Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Přehled historie komplexních čísel

Práce do soutěže SVOČ DM 2013

Autoři: Bc. Čestmír Bárta

Martin Kolář

Vedoucí práce: PhDr. Michal Musílek, Ph.D.

Hradec Králové 2013

Anotace

V práci je shrnut historický vývoj komplexních čísel od středověku po dvacáté století. Úvodní část stručně seznamuje čtenáře s historickým vývojem číselných oborů a prvotním setkáním lidstva s těmito čísly, na něž navazuje plynulý výklad historie komplexních čísel počínaje Heronem z Alexandrie po práce Bernharda Riemanna. Jména matematiků co přispěli vývoji komplexních čísel jsou doplněna jejich portréty.

Klíčová slova a fráze: kvadratická rovnice, kubická rovnice, komplexní číslo, imaginární jednotka.

Abstract

In this essay is summarized development of complex numbers from the Medieval Ages to the present. Introduction makes the acquaintance of historical development of number fields and discovering these numbers. Next section continues the history of interpretation of complex numbers from the time of Heron of Alexandria to the time of Bernhard Riemann. There are portraits of mathematicians who contributed to the development of complex numbers.

Keywords and phrases: quadratic equation, cubic equation, complex number, imaginary unit

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Komplexní čísla a jejich historie se prolínají napříč dějinami lidstva. Jejich vznik nebyl snadný. S objevem komplexních čísel a z nich vycházející nové obory, např. teorie funkcí komplexní proměnné, přinesly do matematiky mnoho nových problémů. Některé z nich nebyly doposud vyřešeny. Většina prací zobrazujících tuto problematiku začíná výklad od jména Luca Pacioli, což byl františkánský mnich, matematik, přítel Leonarda da Vinci. Proto jsme chtěli poukázat, že střípky zmínek, byť i někdy nepřímé, poukazují na setkání s odmocninou ze záporného čísla již v antickém Řecku.

Práce je rozčleněna do dvou částí. V první části se čtenář seznámí se stručným vznikem číselných oborů, kde první písemné záznamy o setkání lidí s přirozenými čísly jsou z Mezopotámie a Egypta z období přibližně 3500 př. n. l. Dále je v první části uveden i vznik dalších číselných oborů – celá, racionální a reálná čísla.

Druhá část práce je věnována stěžejní pasáži vývoje komplexních čísel. Čtenáře zavedeme již do prvního století našeho letopočtu k matematikovi Heronovi z Alexandrie a celý výklad zakončíme počátkem 20. století.

Obrázek 1: Leopold Kronecker

„Bůh stvořil celá čísla, vše ostatní je dílem lidí.“

Na závěr úvodu si dovolme citovat německého matematika Leopolda Kroneckera (7. prosince 1823 – 29. prosince 1891).

1 Vývoj číselných oborů

Číselné obory vznikaly napříč lidskými dějinami. Prvním číselným oborem se kterým se lidé setkávali byla přirozená čísla, která dnes značíme symbolem $\mathbb{N}$. Přirozená čísla označují počet prvků konečných množin nebo z historického pohledu počet objektů. Začaly se objevovat jako historicky první již ve středověku pro potřeby zemědělství, lovu a rybolovu. První písemné záznamy o setkání lidí s přirozenými čísly jsou z Mezopotámie a Egypta z období zhruba 3500 př. n. l. Symbolicky můžeme množinu všech přirozených čísel zapsat takto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}. \tag{1}$$

Přirozená čísla mají tu vlastnost, že ne každá lineární rovnice s přirozenými koeficienty a koeficientem u neznámé x rovný 1, má přirozené řešení. Například rovnice

$$x + 3 = 0$$

nemá v oboru přirozených čísel řešení.

Jako řešení toho problému vznika celá čísla $\mathbb{Z}$. Prvky množiny celých čísel můžeme zapsat množinově takto

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}. \tag{2}$$

První zmínky o záporných číslech se objevují již v indické matematice, kde pomocí nich vyjadřovali například vztah majetku a dluhu a nebo opačně orientované úsečky. I Řekové znali kolem 5. století př. n. l. do jisté míry záporná čísla. Při geometrickém řešení úloh kladla meze jen velikost papyru nebo místa s pískem. Záporná čísla či nulu do jisté míry znali – během mezivýpočtů jim nevadilo, když měla vyjít úsečka nulové délky nebo útvar nulové plochy. Znali i některá pravidla pro počítání se zápornými čísly, která známe dnes.

Záporná čísla byla v historii dále velmi dlouhou dobu matematickou veřejností zavrhována, né-li považovaná za zločin – představit si něco, co je menší než nula se příčilo lidskému chápání. Nakonec došlo však k jejich plnému uznání v druhé polovině 16. století, kdy Gerolam Cardano a Rafaell Bombelli doplňují reálná čísla o záporná a zavádějí standardní pravidla pro práci s nimi.

Snadno nahlédneme, že již každá lineární rovnice s přirozenými koeficienty a koeficientem u neznáme x rovný 1, má přirozené řešení. Například rovnice

$$x + 3 = 0$$

má v oboru celých čísel své řešení. problém zde nastává u lineárních rovnic, kde koeficient neznáme x je různý od 1. Například rovnice

$$3x + 2 = 0 \tag{3}$$

nemá v oboru celých čísel řešení.

