Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Kristýna Stodolová

# Klasické kombinatorické úlohy

Katedra didaktiky matematiky

| | |
|---|---|
| Vedoucí diplomové práce: | RNDr. Antonín Slavík, Ph.D. |
| Studijní program: | Matematika |
| Studijní obor: | Učitelství matematiky-informatiky pro střední školy |

Praha 2012

Ze srdce děkuji svému vedoucímu práce za jeho čas, spolehlivost, dobré rady, nezničitelnou trpělivost, vstřícný přístup a citelnou podporu.

Zdařilé kousíčky této práce bych ráda věnovala svému dědovi, Janu Tomášovi.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 10. 4. 2012 Kristýna Stodolová

Název práce: Klasické kombinatorické úlohy

Autor: Kristýna Stodolová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstrakt: Práce se věnuje pěti úlohám z kombinatoriky. V úloze o zajatcích je řešeno, kdo ze zajatců stojících v kruhu či řadě přežije, je-li postupně popravován každý $q$-tý. Zahrnuta je i varianta s více životy. V úloze o hanojských věžích jsou zkoumány počty a vlastnosti tahů kotoučů přenášených mezi třemi nebo čtyřmi kolíky včetně omezení přípustných tahů. V úloze o hostech jsou počítána rozesazení manželských párů kolem stolu střídající muže a ženy, kde žádný pár nesedí vedle sebe. Následují permutace s omezujícími podmínkami a věžové polynomy. U hlasovacího problému je určována pravděpodobnost, že jeden z kandidátů měl po celou dobu voleb víc než $k$-násobek počtu hlasů druhého. Zmíněna jsou Catalanova čísla. V úloze o školačkách je sestavován týdenní rozpis vycházek patnácti dívek ve trojicích tak, aby spolu žádné dvě nešly vícekrát. Následují úloha o golfistech a Schurigovy tabulky.

Klíčová slova: úloha o zajatcích, hanojské věže, úloha o hostech, hlasovací problém, úloha o školačkách

Title: Classic problems in combinatorics

Author: Kristýna Stodolová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstract: This work is concerned with five problems in combinatorics. In Josephus problem, people are standing in a circle or in a row and every $q$-th is executed until only one person remains. We show how to find the survivor, and discuss the generalization when each person has more lives. In Tower of Hanoi, we study the numbers and properties of moves necessary to transport the tower from one rod to another, where the total number of rods is either three or four. We mention related problems with restrictions on the legal moves. In ménage problem, we calculate the number of seatings of couples around a table such that men and women alternate and nobody sits next to his or her partner. We also discuss permutations with restricted positions and rook polynomials. In ballot problem, we consider two candidates competing against each other and calculate the probability that, throughout the count, the first candidate always had more votes than $k$ times the number of votes of the second one; we also mention the relation to Catalan numbers. In Kirkman's schoolgirl problem, the task is to find a weekly schedule for fifteen girls walking daily out in triads so that no two go together more than once. We also discuss the social golfer problem and Schurig's tables.

Keywords: Josephus problem, Tower of Hanoi, ménage problem, ballot problem, Kirkman's schoolgirl problem

# Obsah

# Úvod

Dostává se vám do rukou práce, která si klade za cíl shromáždit na jednom místě poznatky o některých kombinatorických úlohách, jimiž se matematici zaobírají už déle než sto let a jež jsou ve světě poměrně známy.

Určena je pro všechny zájemce o kombinatoriku, kteří si chtějí rozšířit obzory a poznat, že tento obor nekončí u vzorců pro počty permutací a variací, nýbrž tyto jsou jen prvním krokem na dlouhé cestě vpřed. Obsah práce by měl být srozumitelný i matematicky nadanějším studentům středních škol, předpokládá ale jistou dávku samostatnosti při dostudování nepříliš složitých, avšak jim dosud neznámých pojmů.

Text je členěn do pěti kapitol, každá z nich se věnuje jedné konkrétní úloze. V úvodu je vždy stručně popsána její historie a vysvětleno zadání. Zpravidla následuje několik způsobů řešení a různé varianty zadání. V závěru se pak objevuje zobecnění úlohy nebo souvislosti s dalšími partiemi kombinatoriky.

První kapitola se zabývá úlohou o zajatcích. Ti stojí v kruhu a postupně je každý druhý z nich popravován až do chvíle, kdy zbývá poslední, jenž dostane milost. Je ukázáno, kdo z nich to bude. Následují varianty, kdy je popravován každý $q$-tý a hledá se takové $q$, aby přežili určití zajatci. Dále jsou popsány i situace s více životy nebo s uspořádáním v řadě místo v kruhu.

Druhá kapitola pojednává o hanojských věžích. Kromě počtu tahů potřebných k přenesení kotoučů z jednoho kolíku na jiný ukazuje, jakým způsobem se jednotlivé kotouče pohybují a střídají v tazích. Poté je věnován prostor variantám, kde je přímý přenos kotoučů mezi některými kolíky zakázán nebo jsou čtyři kolíky místo tří. Pro zpestření je uvedena i úloha o příšerkách, která se dá převést na problém hanojských věží.

Tématem třetí kapitoly je úloha o hostech. Počítá se, kolika způsoby je možné rozesadit několik manželských párů okolo stolu tak, aby se muži a ženy střídali a nikdo neseděl vedle svého partnera. Následuje její zobecnění na permutace s omezujícími podmínkami. Zde je zmíněna i teorie věžových polynomů.

Čtvrtá kapitola je vyhrazena pro hlasovací problém. V něm se má určit pravděpodobnost, že první kandidát měl po celou dobu sčítání hlasovacích lístků víc než $k$-násobek počtu hlasů druhého. Zde je zajímavé, že existuje velký počet různých způsobů, jak dospět k výsledku. V závěru je uvedena varianta této úlohy, kdy je požadováno, aby první kandidát měl alespoň tolik hlasů jako druhý, a je ukázáno, že vede na Catalanova čísla.

Pátá kapitola patří úloze o školačkách. Úkolem je sestavit týdenní rozpis vycházek pro patnáct dívek chodících ve trojicích tak, aby každá s každou šla právě jednou. Ukázáno je několik řešení, algebraických a hlavně geometrických. Závěr je věnován zobecněnému problému, úloze o golfistech. Ukázány jsou i s tímto související Schurigovy tabulky, které slouží jako rozpis jednotlivých kol například šachových turnajů, v nichž se má utkat každý hráč s každým.

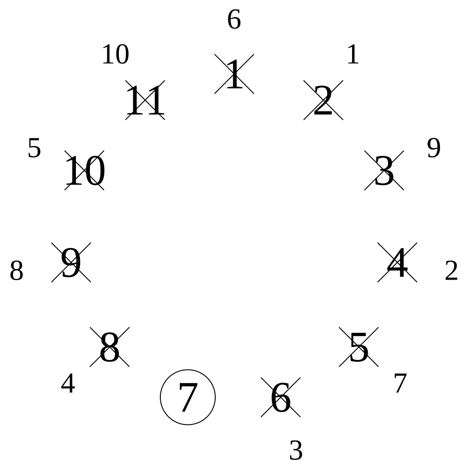
# 1. Úloha o zajatcích

Následující úloha, ve světě známá jakožto Josephus Problem, nás svým poněkud morbidním zněním odkazuje do dob prvního století našeho letopočtu, kdy zuřila válka mezi Židy a Římany. Vypráví se, že židovský kněz a učenec Josephus se se skupinou dalších mužů dostal do obklíčení římským vojskem. V beznadějné situaci jeho společníci zvolili raději smrt rukou svých přátel, než aby upadli v potupné zajetí. Shromáždili se proto do kruhu a postupně byl zabíjen každý druhý muž. Josephus, který tento přístup neschvaloval, rychle vypočetl kam se postavit, aby zůstal posledním přeživším. Později byl osvobozen, přijal jméno Flavius a vstoupil do služeb Říma. Zůstal však věrný židovské víře a tradici. Sepsal historicky cenná díla o své době. Přesnější a podrobnější informace jsou v [12].

## 1.1 Základní varianta

**Úloha 1.** *V kruhu stojí $n$ zajatců. Postupně je každý druhý popraven, jen poslední dostane milost. Který z nich to bude?*

Zajatce označíme čísly $1, \ldots, n$ ve směru hodinových ručiček. V tomto směru budeme též počítat. Nechť $J(n)$ je číslo omilostněného zajatce. Např. pro $n = 11$ jsou zajatci popravováni v pořadí 2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11 a $J(n) = 7$ (viz obr. 1.1).




Obrázek 1.1: V základní variantě úlohy o zajatcích přežije z jedenácti ten sedmý.

Řešení úlohy najdeme např. v [11] a [15]. Neprozradíme si ho hned na úvod, ale postupně k němu dojdeme. Zřejmě $J(1) = 1$, tj. je-li jediný zajatec, dostane milost. Pro větší $n$ se zamysleme nad tím, kolik zajatců zbyde po prvním kolečku a kteří to budou.

Je-li $n$ sudé, čili $n = 2k$, zbyde přesně $k$ zajatců s čísly $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$. Je-li $n$ liché, $n = 2k + 1$, pak během prvního kolečka odstraníme všech $k$ zajatců se sudými čísly a hned po nich bude určitě následovat zajatec číslo 1. Zbyde nám tedy opět $k$ zajatců, tentokrát s čísly $3, 5, 7, \ldots, 2k+1$. Tak či tak se náš problém zredukuje na hledání $J(k)$, jenom na $r$-té pozici teď stojí zajatec s číslem $2r-1$, resp. $2r+1$, $r=1,2,\ldots,k$. Pokud $J(k)$ známe, snadno už dopočítáme $J(n)$. Odtud dostáváme rekurentní vztahy:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1 \\ J(2k) &= 2J(k)-1 \quad \text{pro } k \geq 1 \\ J(2k+1) &= 2J(k)+1 \quad \text{pro } k \geq 1. \end{aligned}$$

Nyní bychom se rádi dopracovali k explicitnímu vyjádření $J(n)$. Sestavme si tabulku pro několik prvních hodnot $n$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J(n)$ | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 5 | 7 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 1 | 3 |

Můžeme si všimnout, že $J(n)=1$ pro $n=1,2,4,8,16$, čili pro mocniny dvojky. Jedničkou počínaje se hodnota $J(n)$ postupně zvyšuje o 2. Snadno tak dospějeme k hypotéze, že pro $n=2^m+l$, kde $0 \leq l < 2^m$, platí

$$J(n) = 2l+1. \tag{1.1}$$

Tuto hypotézu dokážeme indukcí podle $m$. V prvním kroku máme $m=0$, $l$ může nabývat pouze hodnoty 0. Dostáváme $J(1)=1$, což platí. V dalším kroku předpokládáme, že vztah platí pro $1,\ldots,m-1$. Ukážeme, že pak platí i pro $m$. Zaměříme se zvlášť na situace, kdy je $l$ sudé a kdy je liché. Pro sudé $l$ dostáváme

$$J(2^m+l) = 2J\left(2^{m-1}+\frac{l}{2}\right)-1 = 2\left(2\cdot\frac{l}{2}+1\right)-1 = 2l+1.$$

Podobně pro liché $l$

$$J(2^m+l) = 2J\left(2^{m-1}+\frac{l-1}{2}\right)+1 = 2\left(2\cdot\frac{l-1}{2}+1\right)+1 = 2l+1.$$

Tímto je naše hypotéza potvrzena. Dále si uvědomíme, že $m=\lfloor\log_2 n\rfloor$. * Dospěli jsme tedy k výsledku

$$J(n) = 2\left(n-2^{\lfloor\log_2 n\rfloor}\right)+1 = 2n+1-2^{\lfloor\log_2 n\rfloor+1}. \tag{1.2}$$

Pro zajímavost zmiňme, že tento výsledek má pěknou a jednoduchou interpretaci „škrtni první jedničku a napiš ji na konec“, pracujeme-li s čísly $n$ a $J(n)$ ve dvojkové soustavě. Číslo $n$ můžeme psát jako $n=\sum_{j=0}^{m} b_j 2^j$, kde $b_j=1$ nebo 0 pro $j=1,\ldots,m-1$ a $b_m=1$. Potom $l=n-2^m=\sum_{j=0}^{m-1} b_j 2^j$. Takže $l$ dostaneme z $n$ tím, že smažeme první jedničku z binárního zápisu čísla $n$. (Můžeme smazat i všechny nuly předcházející další jedničce). Dále dostáváme $2l=\sum_{j=0}^{m-1} b_j 2^{j+1}$. Dvěma vlastně násobíme tak, že na konec čísla připíšeme nulu. Nyní zbývá přičíst jedničku, to uděláme tak, že nulu, kterou jsme připsali na konec, změníme na jedničku.

* $\lfloor x\rfloor$ značí dolní celou část $x$

Např. pro $n = 22$ dostáváme $l = 6$ a $J(n) = 2 \cdot 6 + 1 = 13$. Ve dvojkové soustavě:

$$\begin{aligned} n &= \mathbf{10}110 \\ l &= 110 \\ 2l &= 110\mathbf{0} \\ J(n) &= 110\mathbf{1} \end{aligned}$$

Více podrobností je možno najít v [11] nebo česky psaném článku [15]. Nyní se už ale podíváme, jakým jiným způsobem by se dalo ke vzorci (1.2) dospět. Nejdřív si uvědomíme, že je-li počet zajatců mocninou dvojky, bude přeživším vždy zajatec číslo 1, čili $J(2^m) = 1$. Myšlenka je taková, že při každém kolečku máme sudý počet zajatců, vždy je tedy popraven poslední zajatec a na počátku dalšího kolečka se začíná počítat od zajatce číslo 1, ten tak nikdy není „druhý“ a zbyde až do samého konce. Dalším užitečným vztahem (pro obecnější znění viz [24]) je

$$J(n) \equiv J(n-1) + 2 \pmod{n} \quad \text{pro } n \geq 2. \tag{1.3}$$

Ten vyplývá ze skutečnosti, že máme-li $n$ zajatců a na počátku je popraven zajatec číslo 2, problém se převede na hledání $J(n-1)$. Začínáme však počítat od zajatce číslo 3, čísla zajatců jsou tedy o 2 posunuta, proto „+2“. Ve vzorci je „mod$n$“, protože číslo $n-1$ se neposunuje na $n+1$, nýbrž na 1.

Při hledání vzorce pro $J(n)$ tedy vycházíme ze vztahů:

$$\begin{aligned} J(2^m) &= 1 \quad \text{pro } m = 0, 1, 2, \ldots \\ J(n) &= \begin{cases} J(n-1) + 2 & \text{pro } J(n-1) < n-1 \\ 1 & \text{pro } J(n-1) = n-1 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ještě si položme otázku, zda existuje $k$ různé od mocniny dvojky, pro které $J(k) = 1$. Odpověď zní ne. Důkaz provedeme sporem. Mějme nejmenší $k$, pro které to platí. Nejbližší nižší mocnina dvojky k tomuto $k$ je $2^{\lfloor \log_2 k \rfloor}$. Z (1.4) plyne $J(k-1) = k-1$ a také $J(k-1) = 1 + 2 \cdot (k - 1 - 2^{\lfloor \log_2 k \rfloor})$, to vzhledem k „načítání dvojek“, čili

$$1 + 2 \cdot (k - 1 - 2^{\lfloor \log_2 k \rfloor}) = k - 1.$$

Odtud po úpravách

$$k = 2^{\lfloor \log_2 k \rfloor},$$

což je ve sporu s tím, že $k$ není mocninou dvojky. Platí tedy

$$J(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ mocnina dvojky} \\ J(n-1) + 2 & \text{jinak,} \end{cases}$$

odkud už přímo plyne (1.2), dříve odvozený vzorec pro $J(n)$.

## 1.2 Záchrana přítele

V [11] můžeme najít v souvislosti s úlohou o zajatcích následující problém.

**Úloha 2.** *Josephův přítel by se mohl zachránit tím, že se postaví na takovou pozici, aby na konci zbyli pouze on a Josephus. Která to je?*

Neboli pro $n \geq 2$ hledáme $I(n)$, číslo zajatce, který bude jako poslední popraven, pokud předpokládáme, že zajatec s číslem $J(n)$ je jediný, který dostane milost.

Při řešení můžeme postupovat stejným způsobem jako při hledání $J(n)$. Zcela analogickou úvahou dojdeme ke vztahům

$$\begin{aligned} I(2n) &= 2I(n) - 1 \quad \text{pro } n \geq 2 \\ I(2n+1) &= 2I(n) + 1 \quad \text{pro } n \geq 2. \end{aligned}$$

Odlišné však budou počáteční podmínky. Namísto $J(1) = 1$ dostáváme $I(2) = 2$ a $I(3) = 1$. Podobně jako při hledání $J(n)$ sestavíme tabulku několika prvních hodnot $I(n)$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I(n)$ | – | 2 | 1 | 3 | 5 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 1 |

Snadno pak dojdeme k hypotéze, že pro $n = 3 \cdot 2^m + l$, kde $l < 3 \cdot 2^m$, platí $I(n) = 2l + 1$. Tu lze dokázat pomocí indukce, analogicky jako při důkazu vztahu (1.1). Podotkněme ještě, že $3 \cdot 2^m = 2^{m+1} + 2^m$. Můžeme proto psát

$$I(2^m + 2^{m-1} + l) = 2l + 1 \quad \text{pro } l < 2^m + 2^{m-1}.$$

Když už umíme zjistit, který zajatec přežije a který bude popraven jako poslední, dozajista leckoho napadne následující otázka.

