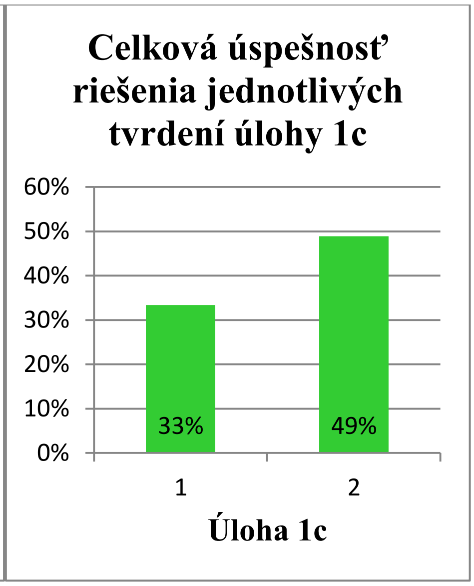

Obr. 50 Zadanie úlohy 1c

- 1. Štvorec $KLMN$ je 2-krát zväčšený štvorec $ABCD$. *Pravdivé / nepravdivé*

  2. Štvorec $KLMN$ je o polovicu menší ako štvorec $ABCD$. *Pravdivé / nepravdivé*




Graf 5 Riešenie úlohy 1c




Graf 6 Celková úspešnosť

Celková úspešnosť tvrdenia 1 bola len 33%. Väčšine žiakov sa zdalo tvrdenie pravdivé. Zo siedmych žiakov, ktorí zistili, že tvrdenie 1 je nepravdivé, štyria ho aj vedeli opraviť. Predpokladáme, že žiaci si poriadne neuvedomovali, ktorý štvorec má byť podľa zadania väčší a ktorý menší. Všetci žiaci boli pri riešení tvrdenia 2 bolo úspešní, ale to len z toho dôvodu, že správne sú obidve odpovede. Žiaci mohli pokladať dané tvrdenie za pravdivé, pokiaľ zmenšenie štvorca realizovali tak, že zmenšili príslušné strany štvorca. Taktiež je správne aj zistenie, že tvrdenie je nepravdivé, pretože keď sa sústredíme na obsah daných štvorcov platí, že štvorec $KLMN$ je o $\frac{3}{4}$ menší ako štvorec $ABCD$. Nula bodov sme dali len v prípade neriešenia. Z výsledkov hodnotenia však nie je možné preukázateľne určiť, ktorý spôsob uvažovania žiaci preferovali.

## Úloha č. 2

Úloha č. 2 bola zameraná na zväčšovanie a zmenšovanie úsečiek. Zmeny veľkosti kružníc boli realizované zmenou veľkosti polomeru. Hodnotenie bolo jednoduché:

0 bodov - nesprávne narysované riešenie

1 bod - správne narysované riešenie

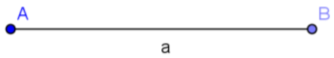
**2a)** Daná je úsečka $a = 4cm$.

- Narysuj úsečku:

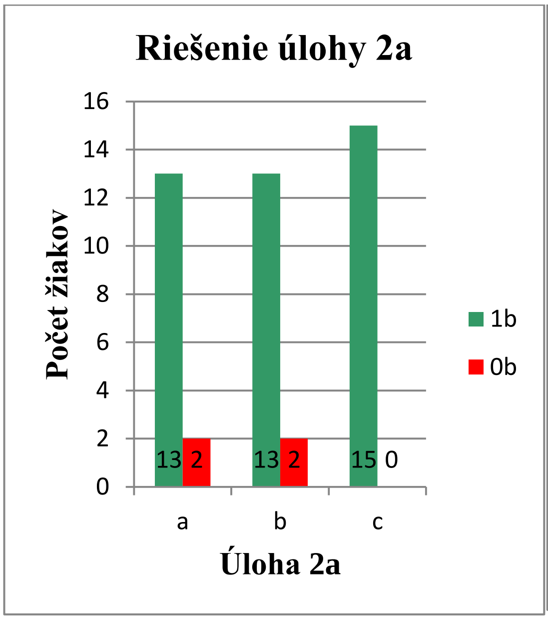
a) dvakrát zväčšenú;

b) 2,5 – krát zväčšenú;

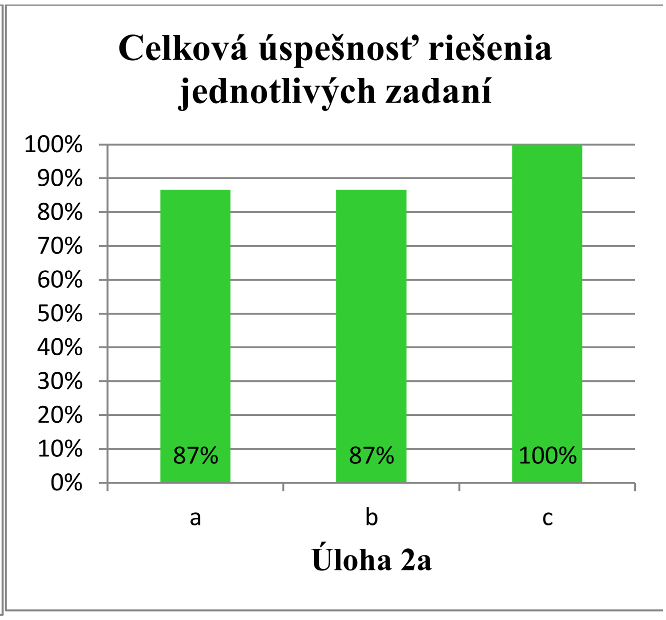
c) o polovicu zmenšenú.




Obr. 51 Zadanie úlohy 2a




Graf 7 Zadanie úlohy 2a



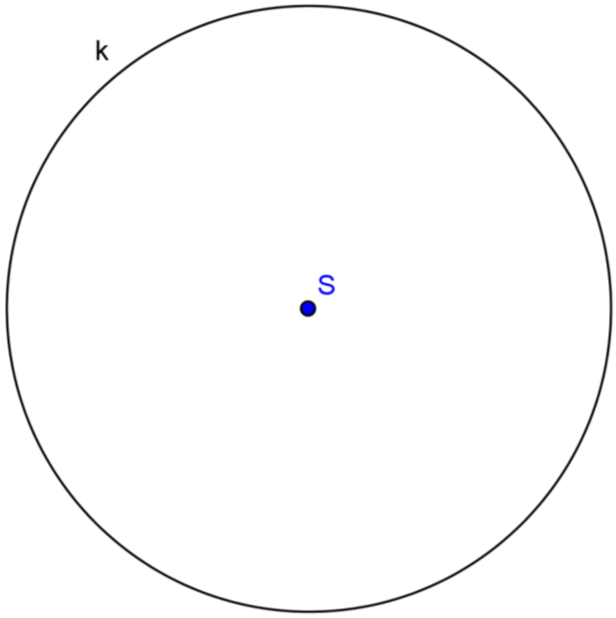

Graf 8 Celková úspešnosť

Riešenie daných úloh hodnotíme veľmi pozitívne. Väčšina žiakov nemala problémy so zväčšovaním a zmenšovaním úsečiek. Až trinásť žiakov vyriešilo zadanie $a$ a zadanie $b$ správne. Tretie zadanie bolo dokonca všetkými žiakmi vyriešené správne. Celkovo s úlohou nemali žiaci nejaký veľký problém. Nedostatky boli pozorované len pri presnosti rysovania a pri označovaní začiatočného a koncového bodu rysovaných úsečiek.

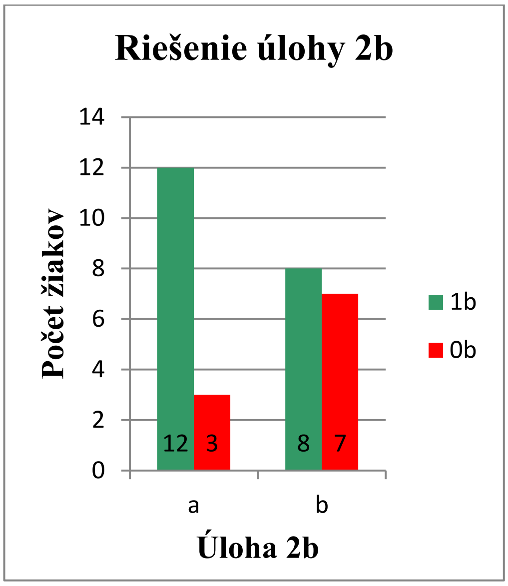
**2b)** Daný je kruh s polomerom $r = 4\ cm$.

a) Narysuj kruh 1,5 - krát zväčšený.

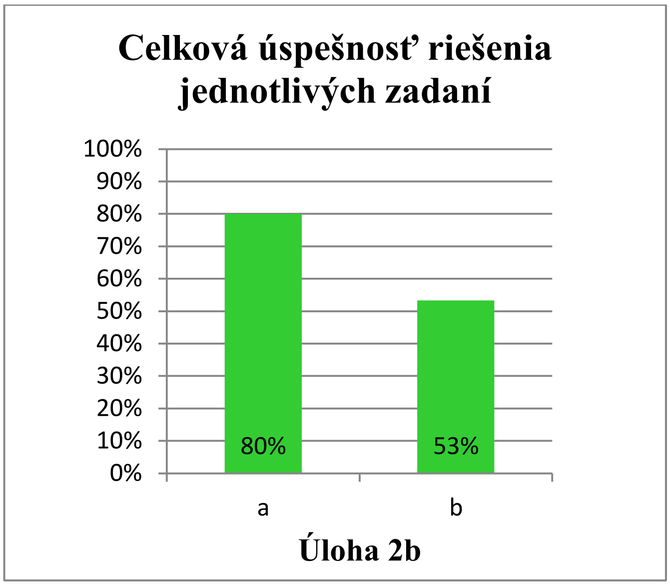
b) Narysuj kruh  0,5 krát zmenšený.




Obr. 52 Zadanie úlohy 2b




Graf 9 Zadanie úlohy 2b




Graf 10 Celková úspešnosť

S riešením zadania *a* úlohy 2b nemali žiaci problémy. Dvanásť žiakov kružnicu správne zväčšilo. V riešení zadania *b* bolo zistených viac chýb. Väčšina žiakov mala problém zmenšiť kružnicu, aj napriek tomu, že principiálne totožnú operáciu v predchádzajúcej úlohe (úloha 2a zadanie *c* – zmenšenie úsečky) vyriešili všetci žiaci bez problém. Najčastejšou chybou bolo, že žiaci narysovali kružnicu s polomerom o 0,5 cm menším.

## Úloha Kostolík

Hodnotenie úlohy č.1:

| | | |
|---|---|---|
| 0 bodov | - | nesprávne riešenie |
| 1 bod | - | čiastočne správne riešenie |
| 2 body | - | úplne správne riešenie |

Hodnotenie úlohy č.2:

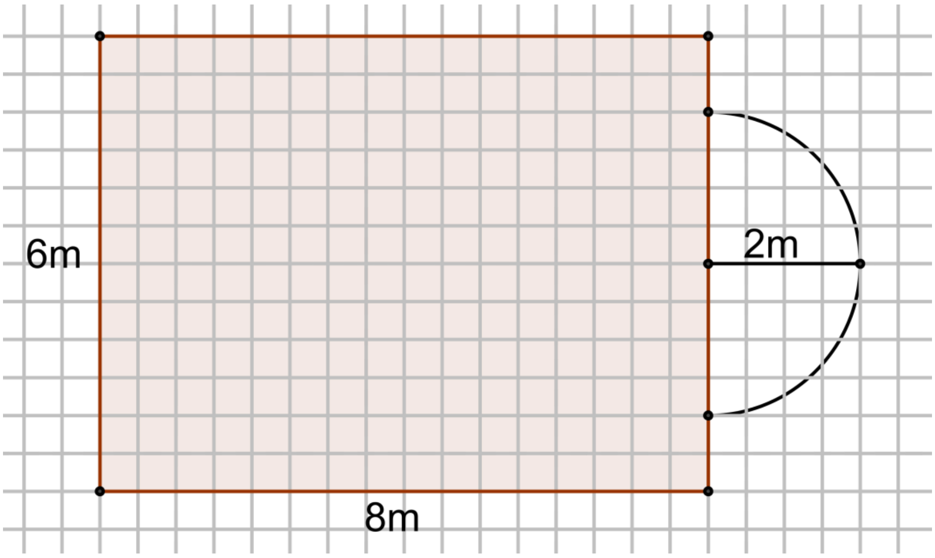
| | | |
|---|---|---|
| 0 bodov | - | nesprávne riešenie |
| 1 bod | - | správne riešenie |

**Kostolík**

Deti na školskom výlete za našimi pamiatkami navštívili aj známy Drážovský kostolík v blízkosti Nitry. Kostolík je postavený v románskom slohu. Jeho celková dĺžka je 10 metrov. Je zložený z jednej lode (obdĺžnik rozmerov 8m x 6m) a apsidy (polkruh nachádzajúci sa v strede kratšej strany lode s polomerom 2m).

Obr. 53 Drážovský kostolík

Na Obr. 54 je v štvorčekovej sieti narysovaný pôdorys Drážovského kostolíka.

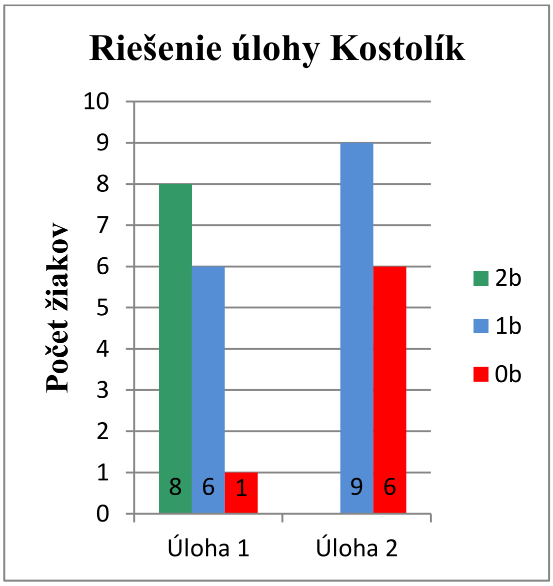



Obr. 54 Pôdorys

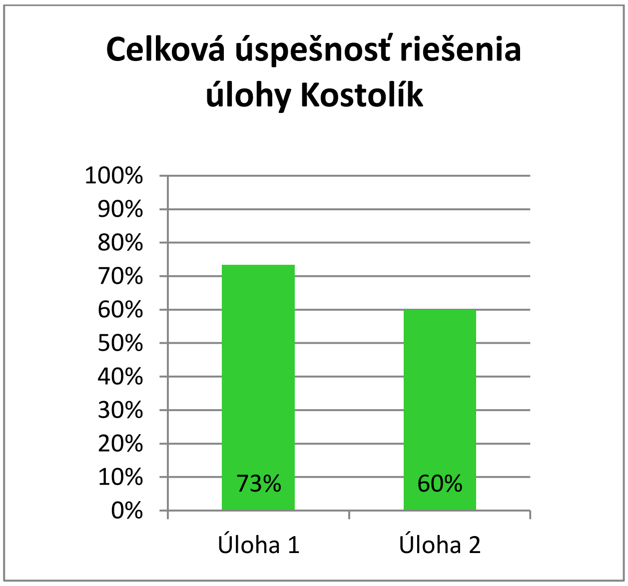
**Úloha č.1**: Vedel by si tento pôdorys zmenšiť o polovicu? Tiež si pomôž štvorčekovou sieťou.

**Úloha č.2**: Pokús sa vypočítať v akej mierke bol narysovaný pôdorys na Obr. 54, ak dĺžka strany jedného štvorčeka v sieti je 0,5 cm.

- 1cm na obrázku je v skutočnosti…………………




Graf 11 Riešenie úlohy Kostolík




Graf 12 Celková úspešnosť

Žiaci riešili úlohu 1 veľmi úspešne. Jej celková úspešnosť riešenia bola 73%. Osmi žiaci narysovali / nakreslili správny pôdorys a šiesti mali riešenie len s malými chybami. Ich chyby vyplývali aj z nepozornosti – napríklad určili jednu stranu obdĺžnikovej časti o šírku štvorčeka dlhšiu.

Riešenie úlohy 2 bolo podľa žiakov mierne náročnejšie. Pre žiakov siedmeho ročníka, by však už nemali predstavovať problém, nakoľko problematiku určenia mierky mapy mali v škole prebranú. Tri pätiny žiakov vypočítali mierku správne.

## Úloha Záhrada

Hodnotenie úlohy č.1:

0 bodov - nesprávne riešenie

1 bod - čiastočne správne riešenie

2 body - úplne správne riešenie

Hodnotenie úlohy č.2:

0 bodov - nesprávne riešenie

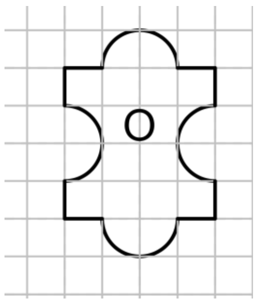
1 bod - čiastočne správne riešenie

2 body - úplne správne riešenie

**Záhrada**

Dávid bol cez leto na dovolenke v Indii. Zaujali ho krásne záhrady. Do školy doniesol obrázok tej najkrajšej. Zistil, že sa záhrada skladá z rovnakých častí, ktoré do seba jednoducho zapadajú – ako puzzle (viď Obr. 55). Dávid hneď aj doniesol nákres puzzle na štvorčekovom papieri (viď Obr. 56), ktorý pomenoval „obrazec $O$“.