Tento problém vyřešila čísla racionální $\mathbb{Q}$, která můžeme vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. Zapsáno množinově

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}. \tag{4}$$

První záznamy o setkání lidí s kladnými racionálními čísly se datují až do 3000 př. n. l. v Mezopotámii a starověkém Egyptě. S racionálními čísly pracovali též staří Řekové, kteří využívali čísla k popisu světa. Co je skvělé na racionálních číslech je fakt, že obdržíme všechny výhody celých čísel a můžeme dělit jedno racionální číslo jiným a výsledkem je opět racionální číslo. Nevýhoda racionálních čísel je, že jsou neúplná. Například množina

$$\{3; 3,1; 3,14; 3,1415; ...\} \tag{5}$$

tvoří posloupnost racionálních čísel, ale tato posloupnost konverguje k číslu π, což je iracionální číslo.

Objev iracionálncíh čísel je připisován matematikovi Pythagorovy školy jménem Hippasus (5. st. př. n. l.), který dokázal, že úhlopříčka jednotkového čtverce nemůže být vyjádřena racionálním číslem. Podle pověsti byl Hippasus svržen z lodi do moře a utopen, aby tento objev zůstal utajen. To bylo zapříčiněno též tím, že Pythagorejci odmítali iracionální čísla přijmout, neboť nepatřila do jejich filozofie a tudíž je popírali. Přesto však tento objev zapříčinil postupně zhroucení řecké teorie, že **vše** lze vyjádřit čísly. Tato skutečnost zapříčinila takzvanou „první krizi matematiky“.

Obrázek 2: Hippasus

Iracionální čísla spolu s racionálními tvoří spojité komutativní těleso reálných čísel. Množinu reálných čísel označujeme $\mathbb{R}$. První známky o setkání lidstva s reálnými čísly jsou zhruba z období přibližně 300 př. n. l. kde Euklid z Alexandrie (325 př. n. l. – asi 260 př. n. l) známý jako Euklidés pracoval již s iracionálními a reálnými čísly.

Obrázek 3: Euklid z Alexandrie

Reálná čísla můžeme definovat pomocí dedekindových řezů, nekonečných desetinných rozvojů a posloupností. V reálných číslech nemá každá polynomická rovnice s reálnými koeficienty řešení. Stačí uvažovat rovnici

$$x^2 + 1 = 0, \tag{6}$$

pro kterou je řešení rovno

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}. \tag{7}$$

A zde začíná historie komplexních čísel.

2 Vývoj komplexních čísel

Historie komplexních čísel začíná v okamžiku, kdy se matematikové při řešení algebraických rovnic setkali s čísly, kterým dnes říkáme imaginární. Cesta k objevu komplexních čísel byla celkem dlouhá a mnoho matematiků k ní značně přispělo. Nahlédněme až do raných počátků historie matematiky.

První zmínku o komplexních číslech můžeme hledat již v 1. století n.l. (přibližně kolem roku 60 n. l.) u matematika Herona z Alexandrie, který při řešení úlohy výpočtu objemu komolého jehlanu narazil na druhou odmocninu ze záporného čísla. Přibližme si problém, který řešil. Tato úloha je známa jako čtrnáctá úloha z Moskevského matematického papyru. Heron znal vzorec, který Egypťané používali pro výpočet objemu komolého jehlanu. Algebraický zápis vzorce by vypadal takto

Obrázek 4: Heron z Alexandrie

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2). \tag{8}$$

Proměnné a, b jsou délky podstav a h je výškou jehlanu. Pokud byl jehlan pevně dán, nemohli změřit jeho výšku. Dnes bychom takovouto úlohu spočítali bez potíží za použití znalostí goniometrie a stereometrie.

Pokud bychom proměnnou c považovali za délku boční hrany, mohli bychom vyjádřit výšku h ve tvaru

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}. \tag{9}$$

Geometrické zobrazení tohoto čísla je ovšem náročné. Heron úspěšně vyřešil případ, kdy je velikost strany dolní podstavy rovna 10, horní podstavy 2 a boční hrany 9. Když se pokoušel vyřešit zadání kde $a = 28, b = 4$ a $c = 15$, narazil na problém s druhou odmocninou ze záporného čísla. Pokud dosadíme do vzorce uvedené hodnoty, získáváme:

$$h = \sqrt{15^2 - 2\left(\frac{28-4}{2}\right)^2} \tag{10}$$

po úpravě dostaneme tvar:

$$h = \sqrt{225 - 2 \cdot 144} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{81 - 144} \tag{11}$$

Se stejným tvarem, který je zapsán výše počítal i Heron. Pokud bychom od sebe odečetli obě čísla, získáme $\sqrt{-63}$. I když výsledek podle úprav vychází $\sqrt{81 - 144}$, Heron tato čísla „otočil“, tedy počítal s číslem ve tvaru $\sqrt{144 - 81}$, resp. zaměnil $\sqrt{-1}$ za $\sqrt{1}$. Zda byla tato chyba Heronova nebo pouze neznalost nějakého písaře nelze s jistotou určit.

O dvě stě let později objevil řecký matematik Diofantos z Alexandrie (asi 200 n. l. – 284 n. l.) kvadratickou rovnici, která nemá reálné řešení. Tento významný matematik, který se proslavil sepsáním díla „Arithmetica“, je mimo jiné považován za otce aritmetiky. V šesté knize z tohoto slavného díla, nacházíme následující problém, resp. úlohu (známou pod číslem 22): „*Je dán pravoúhlý trojúhelník s obsahem 7 a obvodem 12. Nalezněte všechny jeho strany.*“

Diofantos při řešení vycházel z rovnic, které bychom zapsali takto:

$$\begin{gathered} ab = 7 \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12 \end{gathered} \tag{12}$$

Obrázek 5: Diofantos z Alexandrie

Tato soustava dvou rovnic o dvou neznámých je řešitelná pomocí zdlouhavých algebraických úprav. Diofantos chtěl už na začátku řešení zredukovat dvě neznámé na jednu. Aby redukce proměnných docílil, použil substituci

$$a = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad b = 14x. \tag{13}$$

První rovnice se nám po dosazení zredukuje na $14 = 14$ a v druhé získáme tvar

$$\frac{1}{x} + 14x + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 196x^2} = 12. \tag{14}$$

Po několika úpravách bude rovnice vypadat takto

$$172x = 336x^2 + 24. \tag{15}$$

Kdybychom počítali s původními dvěma rovnicemi a užívali algebraických úprav, dostali bychom stejný výsledek jako Diofantos se svým řešením.