**Úloha 3.** *V kruhu stojí $n$ zajatců a postupně je každý druhý popravován. Kdo z nich bude popraven jako $a$-tý?*

Tímto se podrobně zabývá [25]. My si ukážeme, jak dospět k rekurentním rovnicím a bez důkazu pak uvedeme výsledek. Číslo $a$-tého popraveného zajatce označíme $J_a(n)$. Nejdřív najdeme příslušné rekurentní vztahy. Pro $n > 1$ je jako první popraven zajatec 2. Problém se nám tak zredukuje na hledání $(a-1)$-ního popraveného z $n - 1$ zajatců s tím, že čísla zajatců jsou o dvojku posunuta. Toto nám stačí k sestavení rovnic

$$J_a(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = a = 1 \\ 2 & \text{pro } n > 1, a = 1 \\ 1 & \text{pro } n, a > 1, J_{a-1}(n-1) = n - 1 \\ J_{a-1}(n-1) + 2 & \text{pro } n, a > 1, J_{a-1}(n-1) \leq n - 2. \end{cases}$$

Odsud je možné odvodit explicitní vyjádření

$$J_a(n) = \begin{cases} 2a & \text{pro } a \leq \frac{n}{2} \\ 2n + 1 - (2n - 2a + 1) \cdot 2^{\lfloor \log_2 n/(2n-2a+1) \rfloor + 1} & \text{pro } a > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

## 1.3 Obecnější problém a možnost určit číslo

Nyní budeme uvažovat situaci, kdy je popravován ne nutně každý druhý zajatec, nýbrž každý $q$-tý. Zajatce, který za těchto okolností přežije, budeme označovat číslem $J(n,q)$. Ačkoliv není znám explicitní vzorec pro výpočet $J(n,q)$, je zde několik zajímavých otázek, které dokážeme zodpovědět. Nejprve sestavme rekurentní rovnice pro výpočet $J(n,q)$. Ty vypadají následovně (pro podrobnosti viz [24]):

$$\begin{aligned} &J(1,q) = 1 \\ &J(n,q) \equiv J(n-1,q) + q \pmod{n} \quad \text{pro } n > 1 \end{aligned}$$

Jedná se vlastně o zobecnění (1.3). Tím, že je jako první popraven $q$-tý zajatec, se náš problém zredukuje na hledání $J(n-1,q)$ s tím, že čísla jsou o $q$ posunuta. A teď už se podívejme na další úlohu z [11].

**Úloha 4.** *V kruhu stojí $2n$ zajatců, prvních $n$ dobrých a dalších $n$ zlých. Ukažte, že vždy existuje $q$ (v závislosti na $n$) takové, že všichni zlí budou popraveni dříve než kdokoliv z dobrých.*

Např. pro $n = 3$, můžeme vzít $q = 5$. Jako první tři jsou pak popraveni zajatci s čísly 5, 4 a 6. Toto $q$ však není jediným řešením. Třeba pro $q = 52$ budou jako první popraveni zajatci 4, 6 a 5.

Kdyby bývali všichni zlí stáli na prvních $n$ pozicích, situace by se značně zjednodušila, stačilo by zvolit $q = 1$. Avšak i pro náš obtížnější případ dokážeme existenci $q$, nebudeme se snažit najít nejmenší vhodné, ale prostě nějaké. Zatímco pro $q = 1$ by byl v každém kroku popraven zajatec s aktuálně nejmenším číslem, my si dáme za cíl určit takové $q$, aby zajatci byli popravováni od konce, čili v každém kroku zajatec s aktuálně nejvyšším číslem. Když se nám to podaří, budou zřejmě po $n$ krocích zbývat jenom ti dobří.

Je-li popraven poslední zajatec, začíná se v dalším kroku počítat od prvního. Zbývá-li právě $k$ zajatců, co musí platit pro $q$, aby rozpočítávání padlo na posledního z nich? Odpověď je nasnadě. Musí platit, že číslo $q$ je dělitelné číslem $k$. Pak po $q/k$ kolečkách počítání skončíme u posledního zajatce.

Požadujeme tedy, aby $k$ dělilo $q$ pro $k = 2n, 2n-1, \ldots, n+1$. Abychom tomuto vyhověli, stačí zvolit

$$q = \mathrm{nsn}(n+1, n+2, \ldots, 2n).^*$$

Zjistili jsme tedy, že $q$ vždy existuje. Pro případ se šesti zajatci dostáváme $q = \mathrm{nsn}(4,5,6) = 60$. Pro toto $q$ budou jako první popraveni zajatci 6, 5 a 4.

Na tuto úlohu můžeme narazit i v [24]. Autor se zde zabývá i následující, podobnou úlohou.

**Úloha 5.** *V kruhu stojí $2n$ zajatců. Ukažte, že vždy existuje $q$ (v závislosti na $n$) takové, že jsou jako první popraveni všichni zajatci na lichých pozicích.*

Např. zvolíme-li při čtyřech zajatcích $q = 5$, pak jsou jako první popraveni zajatci 1 a 3.

*nsn značí nejmenší společný násobek

Použijeme podobný trik jako výše. Budeme hledat takové $q$, aby zajatci na lichých pozicích byli popravováni od konce, čili v pořadí $2n-1, 2n-3, \dots, 1$. Uvědomíme si, že v tomto případě hledáme $q$ takové, aby rozpočítávání skončilo vždy jedno místo před koncem kolečka, tj. v prvním kroku na $2n-1$ a v dalších krocích vždy dvě místa před naposledy vyřazeným, což je zajatec s aktuálně nejvyšším lichým číslem. Chceme tedy $q \equiv -1 \pmod{k}$ pro $k = 2n, 2n-1, \cdots, n+1$. Stačí proto zvolit

$$q = \mathrm{nsn}(n+1, n+2, \dots, 2n) - 1.$$

Když jsme již získali zkušenost s řešením jednodušších úloh, můžeme se odvážně pustit do následujícího problému, kterým se opět zaobírají [11] i [24].

**Úloha 6.** *Josephus zná počet lidí v kruhu $n$ i pozici $j$, na které se nachází. Jeho jedinou nadějí je zvolit takové číslo $q$, aby zbyl jako poslední. Může si být jist, že patřičné číslo existuje?*

Při hledání odpovědi nám přijde vhod Bertrandův postulát (viz např. [13]), podle něhož pro všechna $n > 2$ existuje alespoň jedno prvočíslo $p$, které splňuje $n/2 < p < n$. Využijeme i slabší podobu čínské věty o zbytcích (viz např. [28]), která říká, že jsou-li $q$ a $r$ nesoudělná čísla, potom má následující soustava rovnic řešení:

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{q} \\ x &\equiv b \pmod{r} \end{aligned}$$

Označme $N = \mathrm{nsn}(1, 2, \dots, n)$. Dále pak zvolme prvočíslo $p$, pro které platí $n/2 < p < n$. Nejdřív budeme předpokládat, že Josephus stojí v první polovině kruhu, čili $j \leq n/2$. Číslo $q$ pak dostaneme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} q &\equiv 0 \pmod{N/p} \\ q &\equiv j - 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Je třeba si uvědomit, že $p$ a $N/p$ jsou čísla nesoudělná a že $N/p$ je nejmenším společným násobkem čísel 1 až $n$ vyjma $p$. Splnění první rovnice způsobí, že kromě kroku, kdy zbývá právě $p$ zajatců, je vždy popraven zajatec na poslední pozici aktuálního kolečka, čili předchůdce naposledy popraveného. Druhá rovnice pak odpovídá situací, kdy zajatců zbývá právě $p$. V tomto kroku bude popraven $(j-1)$-ní zajatec od místa, kde začneme počítat. Protože až do té doby budou popravováni zajatci z konce kruhu, začne se počítání od zajatce číslo 1 a bude tedy popraven zajatec $j-1$.

Pro $q$, jehož existence je zaručena díky čínské větě o zbytcích, budou zajatci popraveni v pořadí $n, n-1, \dots, p+1, j-1, j-2, \dots, 1, p, p-1, \dots, j+1$ a Josephus na $j$-tém místě přežije. (Využíváme zde i skutečnosti, že $p > n/2 \geq j$, takže se nestane, že by byl Josephus popraven dřív, než nastane chvíle, kdy zbývá právě $p$ zajatců.)

Podobným způsobem můžeme vyřešit situaci, kdy $j > n/2$. Tentokrát dostaneme $q$ z rovnic

$$\begin{aligned} q &\equiv 1 \pmod{N/p} \\ q &\equiv j + 1 - n \pmod{p}. \end{aligned}$$

Tady už snadno domyslíme, že tentokrát budou zajatci popravováni v pořadí $1, 2, \dots, n-p, j+1, j+2, \dots, n, n-p+1, n-p+2, \dots, j-1$. Takže v obou případech má Josephus možnost záchrany.

## 1.4 Více životů

Nyní dejme každému ze zajatců do začátku $z$ životů (tj. všem stejně), které fungují tak, že zajatec je popraven až ve chvíli, kdy je na něho ukázáno celkem $z$-krát. Do té doby zůstává stát v kruhu, přičemž aktuální počet jeho životů rozpočítávání nijak neovlivňuje. O této problematice pojednává [23] a dává odpověď na dvě níže zadané úlohy.

Nejdříve si ještě položme otázku, jestli počet životů může ovlivnit konečný výsledek, tedy to, kdo přežije. Odpověď zní ano. Například pro $n = 6$ a $q = 4$, přežije pro $z = 1$ zajatec číslo 5 a pro $z = 2$ zajatec číslo 3.

Na druhou stranu ale uvažme situaci, kdy $n$ a $q$ jsou nesoudělná. V tomto případě budou pro libovolné $z$ zajatci popravováni ve stejném pořadí jako pro $z = 1$. Proč? Protože mezitím, kdy je na někoho ukázáno poprvé a podruhé, je ukázáno i na všechny ostatní zajatce. To vede až k tomu, že dřív, než je kdokoliv popraven, spotřebuje každý $z-1$ životů a zbyde mu poslední, takže všichni vlastně čelí témuž jako při $z = 1$.

Ukážeme si, jak se Josephus může zachránit i v případě, že nezná přesný počet životů, který jim bude přidělen. Následující úloha je vlastně zobecněním úlohy 6.

**Úloha 7.** *Josephus zná počet zajatců v kruhu $n$ a svoji pozici $j$. Ukažte, že existuje $q$, jehož volbou se určitě zachrání při libovolném počtu životů.*

Možná bude trochu překvapením, že řešení je shodné s řešením úlohy 6, čili $q$ splňující:

$$\text{Pro } j \leq n/2 \quad q \equiv 0 \pmod{N/p} \tag{1.5}$$
$$q \equiv j - 1 \pmod{p}. \tag{1.6}$$
$$\text{Pro } j > n/2 \quad q \equiv 1 \pmod{N/p} \tag{1.7}$$
$$q \equiv j + 1 - n \pmod{p}. \tag{1.8}$$

Připomeňme, že $N$ je nejmenší společný násobek čísel $1, \ldots, n$ a $p$ prvočíslo takové, že $n/2 < p < n$.

Pro oba případy se podíváme, v jakém pořadí bude ukazováno na zajatce. Pro $1 < j \leq n/2$ to je

$$n^z, (n-1)^z, \ldots, (p+1)^z, \pi^{z-1}, j-1, j-2, \ldots, 1, p, p-1, \ldots, j+1,$$

kde $i^k$ znamená, že na prvek $i$ (případně posloupnost nějakých prvků) bylo ukázáno $k$-krát za sebou, a $\pi$ značí nějakou permutaci prvků $1, \ldots, p$, která začíná prvkem $j-1$. Úsek $n^z, (n-1)^z, \ldots, (p+1)^z$ je důsledkem vztahu (1.5). Díky $q \equiv 0$ je vždy ukázáno na posledního zajatce. Jestliže se tedy zajatec ocitne na poslední pozici, je na něho ukazováno tak dlouho, dokud mu nedojdou životy. Po popravě zajatce $(p + 1)$ zbývá právě $p$ zajatců. Pro tuto chvíli se vše řídí vztahem (1.6). Protože $p$ je prvočíslo a $q$ po dělení číslem $p$ nedává zbytek 0, jsou tato čísla nesoudělná. Všem žijícím zajatcům navíc zbývá všech $z$ životů, nastává tedy dříve popsaná situace, kdy životy všech postupně klesnou na jediný ($\pi^{z-1}$). Pokračování je pak stejné jako v úloze 6.

Pro $j = 1$ už snadno domyslíme, že vždy bude ukázáno na aktuálně posledního zajatce a Josephus přežije bez ztráty jediného života.

Pro $j > n/2$ bude na zajatce ukazováno v pořadí

$$(1, 2, \ldots, n)^{z-1}, 1, 2, \ldots, n-p, j+1, j+2, \ldots, n, n-p+1, n-p+2, \ldots, j-1.$$

Ani zde není zdůvodnění obtížné, neboť (1.7) mj. zaručuje, že při $n$ zajatcích bude popořadě ukazováno na každého z nich. Každý tak hned v úvodu spotřebuje $z-1$ životů a vše následující je pak shodné jako v úloze 6, přičemž (1.8) způsobí, že po popravě prvních $n-p$ zajatců, bude následovat zajatec $j+1$, čímž se zajatec $j$ jaksi „přeskočí“ a přežije tak až do konce.

Vidíme, že pořadí popravování zajtců ani v jednom z případů nezávisí na počtu jejich životů. Zjistili jsme tedy, že Josephus se určitě může zachránit.

Ani v následující úloze nezná Josephus přesný počet životů. Naštěstí ví, že od určité hodnoty už jejich množství nehraje roli...

**Úloha 8.** *Josephovi je známo $n$ i $q$. Má možnost stoupnout si na libovolnou pozici a navíc určit dolní hranici počtu životů, které dostanou. Ukažte, že pro něj existuje způsob, jak se zachránit.*

Zájemce nalezne řešení ve [23]. Zde je ukázáno, že Josephovi stačí zvolit $z = F_{n+2}$.* Pro toto a všechna větší $z$ přežije vždy tentýž zajatec.

## 1.5 V řadě místo v kruhu

Nyní bude mít každý zajatec zase pouze jediný život a úloha se pozmění jinak. Zajatci nebudou stát v kruhu, nýbrž v řadě. Bude popravován každý druhý a v momentě, kdy se dojde na konec řady, směr se obrátí a bude se postupovat k jejímu počátku. A pozor – zajatci na koncích řady se nepočítají dvakrát po sobě (tím by byl jejich osud ihned zpečetěn), nýbrž pouze jednou. Poslední přeživší dostane milost. Kdo to bude? Tímto se podrobněji zabývá [12], a to i případy, kdy je popravován každý třetí. My si zde ukážeme některé základní výsledky.

**Úloha 9.** *Určete $W(n)$, omilostněného z $n$ zajatců za výše popsaných podmínek.*

Zřejmě $W(1) = 1$. Dále zodpovězme, co mají společného situace, kdy je $n$ sudé a kdy liché. Zamysleme se, co se stane po prvním průchodu řadou. Zřejmě padnou všichni se sudými čísly. Je-li $n$ sudé, $n = 2k$, je jako poslední v řadě popraven zajatec $2k$, načež se otočí směr a na $2k-1$ je ukázáno jakožto na „prvého“. Je-li $n$ liché, $n = 2k-1$, je po popravě zajatce $2k-2$ zajatec $2k-1$ opět označen jako „prvý“, přičemž se otočí směr počítání. V obou případech se tedy dostaneme do shodné situace. Odsud plyne $W(2k) = W(2k-1)$. Navíc vidíme, že zbylo právě $k$ zajatců. Problém se tak zredukoval na hledání $W(k)$ s trochu pozměněnými čísly, jedničce odpovídá $2k-1$, dvojce $2k-3$, ..., číslu $k$ odpovídá 1, tj. číslu $r$ z nové úlohy odpovídá číslo $2k-2r+1$ z úlohy původní. Dostáváme tak $W(2k) = 2k - 2W(k) + 1$. Shrneme-li naše zjištění, při hledání $W(n)$ vycházíme ze vztahů

$$\begin{aligned} &W(1) = 1 \\ &W(2k) = W(2k-1) = 2k - 2W(k) + 1 \quad \text{pro } k \geq 1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

*$F_n$ značí $n$-té Fibonacciho číslo. Ta definujeme jako $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$ pro všechna $i \geq 2$.

Pro zajímavost si sestavme tabulku několika prvních hodnot $W(n)$:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W(n)$ | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 9 | 9 | 11 | 11 | 9 | 9 | 11 | 11 | 1 | 1 |

Položme $N$ rovno $n$ nebo $n-1$ tak, aby $N$ bylo liché. $N$ můžeme vyjádřit ve dvojkové soustavě jako $N = \sum_{j=0}^{m} b_j 2^j$, kde $b_m = b_0 = 1$ a $b_j = 0$ nebo 1 pro $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Ukážeme, že platí

$$W(n) = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ liché}}}^{m} b_j 2^j. \tag{1.10}$$

Použijeme indukci podle $n$, přičemž vzhledem k (1.9) stačí pracovat pouze s lichými $n$. V prvním kroku snadno ověříme, že vztah (1.10) platí pro všechna $n \leq 10$. V druhém kroku předpokládáme, že (1.10) platí pro $1, 2, \ldots, n-1$ a ukážeme, že pak platí i pro $n$, kde $n > 10$. Důkaz provedeme zvlášť pro dva případy, a to $n = 4k-1$ a $n = 4k+1$. Nechť $n = 4k-1$, tj. $b_0 = b_1 = b_m = 1$ a

$$k = \frac{n+1}{4} = 1 + \sum_{j=2}^{m} b_j 2^{j-2}. \tag{1.11}$$

Pak $W(4k-1) = 4k+1-2W(2k) = 4k+1-2(2k+1-2W(k)) = 4W(k)-1$,

tj. $W(n) = 4W\left(\dfrac{n+1}{4}\right) - 1$.

Pro sudé $k$ přejdeme ke $k-1$ tím, že od (1.11) odečteme jedničku a dostáváme

$$W\left(\frac{n+1}{4}\right) = W\left(\sum_{j=2}^{m} b_j 2^{j-2}\right) = 1 + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ liché}}}^{m} b_j 2^{j-2}.$$

Pro liché $k$ je $b_2 = 0$ a dostáváme

$$W\left(\frac{n+1}{4}\right) = W\left(2^0 + \sum_{j=3}^{m} b_j 2^{j-2}\right) = 1 + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ liché}}}^{m} b_j 2^{j-2}.$$

Celkově tedy

$$W(n) = 4W\left(\frac{n+1}{4}\right) - 1 = 3 + \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ liché}}}^{m} b_j 2^j = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ liché}}}^{m} b_j 2^j.$$

Případ $n = 4k+1$ se ukáže podobně.