Obr. 55 Geometrický vzor záhrady Anguri Bagh v pevnosti Arga (Arga, India)

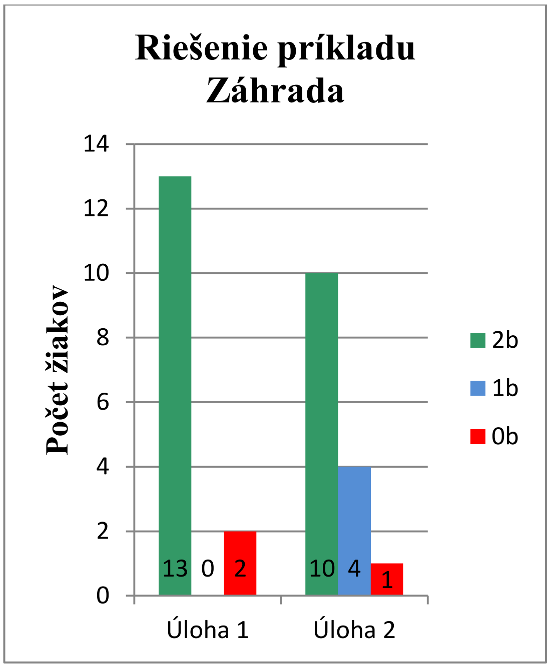



Obr. 56 „Obrazec O“

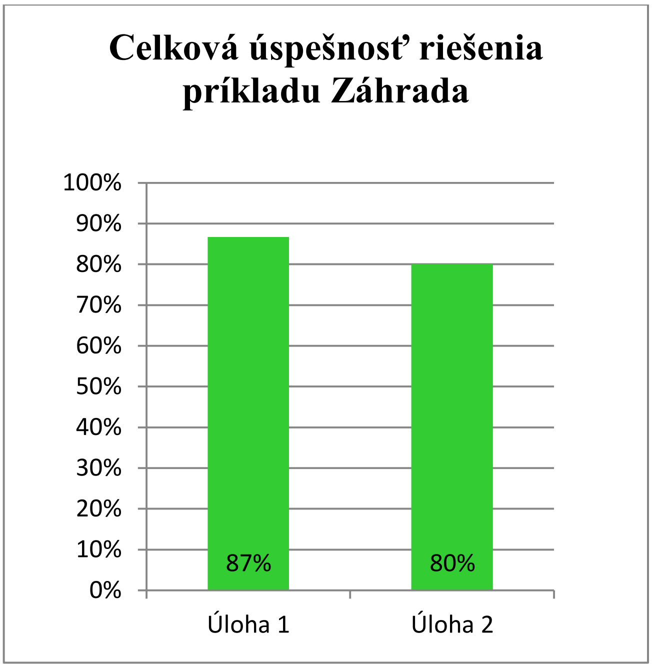
Následne zadal svojim spolužiakom tieto úlohy. Vyrieš ich aj ty.

**Úloha č. 1:** Narysuj/nakresli dvakrát zväčšený obrazec. Využi na to zväčšenú mriežku. (každý jeden štvorček v novej mriežke je dvojnásobne zväčšený).

**Úloha č. 2:** Zväčši obrazec v tej istej mriežke, v ktorej bol nakreslený Dávidov obrazec. (obrazec O bude dvakrát väčší ako na Obr. 56).




Graf 13 Riešenie príkladu Záhrada




Graf 14 Celková úspešnosť

Hodnotenie úspešnosti riešenia úlohy Záhrada predčilo očakávania nadobudnuté počas riešenia úlohy žiakmi. Najväčší počet doplňujúcich otázok bol spojený práve s riešením tejto úlohy. Môžeme predpokladať, že dôvodmi preto boli predovšetkým problémy s porozumením textu, množstvom opráv a následným nedostatkom času. Celkovo však danej úlohe žiaci rozumeli a vyriešili. Prevažná väčšina ju vyriešila správne.

Prvá časť úlohy Záhrada bola správne vyriešená trinástimi žiakmi. Druhú časť správne vyriešilo desať žiakov, štyrmi žiakmi bola úloha len čiastočne vyriešená. Stretli sme sa s malými chybami, ako napríklad zle otočený polkruh, nesprávny polomer kružnice, alebo nejednotný polomer (v rôznych miestach polkružnice iný).

## Zhodnotenie úloh žiakmi

Otázky pre žiaka:

1.V škále od 1 do 5 (1 je najľahšie, 5 najťažšie) ohodnoť jednotlivé úlohy podľa ich náročnosti (zakrúžkuj jedno z čísel)

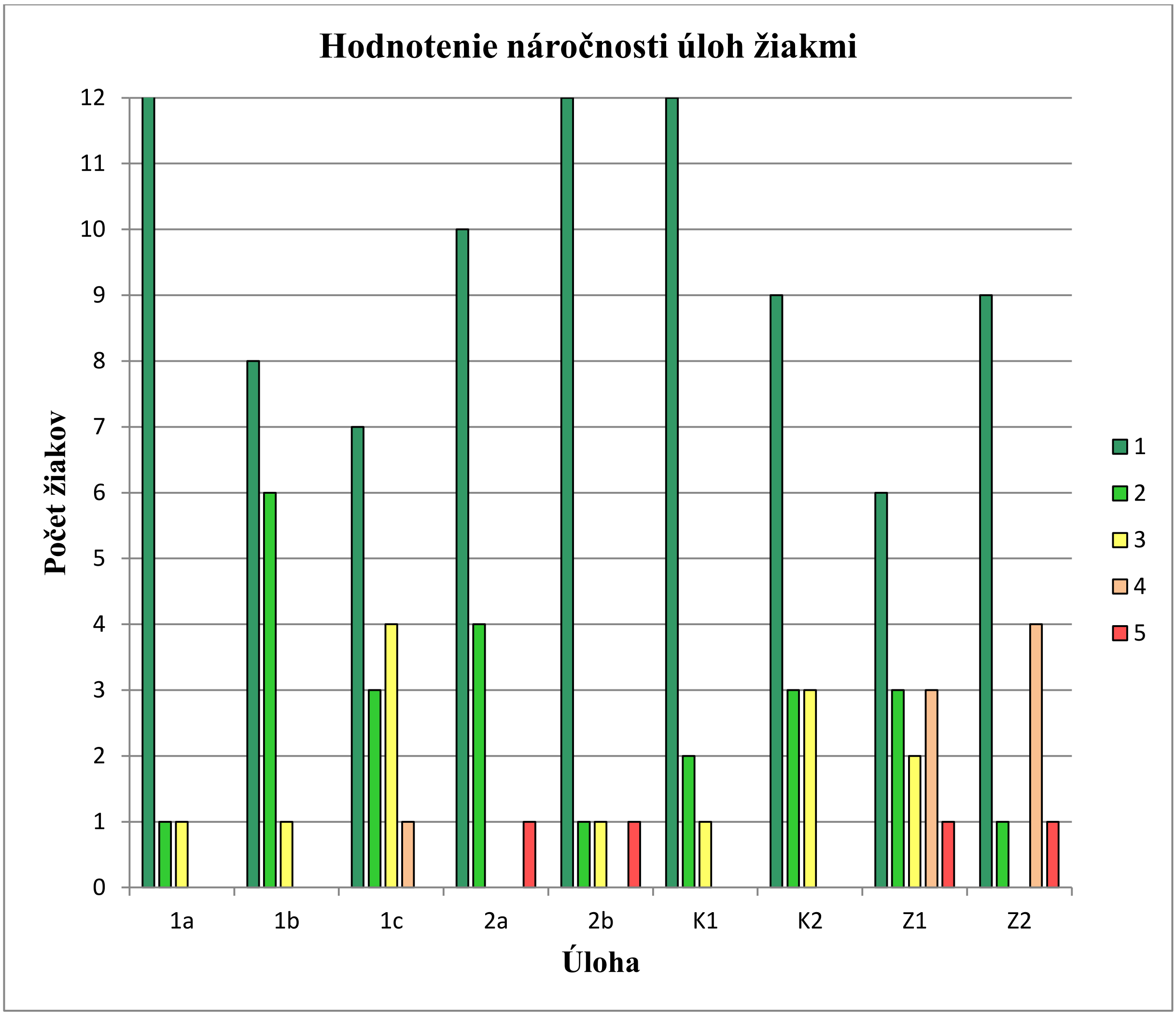
| | |
|---|---|
| Úloha 1a) ……………… 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1…………1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) ……………… 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2…………1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) ……………… 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1…………1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) ……………… 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2…………1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) ……………… 1 2 3 4 5 | |

2. S čím si mal najväčšie problémy?

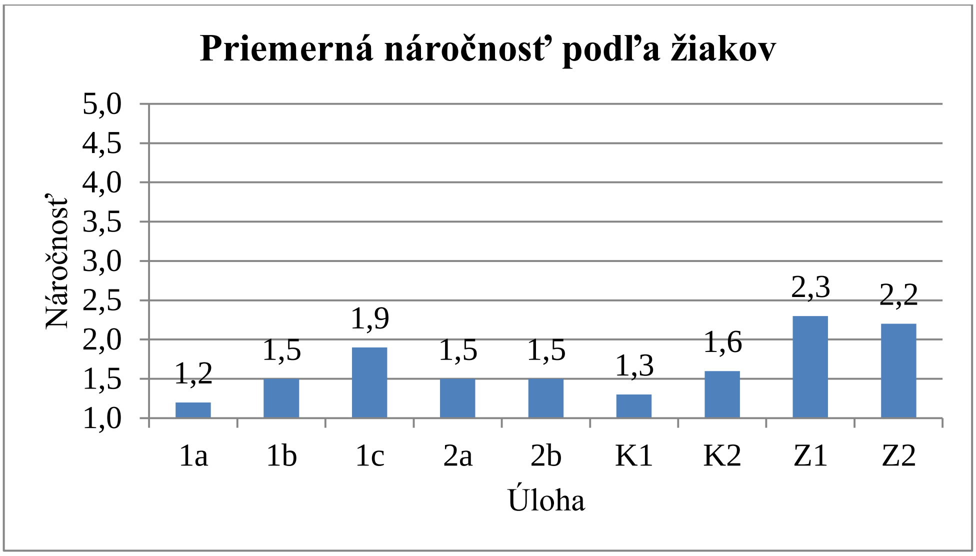
3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka? Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

4. Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

Ako môžeme vidieť, na záver žiaci hodnotili náročnosť každej úlohy samostatne. Žiakom bola predložená škála od 1 po 5, pričom 1 znamenalo najnižšiu a 5 najvyššiu náročnosť úlohy. Celkovo sa žiakom zdali úlohy nenáročné. Niektorí žiaci dokonca ohodnotili všetky úlohy číslom jedna, t.j. jednoduché. Domnievame sa, že žiaci hodnotili náročnosť úloh podľa toho, či danú úlohu vedeli alebo nevedeli vyriešiť. V Graf 15 môžeme vidieť hodnotenie náročnosti žiakmi. Na jednotlivé úlohy sme v grafe použili skratky. Pre označenie úloh Kostolík úloha č. 1 – K1; Kostolík úloha č. 2 – K2; Záhrada úloha č. 1 – Z1; Záhrada úloha č. 2 – Z2.




Graf 15 Hodnotenie náročnosti úloh žiakmi




Graf 16 Priemerná náročnosť podľa žiakov

Aj z grafov môžeme vidieť, že žiaci ohodnotili úlohy za menej náročné. Priemerná náročnosť všetkých úloh sa pohybovala medzi 1,2 až 2,3.

Do pracovného listu bolo zaradených niekoľko úloh na pozornosť. Napríklad v úlohe *1a* – druhé tvrdenie. Ako sme už vyššie uviedli, len traja žiaci zistili, že toto tvrdenie nie je pravdivé a len jeden ho vedel aj opraviť. Určité problémy mali žiaci aj s úlohou *1c* a s aplikačnými úlohami. Svedčia o tom aj odpovede žiakov na otázku 2: *„S čím si mal najväčšie problémy?“* Traja žiaci povedali, že s úlohou Kostolík a až šiesti uviedli úlohu Záhrada. Potvrdzuje to aj veľké množstvo otázok položených počas riešenia tieto úlohy. Minimálne deviatim žiakom bola táto úloha dodatočne vysvetľovaná. Je možné konštatovať, že žiaci nie sú zvyknutí na zadanie aplikačných úloh a u niektorých sa objavili problémy práve s porozumením textu. Žiaci niektoré úlohy podcenili a nevenovali im dostatok pozornosti.

Pri otázke, ktoré úlohy sa im najviac páčili, môžeme hovoriť o dvoch typoch odpovedí. Dvom tretinám žiakov sa páčili klasické úlohy 1 a 2. Svoju voľbu odôvodnili tým, že tieto úlohy boli pre nich ľahké a nemuseli nad nimi veľa premýšľať, jednej žiačke sa páčila možnosť pracovať s kružnicou. Aj tu môžeme vidieť ich nedbalosť pri riešení úloh, pretože niektoré úlohy boli náročnejšie ako samotné aplikačné. Klasické úlohy sa im zdali ľahšie pravdepodobne z dôvodu, že boli jasne a stručne zadané. Žiaci nemuseli toľko čítať a rozmýšľať nad zadaním ale priamo ho vypracovávali. Trom žiakom sa páčila úloha Kostolík a ďalším trom úloha Záhrada. Žiaci napísali, že tieto úlohy boli pre nich zaujímavé. Na hodine aj ústne potvrdili, že sa im páčil kontext úloh.

Aplikačné úlohy sa dajú žiakom predložiť rôznymi spôsobmi. Záleží hlavne na rozhodnutí učiteľa, čo chce danými úlohami dosiahnuť. Úlohy môže použiť ako motiváciu pred alebo následne po prebratí daného učiva. Môžu byť použité v rámci opakovania, alebo ako časť hry, ktorou chce učiteľ žiakov odreagovať a zároveň pripomenúť niektoré už dávnejšie prebrané učivá.

# Záver

V predkladanej práci sme rozobrali problematiku podobných zobrazení. Zorientovali sme sa v učive podobnosti na základných a stredných školách, pričom sme sa sústredili na tvorbu aplikačných úloh, z ktorých boli niektoré aj realizované na Základnej škole s materskou školou vo Svinnej pomocou vytvoreného pracovného listu.

Pri tvorbe aplikačných úloh sme sa sústredili aj na využiteľnosť týchto úloh v rámci samotného vyučovania. Do každej aplikačnej úlohy bola zaradená úloha na zväčšovanie a zmenšovanie pomocou štvorčekovej siete, k čomu nás priviedlo učivo zaradené do piateho ročníka: Zväčšovanie a zmenšovanie útvarov v štvorčekovej sieti. Terminológia tvorených úloh bola prispôsobená učebniciam a ich spôsobu vyjadrovania sa.

Naša práca nie je zbierkou veľkého množstva úloh. Ukazuje cestu inému spôsobu nazerania na matematiku. Je to cesta hľadania a prispôsobovania učiva faktorom a podnetom z okolia, či už využitím poznatkov z rôznych exkurzií, z dovoleniek žiakov, alebo z iných vyučovacích predmetov ako napr. geografie.

Pri ukážkovom riešení úloh sme využívali program Geogebra. Predkladá sa nám tak ďalšia možnosť riešenia daných úloh a ich samotného podania a prezentovania žiakom – napr. pomocou programu Geogebra.

Pri riešení pracovného listu pracovali žiaci samostatne. Zistili sme, že žiaci danému učivu logicky rozumejú, hoci dané učivo priamo nepreberali a s niektorými výrazmi sa ani na hodine matematiky ešte nestretli. Celkovo v triede panovala dobrá klíma a žiaci si pri ich vypracovaní oddýchli. Na konci hodiny vznikol čas na diskusiu s niektorými žiakmi. Niektorým žiakom sa aplikačné úlohy páčili a úlohy vypracovali so záujmom. Väčšina žiakov však na aplikačné úlohy reagovala menej pozitívne a skôr sa im páčili štandardné úlohy, ktorých zadanie bolo jednoduchšie.

Každopádne si myslíme, že aplikačné úlohy sú obohatením samotného vyučovania. Sú prostriedkom k nenútenému získavaniu vedomosti aj z iných oblasti života, obohacujú aj všeobecný prehľad žiakov.

Zaradenie úloh s reálnym kontextom do vyučovania je podľa nás viac než žiaduce. Hľadanie zaujímavých námetov a formulovanie úloh je iste náročné. Ich cenu zistíme až priamo na hodinách v podobe väčšieho záujmu žiakov. Otvára sa pred nami nová cesta hľadania nových komplexnejších úloh. Je pravda, že aj na hodine sme sa stretli s istým nezáujmom o aplikačné úlohy, ale dúfame, že tento nezáujem vznikol práve zo strachu z nepoznaného nového učiva, ktorý by sa odstránil častejším zadávaním aplikačných úloh.

# Zoznam použitej literatúry

BRINCKOVÁ, J. 2006. Meníme postoje študentov k výkonom v matematike na 2. stupni ZŠ. In. *Matematika v škole dnes a zajtra*. Zborník príspevkov. Ružomberok : Katolícka univerzita v Ružomberku Pedagogická fakulta, 2006. ISBN 80-8084-066-0. s. 16 – 20.

HECHT, T. a ČERNEK, P. 2002. *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ, zošit 2 : Geometrické zobrazenia* : 2. zv. Bratislava : Orbis Pictus Istropolitana, 2002. 64 s. ISBN 80-7158-404-5.

KUBÁČEK, Z. 2010. *Matematika pre 1. ročník gymnázia a 5. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. 2. časť.* Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2010. 143 s. ISBN 978-80-10-01827-7.

RUMANOVÁ, L. – VALLO, D. 2009. *Geometria – vybrané kapitoly: zhodné a podobné zobrazenia.* Nitra : Univerzita Konštantína Filozofa, (Prírodovedec, č. 376), 2009. 104 s. ISBN 978-80-8094-567-1.

ŠEDIVÝ, O. 2001. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia.* Nitra: Fakulta prírodných vied UKF, 2001. 123 s. ISBN 80-8050-417-2.

ŠEDIVÝ, O a kolektív. 2003a. *Matematika pre 7.ročník základných škôl – 1.časť.* Bratislava: SPN, 2003. 144 s. ISBN 80-10-00125-2.