Všechny koeficienty ve výsledné rovnici jsou kladné, což je typickým znakem rovnic té doby. Ve starověku bylo totiž těžko představitelné psát číslo takové, které je „menší než nic“. Například v páté knize při řešení rovnice $4x + 20 = 4$ uvedl, že rovnice je absurdní, protože vede k nemožnému řešení $x = -4$. Kdybychom chtěli vyjádřit kořeny rovnice, potom bychom je zapsali ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{168}. \tag{16}$$

K tomu tvaru se Diofantos ovšem nedostal. Na závěr poznamenal, že rovnice nemá řešení, protože pro daný tvar rovnice musí existovat racionální řešení, kdežto

$$\left(\frac{172}{2}\right)^2 - (336)(24) = -668. \tag{17}$$

Přibližně kolem roku 800 n. l. arabský matematik Abdalláh Muhammad ibn Músa Al-Khwarizmi (780 – 850) shrnul ve svém díle „Algebra“ všechny typy kvadratických rovnic. Za správné považoval ovšem pouze kladné řešení. Při své práci v domě moudrosti v Bagdádu vycházel z řecké a indické matematiky, díky čemuž byly důkazy geometrického typu po vzoru řecké geometrické algebry. Právě díky arabským matematikům byla zachována řecká matematika.

Obrázek 6: Abdalláh Muhammad ibn Músa Al-Khwarizmi

Další zmínky o komplexních číslech můžeme hledat u Leonarda Pisánského (1170 – 1250) zvaného Fibonacci. Jeho otec byl kupcem, který často cestoval. Společně se svým synem navštívil např. Egypt, Sýrii, Řecko, Sicílii nebo Byzanc. Při těchto cestách se Leonardo Pisánský naučil nejen počítat s abakem, ale i arabské matematice a velmi rychle pochopil výhodu arabských číslic. Jeho nejvýznamnějším dílem je Liber Abaci. I když bychom z názvu očekávali pravidla pro počítání na abaku, kniha se zabývá mnoha oblastmi algebry a aritmetiky. V jedné z kapitol své knihy se věnuje i kubickým rovnicím. Zabýval se problémem, který by se dal vyjádřit rovnicí

Obrázek 7: Leonard Pisánský

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20. \tag{18}$$

Fibonacci se snažil řešit problém geometricky. Výraz x^3+2x^2+10x chápe jako obsah obdélníka o stranách 10 a 2, který je rozdělen na tři další obdélníky: jedna jejich strana je 10, druhá je pak po řadě $\frac{x^3}{10}$, $\frac{x^2}{5}$, x. Upravme rovnici na vztah

$$2 = \frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5} + x. \tag{19}$$

Z rovnice 19. vyplývá, že $x \notin \mathbb{N}$, protože $1 < x < 2$. Z úvahy o dělitelnosti plyne, že x není ani racionálním číslem (dosazením $x = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla nesoudělná). Za předpokladu, že by x bylo iracionálním číslem, které je druhou odmocninou čísla racionálního, byl by součet dvou stran uvažovaných obdélníků roven

$$2 - \frac{x^2}{5} = x\left(\frac{x^2}{10} + 1\right). \tag{20}$$

Levá strana rovnice by byla racionální, pravá strana by byla stranou iracionální. Fibonacci velmi dobře sestudoval Euklidův spis „Základy“ a byl velmi dobře obeznámen s problémem iracionalit. Na základě dobré znalosti této problematiky se podobným způsobem snažil zjistit, zda-li kořen nemá jeden tvar roven právě těmto iracionalitám ($\sqrt{n}$, $\sqrt[4]{n}, m+\sqrt{n}$, $\sqrt{m}+\sqrt{n}$, $\sqrt{m+\sqrt{n}}$, $\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$). Zjistil, že kořen nemá žádný z uvedených tvarů.

Nakonec uvedl celkem přesnou hodnotu kořene rovnice 18, i když není znám způsob výpočtu této hodnoty. V algebraickém zápisu by vypadala takto

$$1+\frac{22}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{40}{60^3}+\frac{33}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{40}{60^6}. \doteq 1,368808107853 \tag{21}$$

Pro porovnání s Cardanovými vzorci objevenými později

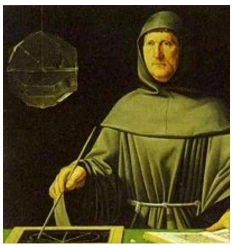
$$x=\frac{1}{3}\left(-2+\sqrt[3]{352+\sqrt{141480}}+\sqrt[3]{352-\sqrt{141480}}\right) \doteq 1,368808107821. \tag{22}$$

Z uvedeného vyplývá, že se Fibonacciho výsledek liší asi jen o $3\cdot 10^{-11}$.