A co nám výsledek vlastně říká? Napíšeme-li $N^*$ ve dvojkové soustavě, pak z něj binární zápis čísla $W(n)$ dostaneme jednoduše tím, že na poslední pozici ponecháme jedničku, na pozice příslušející sudé mocnině dvojky napíšeme nulu a zbylé číslice opíšeme. Např. $W(45) = 41$ vypadá ve dvojkové soustavě následovně:

$$n = 101101$$
$$W(n) = 101001.$$

$^*N$ je rovno $n$ nebo $n-1$ tak, aby bylo liché.

# 2. Hanojské věže

V [19] se dočteme: „V městě Banárasu je prý chrám, v němž indický bůh Brahma při stvoření světa postavil tři diamantové tyčinky a navlékl na jednu z nich 64 zlatých kroužků: největší je vespod a každý další je menší než předešlý. Chrámoví kněží mají za úkol překládat bez ustání, dnem i nocí, tyto kroužky z jedné tyčinky na druhou; přitom používají třetí tyčinky jako pomocné a dodržují pravidla – přenášet současně jen jeden kroužek a nepokládat větší na menší. Pověst praví, že až bude přeneseno všech 64 kroužků, nastane konec světa. . . “

Pokud této legendě uvěříme, máme se obávat brzkého konce? Nejen na to odpoví tato kapitola, jež se zabývá hanojskými věžemi, matematickým hlavolamem, který spatřil světlo světa roku 1883 v Paříži. Jeho autorem byl Edouard Lucas (viz např. [20]).

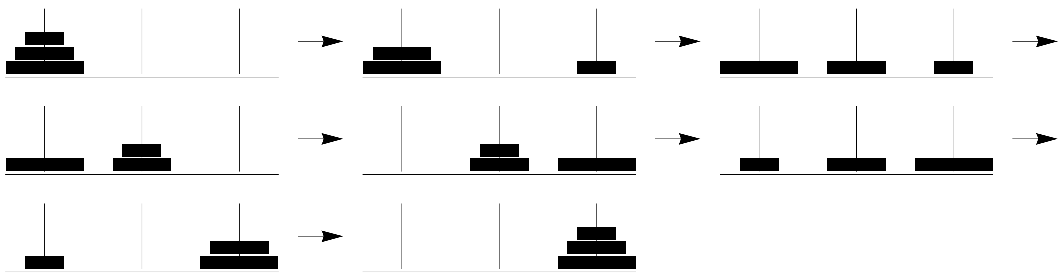
## 2.1 Základní varianta

Nebude-li řečeno jinak, vycházíme z těchto předpokladů:

- Hlavolam sestává ze tří kolíků (značíme $A$, $B$ a $C$) a $n$ kotoučů (disků), které se na tyto kolíky dají nasouvat. Přitom se každé dva kotouče liší svojí velikostí.
- Tahem se rozumí sejmutí vrchního kotouče z některého kolíku a jeho přemístění na jiný kolík, pochopitelně opět nahoru.
- Platí pravidlo, že větší kotouč nemůže být umístěn na menším.

**Úloha 10.** *Jaký je minimální počet tahů potřebných k přemístění věže o $n$ kotoučích z jednoho kolíku na jiný?*

Můžeme předpokládat, že všechny kotouče jsou na kolíku $A$ a naším cílem je přesunout je na $C$. Minimální počet tahů při $n$ kotoučích označíme $H_n$. Např. pro $n = 3$ je $H_n = 7$, viz obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Nejrychlejší přesun tří kotoučů z prvního na poslední kolík.

Klíčovou otázkou vedoucí k řešení je, v jaké situaci přesuneme největší kotouč. Ten musí být nutně přesunut alespoň jednou, z $A$ na $C$, což je možné pouze ve chvíli, kdy jsou všechny ostatní kotouče na kolíku $B$. Problém si tedy můžeme rozdělit do tří kroků:

1. Přesuneme $n - 1$ vrchních kotoučů z $A$ na $B$.
2. Přesuneme největší kotouč z $A$ na $C$.
3. Přesuneme $n - 1$ kotoučů z $B$ na $C$.

Rozmyslíme si, že toto řešení je optimální. Pokud bychom největší kotouč přesouvali víc než jednou, nijak tím nesnížíme počet přesouvání ostatních kotoučů. Dále si uvědomíme, že největší kotouč nikdy neomezuje pohyby ostatních a že přesouvání z $A$ na $B$ je stejně náročné jako přesouvání z $A$ na $C$ (stačí prohodit označení kolíků $B$ a $C$), a proto kroky 1 a 3 vyžadují každý $H_{n-1}$ tahů. Krok 2 zvládneme v jednom tahu. Díky této úvaze dospíváme k rekurentním rovnicím

$$H_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 2H_{n-1} + 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Na základě těchto rovnic snadno dojdeme k explicitnímu vyjádření $H_n$. Můžeme použít substituci (viz [11]), a to tak že nejdříve k oběma stranám přičteme jedničku. Dostáváme

$$\begin{aligned} H_1 + 1 &= 2 \\ H_n + 1 &= 2H_{n-1} + 2 \quad \text{pro } n > 1. \end{aligned}$$

Nyní položíme $T_n = H_n + 1$, čili

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 \\ T_n &= 2T_{n-1} \quad \text{pro } n > 1. \end{aligned}$$

Odtud explicitně vyjádříme $T_n$:

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot T_{n-2} = \ldots = \underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-1 \text{ dvojek}} \cdot T_1 = 2^n.$$

Protože $H_n = T_n - 1$, dostáváme výsledek

$$H_n = 2^n - 1 \quad \text{pro } n \geq 1. \tag{2.1}$$

Vrátíme-li se k legendě z úvodu této kapitoly, vidíme, že přenesení 64 kroužků vyžaduje $2^{64} \doteq 1{,}8 \cdot 10^{19}$ tahů. Při rychlosti jeden tah za vteřinu by celý proces trval víc než 500 miliard let.

Nyní jsme se zabývali pouze situací, kdy jsou všechny kotouče na počátku na jediném kolíku. Můžeme se ale rozhodnout přesouvat kolíky z libovolného počátečního stavu do libovolného koncového. Horní odhad na počet potřebných tahů získáme poměrně jednoduše. O tom už úloha z [11].

**Úloha 11.** *Existují nějaké dvě konfigurace $n$ kotoučů na třech kolících takové, že by přesun mezi nimi vyžadoval více než $2^n - 1$ tahů?*

Odpověď zní ne a dokážeme si ji indukcí. Pro $n = 1$ přesuneme kotouč odkudkoliv kamkoliv na nejvýše jeden tah, což vyhovuje požadavkům. Dále předpokládáme, že přesun mezi libovolnými $k$–kotoučovými konfiguracemi vyžaduje nanejvýš $2^k - 1$ tahů, pro $k = 1, \dots n - 1$. Nyní uvažujme $n$ kotoučů. Pokud je největší kotouč v obou uspořádáních na stejném kolíku, vůbec s ním nebudeme hýbat a zbylých $n - 1$ kotoučů uspořádáme během nejvýše $2^{n-1} - 1 \leq 2^n - 1$ tahů. Jinak můžeme postupovat následovně:

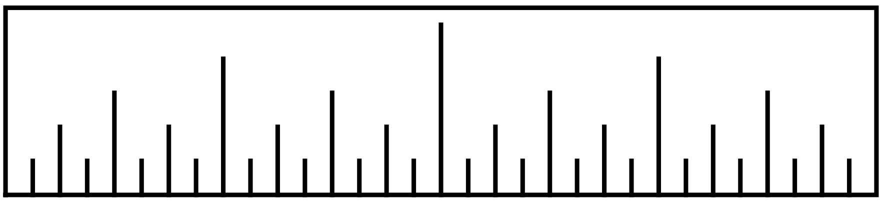
1. Přesuneme $n - 1$ nejmenších kotoučů mimo počáteční a cílový kolík největšího kotouče.
2. Přesuneme největší kotouč na kolík, který vyžaduje koncová konfigurace.
3. Přesuneme $n - 1$ ostatních kotoučů do požadovaného uspořádání.

Žádný z kroků 1 a 3 netrvá díky indukčnímu předpokladu víc než $2^{n-1} - 1$ tahů. Celkem je tedy třeba nejvýše $(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$ tahů. Uvědomme si, že jsme zároveň dokázali i to, že od libovolné konfigurace kotoučů lze dojít do libovolné jiné.

## 2.2 Řešení trochu jinak

Vraťme se ještě k řešení hanojských věží. Snadno si uvědomíme, že optimální posloupnost tahů je jen jedna. S jejím rekurzivním popisem si sice vystačíme, ale je zajímavé podívat se na pohyby kotoučů trochu podrobněji jako např. v [31].

Nejdřív se zamysleme nad tím, ve kterém tahu se pohybuje který kotouč, aniž bychom se zajímali o to, mezi kterými kolíky tento tah probíhá. Nejjednodušší to je s největším kotoučem. Ten se pohne jednou, a to přesně uprostřed celé posloupnosti tahů. Navíc tím tuto posloupnost rozdělí na dva stejné úseky, z nichž každý odpovídá přesunu $n - 1$ kotoučů. Druhý největší kotouč se pohne vždy přesně uprostřed těcho úseků a tak bychom mohli pokračovat až k nejmenšímu. Situaci pro $n = 5$ ilustruje obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Hanojské věže pro pět kotoučů – délka čárky odpovídá velikosti toho právě přesouvaného.

Aby se nám o kotoučích lépe mluvilo, očíslujme si je od nejmenšího podle velikosti $1, \dots, n$. Díky obrázku snadno přijdeme na to, že kotouč 1 je přesouván v každém lichém tahu, kotouč 2 v každém sudém tahu, jehož číslo ale není dělitelné čtyřmi, ..., $i$ v tahu, jehož číslo je dělitelné $2^{i-1}$, ale ne $2^i$. (Důkaz by bylo možno provést např. indukcí.) Toto zjištění lze pěkně interpretovat, zapíšeme-li čísla tahů ve dvojkové soustavě. Tři kotouče vyžadují sedm tahů. Kdy je kterým taženo poznáme následovně:

| | |
|---|---|
| 00**1** | Přesouváme kotouč 1. |
| 0**1**0 | Přesouváme kotouč 2. |
| 01**1** | Přesouváme kotouč 1. |
| **1**00 | Přesouváme kotouč 3. |
| 10**1** | Přesouváme kotouč 1. |
| 1**1**0 | Přesouváme kotouč 2. |
| 11**1** | Přesouváme kotouč 1. |

V každém tahu přesouváme kotouč odpovídající pozici poslední jedničky ve dvojkovém zápisu čísla tohoto tahu. (První číslice odpovídá největšímu kotouči, poslední nejmenšímu.)

Nyní se zaměřme na to, odkud kam se který kotouč přesouvá. Chceme-li někomu předvést, jak umíme hlavolam řešit, bude pro nás klíčové umět zodpovědět otázku, kam přesunout nejmenší kotouč v prvním tahu, je-li naším cílem, aby věž na konci stála na třetím kolíku.

K tomu postačí prostá úvaha. Kotouč $n$ budeme přesouvat pouze jednou, a to na kolík $C$. Aby to bylo možné, musí být na $B$ přesunut kotouč $n-1$. K tomu ale potřebujeme nejdřív přesunout kotouč $n-2$ na $C$ atd. Vidíme, že první tah kotouče se stejnou paritou jako má $n$ je na kolík $C$, s opačnou paritou na kolík $B$. Při lichém počtu kotoučů ten nejmenší tedy v prvním tahu přesuneme na $C$, při sudém počtu na $B$.

Dále můžeme vypozorovat, že se každý kotouč pohybuje buď pouze ve směru $A \to B \to C \to A \to \ldots$, nebo pouze ve směru $A \to C \to B \to A \to \ldots$. Důkaz provedeme indukcí. Pro malé počty kotoučů tvrzení snadno ověříme a dále předpokládáme, že platí pro $1, 2, \ldots, n-1$. Pro $n$ kotoučů pak nejdříve přesuneme $n-1$ kotoučů z $A$ na $B$. Z indukčního předpokladu plyne, že se každý z nich během tohoto přesunu pohybuje pouze v jednom směru. Poté přesuneme největší kotouč. Ten vykoná jediný tah, tvrzení tedy splňuje. Poté přesuneme $n-1$ kotoučů z $B$ na $C$. Může se stát, že by se směr některého z nich obrátil? Ne, protože věž z $n-1$ kotoučů byla v obou případech posunuta ve stejném směru.

Uvědomme si ještě, že pokud právě nehodláme přesunout nejmenší kotouč, je v každé pozici (vyjma počáteční a koncové) právě jeden další přípustný tah. Z výše uvedených poznatků víme, že nejmenším kotoučem je hýbáno v každém lichém tahu, a to pouze v jednom směru, který záleží na paritě $n$. Celý algoritmus tedy spočívá v opakování následující dvou kroků, dokud není celá věž přesunuta na $C$:

1. Přesuneme nejmenší kotouč v patřičném směru (pro liché $n$ proti, pro sudé $n$ po směru hodinových ručiček).
2. Přesuneme jiný než nejmenší kotouč (jediná možnost).

Tento postup můžeme popsat i jinak, když zaměříme pozornost na to, mezi kterými kolíky k přesunům dochází. Pro liché $n$ (pro sudé analogicky, zaměněním $B$ a $C$) se opakuje následující:

1. Tah z $A$ na $C$ (přesun nejmenšího kotouče).

2. Přípustný tah mezi $A$ a $B$.
3. Tah z $C$ na $B$.
4. Přípustný tah mezi $A$ a $C$.
5. Tah z $B$ na $A$.
6. Přípustný tah mezi $B$ a $C$.

Podíváme-li se pozorněji, zjistíme, že ve skutečnosti se opakují pouze tři kroky:

1. Tah mezi $A$ a $C$.
2. Tah mezi $A$ a $B$.
3. Tah mezi $B$ a $C$.

## 2.3 Příšerky a koule

V [18] je uvedeno, že se hanojské věže využívají ke zkoumání toho, jak lidé řeší problémy. Vyřešení následující úlohy prý trvá v průměru šestnáctkrát déle než vyřešení jí izomorfní úlohy zadané v pojmech hanojských věží.

Tři příšery drží tři koule. Jak příšery, tak koule jsou ve třech velikostech: malá, střední, velká. Malá příšera drží velkou kouli, střední příšera drží malou kouli a velká příšera drží středně velkou kouli. Toto uspořádání však uráží smysl příšer pro symetrii, a tak by chtěly situaci změnit do stavu, kdy každá příšera bude držet kouli své velikosti. Příšery mohou měnit velikost koulí, ale musí při tom dodržovat pravidla etikety příšer:

- Vždy se může měnit velikost pouze jedné koule.
- Pokud dvě příšery drží koule stejné velikosti, jen koule, kterou drží větší příšera, se může změnit.
- Koule se nikdy nesmí změnit na stejnou velikost jako koule, kterou drží větší příšera.

**Úloha 12.** *Jakým způsobem docílí příšerky co nejrychleji stavu spokojenosti?*

Řešení se v [18] neuvádí, ale není obtížné na něj přijít. Začnou-li příšerky velikosti koulí bez důkladného přemýšlení (avšak za dodržení pravidel) měnit, nejspíš se brzy dostanou do kýženého stavu, protože možností není mnoho, ale pravděpodobně to nebude optimálním způsobem.

Zapojí-li rozum, povšimnou si, že nejvíc „diskriminována“ je nejmenší příšerka. Ta může změnit svoji kouli na malou jen ve chvíli, kdy žádná z ostatních příšer nedrží malou kouli a ani kouli stejné velikosti, jako drží malá příšerka. V dané situaci to znamená, že potřebuje, aby druhé dvě příšery držely střední koule.

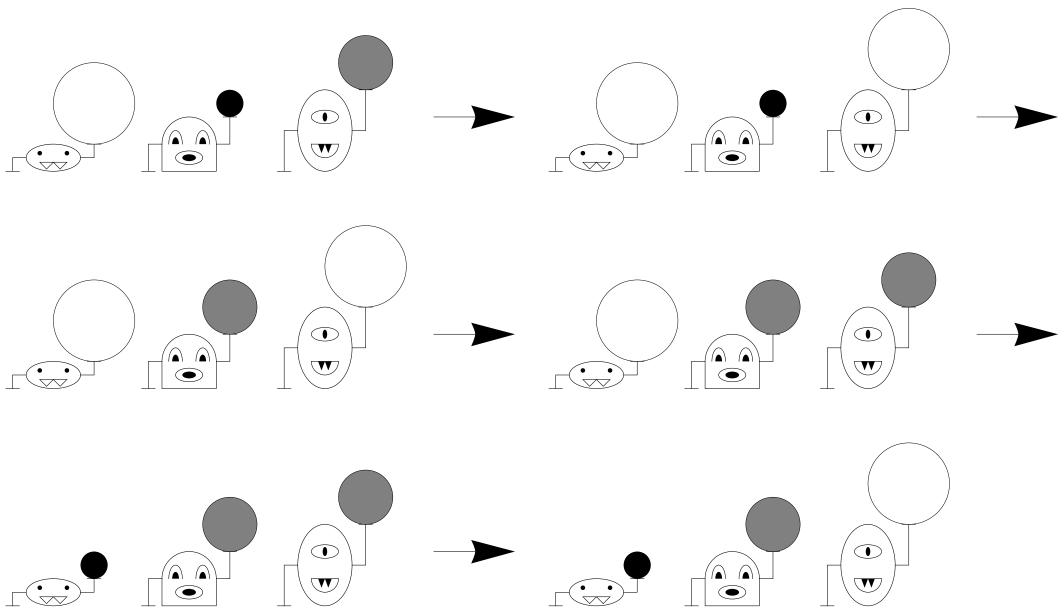
Jak toho docílit, když střední kouli drží velká příšera, ale střední nikoliv? Velká příšera musí té střední udělat prostor, a to tím, že svoji kouli změní na takovou velikost, aby střední příšeru „neblokovala“, tj. na velkou. Příšerky budou měnit koule tímto způsobem:

$$VMS \rightarrow VMV \rightarrow VSV \rightarrow VSS \rightarrow MSS \rightarrow MSV,$$

kde $M$, $S$ a $V$ postupně značí malou, střední a velkou kouli a na prvním místě je uvedena koule, kterou drží malá, na druhém střední a na třetím velká příšera. $VSM$ tedy značí počáteční stav koulí, jak je uveden v zadání úlohy, a $MSV$ konečný stav, kdy každá příšera drží kouli odpovídající její velikosti. Názorně je vše ukázáno na obr. 2.3.