ŠEDIVÝ, O a kolektív. 2003b. *Matematika pre 9.ročník základných škôl – 1.časť.* Bratislava: SPN, 2003. 119 s. ISBN 80-10-00126-0.

ŠEDIVÝ, O. a kolektív. 2007. *STEREOMETRIA – umenie vidieť a predstavovať si priestor.* Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, 2007. 106 s. ISBN 978-80-8094-180-2.

ŠEDIVÝ, O. – VALLO, D. 2011. *Geometria III.* Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, 2011. 158 s. ISBN 978-80-8094-894-8.

ŽABKA, J. – Černek, P. 2010. *Matematika pre 5. ročník ZŠ 2.časť.* Orbis Pictus Istropolitana Bratislava, 2010. 120 s. ISBN 978-80-7158-989-1

ŽABKA, J. – Černek, P. 2011. *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2.ročník gymnázií s osemročným štúdiom - 2.časť.* Orbis Pictus Istropolitana Bratislava, 2011. 136 s. ISBN 978-80-8120-050-2

Internetový zdroj:

Školský vzdelávací program (ISCED 3A – gymnázium) – matematika 1. - 3. ročník 4-ročného štúdia. [online]. Lipany : GYMNÁZIUM LIPANY, 2010.

[cit. 2012-11-26]. Dostupné na internete: <http://www.gymlipany.edu.sk/skvp/ SkVP_1011_MAT_1_3_rocnik.pdf>

Štátny vzdelávací program – matematika (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami) : Príloha ISCED 2. [online]. Bratislava : Štátny pedagogický ústav, 2010.

[cit. 2012-11-26]. Dostupné na internete: <http://www.statpedu.sk/files/documents/ svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf>.

Štátny vzdelávací program – matematika (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami) : Príloha ISCED 3. [online]. Bratislava : Štátny pedagogický ústav, 2009.

[cit. 2012-11-26]. Dostupné na internete: <http://www.statpedu.sk/files/documents/ svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf>.

KOČOVÁ, K.,: Využití podobnosti.

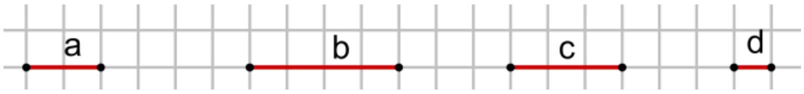
[cit. 2012-1-31]. Dostupné na internete: <http://dum.rvp.cz/materialy/vyuziti-podobnosti.html>.

# Prílohy

# Príloha A: Pracovný list

**Úloha č. 1**: Ktoré tvrdenia sú pravdivé/nepravdivé? Nepravdivé tvrdenia oprav na pravdivé.

**1a)** Sú dané úsečky *a, b, c, d*.



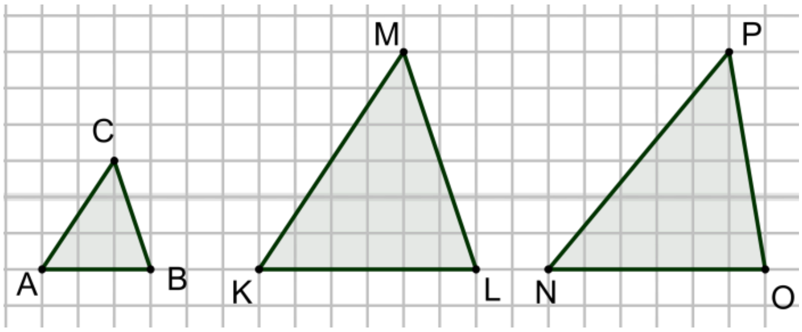

Zlé preškrtni

-Úsečka *b* je trikrát dlhšia ako úsečka *a*. *pravdivé/nepravdivé*

-Úsečka *c* nie je 1,5-krát dlhšia ako úsečka *a*. *pravdivé/nepravdivé*

-Úsečka *d* je o polovicu kratšia ako úsečka *a*. *pravdivé/nepravdivé*

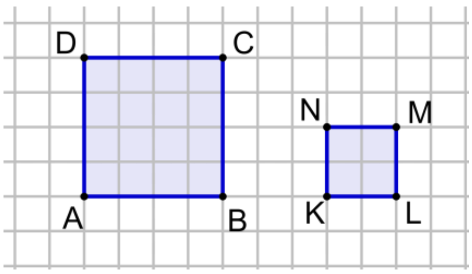
**1b)** Sú dané: $\triangle ABC, \triangle KLM, \triangle NOP$.




-Trojuholník $KLM$ je dvakrát väčší ako $\triangle ABC$. *pravdivé/nepravdivé*

-Trojuholník $NOP$ je dvakrát väčší ako $\triangle ABC$. *pravdivé/nepravdivé*

**1c)** Dané sú štvorce $ABCD\ a\ KLM$.

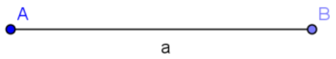



-Štvorec $KLMN$ je 2-krát zväčšený štvorec $ABCD$. *pravdivé/nepravdivé*

-Štvorec $KLMN$ je o polovicu menší ako štvorec $ABCD$. *pravdivé/nepravdivé*

**Úloha č. 2:**

**2a)** Daná je úsečka $a = 4cm$.




- Narysuj úsečku:

    a) dvakrát zväčšenú;

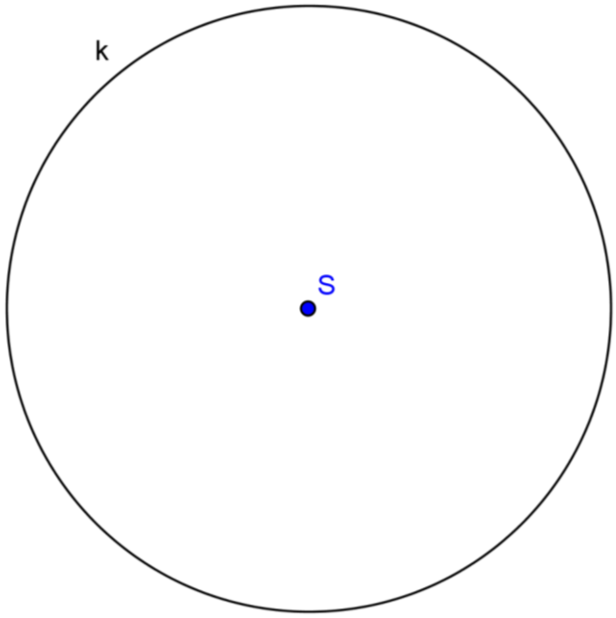
    b) 2,5 – krát zväčšenú;

    c) o polovicu zmenšenú.

**2b)** Daný je kruh s polomerom $r = 4\ cm$.

a) Narysuj kruh 1,5 - krát zväčšený.

b) Narysuj kruh  0,5 krát zmenšený.

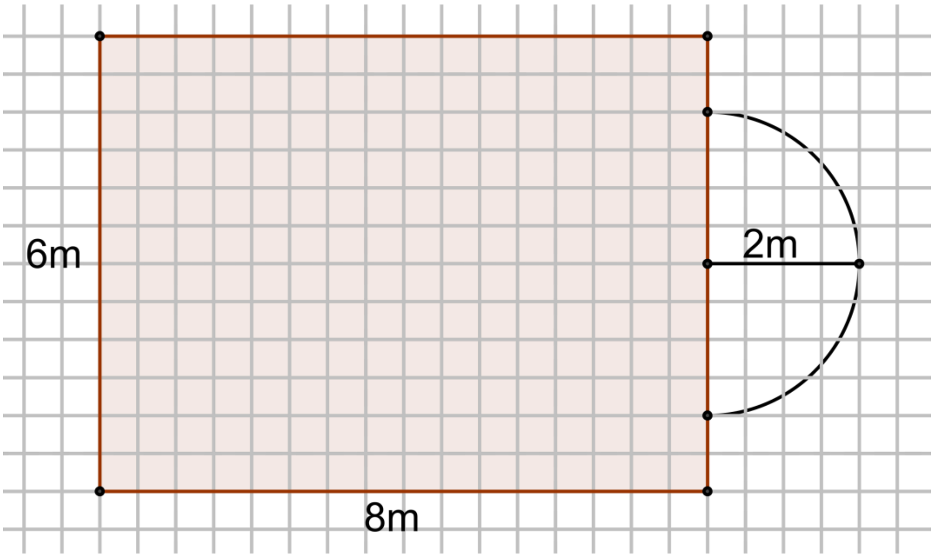


**Kostolík**

Deti na školskom výlete za našimi pamiatkami navštívili aj známy Drážovský kostolík v blízkosti Nitry. Kostolík je postavený v románskom slohu. Jeho celková dĺžka je 10 metrov. Je zložený z jednej lode (obdĺžnik rozmerov 8m x 6m) a apsidy (polkruh nachádzajúci sa v strede kratšej strany lode s polomerom 2m).


Obr. 1: Drážovský kostolík

Na obrázku je v štvorčekovej sieti narysovaný pôdorys Drážovského kostolíka.



Obr. č. 2: Pôdorys

**Úloha č.1**: Vedel by si tento pôdorys zmenšiť o polovicu? Tiež si pomôž štvorčekovou sieťou.

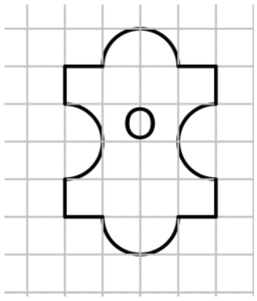
**Úloha č.2**: Pokús sa vypočítať v akej mierke bol narysovaný pôdorys na Obr. č. 2, ak dĺžka strany jedného štvorčeka v sieti je 0,5 cm.

- 1cm na obrázku je v skutočnosti…………………

**Záhrada**

Dávid bol cez leto na dovolenke v Indii. Zaujali ho krásne záhrady. Do školy doniesol obrázok tej najkrajšej. Zistil, že sa záhrada skladá z rovnakých častí, ktoré do seba jednoducho zapadajú – ako puzzle (viď Obr. 203). Dávid hneď aj doniesol nákres puzzle na štvorčekovom papieri (viď Obr. 214), ktorý pomenoval „obrazec $O$“.

Obr. 3 Geometrický vzor záhrady Anguri Bagh v pevnosti Arga (Arga, India)




Obr. 4 „Obrazec O“

Následne zadal svojim spolužiakom tieto úlohy. Vyrieš ich aj ty.

**Úloha č. 1:** Narysuj/nakresli dvakrát zväčšený obrazec. Využi na to zväčšenú mriežku. (každý jeden štvorček v novej mriežke je dvojnásobne zväčšený).

**Úloha č. 2:** Zväčši obrazec v tej istej mriežke, v ktorej bol nakreslený Dávidov obrazec. (obrazec O bude dvakrát väčší ako na obrázku 4)

Otázky pre žiaka:

1.V škále od 1 do 5 (1 je najľahšie, 5 najťažšie) ohodnoť jednotlivé úlohy podľa ich náročnosti (zakrúžkuj jedno z čísel)

| | |
|---|---|
| Úloha 1a) ……………… 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1…………1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) ……………… 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2…………1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) ……………… 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1…………1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) ……………… 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2…………1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) ……………… 1 2 3 4 5 | |

2. S čím si mal najväčšie problémy?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

## Príloha B: Ukážky žiackych riešení pracovného listu

**Úloha č. 1a**

-Úsečka *b* je trikrát dlhšia ako úsečka *a*. dvakrát pravdivé/nepravdivé

-Úsečka *c* nie je 1,5-krát dlhšia ako úsečka *a*. je pravdivé/nepravdivé

-Úsečka *d* je o polovicu kratšia ako úsečka *a*. pravdivé/nepravdivé

-Úsečka *b* je trikrát dlhšia ako úsečka *a*. pravdivé/nepravdivé

-Úsečka *c* nie je 1,5-krát dlhšia ako úsečka *a*. pravdivé/nepravdivé

-Úsečka *d* je o polovicu kratšia ako úsečka *a*. pravdivé/nepravdivé

-Úsečka *b* je trikrát dlhšia ako úsečka *a*. nepravdivé ~~pravdivé~~/nepravdivé

Úsečka b je dvakrát dlhšia ako úsečka a.

-Úsečka *c* nie je 1,5-krát dlhšia ako úsečka *a*. pravda pravdivé/~~nepravdivé~~

-Úsečka *d* je o polovicu kratšia ako úsečka *a*. pravda pravdivé/~~nepravdivé~~

-Úsečka *b* je ~~trikrát~~ dvakrát dlhšia ako úsečka *a*. ~~pravdivé~~/nepravdivé

-Úsečka *c* nie je 1,5-krát dlhšia ako úsečka *a*. pravdivé/~~nepravdivé~~

-Úsečka *d* je o polovicu kratšia ako úsečka *a*. pravdivé/~~nepravdivé~~

**Úloha č. 1b**

-Trojuholník $KLM$ je dvakrát väčší ako $\triangle ABC$. pravdivé/nepravdivé

-Trojuholník $NOP$ nie je dvakrát väčší ako $\triangle ABC$. pravdivé/nepravdivé

-Trojuholník $KLM$ je dvakrát väčší ako $\triangle ABC$. pravdivé/~~nepravdivé~~

-Trojuholník $NOP$ je dvakrát väčší ako $\triangle ABC$. ~~pravdivé~~/nepravdivé

-Trojuholník $KLM$ je dvakrát väčší ako $\triangle ABC$. pravdivé/nepravdivé

-Trojuholník $NOP$ je dvakrát väčší ako $\triangle ABC$. pravdivé/nepravdivé

**Úloha č. 1c**

-Štvorec $KLMN$ je 2-krát zväčšený štvorec $ABCD$. je zmenšený 4-krát pravdivé/nepravdivé

-Štvorec $KLMN$ je o polovicu menší ako štvorec $ABCD$. je zmenšený 4-krát pravdivé/nepravdivé

-Štvorec $KLMN$ je 2-krát zväčšený štvorec $ABCD$. pravdivé/~~nepravdivé~~

-Štvorec $KLMN$ je o ~~polovicu~~ $\frac{3}{4}$ menší ako štvorec $ABCD$. ~~pravdivé~~/nepravdivé

-Štvorec $KLMN$ je 2-krát zväčšený štvorec $ABCD$. zmenšený ~~pravdivé~~/nepravdivé

-Štvorec $KLMN$ je o polovicu menší ako štvorec $ABCD$. o štvrtinu ~~pravdivé~~/nepravdivé

-Štvorec $KLMN$ je 2-krát zväčšený štvorec $ABCD$. pravdivé/nepravdivé

-Štvorec $KLMN$ je o polovicu menší ako štvorec $ABCD$. pravdivé/nepravdivé

-Štvorec $KLMN$ je 2-krát zväčšený štvorec $ABCD$. pravdivé/nepravdivé

-Štvorec $KLMN$ je o polovicu menší ako štvorec $ABCD$. zmenšený pravdivé/nepravdivé

**Úloha č. 2a**

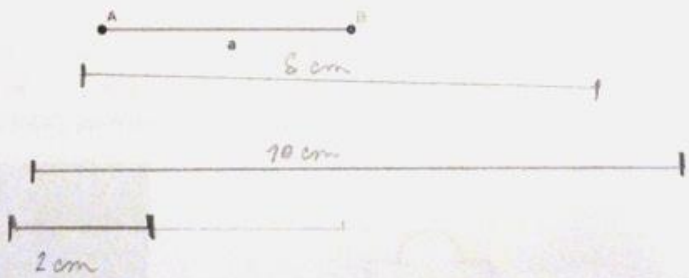
**2a)** Daná je úsečka $a = 4cm$.

- Narysuj úsečku:

a) dvakrát zväčšenú;

b) 2,5 – krát zväčšenú;

c) o polovicu zmenšenú.



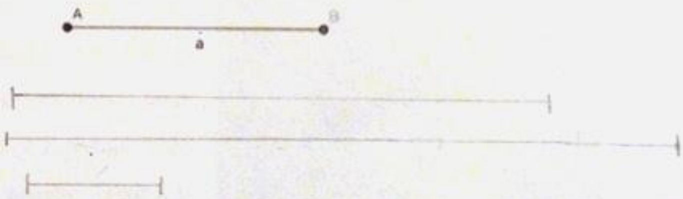

**2a)** Daná je úsečka $a = 4cm$.

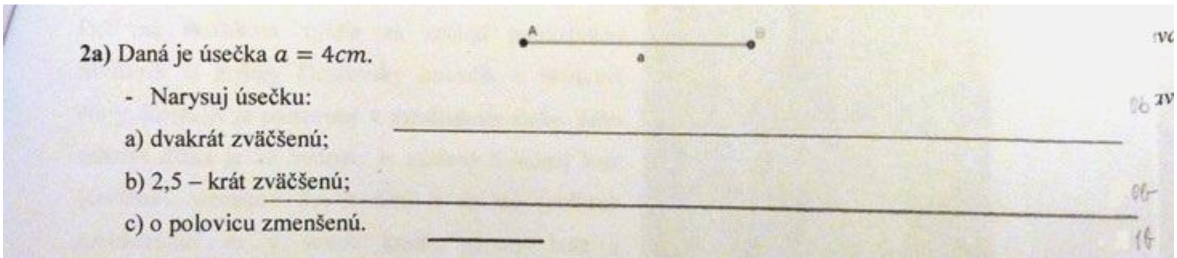
- Narysuj úsečku:

a) dvakrát zväčšenú;

b) 2,5 – krát zväčšenú;

c) o polovicu zmenšenú.