V roce 1494 shrnul františkánský mnich Luca Pacioli (1444 – 1514/1517) ve své knize „Summa de Arithmetica“ do té doby známé výsledky z aritmetiky, trigonometrie a geometrie. Knihu zakončil poznámkou, že řešitelnost rovnic

$$x^3+mx=n \quad \text{a} \quad x^3+n=mx \tag{23}$$

je za daného stavu matematiky nemožná. V té době již bylo známo, že alge-



Obrázek 8: Luca Pacioli

braické rovnice třetího stupně, nebo též kubické rovnice, lze redukovat na tři typy a to

$$x^3+px=q, \qquad x^3=px+q \quad \text{a} \quad x^3+q=px, \tag{24}$$

kde p a q značí kladná čísla. Řešení těchto rovnic nalezl matematik Scipio del Ferro (1495–1526) tak, že vyjádřil řešení každé z těchto rovnic pomocí jejich koeficientů. Scipio del Ferro byl profesorem matematiky na Boloňské univerzitě. Údajně na smrtelné posteli prozradil vzorce svému žákovi Antoniovi Mariovi Fiore.

Obrázek 9: Scipio del Ferro

V roce 1535 Fiore vyzval italského matematika Niccolu Fontana, zvaného Tartaglia, což znamená „koktal“, na matematickou soutěž. Noc před soutěží nezávisle na Ferrovi objevil řešení kubických rovnic. Díky tomuto objevu porazil svého soka. Se svými výsledky se netajil, ale metodu řešení si podržel v tajnosti.

Obrázek 10: Niccolo Fontana, zvaný Tartaglia

Gerolamo Cardano (1501 – 1576), který se o řešení kubických rovnic velmi zajímal, také byl tím, kdo začal na Tartagliu naléhat, aby mu způsob jejich řešení prozradil. Tartaglia ovšem dlouho odmítal řešení prozradit, neboť jej považoval za cechovní tajemství. Teprve až roku 1539 jej svěřil Cardanovy ovšem s podmínkou, že nebude nikomu prozrazeno. Sdělil pouze samotné vzorce, nikoli důkaz. Cardano byl schopen dokázat platnost vzorců. Svůj slib mlčenlivosti nedodržel a v roce 1545 publikoval svou velkolepou knihu „Artis Magna, Sive de Regulis Algebraicis Liber Unus“, ve které byla kromě mnoha závažných výsledků, popsána i metoda řešení kubických rovnic. Tato kniha byla prvním latinským pojednáním o algebře. I když v této knize byla zmínka o objeviteli řešení kubických rovnic, mělo zveřejnění těchto výsledku za následek vleklý a nepěkný spor mezi Tartagliou a Cardanem.

Obrázek 11: Gerolamo Cardano

Cardanova práce byla komplikována především velmi těžkopádnou symbolikou a také tím, že nebylo úplně běžné pracovat se zápornými čísly. V dřívějších dobách byla záporná čísla považována pouze za zvláštní fikci a důsledkem toho docházelo k jejich zavrhování – představit si něco co je menší než nula se příčilo zdravému rozumu. Faktem ovšem zůstalo, že vzorce, které Cardano ve své práci publikoval, se nazývají Cardanovy vzorce. V současnosti se však Cardanových vzorců nepoužívá a kubické rovnice se řeší až na některé speciální vyjímky numericky pomocí výpočetní techniky. Velkou nevýhodou těchto vzorců je včetně jejich složitosti to, že v některých případech vyjadřují reálné kořeny kubické rovnice pomocí čísel imaginárních.

Tento detail přitom nelze odstranit. Lze dokázat, že žádné jiné vzorce, které by tento nedostatek neměli, neexistují.

Do doby než byla otázka komplexních čísel v matematice dostatečně objasněna, znamenaly tyto případy značné nepřekonatelné těžkosti, a proto je nazývali „Casus ireducibilis“.

Cardano byl prvním matematikem, který mohl zavést komplexní čísla ve tvaru $a + \sqrt{-b}$ do algebry, ale měl z toho velké obavy. Ve 37. kapitole svého díla Ars Magna uvedl tento problém: „Rozdělte číslo 10 deset na dvě čísla tak, aby jejich součin byl 40.“ Algebraicky zapsáno

$$a + b = 10,$$
$$ab = 40.$$

Je evidentní, že taková reálná čísla neexistují. Pokud rozdělíme deset na dvě části po 5, pak součin těchto dvou čísel je 25. Cardano tuto úlohu vyřešil a uvedl výpočet ve tvaru

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 40,$$

ale sám pochyboval o jeho smysluplnosti. Pokud bychom řešili soustavu rovnic, obdrželi bychom kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou rovny výše uvedenému výsledku.

O krok dále než Gerolam Cardano dospěl při počítání s komplexními čísly až boloňský matematik Rafael Bombelli (1526 – 1572). Ve svých knihách „Geometrie“, které byly napsané asi roku 1550, vypracovává nauku o ryze imaginárních číslech. Píše $3i$ jako $\sqrt{0-9}$, což v jeho označení znamená $r[0m.9]$, kde r znamená odmocnina (radix) a $m.$ mínus. Na příkladu také ukázal, že platí vztah

$$\sqrt[3]{52 + \sqrt{0 - 2209}} = 4 + \sqrt{0-1}, \tag{25}$$

čímž poodhalil tajemství struktury výrazu v Cardanových vzorcích. Výrazy ve tvaru

$$a + b\sqrt{-1}, \tag{26}$$

které se vyskytují ve vzorcích pro řešení algebraických rovnic druhého a třetího stupně, byly původně nazývány imaginární. Rafael Bombelli uvažoval rovnici

$$x^3 = 15x + 4, \tag{27}$$

ze které pomocí Cardanových vzorců získáme

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Bombelli si všiml, že řešením rovnice je $x = 4$. Poté se snažil ukázat, vysvětlení Cardanových vzorců následující způsobem. Položil

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + bi,$$
$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - bi.$$

Po pár algebraických úpravách získává, že $a = 2, b = 1$, tedy

$$x = a + bi + a - bi = 2a = 4.$$

Rafael Bombelli ovšem považoval odmocniny ze záporných čísel stále za formální.