Toto pětikrokové řešení je nejlepší možné. Pro případ, že malá příšerka mění kouli pouze jednou během celého procesu, žádné vylepšení zřejmě nenajdeme. A možnost, kdy mění kouli dvakrát, nejprve na střední a pak teprve na malou, je mnohem zdlouhavější, devítikroková:

$$VMS \to VMM \to SMM \to SMS \to SVS \to$$
$$\to SVV \to MVV \to MVM \to MSM \to MSV.$$



Obrázek 2.3: Řešení úlohy o příšerkách.

Když už víme, jak si se svým problémem poradí příšerky, zkusme ještě prozkoumat, jak vlastně tato úloha souvisí s hanojskými věžemi.

**Úloha 13.** *Najděte souvislost mezi hanojskými věžemi a příšerkami.*

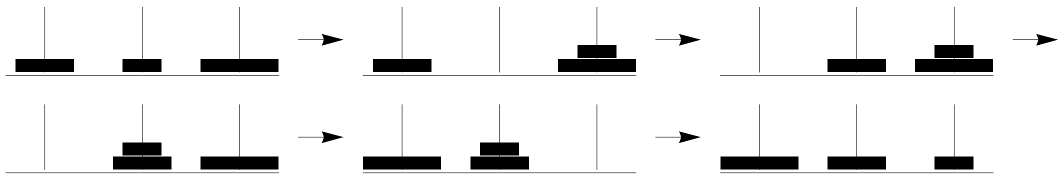
Nejdříve nás může napadnout ztotožnit kolíky s příšerkami, neboť se jedná o statické objekty, které se nemění, a následovně kotouče s koulemi. Brzy ale zjistíme, že tudy cesta nevede. Vždyť například na kolíku může být větší počet kotoučů, ale každá příšerka drží vždy právě jednu kouli.

Zkusme tedy přemýšlet dál. Na kotoučích máme uspořádání dle velikosti. V druhé úloze je toto uspořádání na příšerkách i koulích, ale co se týče pravidel, má opodstatnění pouze pro příšerky. V případě koulí slouží pouze k popsání výchozí a cílové pozice, na což by stejně dobře stačilo např. i to, kdyby se koule lišily v barvě, nikoli ve velikosti.

Budeme proto kotouče ztotožňovat s příšerkami a kolíky s koulemi. Konkrétně je to tak, že ve hře máme 3 kotouče, přičemž největší kotouč odpovídá nejmenší příšerce a naopak. Proměna koule příšerkou tak odpovídá přesunu kotouče příslušejícího dané příšerce. Pravidla etikety příšer pak lze přepsat jako:

- Vždy se může přesouvat pouze jeden kotouč. (Protože první pravidlo vlastně říká, že změnu koule může vždy provádět pouze jedna příšerka.)
- Pokud je na kolíku více kotoučů, jen nejmenší kotouč může být přesunut.
- Větší kotouč se nesmí přesunout na kolík, kde je menší kotouč.

A vidíme, že se jedná o pravidla hanojských věží. Ztotožníme-li nejmenší kouli s prvním kolíkem a největší se třetím, řešíme úlohu pomocí hanojských věží tak, jak je uvedeno na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Řešení úlohy o příšerkách „v jazyce“ hanojských věží.

## 2.4 Pozměněná zadání

Úlohy v této sekci pocházejí z [11].

**Úloha 14.** *Najděte nejkratší posloupnost tahů, kterou lze přesunout věž o $n$ kotoučích z kolíku $A$ na kolík $C$, jestliže přímé tahy mezi $A$ a $C$ jsou zakázány.*

Počet potřebných tahů pro $n$ kotoučů označíme $G_n$. Pro $n = 1$ potřebujeme dva tahy (z $A$ na $B$ a z $B$ na $C$). Pro větší $n$ si opět položme onu klíčovou otázku: Jak bude přesunut největší kotouč? Zřejmě nejdříve z $A$ na $B$, přičemž ostatních $n-1$ kotoučů musí být na $C$, a poté z $B$ na $C$ ve chvíli, kdy jsou ostatní kotouče na $A$. Celý postup tak můžeme zapsat jako:

1. Přesuneme $n-1$ vrchních kotoučů z $A$ na $C$.
2. Přesuneme největší kotouč z $A$ na $B$.
3. Přesuneme $n-1$ kotoučů z $C$ na $A$.
4. Přesuneme největší kotouč z $B$ na $C$.
5. Přesuneme $n-1$ kotoučů z $A$ na $C$.

Pro kolíky $A$ a $C$ zůstává úloha symetrická, čili přesun z $A$ na $C$ je stejně náročný jako z $C$ na $A$. Každý z kroků 1, 3 a 5 tedy vyžaduje $G_{n-1}$ tahů. Dostáváme tak rekurentní rovnice

$$G_n = \begin{cases} 2 & \text{pro } n = 1 \\ 3G_{n-1} + 2 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Explicitní vyjádření $G_n$ je pak

$$G_n = 3^n - 1 \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Dalo by se k němu dospět již dříve zmíněnou substituční metodou. Jeho platnost můžeme dokázat za pomoci matematické indukce. Pro $n = 1$ vztah platí a předpokládáme-li, že platí pro $1, \ldots, n-1$, dostáváme

$$G_n = 3G_{n-1} + 2 = 3(3^{n-1} - 1) + 2 = 3^n - 1.$$

**Úloha 15.** *Ukažte, že v průběhu řešení předchozí úlohy se vyskytnou všechna přípustná uspořádání kotoučů na kolících.*

Je dobré si uvědomit, že informace o tom, který kotouč leží na kterém kolíku, již jednoznačně udává jejich uspořádání, neboť kotouče na kolíku jsou vždy v pořadí od největšího po nejmenší. Pro každý z $n$ kotoučů jsou 3 možnosti, kde se může vyskytovat. Všech přípustných uspořádání je tedy $3^n$.

Řešení předchozí úlohy vyžadovalo $3^n - 1$ tahů, čili se během něj vyskytlo $3^n$ uspořádání. Ta jsou jistě po dvou různá, protože řešení bylo optimální. Pokud by totiž nějaká dvě byla stejná, dala by se posloupnost tahů zkrátit o celý úsek mezi nimi. Odtud již vidíme, že se opravdu vyskytla všechna možná uspořádání.

**Úloha 16.** *Uvažujme variantu hanojských věží, kde jsou povoleny pouze tahy ve směru hodinových ručiček, tj. z $A$ na $B$, z $B$ na $C$ a z $C$ na $A$. Na kolíku $A$ je věž z $n$ kotoučů. Kolik tahů je třeba na jejich přesunutí na kolík $B$, resp. na kolík $C$?*

Počet tahů potřebných pro přesun $n$ kotoučů o jeden kolík po směru hodinových ručiček označíme $Q_n$, proti směru $R_n$. Zřejmě $Q_1 = 1$ a $R_1 = 2$. Chceme-li přesunout $n$ kotoučů z $A$ na $B$, postupujeme následovně:

1. Přesuneme $n-1$ vrchních kotoučů z $A$ na $C$, což vyžaduje $R_{n-1}$ tahů.
2. Přesuneme největší kotouč z $A$ na $B$ (1 tah).
3. Přesuneme $n-1$ kotoučů z $C$ na $B$ ($R_{n-1}$ tahů).

Přesun $n$ kotoučů z $A$ na $C$ provedeme takto:

1. Přesuneme $n-1$ vrchních kotoučů z $A$ na $C$ ($R_{n-1}$ tahů).
2. Přesuneme největší kotouč z $A$ na $B$ (1 tah).
3. Přesuneme $n-1$ kotoučů z $C$ na $A$ ($Q_{n-1}$ tahů).
4. Přesuneme největší kotouč z $B$ na $C$ (1 tah).
5. Přesuneme $n-1$ kotoučů z $A$ na $C$ ($R_{n-1}$ tahů).

Dostáváme tak soustavu rekurentních rovnic:

$$\begin{aligned}
&Q_n = 2R_{n-1} + 1 \quad \text{pro } n > 1 \\
&R_n = 2R_{n-1} + Q_{n-1} + 2 \quad \text{pro } n > 1 \\
&Q_1 = 1 \\
&R_1 = 2.
\end{aligned}$$

Abychom získali explicitní vyjádření $Q_n$ a $R_n$, rovnice ještě mírně upravíme:

$$\begin{aligned}
R_n &= 2R_{n-1} + Q_{n-1} + 2 = 2R_{n-1} + 2R_{n-2} + 3 &\quad (2.2)\\
&= 2R_{n-1} + 1 + Q_{n-1} + 1 = Q_n + Q_{n-1} + 1 &\quad (2.3)\\
Q_n &= 2R_{n-1} + 1 = 2Q_{n-1} + 2Q_{n-2} + 3. &\quad (2.4)
\end{aligned}$$

Vztah (2.3) jsme využili pro odvození (2.4). Dopočítáme-li ještě $Q_2 = 5$ a $R_2 = 7$, můžeme nahlížet na (2.2) a (2.4) jako na samostatné rekurentní rovnice. Obecný způsob jejich řešení je možno najít např. v [5]. My si zde uvedeme pouze výsledek, ten by se dal dokázat pomocí indukce:

$$Q_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((1+\sqrt{3})^{n+1} - (1-\sqrt{3})^{n+1}\right) - 1 \quad \text{pro } n \geq 1$$
$$R_n = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left((1+\sqrt{3})^{n+2} - (1-\sqrt{3})^{n+2}\right) - 1 \quad \text{pro } n \geq 1.$$

**Úloha 17.** *Předpokládejme, že máme $n$ dvojic stejně velkých kotoučů, vždy bílý a černý, které jsou na počátku uspořádány na kolíku $A$, a to tak, že na černém vždy leží bílý stejné velikosti. Stále platí pravidlo, že větší kotouč nesmíme položit na menší. Stejně velké na sebe můžeme pokládat libovolně. Na kolik nejméně tahů je dokážeme přemístit na kolík $C$ tak, aby na konci opět na každém černém kotouči ležel bílý stejné velikosti?*

Nejdřív uvažme situaci, kdy nám nezáleží na uspořádání černých a bílých a pouze chceme přesunout věž z $A$ na $C$. Označme $G_n$ počet potřebných tahů pro $2n$ kotoučů. Jak budeme postupovat? Zřejmě úplně stejně jako v případě základní varianty hanojských věží, jenom by se dalo říct, že každý tah provedeme dvakrát, kotouče stejné velikosti budeme nechávat při sobě. Odtud

$$G_n = 2H_n = 2 \cdot (2^n - 1) = 2^{n+1} - 2.$$

Nyní už předpokládejme, že chceme zachovat uspořádání černá – bílá. Počet tahů pro $n$ dvojic označíme $F_n$. Zamysleme se, jestli $F_n = G_n$. Bohužel nikoliv. Dvojice největších kotoučů se totiž přesunuje pouze jednou, z $A$ na $C$, přičemž je nejdřív přesunut bílý kotouč a potom teprve černý, který se tak ocitne na bílém. Tady si uvědomíme, že chceme-li dvojici kotoučů držet neustále při sobě, musí být počet jejich přemístění sudý, po lichém počtu přemístění skončí černý kotouč na bílém.

Jenom podotkneme, že $F_1 = 3$. Pro $n > 1$, jak se nám doposud osvědčilo, začneme s řešením problému od nejspodnější dvojice kotoučů. Nabízí se dva postupy. První z nich se zabývá myšlenkou přesunout tuto dvojici dvakrát:

1. Přesuneme standardně $n - 1$ vrchních dvojic z $A$ na $C$.
2. Přesuneme největší kotouče z $A$ na $B$.
3. Přesuneme standardně $n - 1$ dvojic z $C$ na $A$.
4. Přesuneme největší kotouče z $B$ na $C$.
5. Přesuneme nadstandardně $n - 1$ dvojic z $A$ na $C$.

Pojmem „standardně“ zde rozumíme přesun nezohledňující uspořádání černá – bílá a pojmem „nadstandardně“ ten, který je zohledňuje. Každý z kroků 1 a 3 tedy vyžaduje $G_{n-1}$ tahů a 5. krok $F_{n-1}$ tahů. Zde si musíme uvědomit, že kroky 1 a 3 zaručují, že každá z $n - 1$ dvojic kotoučů absolvovala sudý počet přesunů (stejně v prvním jako ve třetím kroku), a tedy na počátku kroku 5 jsou kotouče v základním uspořádání, čili se problém zredukoval na úlohu pro $n-1$ dvojic. Kroky 2 a 4 jsou každý na dva tahy. Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}F_n &= F_{n-1} + 2G_{n-1} + 4 = F_{n-1} + 2\cdot(2^n-2)+4 = F_{n-1}+2^{n+1} = \\ &= F_{n-2} + 2^n + 2^{n+1} = \ldots = F_1 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n+1} = 3 + 2^{n+2} - 8 = \\ &= 2^{n+2}-5.\end{aligned}$$

Tento výsledek pro $F_n$ je optimální pouze za předpokladu, že následující řešení nenabídne lepší. Musíme totiž ještě prověřit druhý nápad, a to přesunout největší bílý kotouč z $A$ na $B$, potom největší černý z $A$ na $C$ a pak největší bílý z $B$ na $C$ (stejný postup vlastně používáme, řešíme-li úlohu pouze pro jedinou dvojici kotoučů). Celý proces probíhá takto:

1. Přesuneme standardně $n-1$ vrchních dvojic z $A$ na $C$.
2. Přesuneme největší bílý kotouč z $A$ na $B$.
3. Přesuneme standardně $n-1$ dvojic z $C$ na $B$.
4. Přesuneme největší černý kotouč z $A$ na $C$.
5. Přesuneme standardně $n-1$ dvojic z $B$ na $C$.
6. Přesuneme největší bílý kotouč z $B$ na $C$.
7. Přesuneme standardně $n-1$ dvojic z $C$ na $A$.

Protože standardních přesunů proběhl sudý počet, můžeme si být jisti správným konečným uspořádáním. Liché kroky zabraly každý $G_{n-1}$ tahů a sudé kroky každý po jednom tahu. Celkově tedy dostáváme

$$F_n = 4G_{n-1} + 3 = 4\cdot(2^n-2)+3 = 2^{n+2}-5.$$

Dospěli jsme, možná trochu překvapivě, ke stejnému výsledku jako v předchozím postupu. To znamená, že pro $n \geq 2$ existuje více než jedna optimální sekvence tahů. Můžeme používat první postup a kdykoliv, když jsou větší kotouče na $C$ a menší na $A$, nejpozději však ve chvíli, kdy na $A$ zbývá jen nejmenší dvojice kotoučů, přejít k druhému postupu.

## 2.5 Hanojské věže na čtyřech kolících

Doposud jsme vždy předpokládali, že náš hlavolam má právě 3 kolíky. Ale jak se náš problém změní, přidáme-li kolíky další? Zřejmě už nebude potřeba tolik tahů pro přesun věže, ale ztíží se hledání optimálního řešení. My se zde omezíme pouze na čtyři kolíky, neboť tento případ je sám o sobě dostatečně zajímavý i názorný. Zbytek této kapitoly vychází z poznatků obsažených v [10] a [29], kde čtenář nalezne více podrobností, např. i zobecnění základní varianty pro libovolný počet kolíků.

**Úloha 18.** *Uvažujme variantu hanojských věží, kde jsou čtyři kolíky, označme je $A$ až $D$. Jaký je nejmenší počet tahů potřebných pro přesun věže o $n$ kotoučích z $A$ na $D$?*

Hned v úvodu je nutno poznamenat, že tento problém zůstává doposud otevřený. Za optimální se považuje následující Frame-Stewartův algoritmus, jeho optimalitu se však nepodařilo dokázat.

1. Rekurzivně (s použitím všech kolíků) přemístíme $n-i$ nejmenších kotoučů z $A$ na $B$.
2. Přesuneme $i$ největších kotoučů z $A$ na $D$, přičemž ignorujeme kolík $B$.
3. Rekurzivně přemístíme $n-i$ kotoučů z $B$ na $D$.

Druhý krok odpovídá klasickým hanojským věžím s $i$ kotouči, vyžaduje tedy $2^i - 1$ tahů, viz (2.1). Klíčová je volba $i$, které volíme tak, aby výsledný počet tahů byl minimální. Označíme-li jako $G_n$ nejmenší počet tahů potřebných pro přesun $n$ kotoučů za pomoci čtyř kolíků (při použití Frame-Stewartova algoritmu), dostáváme

$$\begin{aligned} G_n &= \min_{1 \leq i \leq n} (2G_{n-i} + 2^i - 1) \\ G_1 &= 1. \end{aligned}$$

V [29] je odtud odvozeno explicitní vyjádření pro $G_n$. Prozradíme si výsledek:

$$G_n = 2^{s-2}(2n - s^2 + 3s - 4) + 1, \quad \text{kde } s = \{\sqrt{2n}\}^*$$

Pro porovnání s klasickými hanojskými věžemi se podívejme, jak by si vedli kněží v Banárasu, kdyby pro přesun 64 kotoučů mohli místo tří kolíků používat čtyři. Dostáváme $s = \{\sqrt{128}\} = 11$ a $G_{64} = 18433$. Znamená to, že i kdyby kněží přesunuli jeden kotouč denně, namísto každou vteřinu, skončil by svět po přibližně padesáti letech.