**2a)** Daná je úsečka $a = 4cm$.

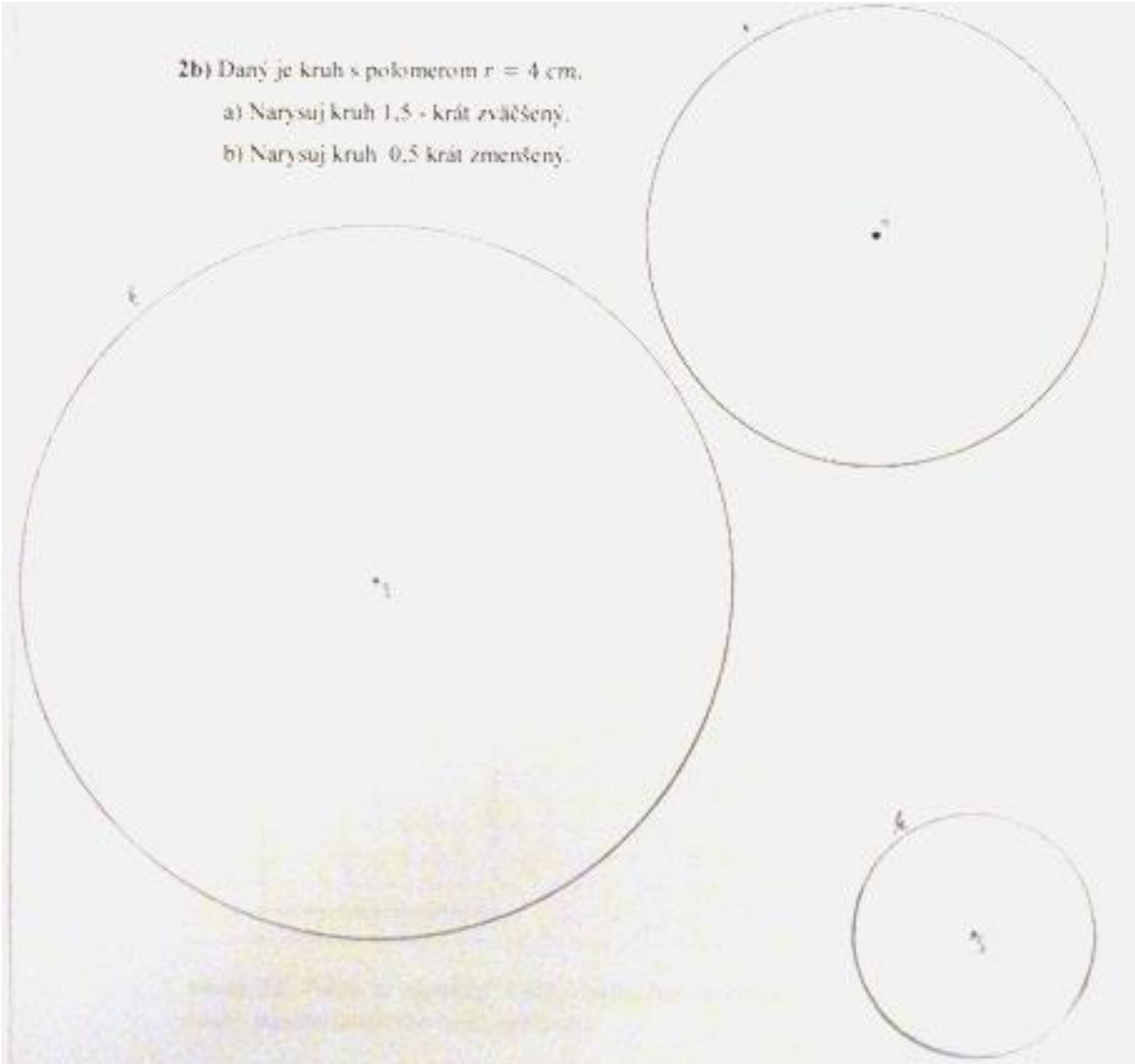
- Narysuj úsečku:

a) dvakrát zväčšenú;

b) 2,5 – krát zväčšenú;

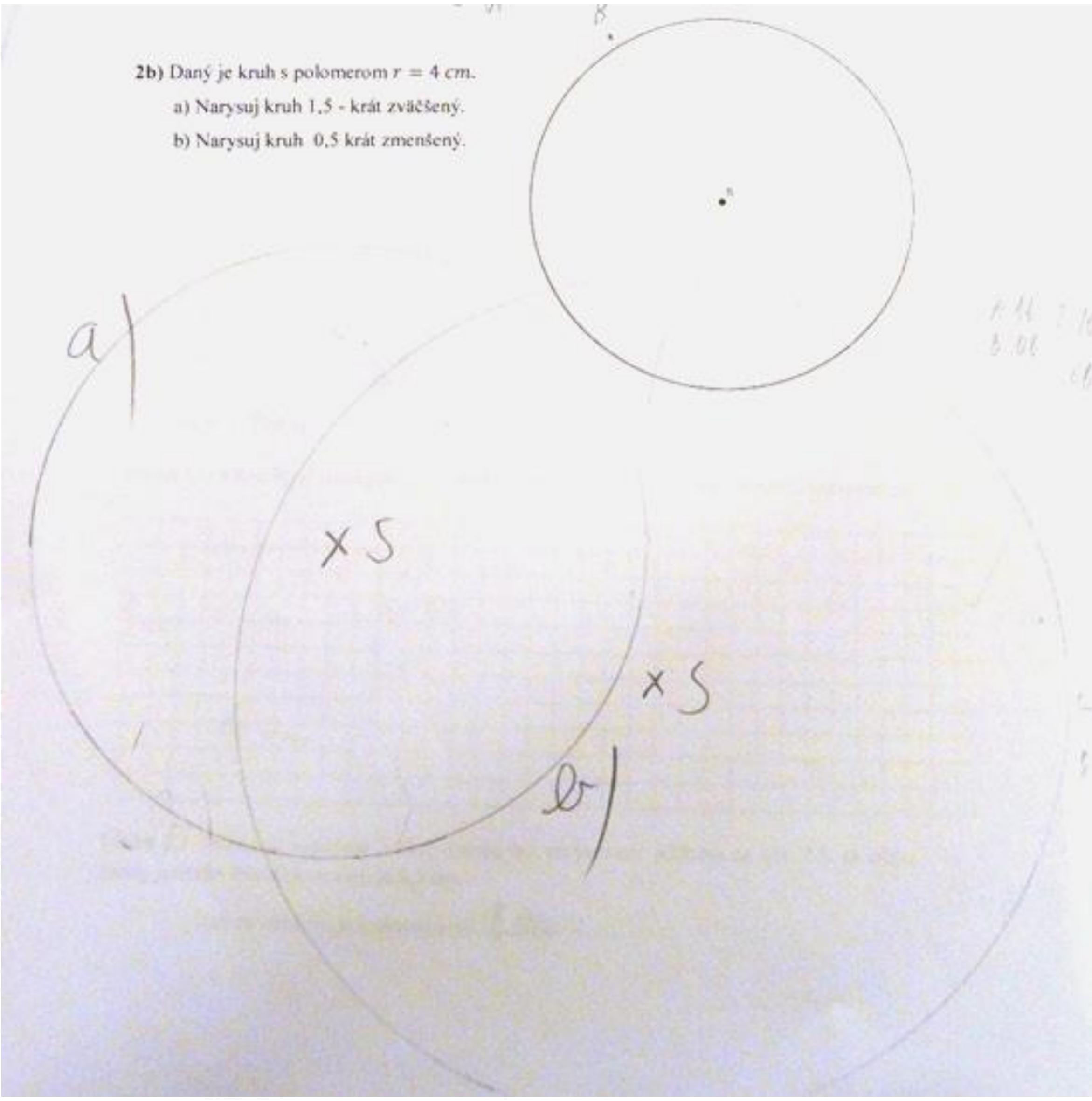
c) o polovicu zmenšenú.

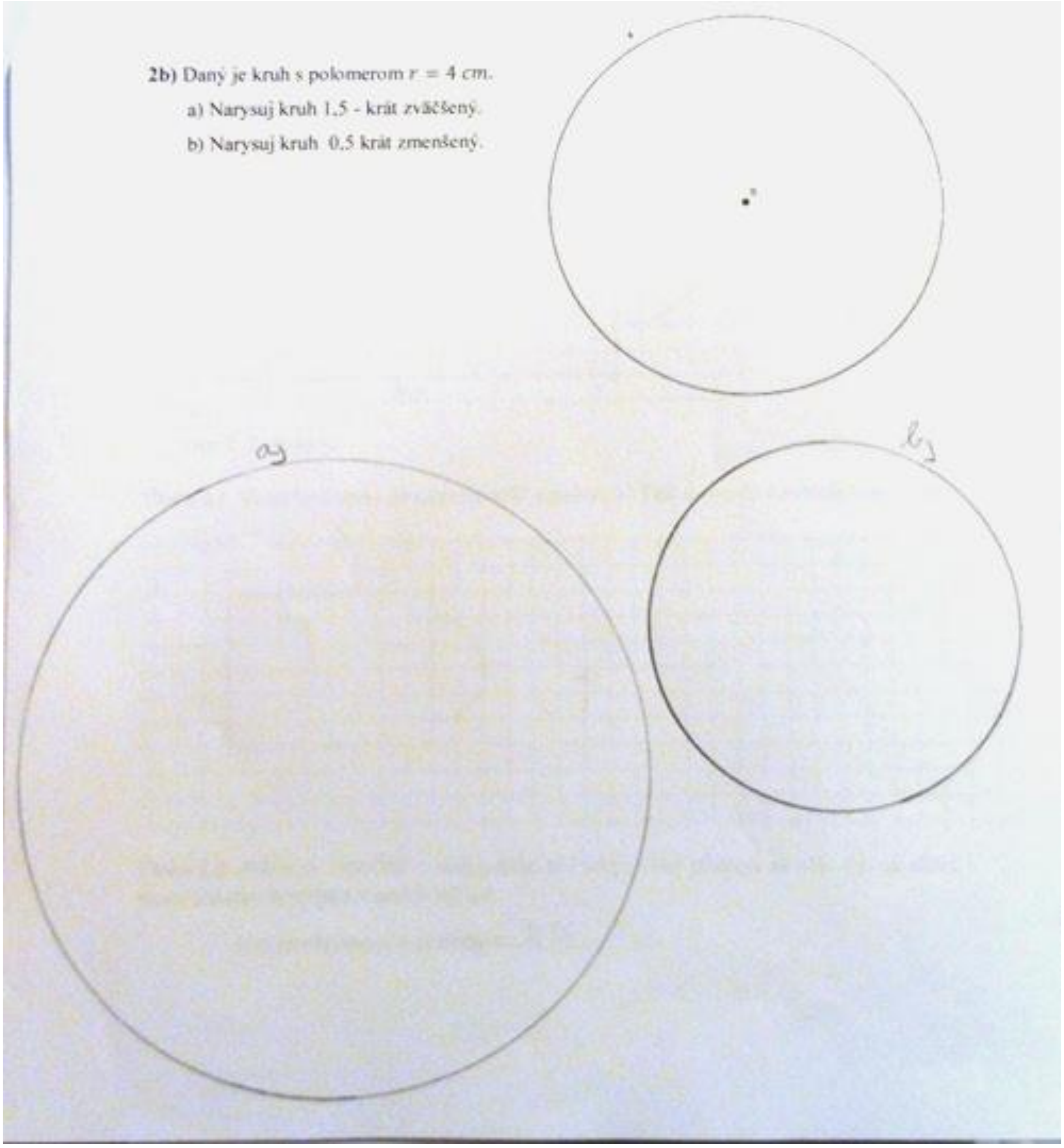
**Úloha č. 2b**


**2b)** Daný je kruh s polomerom $r = 4\ cm$.

a) Narysuj kruh 1,5 - krát zväčšený.

b) Narysuj kruh 0,5 krát zmenšený.


2b) Daný je kruh s polomerom $r = 4\ cm$.
a) Narysuj kruh 1,5 - krát zväčšený.
b) Narysuj kruh 0,5 krát zmenšený.
a)
×S
×S
b)


**2b)** Daný je kruh s polomerom $r = 4\ cm$.

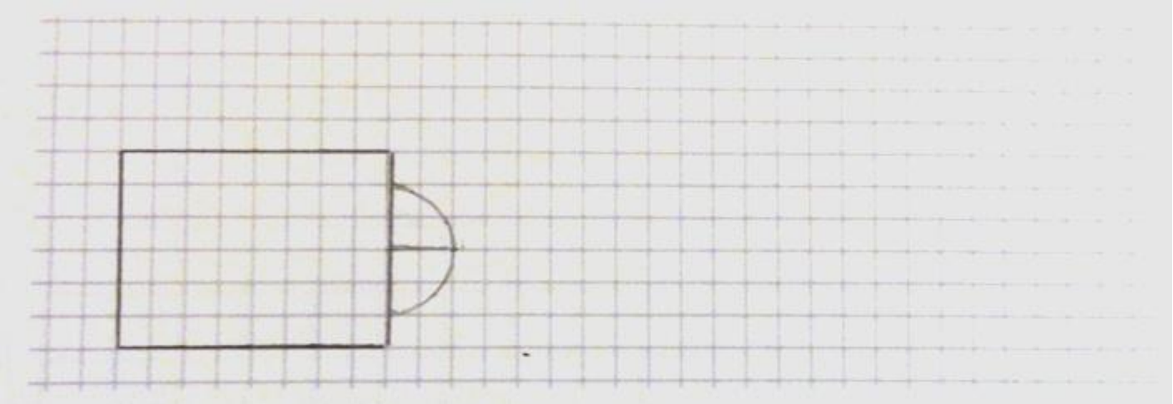
a) Narysuj kruh 1,5 - krát zväčšený.

b) Narysuj kruh 0,5 krát zmenšený.

a)

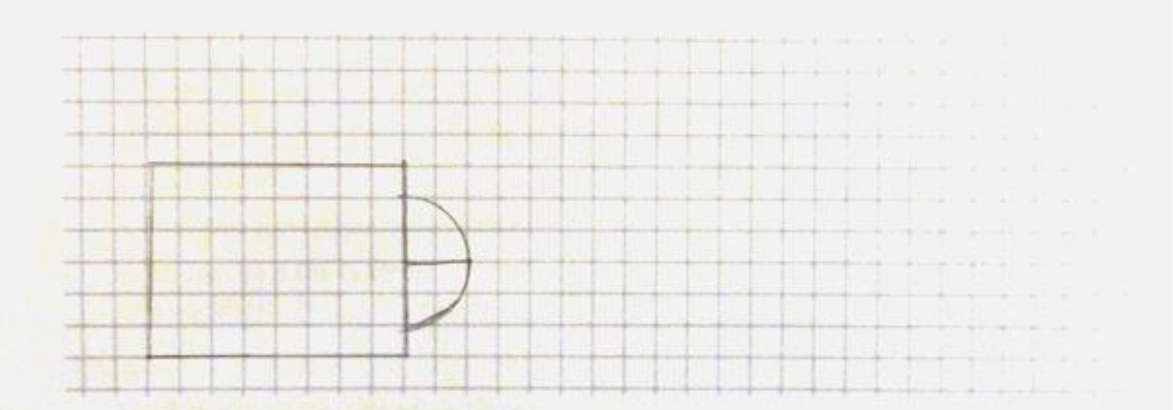
b)

**Úloha Kostolík**



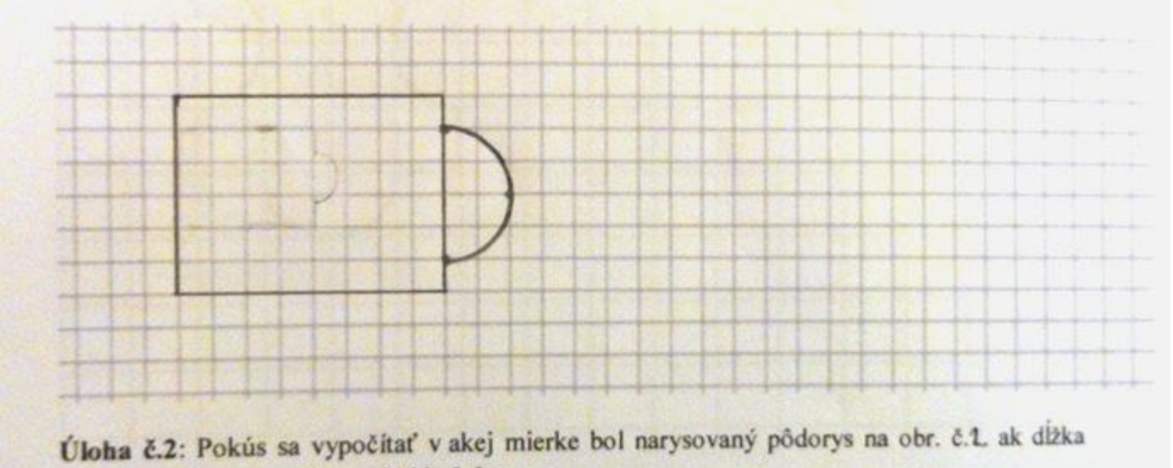
**Úloha č.2**: Pokús sa vypočítať v akej mierke bol narysovaný pôdorys na obr. č.1. ak dĺžka strany jedného štvorčeka v sieti je 0,5 cm.

- 1cm na obrázku je v skutočnosti...1 meter = 100 cm



**Úloha č.2**: Pokús sa vypočítať v akej mierke bol narysovaný pôdorys na obr. č.1. ak dĺžka strany jedného štvorčeka v sieti je 0,5 cm.

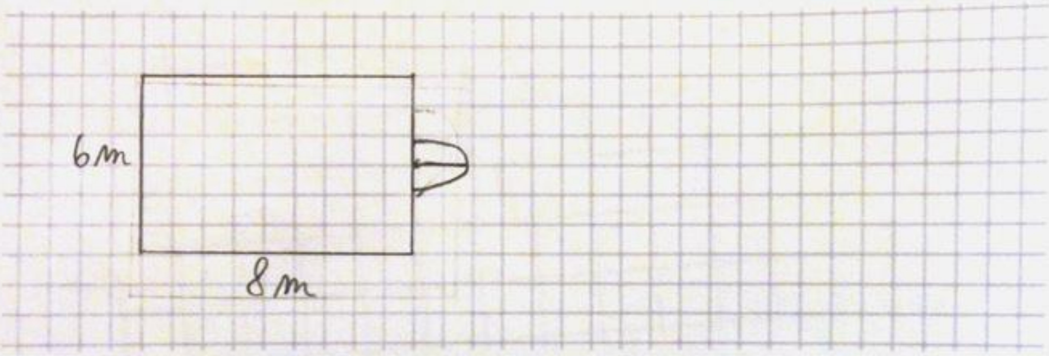
- 1cm na obrázku je v skutočnosti...1 : 50000.....