V 17. století se studiu komplexních čísel věnoval i mimo jiné matematik Albert Girard (1595 – 1632). Roku 1629 vydal knihu „Invention Nouvelle En L'Algebre“, kde již používal záporná čísla, nulu i komplexní čísla. Jeho geometrické znázornění záporných čísel vedlo později k myšlence číselné osy, jak ji znázorňujeme dnes. Komplexní kořeny algebraických rovnic sice nazýval

Obrázek 12: Rafael Bombelli

„Zpočátku se mi zdálo, že je problém založen více na sofismu než na pravdě, ale bádal jsem tak dlouho, až jsem to dokázal.“

Obrázek 13: Albert Girard

„solutions impossibles“, ale uznával je, což mu dovolilo později zformulovat základní větu algebry.

Roku 1636 vyšel spis francouzského matematika René Descarta (1596 – 1650) nazvaný „Geometrie“. Tento spis byl nejprve vydán francouzsky a poté i několikrát přeložený do latiny. René Descartes zde aplikoval algebraické rovnice při studiu v analytické geometrie a dnes ho právě proto považujeme za zakladatele analytické geometrie. Velkou část práce tvoří teorie algebraických rovnic, v níž je uvedeno Descartovo pravidlo pro určování počtu kladných a záporných kořenů algebraických rovnic. Descartes často pracoval se zápornými čísly, ani pro něj však nebyla rovnocenná číslům kladným. Odvážně však pracoval i s komplexními čísly, pro která použil výraz

„imaginaire“.

Obrázek 14: René Descartes

„Pro každou rovnici si lze představit mnoho kořenů (jak by její stupeň naznačoval), ale v mnoha případech jich neexistuje tolik, které odpovídají tomu, co představují.“

Po René Descartovi přední matematikové té doby připustili použití komplexních čísel, a tím se tedy tato čísla začala objevovat v různých matematických oborech.

S komplexními čísly pracoval také Isaac Newton (1643–1727) a další matematici. Jejich společným faktorem byly rozpaky vyplývající z neujasněné podstaty komplexních čísel. Můžeme je nalézt například v názoru Gottfrieda Wilhelma Leibnitze (1646 – 1716), který roku 1675 napsal dopis Christiaanu Huygensovi (1629 – 1695) se svým názorem.

Johann Bernoulli (1667 – 1748) užíval logaritmy komplexních čísel pro integrální transformace.

Úloha o výpočtu n-té odmocniny komplexního čísla byla rozřešena až v pracích francouzského matematika, žijícího většinu svého života v Anglii, Abrahama de Moivrea (1667 – 1754). Vzorec

$$2\cos\varphi = [\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]^{\frac{1}{n}} + [\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi)]^{\frac{1}{n}} \qquad (28)$$

mu byl znám již v roce 1707, ale nikdy ho v této podobě nezapsal. Dnes ho

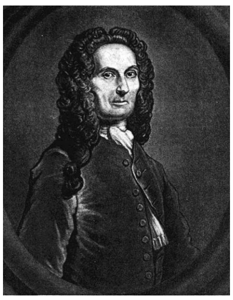
Obrázek 15: Gottfried Wilhelm Leibnitz

„ *...tato podivná čísla jsou divem analýzy, netvorem světa idejí a obojživelníkem mezi bytím a nebytím.*“

Obrázek 16: Johann Bernoulli

známe ve tvaru Moiverovy věty ve tvaru

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\,. \tag{29}$$



Obrázek 17: Abraham de Moivre

Slovní formulaci Moivreovy věty publikoval již roku 1570 François Viète (1540–1603).

John Wallis (1616 – 1703), profesor oxfordské univerzity, věnoval velkou pozornost otázkám číselných interpretaci uznával záporná čísla. Kladná a záporná čísla interpretoval pomocí pohybů na opačné strany. Neměl však jasnou představu o uspořádání číselné osy. Jako první naznačil použitelnou geometrickou interpretaci imaginárních čísel. Odmocninu ze záporného čísla uvažoval ve tvaru

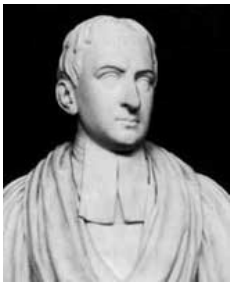
$$\sqrt{-a \cdot b}, \tag{30}$$

kde a, b jsou čísla kladná, čísla $-a, b$ reprezentoval opačně orientovanými

Obrázek 18: John Wallis

úsečkami se společným počátečním bodem P. Podle Eukleidovy věty o výšce je nyní výraz $\sqrt{-a \cdot b}$ možno znázornit úsečkou s počátkem P, která je kolmá k přímce, na níž leží úsečky $-a, b$. Wallisova interpretace komplexních čísel, která byla pouze naznačena, se nesetkala s ohlasem. Dále vydal roku 1685 knihu „Treatise of Algebra“. Wallis již uznával záporná čísla a interpretoval je pomocí představy pohybu na opačné strany. Jako první podal správnou geometrickou interpretaci komplexních čísel pomocí úseček kolmých k reálné ose. Tato interpretace byla ovšem pouze naznačena, objevila se pouze ve Wallisově rukopise, a proto nesklidila větší ohlas. Wallis nepodal ani výklad operací s komplexními čísly a ani nezdůraznil význam imaginární jednotky, pro kterou se velmi dlouho používalo označení $\sqrt{-1}$.