Článek [29] se zabývá i dalšími variantami hanojských věží na čtyřech kolících. Pro situace, kdy jsou povoleny pouze tahy po směru hodinových ručiček nebo jenom mezi sousedními kolíky, uvádí, že dosud není znám žádný efektivní algoritmus vedoucí k nalezení optimálních řešení. Zjednodušeně řečeno je třeba vyzkoušet všechny možnosti a vybrat z nich tu nejlepší. Navíc pro menší hodnoty $n$ bylo zjištěno, že různých optimálních posloupností tahů existuje velké množství, což v zásadě potvrzuje, že se jedná o komplikovaný problém.

Dále však autor uvádí variantu, kdy jsou kolíky uspořádány jako hvězda. Pro ni existuje pěkné řešení, ačkoliv jeho optimalita, podobně jako v předchozí úloze, není dokázána. Společně se na ni nyní podívejme.

**Úloha 19.** *Uvažujme variantu hanojských věží na čtyřech kolících, kdy každý tah musí vést z nebo na kolík $B$ (kolík $B$ si můžeme představit jako střed hvězdy, ostatní jako její cípy). Naším úkolem je přesunout věž o $n$ kotoučích z $A$ na $D$. Na kolik nejméně tahů je to možné?*

Použijeme algoritmus podobný Frame-Stewartovu:

1. Rekurzivně (s použitím všech kolíků) přemístíme $n-i$ nejmenších kotoučů z $A$ na $C$.
2. Přesuneme $i$ největších kotoučů z $A$ na $D$, přičemž nevyužíváme kolík $C$.

$^*\{x\}$ značí nejbližší celé číslo k číslu $x$.

3. Rekurzivně přemístíme $n-i$ kotoučů z $C$ na $D$.

V tomto případě odpovídá krok 2 úloze 14, vyžaduje tedy $3^i - 1$ tahů. Označíme-li $S_n$ nejmenší počet tahů potřebných k přenesení $n$ kotoučů z $A$ na $D$ za pomoci tohoto algoritmu, dostáváme

$$S_n = \min_{1 \le i \le n} (2S_{n-i} + 3^i - 1)$$
$$S_1 = 2.$$

Explicitní vyjádření pro $S_n$ bohužel nemáme, ale [29] uvádí výsledek, který lze k výpočtu $S_n$ využít. Nechť

$$\{a_m\}_{m=1}^{\infty} = (1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, \ldots)$$

je posloupnost čísel $2^j 3^k$, $j, k \ge 0$, uspořádaných v rostoucím pořadí. Pak tvrdíme, že

$$S_n = 2 \sum_{m=1}^{n} a_m. \tag{2.5}$$

Stačí nám ukázat, že vždy právě jeden z $n$ kotoučů vykoná právě $2a_m$ tahů pro $m = 1, 2, \ldots, n$, z čehož už přímo plyne (2.5). K důkazu použijeme indukci. Pro malé hodnoty $n$ není problém toto tvrzení ověřit. Předpokládejme nyní, že platí pro $1, 2, \ldots, n-1$. Ukážeme, že platí i pro $n$.

Nejdřív si uvědomíme, že $j$-tý největší kotouč z kroku 2, tj. přesouvaný bez využití kolíku $C$, vykoná $2 \cdot 3^{j-1}$ tahů. (To můžeme ukázat indukcí. Největší kotouč vykoná 2 tahy, takže pro něj tvrzení platí. Dále předpokládejme, že platí pro všechny až včetně $(j-1)$-ního největšího kotouče. Ukážeme, že platí i pro $j$-tý. Přidáním $j$-tého kotouče se počty tahů ostatních nezmění. Zatímco $j-1$ kotoučů se přesunulo pomocí celkem $3^{j-1} - 1$ tahů, $j$ kotoučů jich potřebovalo $3^j - 1$. Na $j$-tý kotouč jich tedy připadá $(3^j - 1) - (3^{j-1} - 1) = 2 \cdot 3^{j-1}$.) To znamená, že $i$ kotoučů z kroku 2 vykoná $2 \cdot 3^0, 2 \cdot 3^1, \ldots, 2 \cdot 3^{i-1}$ tahů.

Ostatních $n-i$ kotoučů je dvakrát rekurzivně přesouváno, podle indukčního předpokladu tedy vykoná $4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{n-i}$ tahů. Vidíme, že žádné dva kotouče nevykonají stejný počet tahů, protože počet tahů každého z $n-i$ menších kotoučů je násobkem čtyřky, zatímco počet tahů $i$ větších kotoučů nikoli. Hledáme $i$ tak, aby součet prvnků z $\{2 \cdot 3^0, 2 \cdot 3^1, \ldots, 2 \cdot 3^{i-1}\} \cup \{4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{n-i}\}$ byl minimální. Tj. chceme minimalizovat součet prvků z

$$M = \{3^0, 3^1, \ldots, 3^{i-1}\} \cup \{2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{n-i}\}.$$

Zřejmě $M \subset \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ Protože $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ je rostoucí, bude součet určitě minimální, pokud

$$M = \{a_1, \ldots, a_n\}. \tag{2.6}$$

Položme si otázku, zda existuje $i$ takové, aby platilo (2.6). Odpověď zní ano. Za $i$ zvolíme počet prvků v $\{a_1, \ldots, a_n\}$, které lze zapsat jako $3^k$, $k \ge 0$. Tyto prvky odpovídají právě hodnotám $3^0, 3^1, \ldots, 3^{i-1}$. Zbývajících $n-i$ hodnot z $\{a_1, \ldots, a_n\}$ lze psát ve tvaru $2^j 3^k$, $j \ge 1$, $k \ge 0$. Jsou to tedy dvojnásobky nějakých členů $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$. A protože tato posloupnost je rostoucí, jedná se o dvojnásobky jejích $n-i$ nejmenších členů, tedy o hodnoty $2a_1, \ldots, 2a_{n-i}$. Platí tedy (2.6). Odtud už plyne (2.5).

Ještě si ukažme, jak vyjádřit optimální $i$ v závislosti na $n$. Víme, že $3^{i-1}$ leží v $\{a_1, \ldots, a_n\}$, ale $3^i$ ne. Odtud

$$\begin{aligned} 3^{i-1} &\leq a_n < 3^i \\ i - 1 &\leq \log_3 a_n < i \\ i &= \lfloor \log_3(a_n) \rfloor^* + 1. \end{aligned}$$

$^*$ $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část $x$.

# 3. Úloha o hostech

Následující úlohu o hostech, známou jakožto ménage problem, zformuloval roku 1891 francouzský matematik Édouard Lucas.

**Úloha 20.** *Na firemní večírek přišlo $n$ manželských párů ($n \geq 3$). Určete, kolika způsoby se mohou posadit ke kulatému stolu s $2n$ židlemi tak, aby se muži a ženy střídali a žádná dvojice neseděla vedle sebe. (Dvě rozesazení, kde jedno vznikne z druhého otočením, považujeme za různá.)*

## 3.1 Přímočaré řešení

Označme $M_n$ počet všech vyhovujících rozesazení hostů. V [5] je tato úloha řešena následovně. Nejdřív se posadí ženy, to je možné $2 \cdot n!$ způsoby (zvolí si liché nebo sudé židle a ně pak usednou libovolně). Dostáváme

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot m_n, \tag{3.1}$$

kde $m_n$ je počet všech vyhovujících rozesazení mužů pro dané rozesazení žen.

K určení $m_n$ lze využít princip inkluze a exkluze. * Označme $A_i$ množinu všech rozmístění mužů, kde $i$-tý muž sedí vedle své ženy, $i = 1, \ldots, n$. Počet všech možných rozesazení $n$ mužů je $n!$, přičemž nevyhovují právě ta z $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Tedy

$$\begin{aligned} m_n = n! - |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = n! - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| - \ldots \\ \ldots + (-1)^s \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_s=1 \\ i_1<\ldots<i_s}}^{n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_s}| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

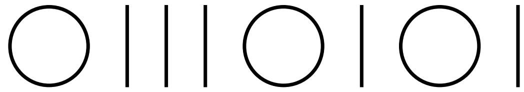
Výraz $\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_s=1 \\ i_1<\ldots<i_s}}^{n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_s}|$ odpovídá počtu všech rozesazení, kdy nějaká $s$-tice mužů sedí vedle svých žen a zbylých $n - s$ mužů sedí libovolně, tj. nějakým z $(n - s)!$ způsobů. Můžeme psát

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_s=1 \\ i_1<\ldots<i_s}}^{n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_s}| = d_s \cdot (n - s)!, \tag{3.3}$$

kde $d_s$ značí počet způsobů, jimiž lze vybrat $s$-tici mužů sedících vedle svých žen včetně místa, kde sedí (od manželky můžou být napravo nebo nalevo). Uvědomíme si, že $d_s$ odpovídá počtu způsobů, jimiž lze vybrat $s$ nesousedních oblouků z $2n$ oblouků na kružnici. (Každý oblouk odpovídá dvojici sousedních židlí, na níž sedí manželský pár.)

*Princip inkluze a exkluze je popsán např. v [5] nebo [16].

K výpočtu $d_s$ využijeme znalost toho, jaký je počet $k$-členných kombinací nesousedních prvků z $n$ prvků uspořádaných v řadě. To zjistíme tak, že každou takovou kombinaci zakódujeme posloupností z $k$ koleček a $n-k$ čárek, kde kolečka odpovídají vybraným prvkům a čárky ostatním, viz obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Způsob zakódování tříčlenné kombinace z osmi prvků, kterou tvoří prvky 1, 5 a 7, pomocí koleček a čárek.

Čárky rozdělují řadu na $n-k+1$ pomyslných přihrádek. V každé přihrádce je nejvýše jedno kolečko, protože kombinace neobsahují sousední prvky. Počet těchto kombinací je tedy roven počtu způsobů, jimiž lze vybrat $k$ z $n-k+1$ přihrádek, čili

$$\binom{n-k+1}{k}. \tag{3.4}$$

Nyní vypočítáme $d_s$. Oblouky na kružnici očíslujeme $1, 2, \ldots 2n$. Abychom vyřešili problém, že jsou v kruhu a ne v řadě, rozdělíme si situaci na dva případy podle toho, jestli oblouk $2n$ je či není zahrnut do výběru. Pokud není, vybíráme $s$ nesousedních oblouků z $2n-1$, což lze

$$\binom{(2n-1)-s+1}{s} = \binom{2n-s}{s}$$

způsoby. Pokud je oblouk $2n$ ve výběru, zbývá vybrat $s-1$ oblouků z $2n-3$ (oblouky $2, 3, \ldots 2n-2$), což lze

$$\binom{(2n-3)-(s-1)+1}{s-1} = \binom{2n-s-1}{s-1}$$

způsoby. Celkem tedy

$$\begin{aligned} d_s &= \binom{2n-s}{s} + \binom{2n-s-1}{s-1} = \binom{2n-s}{s} + \frac{s}{2n-s}\binom{2n-s}{s} = \\ &= \frac{2n}{2n-s}\binom{2n-s}{s}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Výsledky (3.2), (3.3) a (3.5) dosadíme do (3.1) a dostáváme, že počet všech vyhovujících rozesazení $n$ manželských párů okolo stolu je

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot \sum_{s=0}^{n} (-1)^s (n-s)! \frac{2n}{2n-s}\binom{2n-s}{s}. \tag{3.6}$$

Pro porovnání zmiňme jedno podobné řešení, uvedené v [2]. Autoři zde neupřednostňují ženy ani muže, nýbrž posazují všechny najednou. Opět je využit princip inkluze a exkluze, přičemž je vzato do úvahy, že pro každou $s$-tici párů, je počet způsobů, jak mohou sedět všichni muži vedle svých žen, stejný, a to $W_s$. Z $n$ párů jich lze $s$ vybrat $\binom{n}{s}$ způsoby. Dostane se tak

$$M_n = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} W_s.$$

Pro $s$-tici párů lze vybrat židle $d_s$ způsoby, tyto páry pak mají $s!$ možností, kde který z nich bude sedět. Dále společně zvolí, která místa přísluší ženám a která mužům (dvě možnosti). Skupiny ostatních mužů a ostatních žen pak mohou každá usednout $(n-s)!$ způsoby. Celkem tedy

$$W_s = d_s \cdot s! \cdot 2 \cdot (n-s)!^2.$$

Za $d_s$ se dosadí podle (3.5).

$$W_s = \frac{2n}{2n-s}\binom{2n-s}{s} \cdot s! \cdot 2 \cdot (n-s)!^2,$$

a tedy

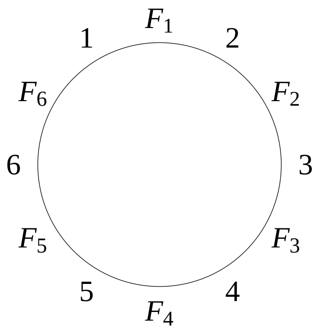
$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\frac{2n}{2n-s}\binom{2n-s}{s} \cdot s! \cdot 2 \cdot (n-s)!^2 = \\ &= 2 \cdot n! \cdot \sum_{s=0}^{n}(-1)^s(n-s)!\frac{2n}{2n-s}\binom{2n-s}{s}, \end{aligned}$$

což odpovídá vztahu (3.6).

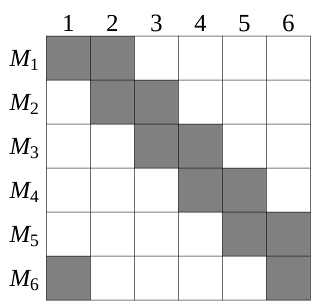
Vidíme, že obě zmíněná řešení vychází z nápadu použít princip inkluze a exkluze a vyžadují výpočet $d_s$. Autoři druhého řešení považují za klíčovou myšlenku neposazovat dámy jako první. Její význam nechť posoudí čtenář sám.

## 3.2 Věžové polynomy

Nyní si ukážeme, jak se dá úloha o hostech přehledněji znázornit a způsob jejího řešení zobecnit. Předpokládejme, že ženy se již usadily. Židle pro muže označme $1, \ldots, n$, jak ukazuje obr. 3.2. Na obr. 3.3 jsou pak vybarvena políčka odpovídající židlím, které se nachází vedle ženy daného muže. ($F$ značí ženy, $M$ muže a manželé jsou právě ti se shodným indexem.) Vyhovujícímu rozesazení mužů zřejmě odpovídá takový výběr bílých políček, kdy je z každého řádku i každého sloupce vybráno právě jedno.

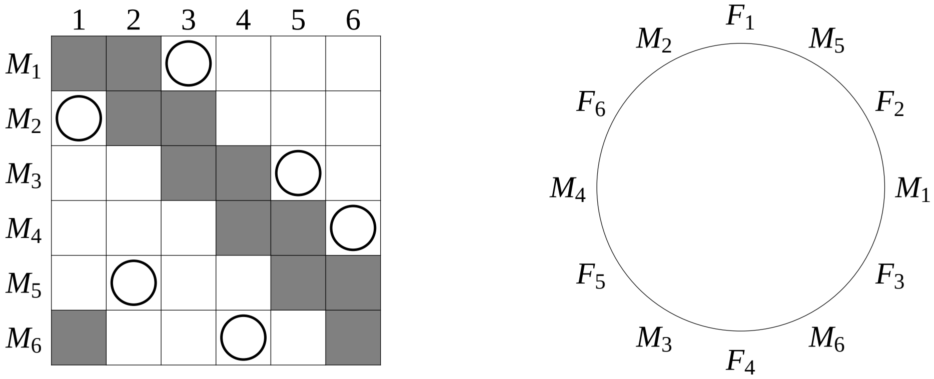



Obrázek 3.2: Označení židlí pro muže ($n = 6$).




Obrázek 3.3: Způsob znázornění omezení pro muže ($n = 6$).

Vyhovující rozesazení si můžeme představit i jako rozmístění $n$ věží na bílá pole, při kterém na sebe žádné dvě nemíří, vzájemně se neohrožují. (Věž je šachová




Obrázek 3.4: Neohrožující se věže znázorňující vyhovující rozmístění mužů.

figura, která se pohybuje rovně, po sloupci nebo řadě, o libovolný počet polí.) Jedno takové rozmístění je ukázáno na obr. 3.4.

Úlohu o hostech jsme vlastně převedli na problém rozmísťování věží. Ten vyřešíme opět pomocí principu inkluze a exkluze, dojdeme však k poznatkům užitečným i k řešení jiných úloh. Vycházíme ze [3] a [4].

Označme $A_i$ množinu všech takových rozestavení $n$ neohrožujících se věží, kde se na $i$-tém řádku nachází věž na černém poli. Naším cílem je tedy určit $m_n = n! - |A_1 \cup \ldots \cup A_n|$, kde $n!$ je právě počet všech možných rozmístění věží. Nechť dále $v_k$ značí počet všech možných rozmístění $k$ neohrožujících se věží na černá pole. Z principu inkluze a exkluze (obdobně jako jsme dostali (3.2) a (3.3)) dostáváme

$$m_n = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} v_k (n-k)!$$

A položíme-li $v_0 = 1$, pak

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k (n-k)! \tag{3.7}$$

Zde se na chvíli zastavme a uvědomme si, že vztah (3.7) je o něco „univerzálnější“, než bychom se v první chvíli mohli domnívat. Při jeho odvození jsme totiž nepotřebovali znát, která políčka jsou vybarvena černě a která bíle.

Trochu odbočme a zaveďme si několik nových pojmů. Množinu vybarvených políček ve čtverci $n$ krát $n$ nazvěme síť. (Jedná se tedy o množinu uspořádaných dvojic z čísel $1, \ldots, n$.) Nechť dále $v_k(S)$ je počet všech rozmístění $k$ neohrožujících se věží v síti $S$ a $v_0(S) = 1$. Pak

$$v(x, S) = \sum_{k \geq 0} v_x(S) x^k$$

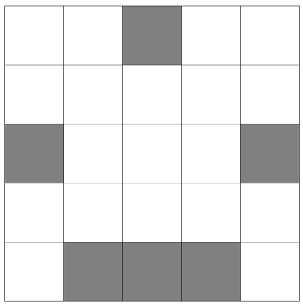
nazýváme věžovým polynomem sítě $S$.