**Úloha č.2**: Pokús sa vypočítať v akej mierke bol narysovaný pôdorys na obr. č.1. ak dĺžka strany jedného štvorčeka v sieti je 0,5 cm.

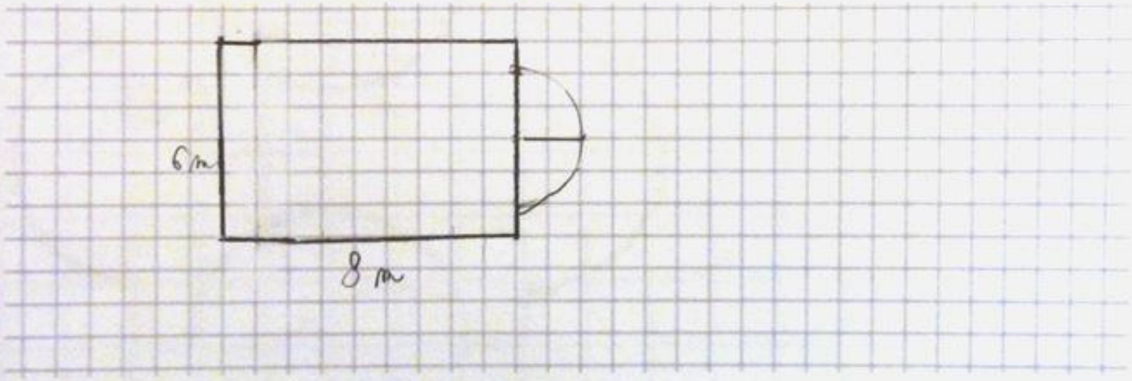
- 1cm na obrázku je v skutočnosti.1:16...............

**Úloha č.1**: Vedel by si tento pôdorys zmenšiť o polovicu? Tiež si pomôž štvorčekovou sieťou



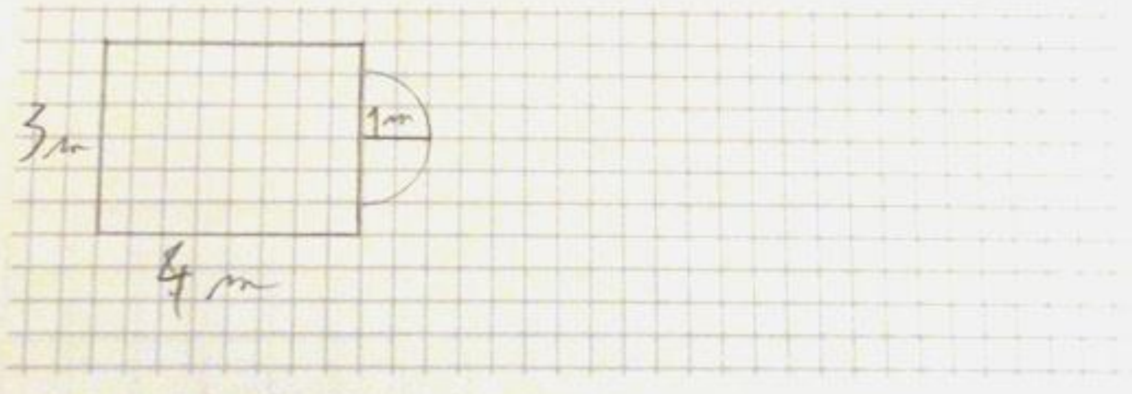

**Úloha č.2**: Pokús sa vypočítať v akej mierke bol narysovaný pôdorys na obr. č.1 ak dĺžka strany jedného štvorčeka v sieti je 0,5 cm.

- 1cm na obrázku je v skutočnosti....0,5............




**Úloha č.2**: Pokús sa vypočítať v akej mierke bol narysovaný pôdorys na obr. č.1 ak dĺžka strany jedného štvorčeka v sieti je 0,5 cm.

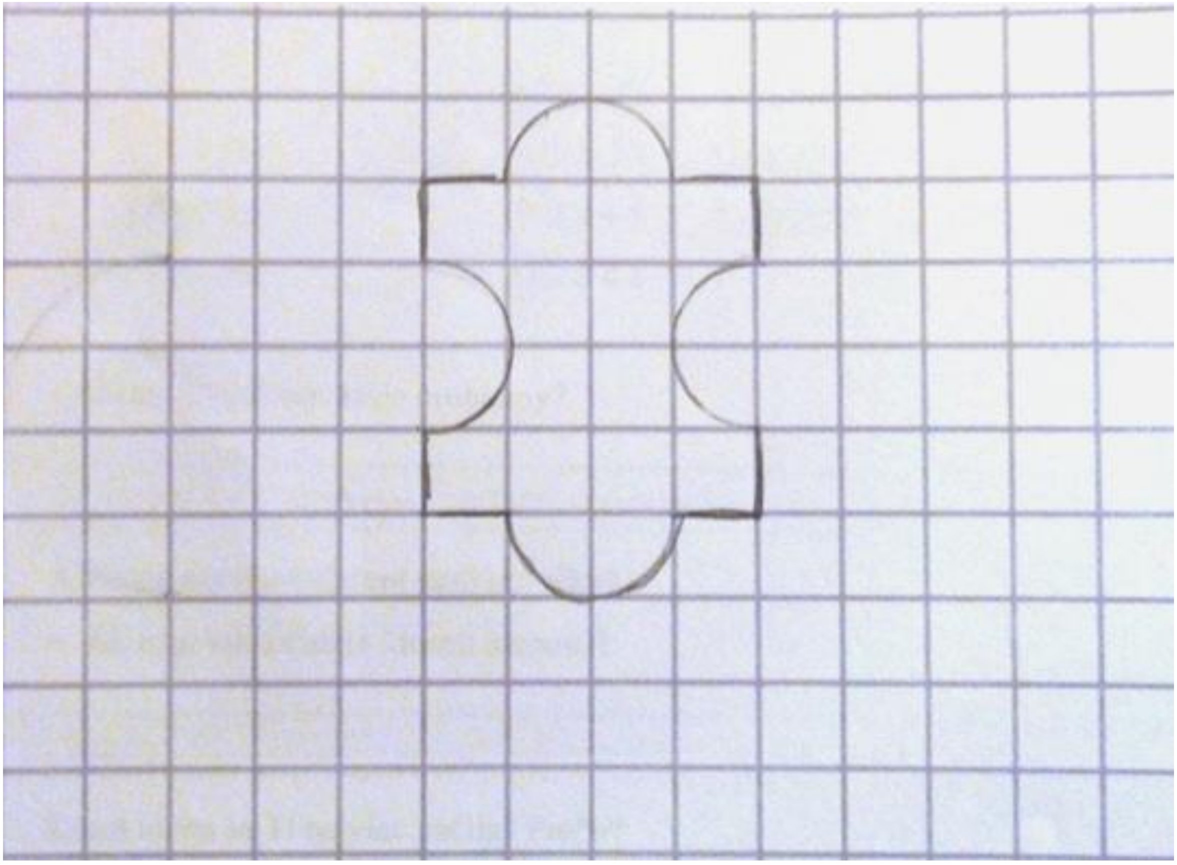
- 1cm na obrázku je v skutočnosti...28 cm.....

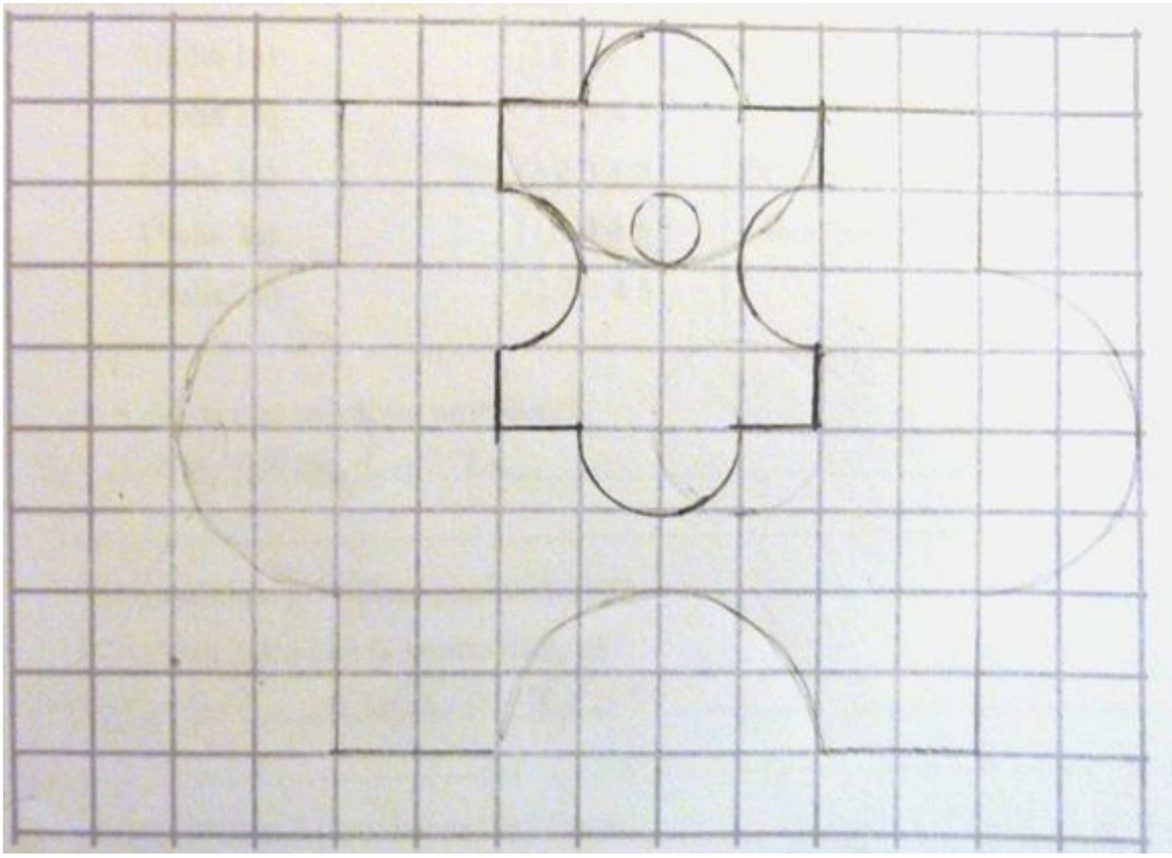


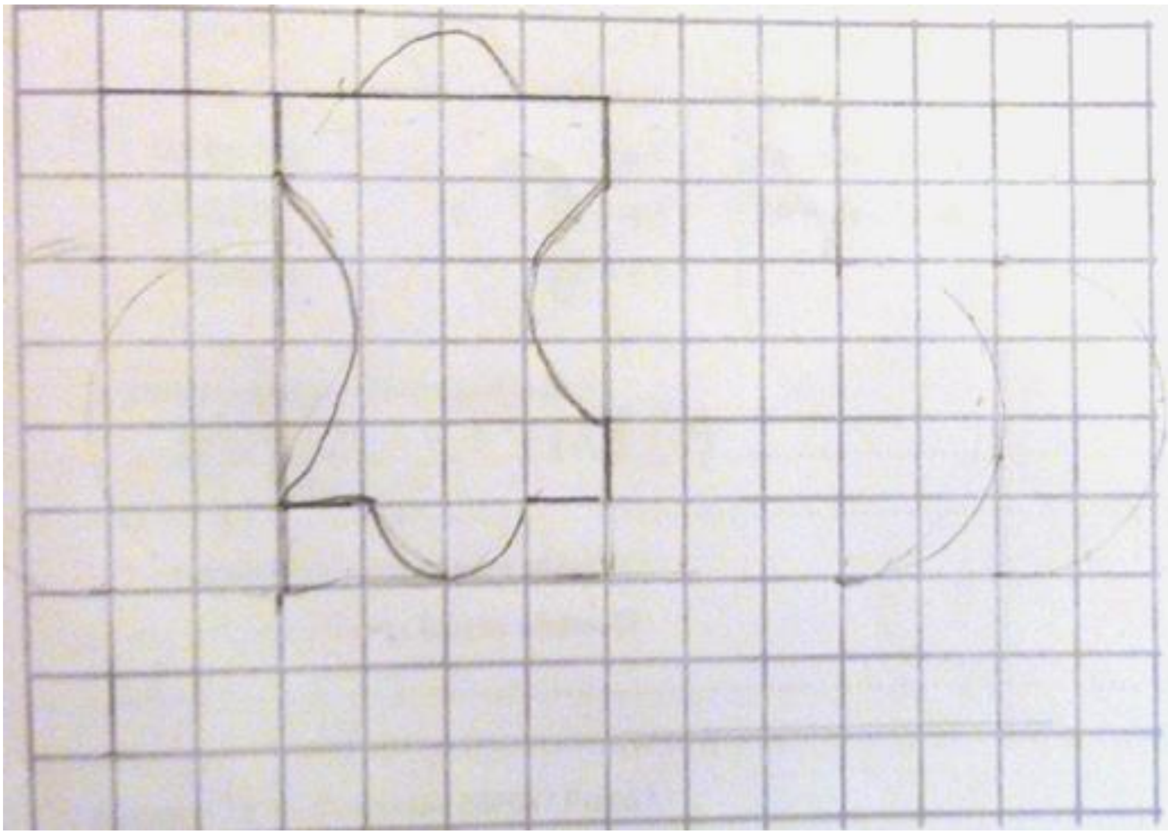

**Úloha č.2**: Pokús sa vypočítať v akej mierke bol narysovaný pôdorys na obr. č.1 ak dĺžka strany jedného štvorčeka v sieti je 0,5 cm.

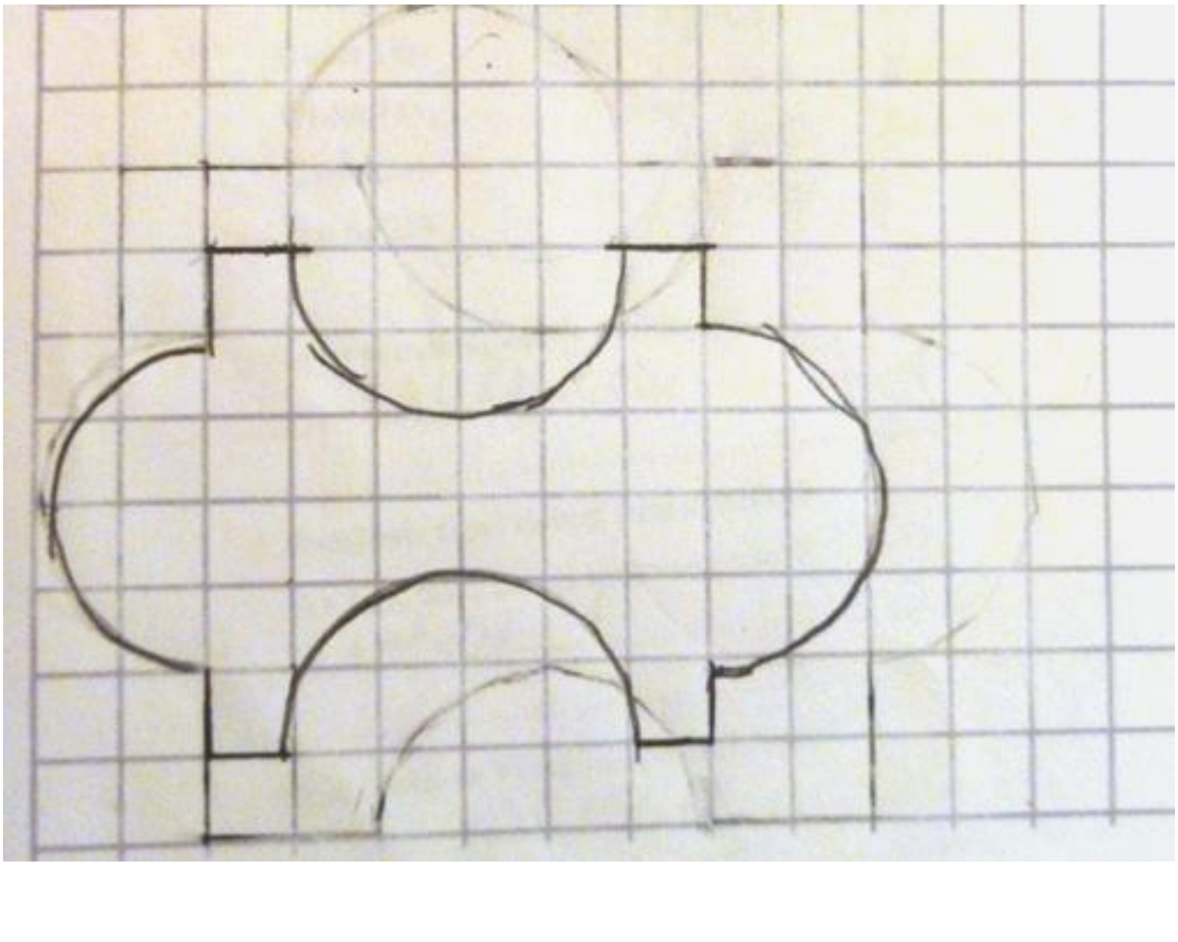
- 1cm na obrázku je v skutočnosti.1 m.........