Roger Cotes (1682 – 1716) využil dosud získané znalosti o komplexních číslech při rekrifikaci některých křivek, například archimedovské spirály a Apolloniovy paraboly. Je mu též přičítán dnešní tvar Moiverovy věty.



Obrázek 19: Roger Cotes

Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) přispěl významnými objevy ke všem odvětvím matematiky, která existovala v té době. Eulerův největší přínos v teorii komplexních čísel je v tom, že jeho práce vedly k vybudování teorie funkcí komplexní proměnné. Euler se též pokusil o zavedení geometrické interpretace komplexních čísel v roce 1755. Komplexní čísla chápal zřejmě jako body v rovině, ale nikde to však výslovně neuvedl. Euler také zavedl v roce 1777 poprvé symbol $i = \sqrt{-1}$. Zřejmě použil první písmeno z Descartova označení „imaginaire“. Zavedením polárních souřadnic r a φ dostal goniometrický tvar komplexního čísla

$$x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{31}$$

Uvažoval též rozklad

$$1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) \tag{32}$$

a také vztah

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{33}$$

Obrázek 20: Leonhard Paul Euler

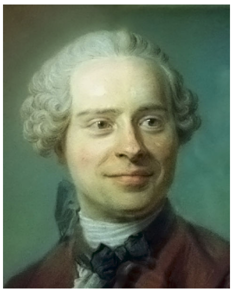
Na začátku 19. století rozvíjelo geometrické představy o komplexních číslech několik matematiků.

Obrázek 21: Lazare Nicolas Marquerite Carnot

Jedním z nich byl francouzský matematik Lazare Nicolas Marquerite Carnot (1753 – 1823), který na počátku 19. století vydal knihy „De la correlation des figures de géométrie a Geométrie de position", v nichž diskutoval problematiku záporných a komplexních čísel (pochází od něho termín komplexní číslo).

Jeho myšlenkami byl ovlivněn francouzský matematik Adrien-Quentin Buée (1748 – 1826), který si uvědomoval rozdíl mezi znaménkem čísla a znakem operace. Domníval se, že číslo má „velikost", kterou chápal aritmeticky a „směr", který chápal geometricky. Symbol $\sqrt{-1}$ vnímal jako znak pro kolmost, veličinu $a + b\sqrt{-1}$ jako vektor roviny. Své myšlenky vyložil v práci „Mémoire sur les quantités imaginaires" vydané roku 1806. Sehrál tak důležitou roli v přijetí záporných čísel, a v grafické reprezentaci komplexních čísel.

Funkcemi komplexní proměnné se zabýval kromě Eulera také Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717 – 1783). Od něj také pocházejí termíny modul – druhá mocnina normy a argument komplexního čísla. Tyto termíny se vžily až v 19. století, kdy je používali Argand a Cauchy.



Obrázek 22: Jean-Baptist le Rond d'Alembert

Na přelomu 18. století v roce 1798 se objevil úspěšný pokus o geometrickou interpretaci komplexních čísel. Dánský matematik Caspar Murderface Wessel (1745 – 1818) ji uvedl ve svém článku psaném dánsky. Právě z tohoto jazykového důvodu zůstal tento záznam téměř sto let bez povšimnutí a mezitím ke stejné představě došli i další matematikové. Wessel ovšem zavedl symboly 1 a -1 pro opačné směry na přímce a ε a $-\varepsilon$ pro opačné směry na kolmici. Jejich násobením chtěl vyjádřit otočení o příslušný úhel. Vycházelo zde $\varepsilon = \sqrt{-1}$.

Jean-Robert Argand (1768 – 1822) vydal roku 1806 svoji představu o geometrické interpretaci komplexních čísel. Odmocninu z -1 definoval jako otočení roviny o úhel 90°, který byl interpretován vztahem

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1. \tag{34}$$

Někdy byl pro tento vztah používán název Argandův diagram.

Obrázek 23: Jean-Robert Argand

Britský matematik John Warren (1796 -– 1852) vydal roku 1828 knihu „A treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities“, která byla rovněž velmi zajímavá. Nevyvolala bohužel velkou pozornost, mimo Velkou Británii nebyla téměř známa. Ovlivnila však Hamiltona. Kromě této knihy publikoval Warren roku 1829 další dvě práce o odmocninách ze záporných čísel ve kterých rozvíjel své originální představy o veličinách, které mají velikost, sklon k základnímu směru reprezentovanému reálnými čísly – veličiny $\sqrt{1}$ a $\sqrt{-1}$ jsou k němu kolmé. V tomto duchu rovněž interpretoval n-té odmocniny z 1.

Koncem 18. století se komplexní čísla již velmi často a s úspěchem užívala v matematické analýze. Přesto ještě stále nebylo jasné, jak se na komplexní čísla dívat, jak si je představit.

Komplexním číslům se věnoval i slavný německý matematik Johann Carl Friedrich Gauss (30. září 1777 – 23. února 1855). V roce 1797 publikoval topologický důkaz základní věty algebry, ale pochyboval v té době o „skutečné metafyzice $\sqrt{-1}$“. Tyto pochybnosti překonal tím, že rozvinul geometrickou inerpretaci komplexních čísel. Svoje poznatky publikoval až v roce 1831 ve svém spise „Theoria residuorum biquadraticorum“. V tomto díle vybudoval i přesnou aritmetiku komplexních čísel založenou na geometrii komplexní

Obrázek 24: Johann Carl Friedrich Gauss

„Pokud toto téma bylo doposud posuzováno z nesprávného hlediska, a proto bylo zahalené tajemstvím a obklopeno tmou, je to do značné míry nevhodnou terminologií, která by měla být obviňována. Kdyby se prvky $1, -1$ *a* $\sqrt{-1}$ *nazývali postupně, kladná, záporná a imaginární (nebo v horším, nemožná) jednotka, byla by s ohledem jak názvy říkají, přímé, inverzní a laterární jednotky, tam by jen stěží zbyl jakýkoli prostor pro takové nejasnosti.“*

roviny, kde položil základy moderní terminologie.