Dále můžeme hovořit o permutacích s omezujícími podmínkami. Právě k určování jejich počtu nám věžové polynomy slouží. Nechť jsou dány množiny omezení $O_1, \ldots, O_n \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Permutací s omezujícími podmínkami $n$ prvků nazýváme každou $n$-prvkovou permutaci $p$ takovou, že $p(i) \notin O_i$. Označíme-li $p_n$ počet všech permutací s omezujícími podmínkami, dostáváme vztah odpovídající (3.7), a to

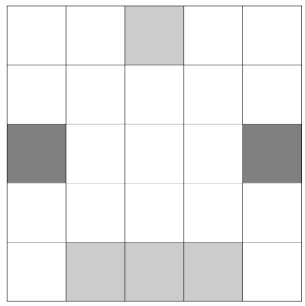
$$p_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)!, \tag{3.8}$$

kde $S = \{[i,j], j \in O_i\}$. Vše si ukážeme na příkladě.

**Úloha 21.** *Během večírku se pět hostů rozhodlo pořídit společné foto. Kolika způsoby se mohou postavit do řady, jestliže první z nich nechce stát přesně uprostřed, třetí nechce být na kraji, pátý naopak na kraji být chce a druhý se čtvrtým si žádné podmínky nekladou?*



Obrázek 3.5: Omezení pro uspořádání hostů při focení.



Obrázek 3.6: Rozklad na dvě nezávislé sítě.

Situaci znázorňuje obr. 3.5. Určíme věžový polynom pro tuto síť. Zřejmě nepůjde rozmístit víc než tři věže. Pro jednu věž existuje šest možností, pro dvě věže deset a pro tři čtyři, čili $v_0(S) = 1$, $v_1(S) = 6$, $v_2(S) = 10$ a $v_3(S) = 4$. Věžový polynom sítě je

$$v(x, S) = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3.$$

A počet možných postavení daných hostů do řady, získaný dosazením do (3.8), je

$$p_n = 5! - 6 \cdot 4! + 10 \cdot 3! - 4 \cdot 2! = 28.$$

Zatím jsme si ozřejmili smysl koeficientů $v_k(S)$, nikoli však samotného polynomu $v(x, S)$. Jde o to, že koeficienty $v_k(S)$ se pro složitější sítě určují přímo dost obtížně. Dají se ale „vyčíst“ právě z $v(x, S)$. Ukážeme si dva vztahy, které usnadňují určování věžových polynomů. Jejich odvození je možné najít v [4].

Sítě $S_1$ a $S_2$ nazýváme nezávislé, jestliže nemají žádný společný řádek ani sloupec (tj. pokud $[i,j] \in S_1$ a $[k,l] \in S_2$, pak $i \neq k$ a $j \neq l$). Nechť $S = S_1 \cup S_2$, kde $S_1$ a $S_2$ jsou nezávislé, potom

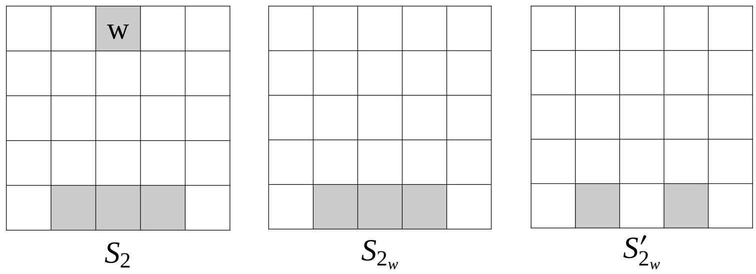
$$v(x, S) = v(x, S_1) \cdot v(x, S_2). \tag{3.9}$$

Nechť $S$ je síť a $w \in S$ nějaké její políčko. Síť, která vznikne z $S$ vynecháním políčka $w$, označíme $S_w$ a síť, která vznikne z $S$ vynecháním všech políček z řádku a sloupce, v nichž se nachází $w$, označíme $S'_w$. Platí

$$v(x, S) = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w). \tag{3.10}$$

Ukážeme si, jak využít vztah (3.9) v naší úloze. Síť $S$ můžeme rozložit na dvě nezávislé sítě, viz obr. 3.6. Nechť $S_1$ je tmavší síť a $S_2$ světlejší. Zřejmě $v_1(S_1) = 2$, $v_1(S_2) = 4$ a $v_2(S_2) = 2$. Odtud

$$
\begin{aligned}
v(x, S_1) &= 1 + 2x \\
v(x, S_2) &= 1 + 4x + 2x^2 \\
v(x, S) &= v(x, S_1) \cdot v(x, S_2) = (1 + 2x)(1 + 4x + 2x^2) = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3.
\end{aligned}
$$




Obrázek 3.7: Sítě příslušející zvolenému políčku $w$.

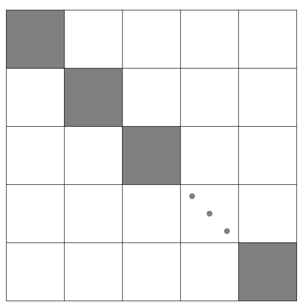
Ačkoliv zde je situace jednoduchá, můžeme si na síti $S_2$ předvést vztah (3.10). Zvolme $w$ tak, jak je ukázáno na obr. 3.7. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
v(x, S_{2_w}) &= 1 + 3x \\
v(x, S'_{2_w}) &= 1 + 2x \\
v(x, S_2) &= v(x, S_{2_w}) + x \cdot v(x, S'_{2_w}) = (1 + 3x) + x(1 + 2x) = 1 + 4x + 2x^2.
\end{aligned}
$$

Nyní zmíníme jednu klasickou úlohu, a to určení počtu permutací bez pevných bodů.* Řešena je např. v [3] nebo [16].

**Úloha 22.** *Hosté se zvedli od stolu a šli si zatančit, přičemž se spárovali zcela náhodně (ale vždy muž se ženou). Jaká je pravděpodobnost, že žádný manželský pár netančí spolu?*

Všech možných spárování je $n!$ a ta, kde žádní manželé netančí spolu, odpovídají permutacím s omezujícími podmínkami znázorněným na obr. 3.8.



Obrázek 3.8: Síť pro permutace bez pevných bodů.

*Permutace bez pevného bodu je taková permutace $p$, kde pro všechna $i$ platí $p(i) \neq i$.

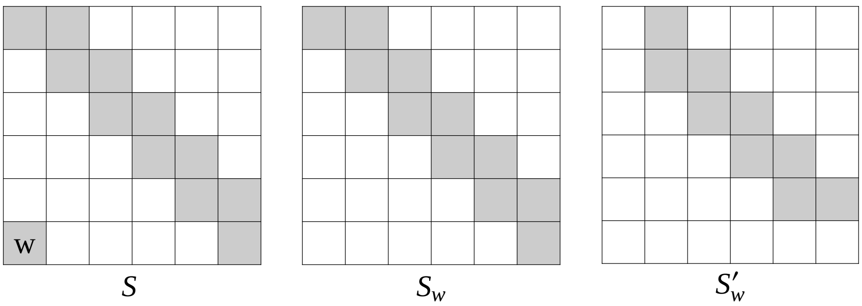
Vidíme, že se jedná o síť, která vnikne sjednocením $n$ nezávislých (jednopolíčkových) sítí. Věžový polynom každé z nich je $1 + x$. Z (3.9) plyne

$$v(x, S) = (1 + x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + x^n$$

$$p_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}.$$

Výsledná pravděpodobnost je tedy $\frac{p_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Abychom získali lepší představu o tom, k jaké hodnotě se tato pravděpodobnost přibližuje, poznamenejme, že $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \doteq 0{,}368$.

Nyní se vraťme k úloze o hostech. Určíme věžový polynom sítě z obr. 3.3 (pro libovolné $n \geq 3$). Označme jako $w$ políčko v levém dolním rohu a hledejme věžový polynom pro $S_w$ a $S'_w$ (viz obr. 3.9).




Obrázek 3.9: Úloha o hostech – výpočet věžového polynomu.

Sítě typu $S_w$ nebo $S'_w$ sestávající z $m$ políček budeme nazývat $m$-schodiště. (Tj. $S_w$ je $(2n-1)$-schodiště a $S'_w$ je $(2n-3)$-schodiště.) Odvodíme si vzorec pro věžový polynom $m$-schodiště. Chceme-li na schodiště umístit $k$ neohrožujících se věží, nesmí být žádné dvě z nich na sousedních polích. Snadno domyslíme, že počet všech možných rozmístění odpovídá počtu $k$-členných kombinací nesousedních prvků z $m$ prvků, tedy

$$\binom{m-k+1}{k},$$

jak jsme odvodili dříve (viz (3.4)). Na $m$-schodiště můžeme umístit nanejvýše $\lfloor (m+1)/2 \rfloor$ věží. Příslušný polynom je tedy

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}\binom{m-k+1}{k}x^k. \tag{3.11}$$

Abychom při následujících výpočtech předešli nejasnostem, dohodněme se, že pokud $r$ či $s$ je záporné nebo $s > r$, pak $\binom{r}{s} = 0$. Z (3.10) a (3.11) dostáváme

$$v(x, S) = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{k}x^k + x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k-2}{k}x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k-1}{k-1} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} x^k.$$

Odtud už $m_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$.

Poznamenejme, že jsme dostali $v_k(S) = d_k$, viz (3.5), jak se dalo očekávat. Smyslem bylo ilustrovat způsob použití věžových polynomů, neboť jej budeme potřebovat k řešení další úlohy.

## 3.3 Když už sedí ředitel

Nyní se podíváme na variantu úlohy o hostech, kdy se k ženám už jeden muž usadil. Budeme se ptát, kolika způsoby se mohou rozesadit ostatní muži, a později navíc objasníme, zda počet těchto rozesazení závisí či nezávisí na tom, které místo zvolil první muž. Řešení následující úlohy pochází z [26].

**Úloha 23.** *Prozraďme si, že myšlenka nesedět vedle svých manželek vznikla v hlavě ředitele firmy, na jejímž večírku se právě nacházíme. Jeho důvody ponechme stranou. Ostatním mužům toto navrhl ve chvíli, kdy už ženy seděly. A pak sám jako první zaujal místo. Kolika způsoby se mohou posadit ostatní muži tak, aby ředitelovu požadavku vyhověli?*

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že ředitel je muž první ženy. Nechť se usadil na $r$-tou židli ($r \in \{3, \dots, n\}$). Budeme určovat věžový polynom sítě $S$, která vznikne, vypustíme-li ze sítě pro úlohu o hostech první řádek a $r$-tý sloupec. Položme $A = S'_w$ a $B = S_w$. Vidíme, že sítě $A$ i $B$ se každá skládají ze dvou nezávislých sítí (viz obr. 3.10). Sítě $A_1$ a $B_1$ jsou $(2r-5)$-schodiště, $A_2$ je $(2(n-r)-1)$-schodiště a $B_2$ je $2(n-r)$-schodiště. Z (3.9), (3.10) a (3.11) dostáváme

$$v(x, A_1) = v(x, B_1) = \sum_{i=0}^{r-2} \binom{2r-i-4}{i} x^i$$

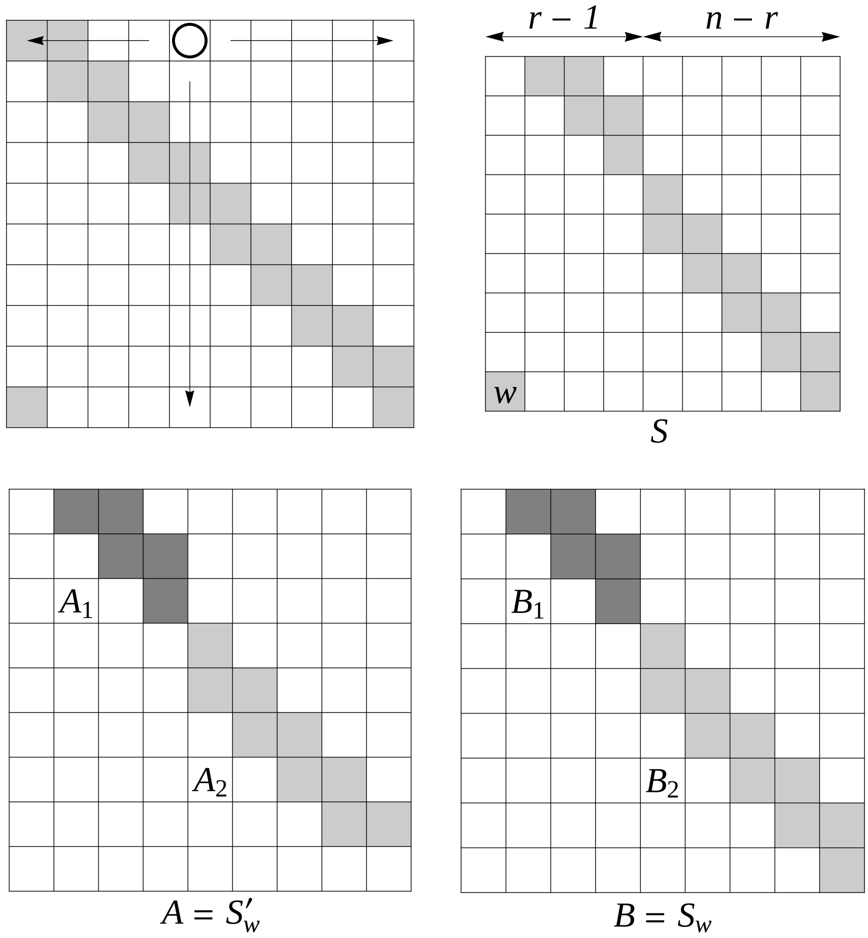
$$v(x, A_2) = \sum_{i=0}^{n-r} \binom{2(n-r)-i}{i} x^i = \sum_{j=0}^{n-r+1} \binom{2(n-r)-j+1}{j-1} x^{j-1}$$

$$v(x, B_2) = \sum_{j=0}^{n-r} \binom{2(n-r)-j+1}{j} x^j = \sum_{j=0}^{n-r+1} \binom{2(n-r)-j+1}{j} x^j$$

$$\begin{aligned} v(x, S) &= x \cdot v(x, A_1) \cdot v(x, A_2) + v(x, B_1) \cdot v(x, B_2) = \\ &= \sum_{i=0}^{r-2} \binom{2r-i-4}{i} x^i \sum_{j=0}^{n-r+1} \binom{2(n-r)-j+2}{j} x^j = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k \sum_{i=0}^{r-2} \binom{2r-i-4}{i} \binom{2(n-r)-k+i+2}{k-i}. \end{aligned}$$

Počet možných rozesazení zbylých $n-1$ mužů poté, co se ředitel posadí na $r$-tou židli, je

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k-1)! \sum_{i=0}^{r-2} \binom{2r-i-4}{i} \binom{2(n-r)-k+i+2}{k-i}.$$




Obrázek 3.10: Varianta úlohy o hostech, kdy již sedí ředitel ($n = 10$, $r = 5$).

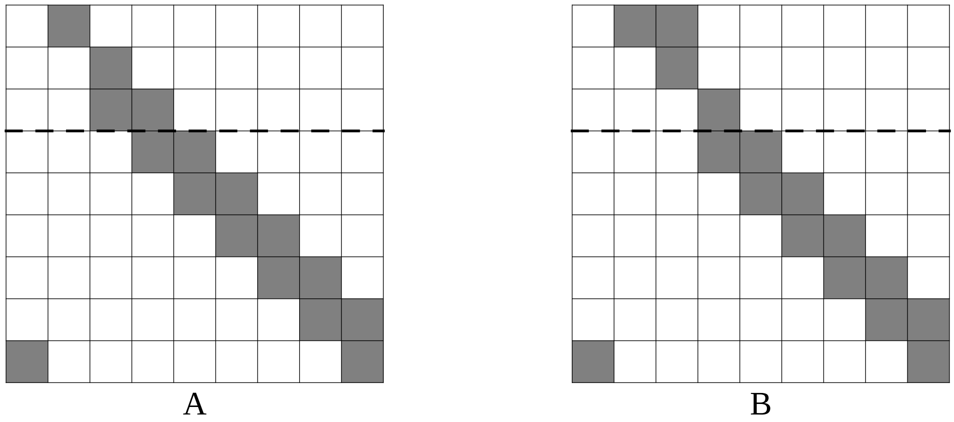
V souvislosti s touto úlohou si položme ještě následující otázku.

**Úloha 24.** *Pro která $n$ je počet možných rozesazení ostatních mužů nezávislý na tom, kam usedl ředitel?*

Tj. hledáme taková $n$, kde je pro všechna $r = 3, \ldots, n$ počet možných rozesazení ostatních mužů stejný. Úloha pochází z [26]. Autor vyslovuje domněnku, že řešením je pouze množina hodnot $\{3, 4, 6\}$, ale nemá pro ni důkaz. Zde ji dokážeme.

Případy pro $n = 3, \ldots, 6$ není problém rozebrat každý zvlášť a domněnka jim odpovídá. Zabývejme se těmi ostatními. Budeme tvrdit, že pro $n \geq 7$ mají zbývající muži více možných způsobů rozesazení, když si ředitel sedne na čtvrtou židli, než když si sedne na třetí. Sítě pro obě situace znázorňuje obr. 3.11. Vznikly ze sítě $n$ krát $n$ úlohy pro hosty vynecháním prvního řádku a třetího (situace $A$), resp. čtvrtého (situace $B$) sloupce.

K důkazu nebudeme používat princip inkluze a exkluze, nýbrž jenom porovnávat počty dobrých rozesazení pro dané případy. Takže věže rozmísťujeme na bílá pole. Vidíme, že vyjma tří horních řádků jsou sítě naprosto shodné. Můžeme si představit, že nejdřív rozmístíme $n - 4$ věží na $n - 4$ spodních řádků (tj. do prostoru pod čarou). Pro každé rozmístění $n-4$ „dolních“ věží pak můžeme porovnávat počty možných rozmístění zbývajících tří „horních“ věží ve třech vrchních řádcích pro situace $A$ a $B$.