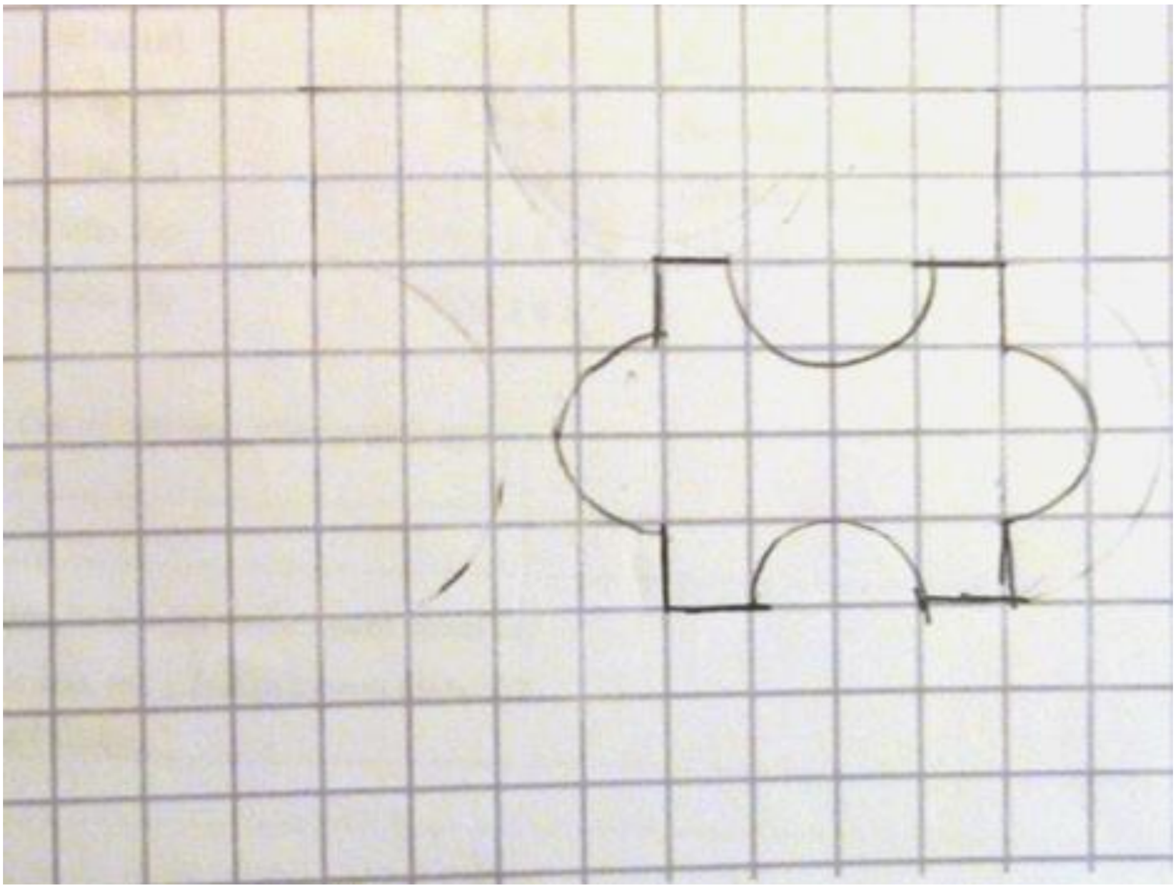
**Úloha Záhrada**

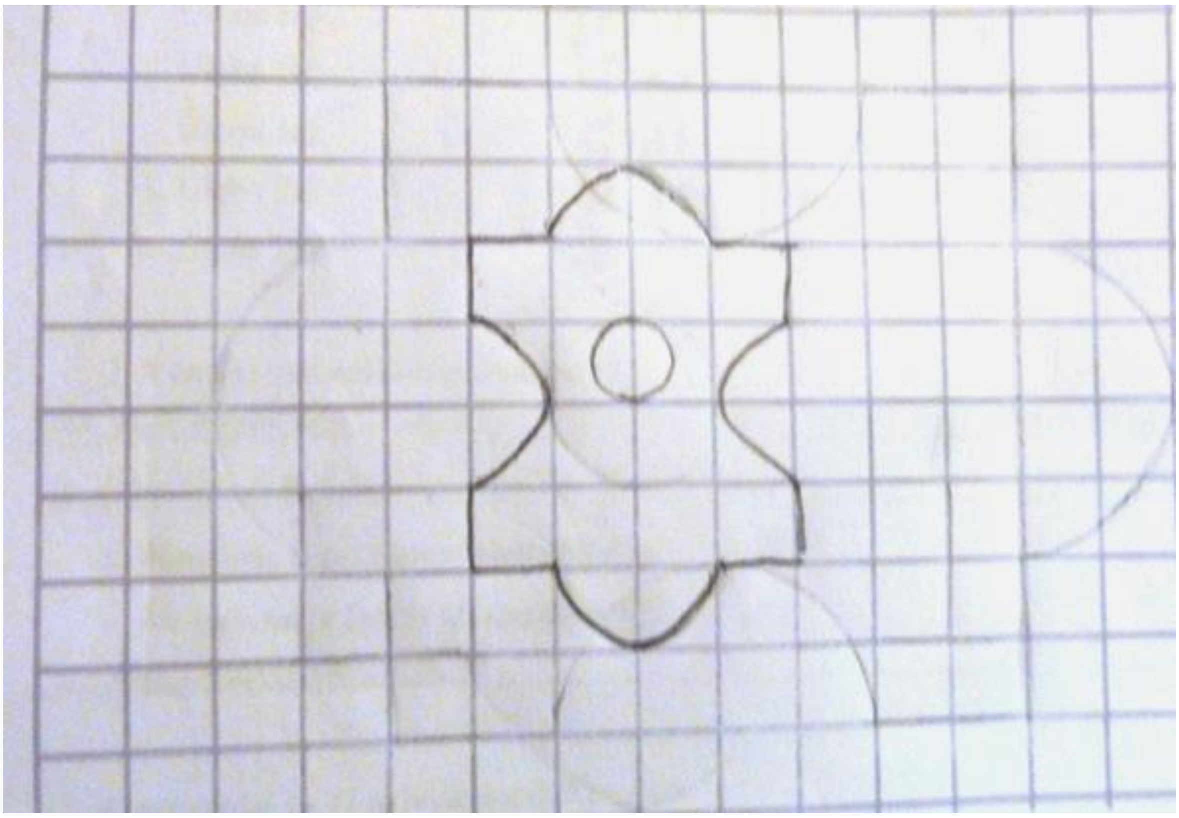


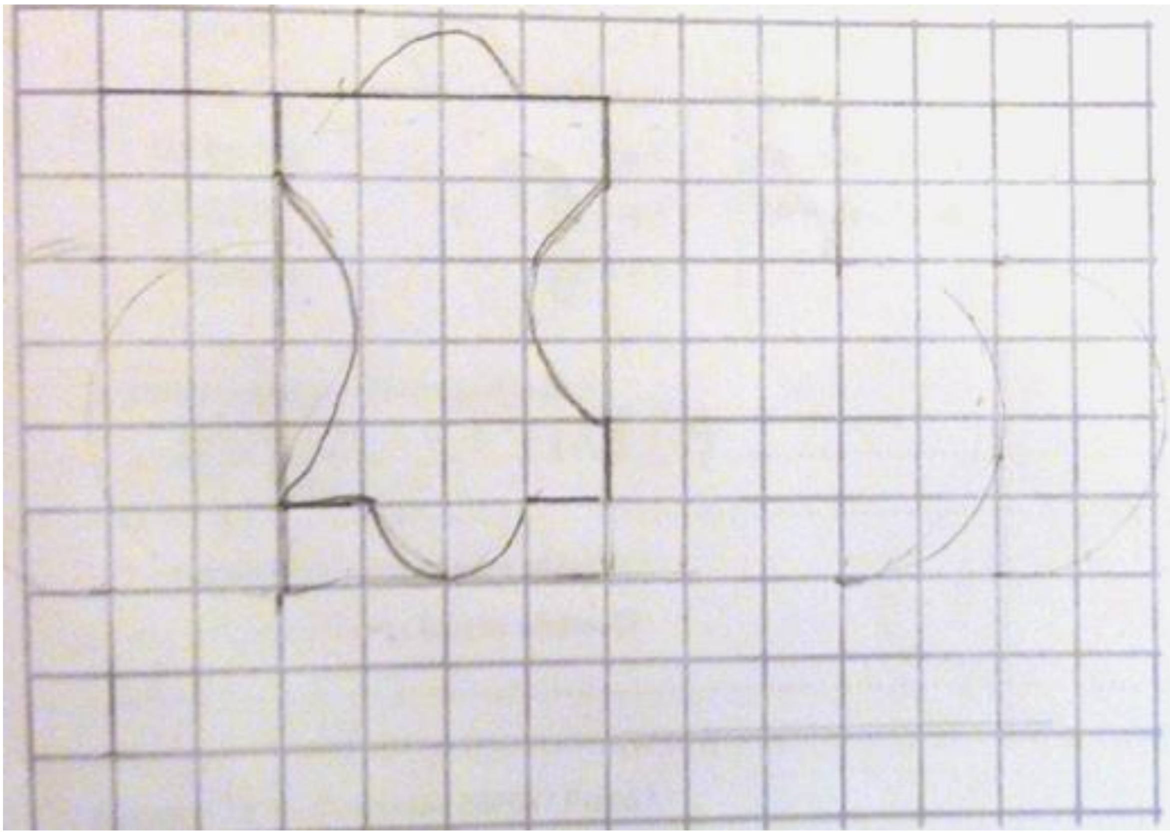


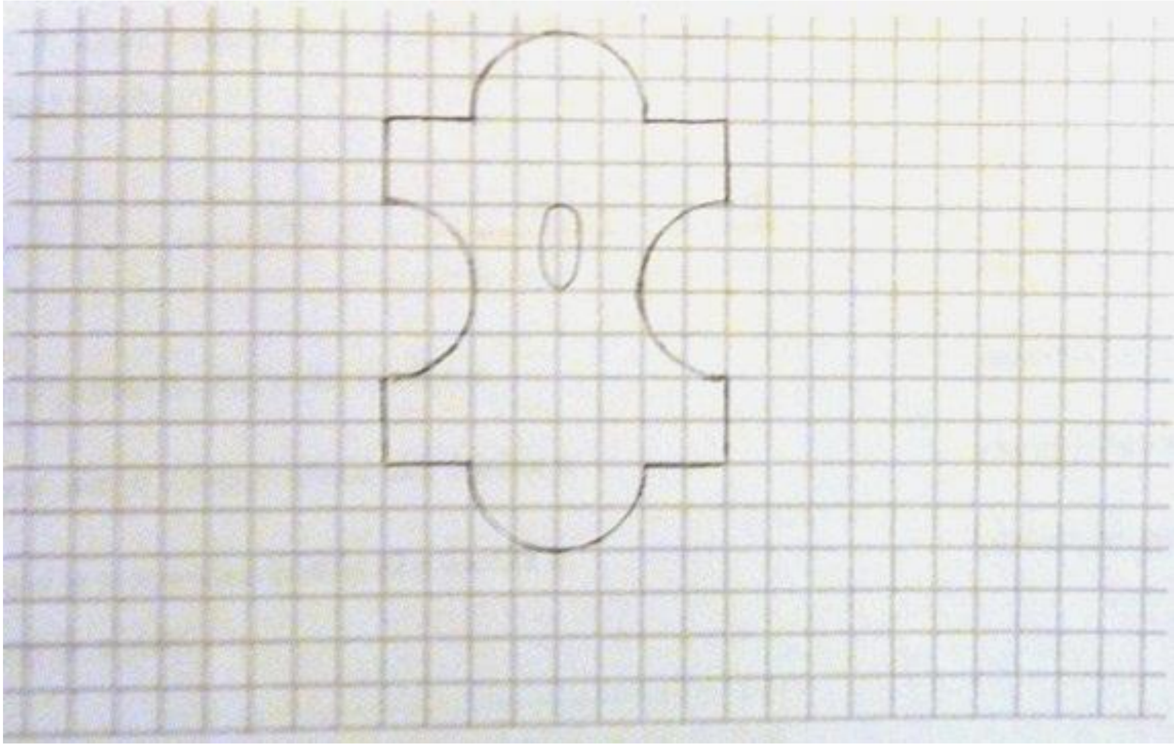


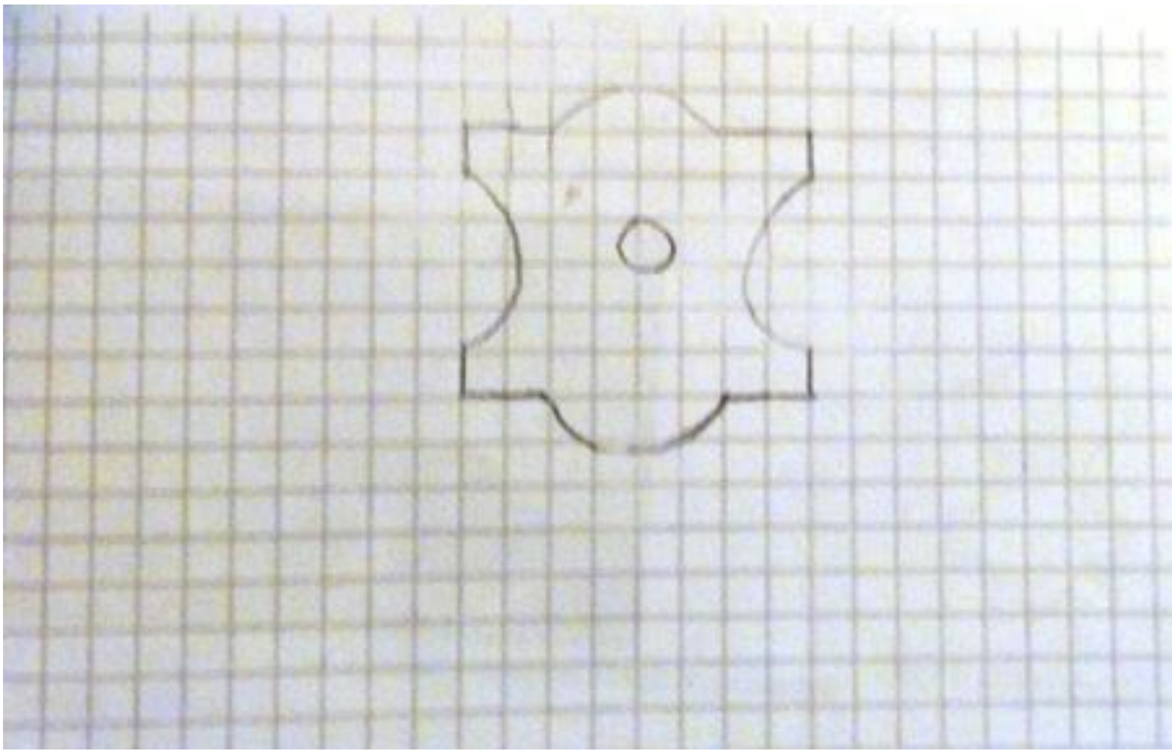


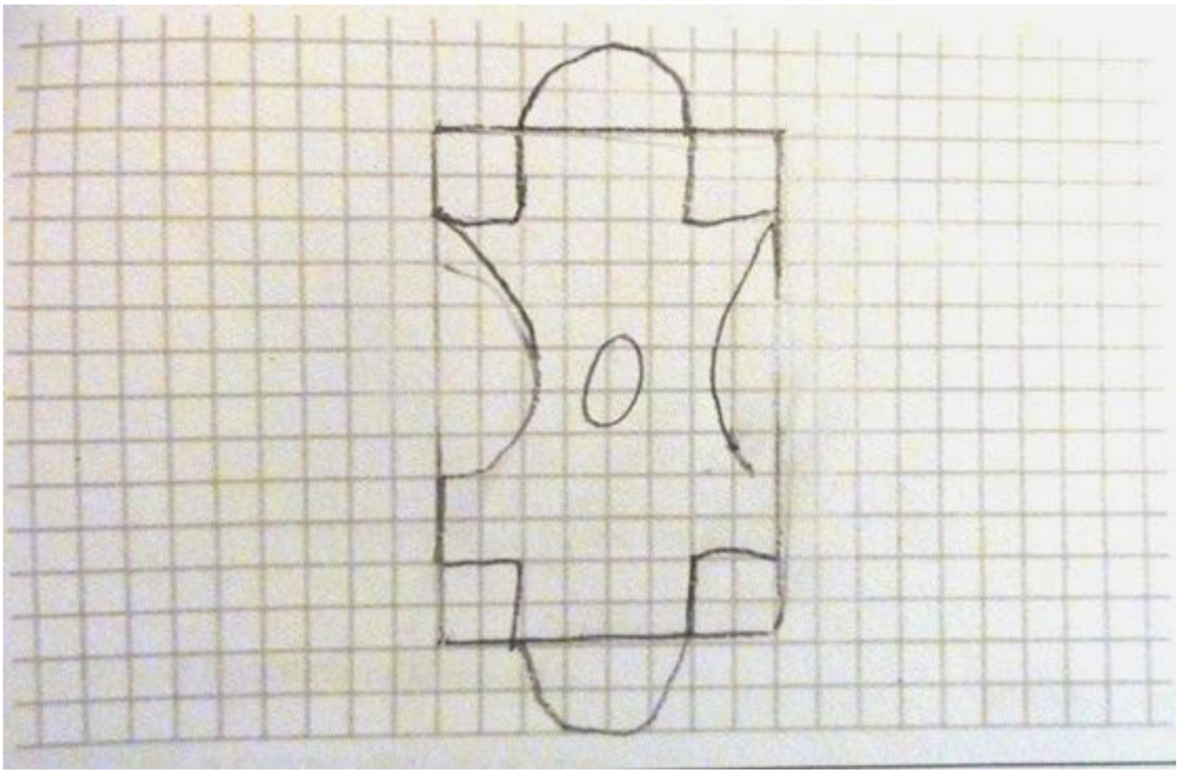


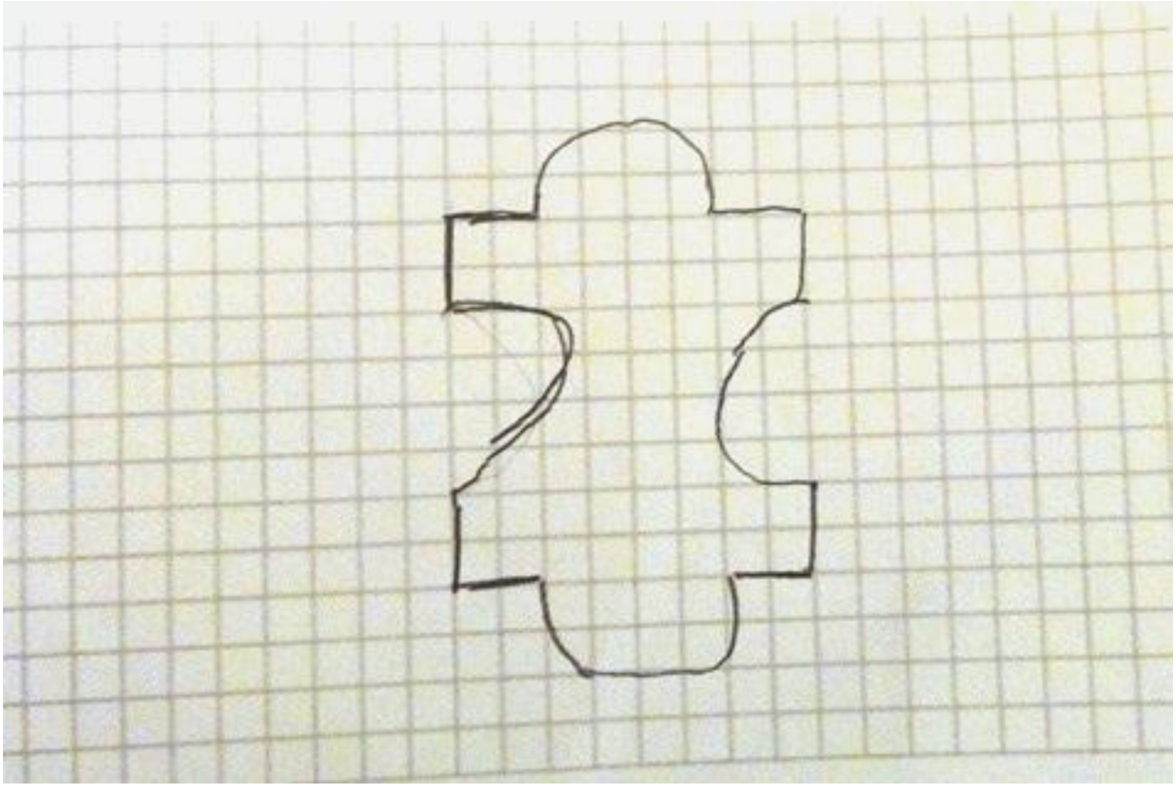


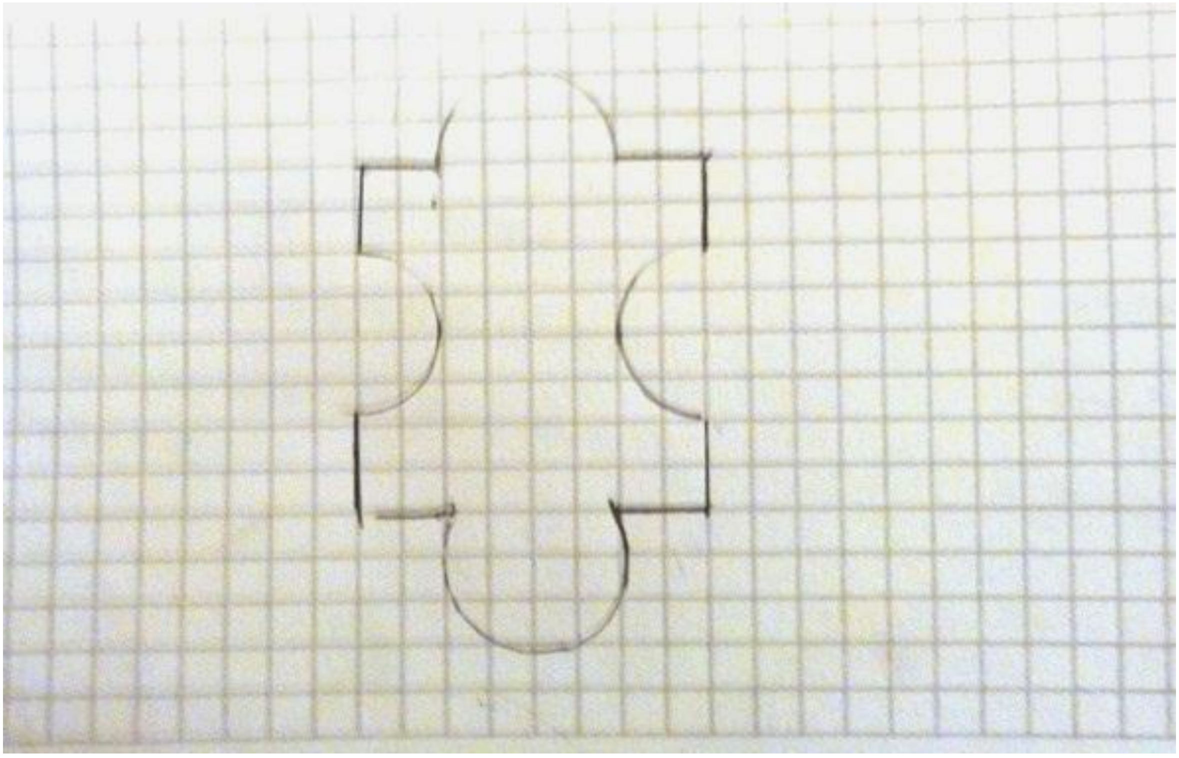