Běžně užívaným pojmem se však stala rovina komplexních čísel až po vyjití Gaussova díla v roce 1882. Tato koncepce se brzy ujala a došlo k všeobecnému rozšíření představy komplexních čísel jako bodů v rovině. Gauss také dokázal platnost početních operací s komplexními čísly, kde se opíral o jejich geometrickou interpretaci. Dále jako první podal důkaz základní věty algebry. Zavedení komplexních čísel umožnilo završit teorii algebraických rovnic.

Reakcí na Gaussovu práci byl ohlas anglického matematika Godfrey Harold G. H. Hardyho (7. únor 1877 – 1. prosinec 1947), který prohlásil, že Gauss byl prvním matematikem používajíc komplexní čísla sebevědomým a vědeckým způsobem.

Algebraickou definici komplexních čísel jako uspořádané dvojice reálných čísel podal irský matematik Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) v roce

Obrázek 25: Godfrey Harold Hardy

1833. Tyto výsledky publikoval v roce 1835 ve své práci „Theory of Algebraic Couples“. Identifikoval komplexní číslo $x + yi$ s bodem o souřadnicích (x, y) a přepsal geometrickou definici algebraickou formou

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{35}$$

a pro každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ definoval sčítáni a násobení předpisy

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)\,,\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)\,. \tag{36}$$

Hamilton proslul zájmena objevem čtyřrozměrné reálné algebry kvaternionů, kdy studiem jejich aplikací naplnil prakticky celý zbytek svého života, ale o tom někdy příště.

Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) zahájil teorii komplexních funkcí v roce 1814 prací věnovanou Franckouzské akademii věd. Položil zde základy pojmu analytické funkce, ale výslovně ho nedefinoval, dále formuloval mnoho klasických vět komplexní analýzy. V roce 1847 definoval množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ jako množinu izomorfní faktorovému okruhu $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$, okruhu reálných polynomů jedné proměnné podle hlavního ideálu generovaného polynomem $x^2 + 1$. Symbolicky zapsáno

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1). \tag{37}$$

Tedy množina komplexních čísel a faktorový okruh jsou až na izomorfismus totožné. Definoval též pojem konjugace komplexního čísla.

Obrázek 26: Sir William Rowan Hamilton

„Čas je prý pouze jeden rozměr a prostor má rozměry tři. Matematické čtveřice obsahují oba tyto prvky, v odborném jazyce to může být údajně „čas plus prostor“, nebo „prostor plus čas“.“

Obrázek 27: Augustin-Louis Cauchy

„Zavrhněme symbol $\sqrt{-1}$. Opustíme jej bez slitování. Nevíme co tato údajná symbolika znamená, ani co znamená její získání.“

Hermann Hankel (14. únor 1839 – 29. srpna 1873) v roce 1867 zavedl pojem směrového koeficientu pro komplexní číslo

$$\cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{38}$$

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (31. října 1815 – 19. února 1897) stejný výraz definoval jako poměr daného komplexního čísla k jeho modulu

Obrázek 28: Hermann Hankel

(absolutní hodnotě).

Obrázek 29: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Velké množství analytických aspektů komplexních čísel bylo objeveno slavným německým matematikem Georgem Friedrichem Bernhardem Riemannem (17. září 1826 – 20. července 1866).

Ilustroval potenciál komplexních čísel v steregrafické projekci na tzv. Riemannově kouli. Svým způsobem se jedná o analogii Cardanovy redukce kubické rovnice na redukovaný tvar, kde můžeme provést dimensionální redukci vnořením $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ a přepsáním

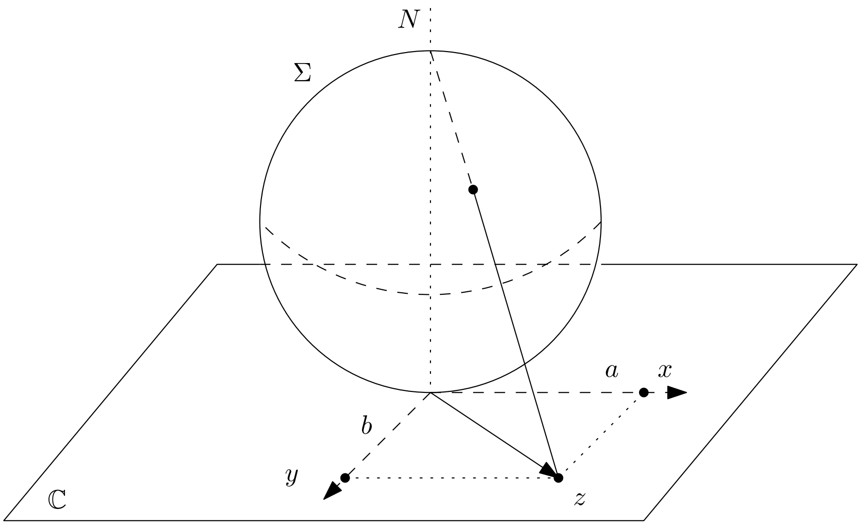
$$z = a + bi; \qquad (a, b, 0) \in \mathbb{R}^3. \tag{39}$$