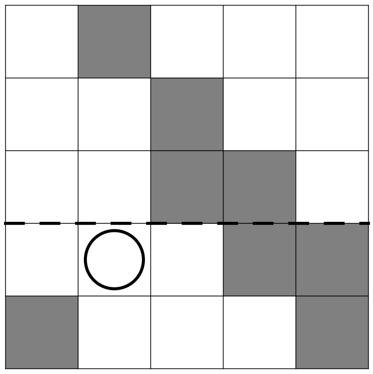

Obrázek 3.11: Sítě pro situace, kdy ředitel sedí na třetí ($A$) a na čtvrté ($B$) židli.

Rozebereme jednotlivé případy podle toho, které sloupce zůstanou volné po rozmístění „dolních“ věží:

- Je-li obsazen třetí sloupec zleva, mají „horní“ věže v $A$ i $B$ stejné možnosti, počet získaných rozestavení je tedy v obou situacích stejný.
- Je-li volný třetí sloupec zleva a oba sloupce s ním sousedící, mají v $A$ i $B$ „horní“ věže právě jeden způsob, jak se rozmístit.
- Je-li volný třetí sloupec zleva a oba sloupce s ním sousedící jsou obsazeny, je v $A$ i $B$ právě pro jednu „horní“ věž dáno, kam se umístí (jen jedna z nich může být ve třetím sloupci zleva), zbývající dvě mají dvě možnosti jak se rozmístit.
- Je-li volný druhý a třetí sloupec zleva a čtvrtý je obsazen, jsou v situaci $A$ dvě možnosti rozmístění „horních“ věží, ale v situaci $B$ pouze jedna.
- Naopak, je-li volný třetí a čtvrtý sloupec zleva a druhý je obsazen, je v situaci $A$ jediná možnost rozmístění „horních“ věží a v situaci $B$ dvě.

Vidíme, že pro porovnání jsou podstatné jenom poslední dva body. Nechť $x$ je počet rozmístění „dolních“ věží odpovídajících předposlednímu bodu a $y$ poslednímu. Rozdíl počtů možných rozesazení v $A$ a $B$ je zřejmě $(2x+y)-(x+2y) = x-y$. Chceme-li ukázat, že v situaci $B$ je počet všech možných rozesazení větší než v situaci $A$, stačí dokázat, že $y > x$. To jde snadno. Uvědomíme si, že co se týče „dolních“ věží, nemůže ve čtvrtém sloupci zleva stát věž ve čtvrtém řádku shora, zatímco na druhý sloupec žádná omezení nejsou. Odtud vidíme, že $y$ je větší než $x$ právě o počet rozmístění „dolních“ věží, při nichž stojí věž ve druhém sloupci na čtvrtém řádku (a třetí a čtvrtý sloupec je volný). Každý už sám domyslí, že pro $n \geq 7$ aspoň jedno takové rozmístění existuje. Tím je domněnka dokázána.

Ještě si povězme, proč argument z tohoto důkazu nefunguje pro $n = 6$. Vidíme (viz obr. 3.12), že zde je ještě „příliš stísněný“ prostor. Umístíme-li věž ve čtvrtém řádku na druhý sloupec, nemůžeme umístit věž na spodní řádek tak, aby zůstal třetí a čtvrtý sloupec volný.



Obrázek 3.12: Situace pro $n = 6$.

## 3.4 Několik poznámek

Vraťme se nyní zpátky k úloze o hostech. Ještě je totiž vhodné zmínit, že pro ni existují i rekurentní řešení, historicky starší než ta výše zmíněná. Řešení z roku 1903 od H. M. Taylora je popsáno v [8]. Také na počátku předpokládá, že ženy se již posadily. Je poměrně složité a vede na soustavu rekurentních rovnic

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (n-2)A_n + (3n-4)B_n + C_n \\ B_{n+1} &= A_n + B_n \\ C_{n+1} &= (2n-1)B_n + C_n, \end{aligned}$$

kde $A_n$ je počet všech vyhovujících rozesazení $n$ mužů (tj. žádný muž nesedí vedle své ženy). $B_n$ je počet všech možných rozesazení $n-1$ zbývajících mužů tak, aby žádný z nich neseděl vedle své ženy, jestliže jeden muž již sedí, a to vedle své ženy. A $C_n$ je počet všech možných rozesazení $n-1$ zbývajících mužů tak, aby právě jeden z nich seděl vedle své ženy, jestliže jeden muž již sedí, a to vedle své ženy. Z této soustavy rovnic je dále odvozena tzv. Laisantova rekuretní formule

$$(n-1)A_{n+1} = (n^2-1)A_n + (n+1)A_{n-1} + 4 \cdot (-1)^n \quad \text{pro } n \geq 4.$$

Poměrně snadnou úpravou ji lze převést do podoby, odkud je výpočet $A_n$ o něco jednodušší, a to

$$A_n = nA_{n-1} + 2A_{n-2} - (n-4)A_{n-3} - A_{n-4} \quad \text{pro } n \geq 7,$$

přičemž $A_3 = 1$, $A_4 = 2$, $A_5 = 13$ a $A_6 = 80$. Ještě připomeňme, že počet všech řešení úlohy o hostech je $M_n = 2n! \cdot A_n$.

Pro naši představu si závěrem uvedeme několik prvních hodnot $A_n$ a pravděpodobnost, s jakou se muži posadí tak, aby nebyli vedle svých žen, rozesadí-li se zcela náhodně. Ta je zřejmě $p_n = A_n/n!$. Vše ukazuje tabulka 3.1. Ve [14] je dokázáno, že $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{e^2} \doteq 0{,}1353$.

| $n$ | $A_n$ | $p_n$ |
|---|---:|---:|
| 3 | 1 | 0,1667 |
| 4 | 2 | 0,0833 |
| 5 | 13 | 0,1083 |
| 6 | 80 | 0,1111 |
| 7 | 579 | 0,1149 |
| 8 | 4 738 | 0,1175 |
| 9 | 43 387 | 0,1196 |
| 10 | 439 792 | 0,1212 |
| 11 | 4 890 741 | 0,1225 |
| 12 | 59 216 642 | 0,1236 |
| 13 | 775 596 313 | 0,1246 |
| 14 | 10 927 434 464 | 0,1253 |
| 15 | 164 806 435 783 | 0,1260 |

Tabulka 3.1: Úloha o hostech – hodnoty $A_n$ a $p_n$.

# 4. Hlasovací problém

**Úloha 25.** *Ve volbách soupeří dva kandidáti. První z nich dostal $a$ hlasů, druhý $b$ hlasů, přičemž $a \geq kb$, kde $k$ je přirozené číslo. Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu celého sčítání měl první kandidát víc hlasů, než je $k$-násobek počtu dosud sečtených hlasů jeho soupeře?*

Tento problém zveřejnil v roce 1887 Joseph Bertrand, jen pro $k = 1$, a následně Émile Barbier, již v této obecné podobě. S řešením pro $k = 1$ brzy přišel Désiré André. První řešení obecného problému pak roku 1923 zaznamenal A. Aeppli. Nejzajímavější je, že existuje poměrně dost způsobů, jak se dopracovat k odpovědi. Některé z nich si ukážeme níže. Pochází z [21] a [22], kde je možno najít i mnoho odkazů týkajících se tohoto tématu.

## 4.1 Řešení pomocí překlopení

Nejdřív si ujasněme, co přesně budeme počítat. Předpokládejme, že hlasy jsou sčítány v náhodném pořadí jeden po druhém. Můžeme tedy říct, že jsou na začátku uspořádány do nějaké posloupnosti. Nás zajímá poměr vyhovujících posloupností ku všem. Hlas pro prvního kandidáta značme $A$ a hlas pro druhého $B$. Protože hlasy pro každého z kandidátů jsou navzájem nerozlišitelné, je počet všech možných posloupností

$$\binom{a+b}{a}. \tag{4.1}$$

Z $a+b$ pozic v uspořádání jich totiž $a$ vybíráme pro hlasy $A$. Např. pro $a = 5$, $b = 2$ a $k = 2$ existuje 21 posloupností, ale pouze tři z nich vyhovují (nazvěme je dobré). Konkrétně $AAAAABB$, $AAAABAB$ a $AAABAAB$. Naopak $AAAABBA$ je nevyhovující (špatná), protože po šestém kroku (v situaci $AAAABB$) nemá první kandidát víc než dvojnásobek počtu hlasů druhého kandidáta. Výsledná pravděpodobnost je tedy $3/21 = 1/7$.

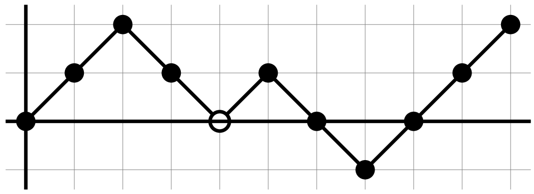
Nejdříve budeme úlohu řešit pro $k = 1$, tj. zkoumáme, zda má první kandidát po celou dobu sčítání víc hlasů než kandidát druhý. Posloupnost hlasovacích lístků budeme znázorňovat jako cestu ve čtvercové síti začínající v průsečíku os, přičemž lístku $A$ odpovídá krok* $(1, 1)$ a lístku $B$ krok $(1, -1)$. Každá cesta tak zřejmě končí v bodě $[a + b, a - b]$. Dobré cesty jsou ty, které jsou po celou dobu nad osou $x$. Např. posloupnost $AABBABBAAA$ znázorníme jako na obrázku 4.1. Vidíme, že je špatná, protože se dotýká osy $x$ (a dokonce pod ni později i klesne). Prvním špatným krokem je ten čtvrtý. Cesty začínající hlasem $A$, resp. $B$, budeme nazývat $A$-cesty, resp. $B$-cesty.

A nyní můžeme přistoupit k řešení. Nejdřív si uvědomíme, že každá $B$-cesta je určitě špatná. $B$-cest je celkem

$$\binom{a+b-1}{a}, \tag{4.2}$$

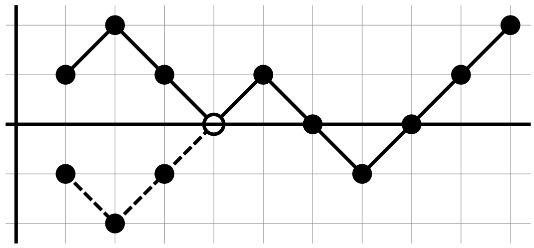
protože ze zbylých $a + b - 1$ pozic jich $a$ vybíráme pro lístky $A$. Klíčovou otázkou pro nás bude, kolik $A$-cest je také špatných. Ukážeme si, že počet špatných $A$-cest

*Pojmem „krok $(x, y)$“ rozumíme posunutí o vektor $(x, y)$.



Obrázek 4.1: Znázornění posloupnosti hlasů $AABBABBAAA$ jakožto cesty ve čtvercové síti.

je stejný jako počet všech $B$-cest, a to tak, že mezi množinami těchto cest najdeme bijekci.



Obrázek 4.2: Bijekce mezi $B$-cestami a špatnými $A$-cestami.

Pro špatnou $A$-cestu vezmeme první místo jejího dotyku s osou $x$. Celý počáteční úsek cesty až po tento bod pak podle osy $x$ překlopíme. Dostaneme tak $B$-cestu (viz obrázek 4.2). Úplně stejný postup použijeme k nalezení špatné $A$-cesty příslušející dané $B$-cestě. A bijekce je na světě. Zjistili jsme tedy, že špatných $A$-cest je také $\binom{a+b-1}{a}$. Odečtením všech špatných cest od (4.1) dostáváme

$$\binom{a+b}{a} - 2\binom{a+b-1}{a} = \binom{a+b}{a} - 2 \cdot \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{a+b}{a+b} =$$
$$= \binom{a+b}{a}\left(1 - \frac{2b}{a+b}\right) = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}. \tag{4.3}$$

Pravděpodobnost, že první kandidát měl v průběhu sčítání vždy více hlasů než druhý, je tedy $\frac{a-b}{a+b}$.

Pro zajímavost si ukážeme ještě jiný způsob, jak zjistit počet špatných $A$-cest. Budeme hledat bijekci mezi špatnými $A$-cestami a posloupnostmi tvořenými $a$ hlasy $A$ a $b-1$ hlasy $B$. Mějme špatnou posloupnost začínající hlasem pro $A$ a najděme první $B$, které ji kazí. To rozděluje posloupnost na dva úseky. $B$ odstraňme a úseky prohoďme. Nově vzniklá posloupnost je tvořena $a$ hlasy $A$ a $b-1$ hlasy $B$. Přehledně je vše znázorněno na obr. 4.3.

Jak pro posloupnost tvořenou $a$ hlasy $A$ a $b-1$ hlasy $B$ najít jí odpovídající špatnou posloupnost začínající hlasem $A$? Postupujeme odzadu až k prvnímu $A$, po jehož započtení počet $A$ převýší o jedna počet $B$. Vlevo od tohoto $A$ posloupnost rozdělíme na dvě části, ty prohodíme a vložíme mezi ně $B$ (viz obr. 4.4). Odtud už plyne, že počet špatných $A$-cest odpovídá hodnotě (4.2).

***A A B B A B A A*** ► ***A A B   A B A A*** ► ***A B A A A A B***

*odebrat*   *prohodit*

Obrázek 4.3: Pro špatnou $A$-cestu hledáme cestu tvořenou $a$ hlasy $A$ a $b-1$ hlasy $B$, ($a = 5$, $b = 3$).

***A B A A A A B*** ► ***A B A A   A A B*** ► ***A A B B A B A A***

*vyhledat*   *prohodit*   *dodat*

Obrázek 4.4: Pro cestu tvořenou $a$ hlasy $A$ a $b-1$ hlasy $B$ hledáme špatnou $A$-cestu, ($a = 5$, $b = 3$).

## 4.2 Řešení pomocí otočení

Nyní se podívejme, jak se úloha změní pro $k > 1$. Posloupnost hlasů můžeme opět znázorňovat jako cestu ve čtvercové síti. Podstatné je to, že $B$ bude nyní odpovídat kroku $(1, -k)$, neboť jeden hlas $B$ vyvažuje pro naše potřeby $k$ hlasů $A$ (dobré cesty jsou opět ty, které se po celou dobu drží nad osou $x$). Tím, že kroky pro $A$ a $B$ nyní nejsou symetrické a po překlopení části cesty podle osy $x$ by nově vzniklé kroky neodpovídaly ani $A$, ani $B$, nelze uplatnit stejný způsob jako v předešlé sekci. Poradíme si ale podobně.

Budeme počítat, kolik je špatných cest, přičemž si je rozdělíme podle toho, kde končí jejich první špatný krok. To může být na ose $x$ nebo až $k$ jednotek pod ní. Označme $\mathcal{B}_i$ množinu těch cest, jejichž první špatný krok končí $i$ jednotek pod osou $x$, $i = 0, \ldots, k$. Množiny $\mathcal{B}_i$ jsou zřejmě po dvou disjunktní. Navíc do $\mathcal{B}_k$ patří právě ty cesty, které začínají krokem dolů. Jejich počet již známe, viz (4.2).

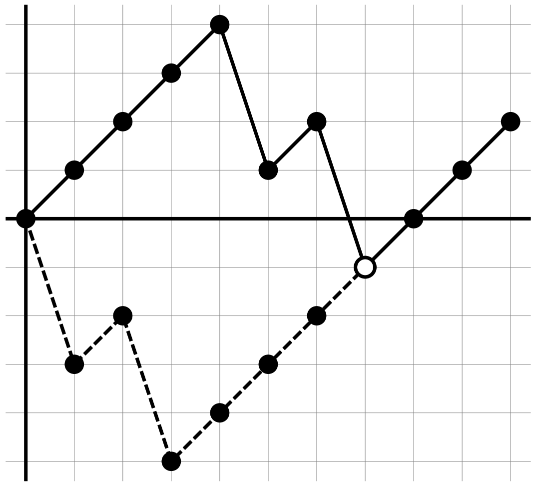
Klíčovým pro naše řešení je fakt, že $|\mathcal{B}_i| = |\mathcal{B}_k|$ pro všechna $i = 0, \ldots, k-1$. To si ukážeme pomocí bijekce mezi množinami $\mathcal{B}_i$ a $\mathcal{B}_k$. Pro cestu z $\mathcal{B}_i$ najdeme příslušnou cestu z $\mathcal{B}_k$ tím, že počáteční úsek cesty včetně prvního špatného kroku, otočíme o $180°$ tak, aby se koncové vrcholy tohoto úseku zobrazily jeden na druhý (viz obrázek 4.5). Určitě dostaneme cestu z $\mathcal{B}_k$, protože otáčený úsek končí krokem $(1, -k)$, kterýžto bude po otočení prvním krokem dolů. Obdobným způsobem dostaneme pro cestu z $\mathcal{B}_k$ zpátky cestu z $\mathcal{B}_i$, a to tak, že otáčíme úsek cesty končící v prvním vrcholu ležícím $i$ jednotek pod osou $x$. (Takový vrchol určitě existuje, neboť „stoupáme“ pouze po jedné a vzhledem k předpokladu $a \geq kb$ se cesta začínající od $B$ musí někde dotknout osy $x$.) Zjistili jsme tedy

$$|\mathcal{B}_i| = \binom{a+b-1}{a} \qquad \text{pro } i = 0, \ldots, k.$$

Odtud po odečtení od (4.1) dostáváme, že počet všech vyhovujících uspořádání hlasů je

$$\binom{a+b}{a} - (k+1)\binom{a+b-1}{a} = \left(1 - \frac{(k+1)b}{a+b}\right)\binom{a+b}{a} = \frac{a-kb}{a+b}\binom{a+b}{a}.$$

Pravděpodobnost, že první kandidát měl po celou dobu sčítání víc než $k$-násobek počtu hlasů druhého, je tedy $\dfrac{a-kb}{a+b}$.