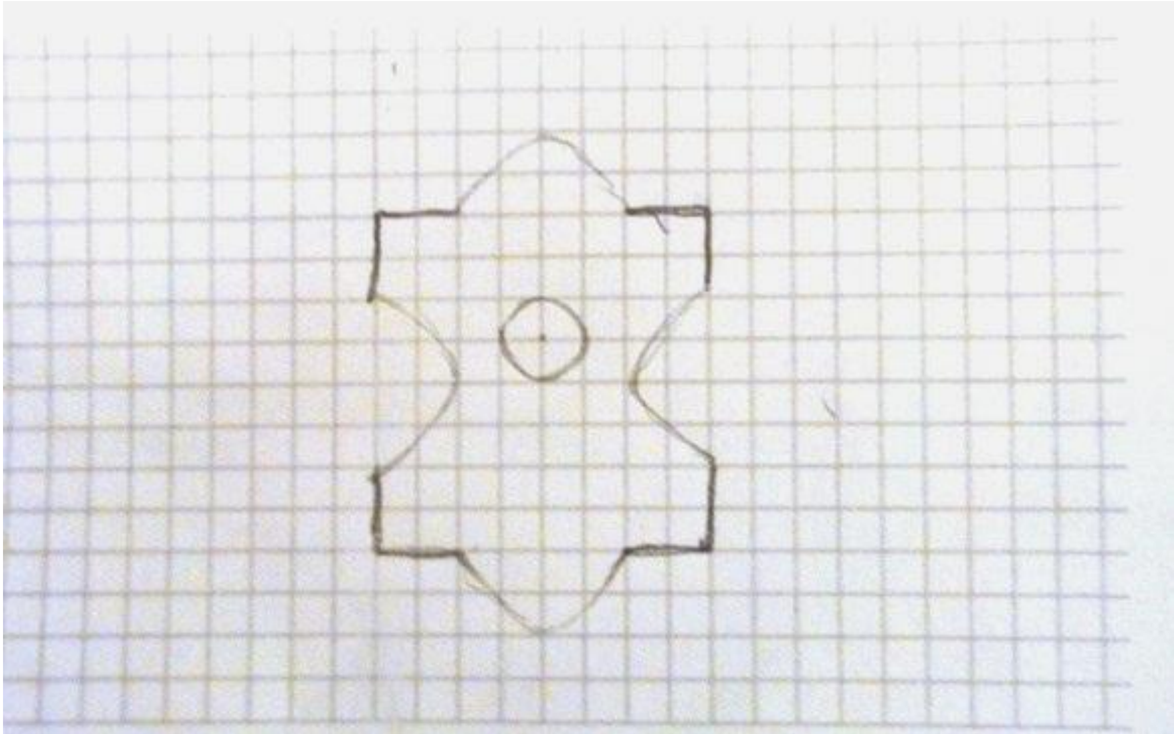


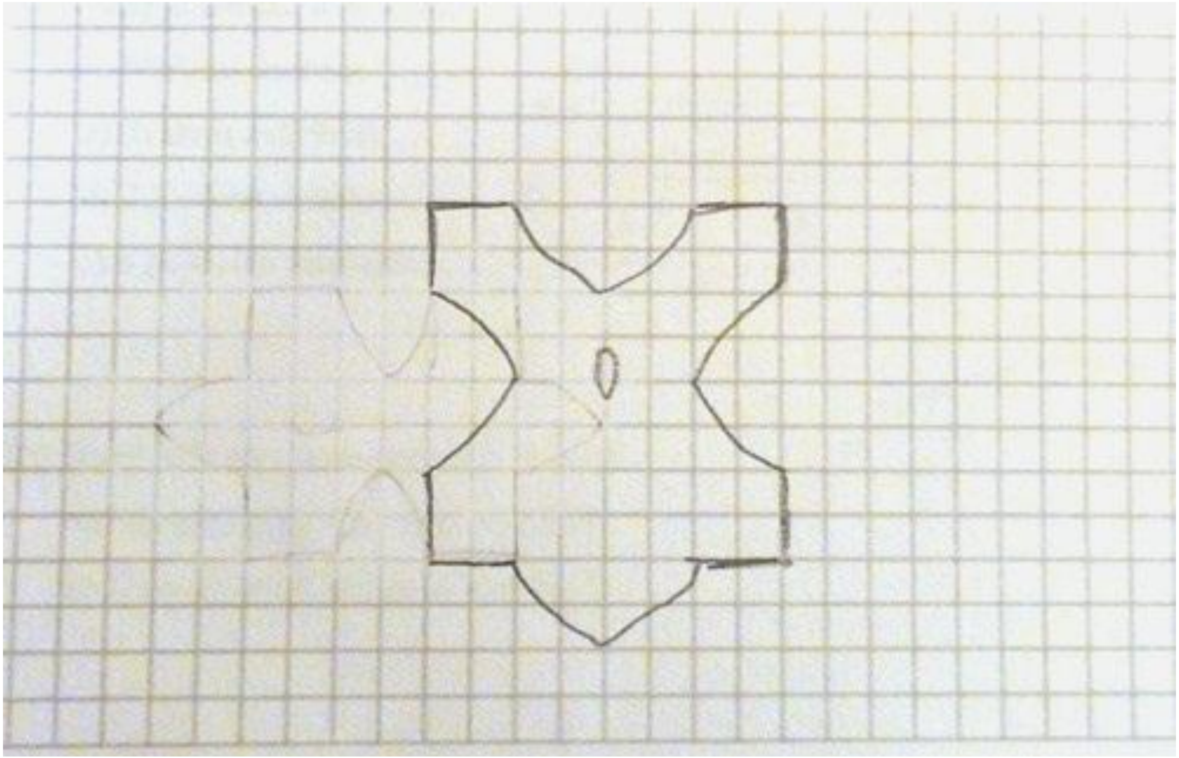


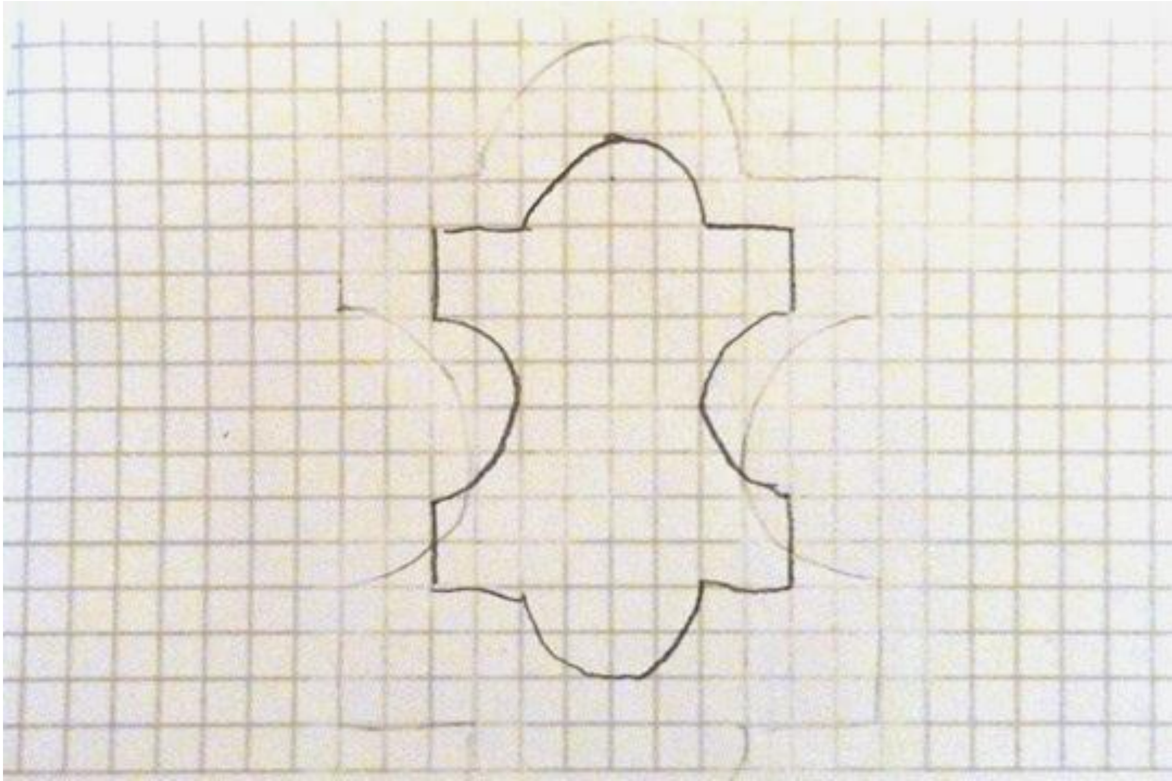


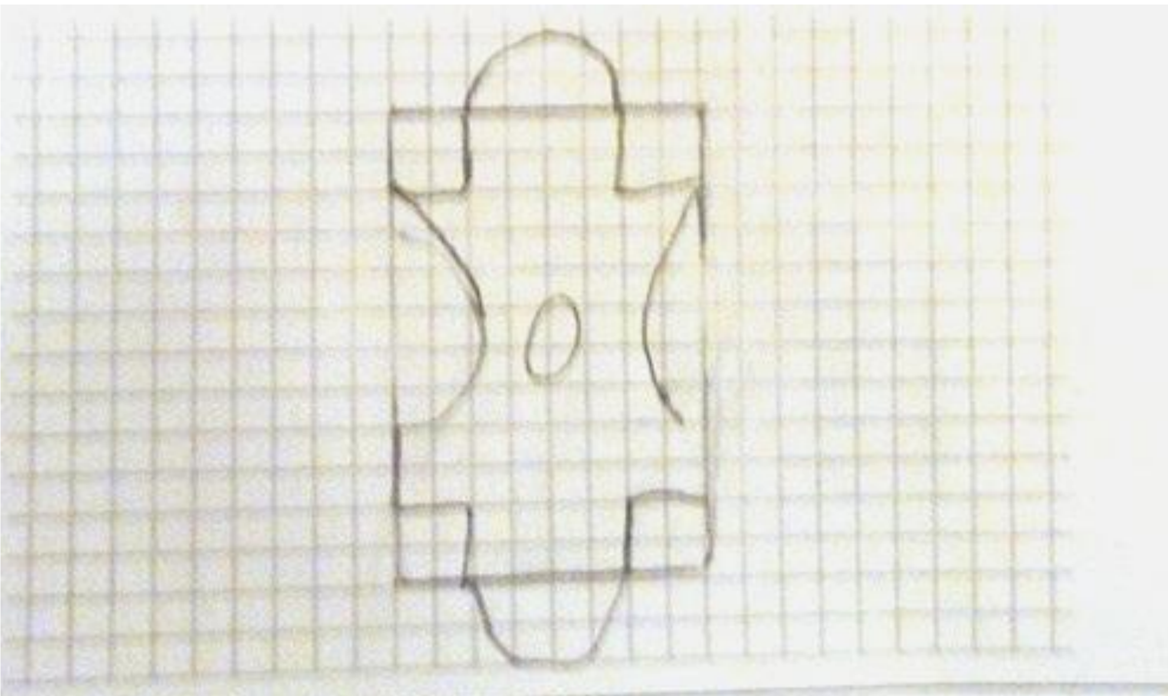


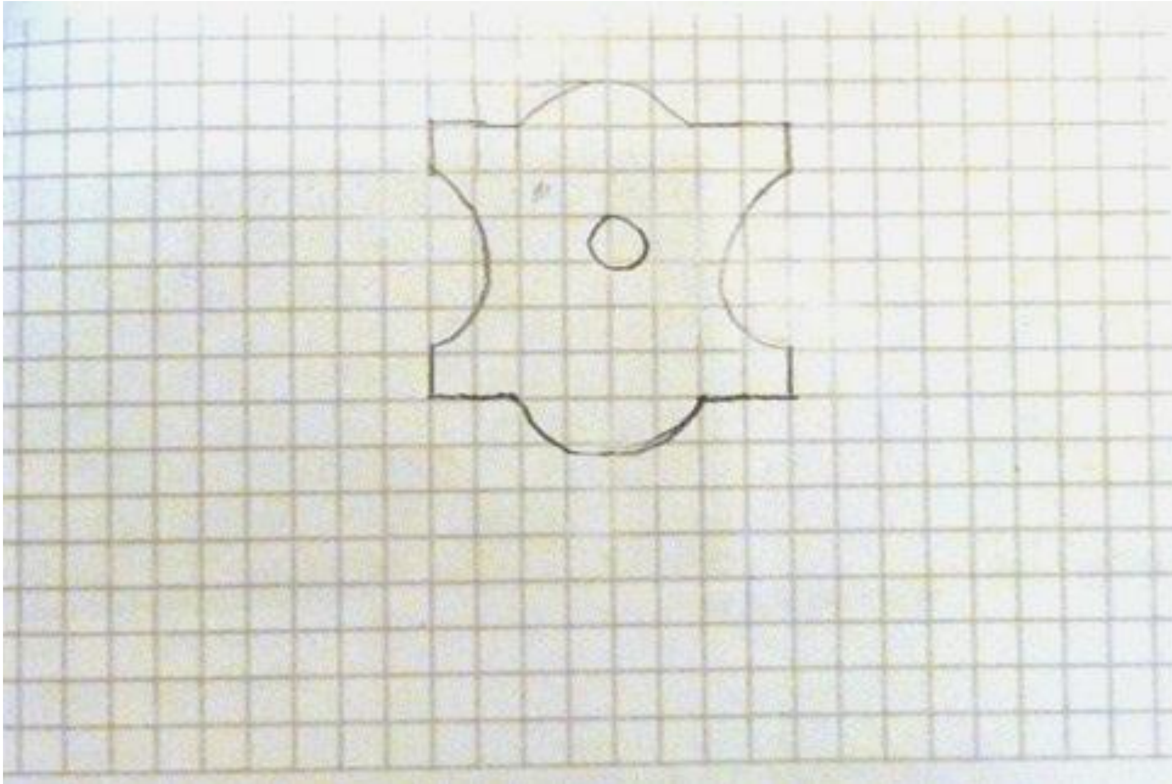












**Otázky pre žiakov**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Úloha 1a) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) | 1 2 3 4 5 | | |