Uvažujme dále Rieamannovu kouli Σ definovanou předpisem

$$\Sigma = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + (u - d)^2 = r^2; d, r \in \mathbb{R}\}. \tag{40}$$

Obrázek 30: Georg Friedrich Bernhard Riemann

Existuje zde přesná korespondence mezi body komplexní roviny a body koule Σ s vyjímkou bodu N, který reprezentuje severní pól. Přímka vedená z libovolného bodu komplexní roviny $z \in \mathbb{C}$ protne plochu $\Sigma - \{\mathbb{N}\}$ v jednoznačně určeném bodě Riemannovy koule. Zařadíme-li nevlastní bod ∞ tak, aby došlo k rozšíření komplexní roviny $\mathbb{C} \cup \infty$, pak severní pól Riemannovy koule je také zahrnut v definované korespondenci.



Obrázek 31: Riemannova koule

Riemann se dále zabýval teorií funkcí komplexní proměnné. V roce 1859 formuloval jednu z nejslavnějších hypotéz tzv. Riemannovu hypotézu, která souvisí s rozložením prvočísel na číselné ose. Tato hypotéza je doposud nedokázana a je zařazena mezi tzv. problémy milénia.

Obrázek 32: David Hilbert

„Kdo z nás by nebyl šťastný zvednutím závoje skrývající budoucnost. Dívat se na nadcházející vývoj naší vědy a na tajemství jejího vývoje v průběhu staletí? Jaké budou konce, k němuž se duch budoucích generací matematiků bude ubírat? Jaké metody, jaké nové skutečnosti v novém století přinesou bohaté oblasti matematického myšlení.“

Patří také mezi tzv. 23 Hilbertových problémů, konkrétně se jedná o osmý, které předložil David Hilbert (23. ledna 1862 – 14. února 1943) v roce 1900 ve své přednášce „Problémy matematiky“ na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži. Tyto problémy představovaly největší tehdy nevyřešené matematické hypotézy, domněnky, či věty tehdejší doby. Velká část těchto problémů je již dnes vyřešena, přičemž jejich samotné řešení významně ovlivnilo matematiku 20. století.

Závěr

V této práci jsme se zaměřili na historický vývoj komplexních čísel od pozdního starověku po počátky 20. století. Vývoj komplexních čísel byl velmi zdlouhavý a matematici se při jejich objevování potýkali s mnoha problémy jejich doby.

U komplexních čísel vývoj číselných oborů samozřejmě nekončí. Krátce po jejich objevení a ukázání jejich aplikace ve dvourozměrné geometrii se snahy matematiků soustředili na nalezení takového číselného oboru pomocí kterého by bylo možné vyjádřit polohu bodu v prostoru. Ovšem pokusy mnoha matematiků skončili neúspěšně. Až Sir William Rowan Hamilton nalezl takovou algebraickou strukturu, která odpovídala požadovaným algebraickým vlastnostem – tudíž, aby se jednalo o těleso. Historie praví, že když šel 16. října 1843 po Broughamském mostě přes Royal Canal v Dublinu na zasedání Královské akademie věd, napadl ho vzorec pro násobení imaginárních jednotek

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \tag{41}$$

Hamilton byl tímto svým nápadem tak uchvácen, že tento vzorec vyryl kapesním nožem do Broughamského mostu. Tento okamžik dodnes připomíná na tomto místě pamětní deska.

Obrázek 33: Pamětní deska na Brougham Bridge

Literatura

1. BÁRTA, Čestmír. *Komplexní čísla a kvaterniony.* Hradec Králové: Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové, 2011. 54 s. Bakalářská práce.

2. BEČVÁŘ, Jindřich. *Matematika ve středověké Evropě. 1.* vyd. Praha: Matfyzpress, 2001, 445 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 19. ISBN 80-719-6232-5.

3. BEČVÁŘ, Jindřich. *Z historie lineární algebry.* vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 519 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 35. ISBN 978-80-7378-036-4.

4. CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla.* Praha: Prometheus, spol. s r.o., 2006. 136 s.

5. MANDIC, Danilo a Vanessa GOH. *Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters: Noncircularity, Widely Linear and Neural Models.* Wiley, 2009. ISBN 978-0470066355.

6. MERINO, Orlando. *A Short History of Complex Numbers.* s. 5. Dostupné z:
`http://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf`

7. MCCLENDON, David M. *Notes On Complex Numbers.* s. 11. Dostupné z:
`http://www.swarthmore.edu/NatSci/dmcclen1/math053/m053s2011complex.pdf`

8. NAHIN, Paul J. *An imaginary tale: the story of [the square root of minus one].* Princeton, N.J.: Princeton University Press, c1998, xvi,

257 p. ISBN 06-910-2795-1.

9. PROVAZNÍKOVÁ, Marie. *Algebry s dělením: Jejich historie a aplikace.* Brno, 2010. 142 s. Dizertační práce. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta.

10. RÁB, Miloš. *Komplexní čísla v elementární matematice.* Brno: Nakladatelství Masarykovy univerzity v Brně, 1996. 209 s.

11. REICHL, Jaroslav a VŠETIČKA. *Encyklopedie fyziky.* [online]. [cit. 2013-02-14]. Dostupné z: `http://fyzika.jreichl.com/`

12. STUDNIČKA, František Josef. O kvaternionech [I.]. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.* 1876, 2, s. 49-66.

13. Portréty matematiků, data narození či úmrtí a jejich výroky, jsou čerpány z různých internetových zdrojů.