2. S čím si mal najväčšie problémy?

s úlohou č. 1. (s Tajným kostolom)

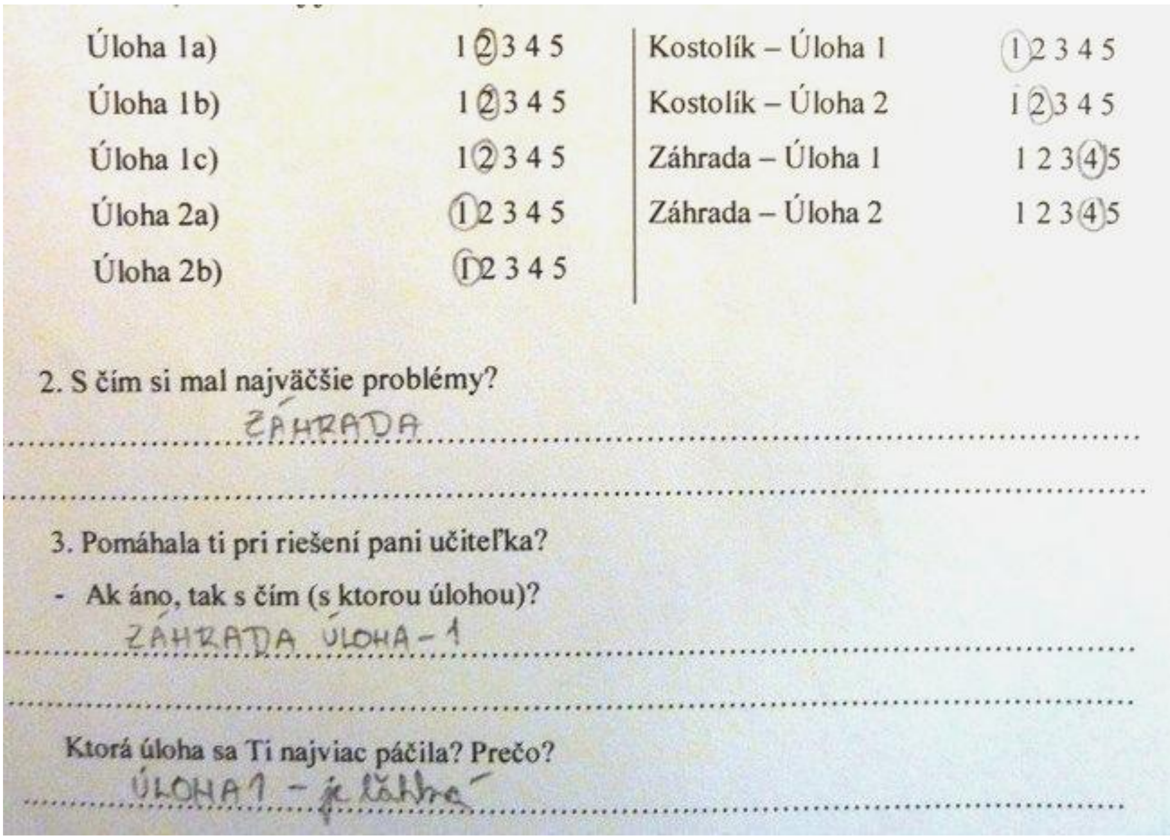
3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

s úlohou č. 1 (s tajným kostolom)

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

1a



| | | | |
|---|---|---|---|
| Úloha 1a) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) | 1 2 3 4 5 | | |

2. S čím si mal najväčšie problémy?

ZÁHRADA

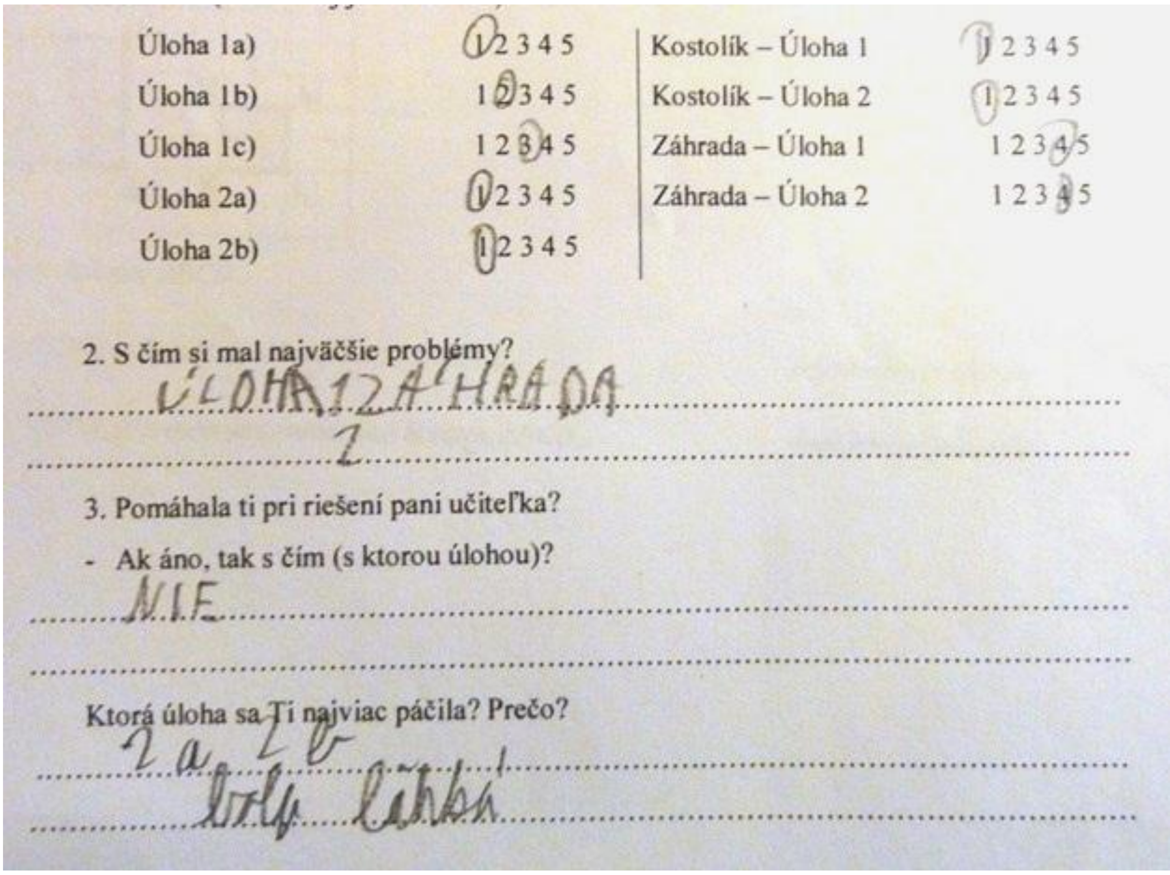
3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

ZÁHRADA ÚLOHA-1

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

ÚLOHA 1 - je ľahká



| | | | |
|---|---|---|---|
| Úloha 1a) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) | 1 2 3 4 5 | | |

2. S čím si mal najväčšie problémy?

ÚLOHA 1 ZÁHRADA
1

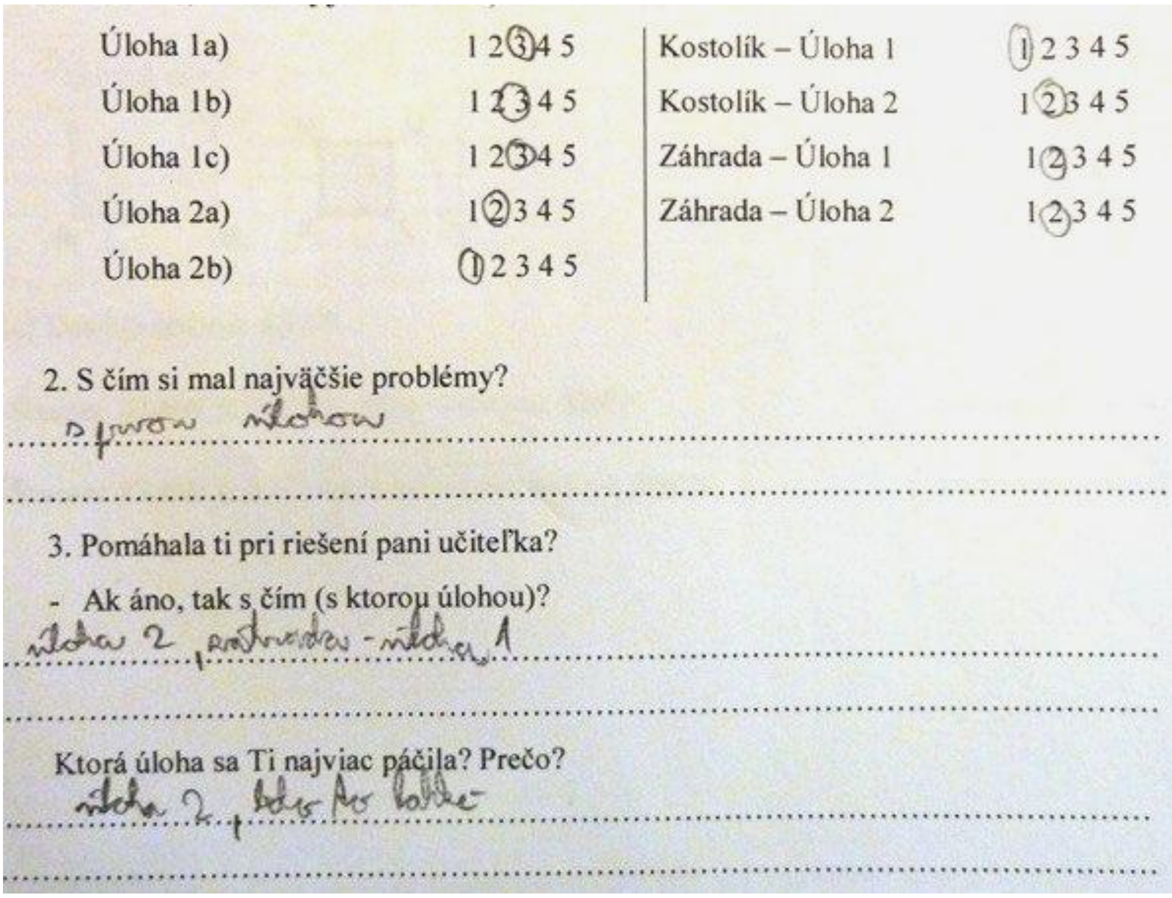
3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

NIE

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

2a, 2b
boly ľahká



| | | | |
|---|---|---|---|
| Úloha 1a) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) | 1 2 3 4 5 | | |

2. S čím si mal najväčšie problémy?

s prvou úlohou

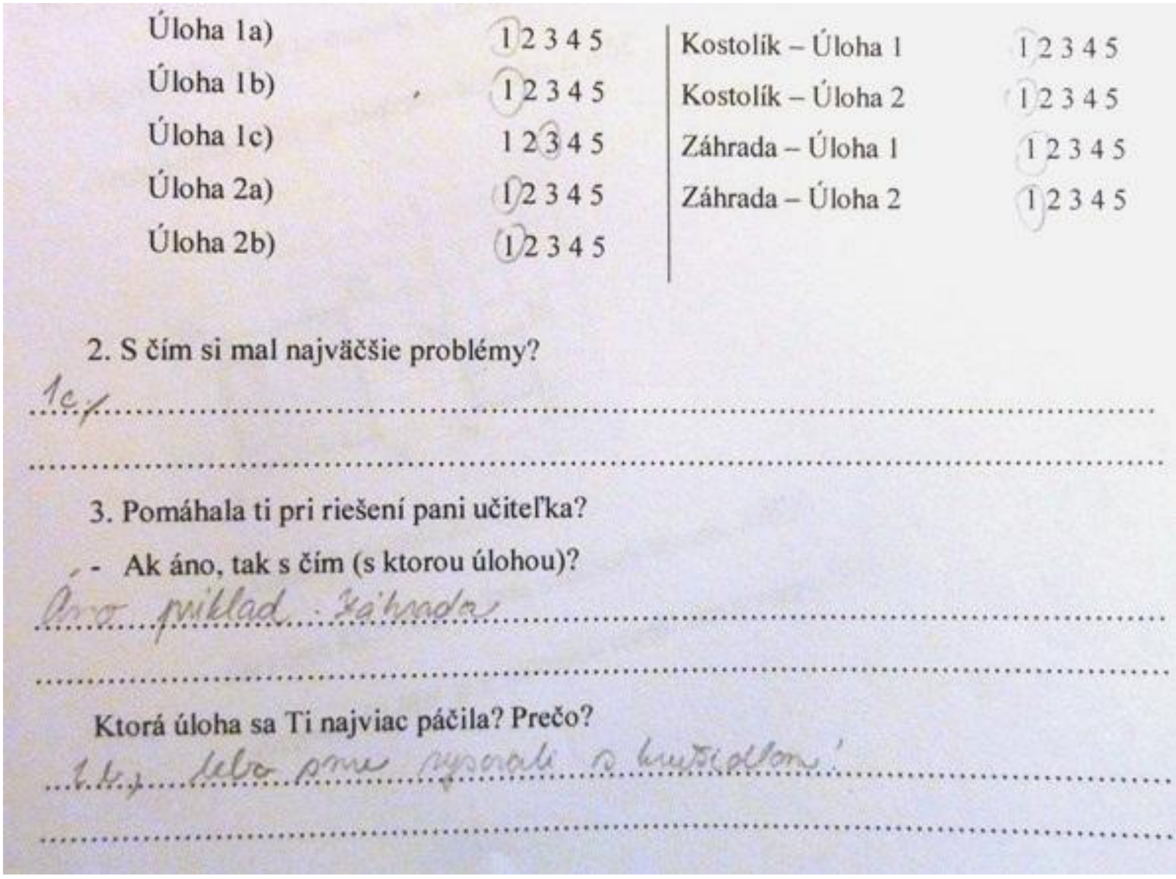
3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

úloha 2, záhrada - úloha 1

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

úloha 2, lebo bola ľahká



| | | | |
|---|---|---|---|
| Úloha 1a) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) | 1 2 3 4 5 | | |

2. S čím si mal najväčšie problémy?

1c)

3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

Áno, príklad Záhrada

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

1.b), lebo sme rysovali s kružidlom!

| | | | |
|---|---|---|---|
| Úloha 1a) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) | 1 2 3 4 5 | | |

2. S čím si mal najväčšie problémy?

KAUŽNICOU

3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

ZAHRADA 1

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

KOSTOLIK

1.V škále od 1 do 5 (1 je najľahšie, 5 najťažšie) ohodnoť jednotlivé úlohy podľa ich náročnosti (zakrúžkuj jedno z čísel)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Úloha 1a) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) | 1 2 3 4 5 | | |

2. S čím si mal najväčšie problémy?

2b – bj

3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

~~[illegible]~~ Kostolík zaujímavá úloha

| | | | |
|---|---|---|---|
| Úloha 1a) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1b) | 1 2 3 4 5 | Kostolík – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 1c) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 1 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2a) | 1 2 3 4 5 | Záhrada – Úloha 2 | 1 2 3 4 5 |
| Úloha 2b) | 1 2 3 4 5 | | |

2. S čím si mal najväčšię problémy?

So záhradou ú.1 ale potom som to pochopila s pani učitelkinou pomocou.

3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

So záhradou ú.1

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

Záhrada ú.1

2. S čím si mal najväčšię problémy?

So záhradou ú.1 ale potom som to pochopila s pani učitelkinou pomocou.

3. Pomáhala ti pri riešení pani učiteľka?

- Ak áno, tak s čím (s ktorou úlohou)?

So záhradou ú.1

Ktorá úloha sa Ti najviac páčila? Prečo?

Záhrada ú.1