Obrázek 4.5: Bijekce mezi $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_k$ ($k = 3, a = 8, b = 2$).

## 4.3 Řešení pomocí matematické indukce

Řešení úlohy 25 již známe. Označíme-li $N_k(a, b)$ počet všech vhodných uspořádání hlasů pro daná $a, b, k$, můžeme psát

$$N_k(a, b) = \frac{a - kb}{a + b}\binom{a + b}{a}. \tag{4.4}$$

Pokud vztah (4.4) „uhodneme“, není již problém dokázat jej indukcí vzhledem k $a, b$, a to následovně. V prvním kroku ověříme, že vztah splňuje $N_k(a, 0) = 1$ pro všechna $a > 0$ (pokud jsou všechny hlasy jen $A$, pak jdou uspořádat právě jedním způsobem, a ten je správný) a dále $N_k(kb, b) = 0$ pro všechna $b > 0$ (příslušná cesta pro $a = kb$ končí na ose $x$, a tudíž je vždy špatná).

Nechť dále $a > kb$. Ve druhém kroku předpokládejme, že dokazovaný vztah platí pro všechny dvojice $[p, q]$, kde $0 \le q \le b$ a $kq \le p \le a$, vyjma $[0, 0]$, kde není definován, a $[a, b]$. Dokážeme, že pak platí i pro $[a, b]$. K tomu využijeme rovnici

$$N_k(a, b) = N_k(a - 1, b) + N_k(a, b - 1).$$

Pravá strana odpovídá součtu dobrých cest končících hlasem pro $A$ a dobrých cest končících hlasem pro $B$. Díky indukčnímu předpokladu tak dostáváme

$$\begin{aligned} N_k(a, b) &= \frac{(a-1) - kb}{(a-1) + b}\binom{(a-1) + b}{a-1} + \frac{a - k(b-1)}{a + (b-1)}\binom{a + (b-1)}{a} = \\ &= \frac{a - kb - 1}{a + b - 1}\cdot\frac{a}{a + b}\binom{a + b}{a} + \frac{a - kb + k}{a + b - 1}\cdot\frac{b}{a + b}\binom{a + b}{a} = \\ &= \frac{(a - kb)(a + b - 1)}{(a + b)(a + b - 1)}\binom{a + b}{a} = \frac{a - kb}{a + b}\binom{a + b}{b}, \end{aligned}$$

čili výsledná pravděpodobnost je $(a - kb)/(a + b)$.

## 4.4 Řešení uspořádáním do kruhu

Následující řešení je fascinující svojí jednoduchostí. Hledanou pravděpodobnost zde dostaneme, aniž bychom počítali všechny posloupnosti.

Uspořádejme všech $a+b$ hlasovacích lístků do kruhu (libovolným způsobem). Od kteréhokoliv lístku můžeme začít a ve zvoleném směru sčítat hlasy. Ukážeme, že právě $a-kb$ lístků je vhodným začátkem, tj. posloupnost, kterou takto dostaneme, splňuje podmínky zadání.

Konkrétně si můžeme představit, že na místě hlasu $A$ je číslo 1 a na místě $B$ je $-k$. Tato čísla postupně sčítáme, přičemž dobrá posloupnost je taková, pro kterou je průběžný součet stále kladný. Klíčovým pozorováním je to, že vypustíme-li z kruhu souvislý úsek

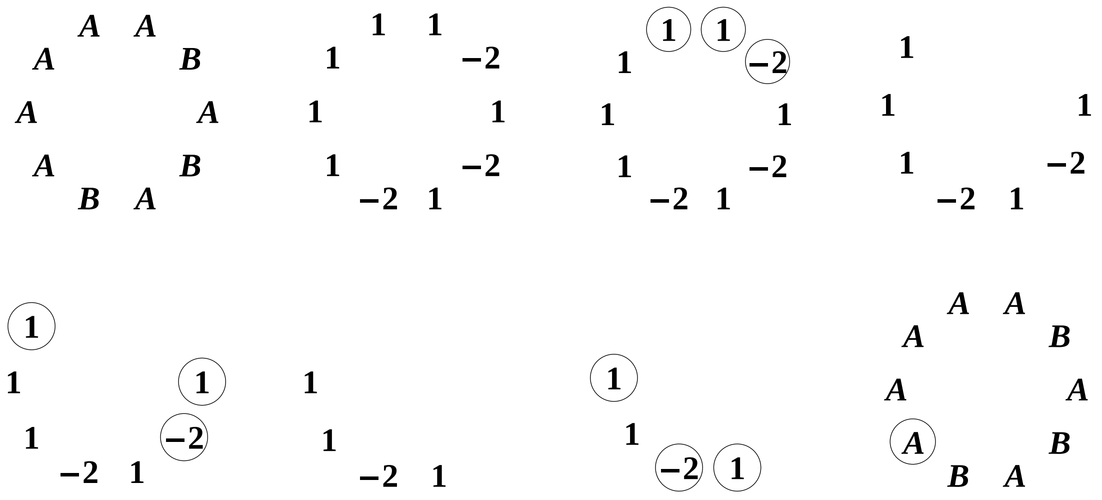
$$\underbrace{1,\ldots,1}_{k\text{ jedniček}}, -k, \tag{4.5}$$

neodstraníme žádný vhodný začátek. (Při počítání od kterékoliv z těchto jedniček bychom se po odečtení $k$ dostali na nulu nebo pod ni.) Díky tomu, že součet tohoto úseku je 0 a $-k$ je až na jeho konci, neovlivní jeho vynechání skutečnost, zda čísla ležící mimo něj jsou či nejsou vhodným počátkem.

Úseky (4.5) postupně vypouštíme tak dlouho, dokud v kruhu zbývá nějaké $-k$. Takový úsek určitě vždy existuje, protože aktuální počet hlasů $A$ v kruhu je vždy alespoň $k$-násobkem aktuálního počtu hlasů $B$.

Abychom se zbavili všech $-k$, odstraníme úsek (4.5) celkem $b$-krát. Na závěr tedy zbývá v kruhu právě $a-kb$ jedniček. Protože v něm již nejsou záporné hodnoty, je zřejmě každá z nich vhodným počátkem. Tj. z $a+b$ posloupností znázorněných pomocí jednoho kruhu, jich je $a-kb$ dobrých. Celý postup ukazuje obrázek 4.6.

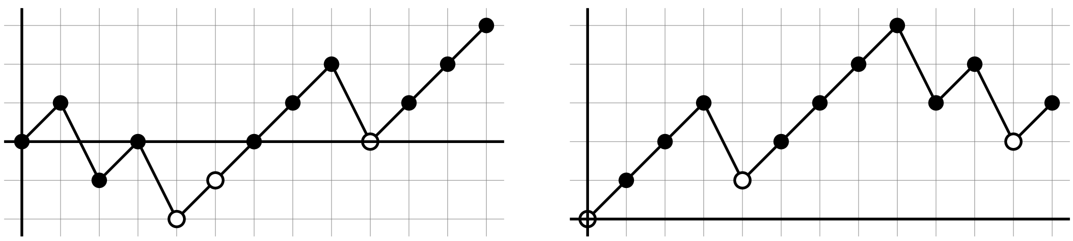
Pro každou posloupnost existuje právě jeden kruh, kterým je znázorněna (považujeme-li pootočené kruhy za stejné). Může se stát, že některá posloupnost je v daném kruhu vícekrát (pokud je kruh tvořen ze dvou nebo více shodných úseků), ale pak jsou v kruhu zastoupeny ve stejném počtu i ostatní posloupnosti, které tento kruh znázorňuje. Nic to tedy nemění na skutečnosti, že poměr dobrých posloupností ku všem je $(a-kb)/(a+b)$, což jsme chtěli dokázat.



Obrázek 4.6: Odebírání z kruhu pro $a=7$, $b=3$, $k=2$. Z posloupností znázorněných tímto kruhem je dobrá pouze ta začínající vyznačeným $A$, čili $AAAAABABAB$.

## 4.5 Řešení pomocí klíčových vrcholů

Následující důkaz je o něco komplikovanější, což mu však neubírá na zajímavosti. Označme $\mathcal{A} = \mathcal{A}(a, b, k)$ množinu všech cest pro daná $a, b, k$. Nechť $P$ je libovolná cesta z $\mathcal{A}$. Pro $P$ definujeme množinu $L(P)$ obsahující $a - kb$ hodnot $x$-ových souřadnic vrcholů $P$ následujícím způsobem: Z hodnot $y$-ových souřadnic vrcholů $P$ najděme tu nejmenší a označme ji $y_0$. Do množiny $L(P)$ pak pro každé $y = y_0, y_0 + 1, \ldots, y_0 + (a - kb) - 1$ zařadíme největší $x$ takové, že $[x, y] \in P$ (viz obrázek 4.7). Poznamenejme, že pro všechny $P$ platí $L(P) \subset \{0, \ldots, a + b - 1\}$.



Obrázek 4.7: Definice $L(P)$ – ukázka pro dvě cesty z $\mathcal{A}(9, 3, 2)$. V prvním případě $L(P) = \{4, 5, 9\}$, ve druhém $L(P) = \{0, 4, 11\}$.

Dále pro $i = 0, 1, \ldots, a + b - 1$ definujeme $M_i = \{P \in \mathcal{A} | i \in L(P)\}$. Zřejmě platí

$$\sum_i |M_i| = (a - kb)\binom{a+b}{a}, \tag{4.6}$$

protože $|\mathcal{A}| = \binom{a+b}{a}$ a $|L(P)| = a - kb$ pro všechny $P \in \mathcal{A}$.

Nejdříve si uvědomíme, že $|M_0|$ odpovídá počtu všech dobrých cest. Mezi $M_0$ a dobrými cestami totiž existuje snadno odhalitelná bijekce:

- $P$ dobrá $\Rightarrow$ $[0, 0]$ nejnižší vrchol v $P \Rightarrow 0 \in L(P) \Rightarrow P \in M_0$.
- $P \in M_0 \Rightarrow$ žádný další vrchol $P$ neleží na ose $x \Rightarrow P$ dobrá.

Stěžejním pro náš důkaz bude ta skutečnost, že $|M_0| = |M_i|$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, a + b - 1$. Protože množin $M_i$ je celkem $a + b$, vzhledem ke (4.6) dostaneme

$$M_0 = \frac{a - kb}{a + b}\binom{a+b}{b},$$

což je nám dobře známý výsledek. Zbývá tedy najít bijekci mezi $M_0$ a $M_i$. Nejdřív ukážeme

$$P = XY^* \in M_i \ (X \text{ je prvních } i \text{ kroků } P) \ \Rightarrow Q = YX \text{ dobrá.}$$

První vrchol úseku $Y$ je zřejmě jeho nejníže položeným. Jinak by nemohlo platit $i \in L(P)$, neboť by se někde napravo od $[i, y_i]$ nacházel ve výšce $y_i$ jiný vrchol. V cestě $Q$ se tedy úsek $Y$ udrží nad osou $x$ a cestu $Q$ nepokazí. Může něco pokazit následující úsek $X$? V původní cestě $P$ byly $y$-ové souřadnice prvního a

*Zápisem $P = XY$ rozumíme, že $P$ je tvořena posloupností kroků $X$ a za ní následující posloupností $Y$.

posledního vrcholu úseku $Y$ rovny $y_i$ a $a - kb$. V nové cestě $Q$ tedy bude $y$-ová souřadnice posledního vrcholu $Y$ rovna $a - kb - y_i$. V jaké výšce se nacházel nejníže položený vrchol z $X$ v $P$? Určitě ne níže než v $y_i - (a - kb) + 1$, protože $y_i$ je mezi $a - kb$ nejnižšími hodnotami $y$-ových souřadnic (neboť $i \in L(P)$). Přitom $X$ začínal v $[0, 0]$. V $Q$ je tedy nejníže položený vrchol $X$ ve výšce nejméně $(y_i - (a - kb) + 1) + (a - kb - y_i) = 1$, čili nad osou $x$. Takže $Q$ je dobrá, tj. $Q \in M_0$. Dále ukážeme

$$Q = YX \in M_0 \text{ ($X$ je posledních $i$ kroků $Q$)} \Rightarrow P = XY \in M_i.$$

Dokazujeme, že $i \in L(P)$. Tedy, že napravo od $[i, y_i]$ neexistuje vrchol se stejnou $y$-ovou souřadnicí a že $y_i$ patří mezi $a - kb$ nejnižších hodnot $y$-ových souřadnic vrcholů v $P$. Nejdřív si uvědomíme, že úsek $Y$ byl v $Q$ po celou dobu nad osou $x$. V $P$ tedy bude po celou dobu nad úrovní $y_i$, což mj. znamená, že napravo od $[i, y_i]$ neexistuje ve stejné výšce (a ani níže) žádný další vrchol. Další skutečností je to, že v $Q$ je poslední vrchol úseku $X$ ve výšce $a - kb$ a nejnižší vrchol ve výšce nejméně 1. Odtud plyne, že v $P$ je rozdíl $y$-ových souřadnice $i$-tého vrcholu a nejníže položeného vrcholu nejvýše $a - kb - 1$, hodnota $y_i$ tedy patří mezi $a - kb$ nejnižších a $i \in L(P)$. Tím je důkaz hotov.

## 4.6 Souvislost s Catalanovými čísly

Závěrem si ukážeme, jak hlasovací problém souvisí s Catalanovými čísly. Lehce jej pro tento účel pozměníme.

**Úloha 26.** *Oba kandidáti dostali ve volbách shodný počet hlasů. Kolika způsoby lze uspořádat hlasovací lístky tak, aby první kandidát měl po celou dobu sčítání alespoň tolik hlasů jako kandidát druhý?*

Tj. položili jsme $a = b$ a $k = 1$. Dále jsme změnili podmínku z „(ostře) víc“ na „alespoň tolik“ a neptáme se na pravděpodobnost, nýbrž na počet všech uspořádání.

Nechť $n$ je počet hlasů, které dostal každý z kandidátů, a $C_n$ řešení úlohy. Posloupnost hlasů můžeme opět znázorňovat jako cestu ve čtvercové síti. $C_n$ je tedy počet cest z $[0, 0]$ do $[2n, 0]$, které nikdy neklesnou pod osu $x$. Dále platí, že $C_{n-1}$ je počet cest z $[0, 0]$ do $[2n, 0]$, které nikdy neklesnou pod osu $x$ a dotknou se jí pouze v krajních bodech. Proč? Protože pro tyto cesty zřejmě platí, že jejich první krok je nahoru, poslední dolů a zbylých $n - 1$ hlasů pro $A$ a $n - 1$ hlasů pro $B$ tvoří cestu, která nikdy neklesne pod přímku $y = 1$.

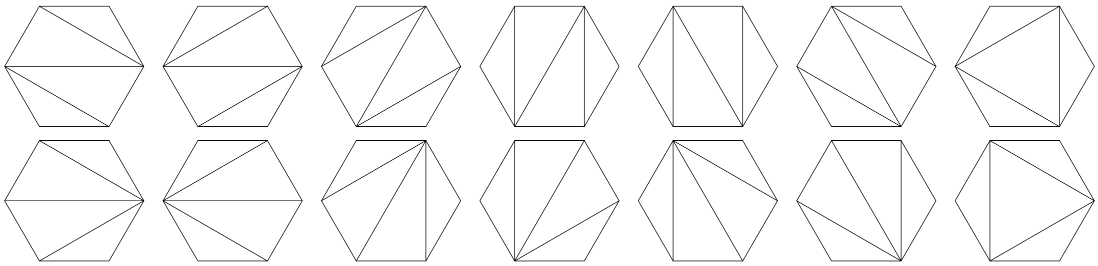
Zřejmě tedy platí i to, že $C_{n-1}$ je počet cest z $[0, 0]$ do $[2n - 1, 1]$, které se osy $x$ dotýkají pouze v $[0, 0]$. Tento počet už ale známe, viz (4.3), jedná se o původní hlasovací problém (pro $a = n$, $b = n - 1$). Chceme-li tedy spočítat $C_n$, dosadíme $a = n + 1$, $b = n$ a dostáváme

$$C_n = \frac{(n+1) - n}{(n+1) + n} \binom{(n+1) + n}{n+1} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} =$$
$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

A právě jako $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ je definováno $n$-té Catalanovo číslo (pro všechna nezáporná celá čísla $n$). Několik prvních hodnot $C_n$ ukazuje tabulka 4.1. Na Catalanova čísla vede velké množství kombinatorických problémů. Asi dvě stě jich lze nalézt ve [27]. Např. $C_n$ je počet všech $(n-1)$-prvkových posloupností přirozených čísel $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$ splňujících $1 \leq a_i \leq 2i$. (Pro $n = 4$ to jsou $1,2,3$; $1,2,4$; $1,2,5$; $1,2,6$; $1,3,4$; $1,3,5$; $1,3,6$; $1,4,5$; $1,4,6$; $2,3,4$; $2,3,5$; $2,3,6$; $2,4,5$ a $2,4,6$, což odpovídá tomu, že $C_4 = 14$.) Dalším příkladem může být triangulace konvexního $(n+2)$-úhelníku pomocí jeho úhlopříček tak, aby se žádné dvě nekřížily, viz obrázek 4.8. Počet takových triangulací je také právě $C_n$.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_n$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 |

Tabulka 4.1: Hodnoty Catalanových čísel.



Obrázek 4.8: Příklad problému vedoucího na Catalanova čísla – triangulace $(n+2)$-úhelníku bez křížení úhlopříček, $(n=4)$.

# 5. Úloha o školačkách

Nejspíš budete souhlasit, že potřeba sdělit si navzájem nejžhavější novinky ze života je u děvčat opravdu silná. A každé dvě kamarádky si na sebe najdou chvilku, ať už jsou okolní podmínky sebekomplikovanější. Snad právě proto je následující úloha situována do prostředí dívčí internátní školy.

**Úloha 27.** *Patnáct školaček chodí na své každodenní vycházky, a to vždy ve trojicích. Jak se mají rozdělit, aby během jednoho týdne šly každé dvě alespoň jednou pohromadě?*

Tuto úlohu, známou jako Fifteen Schoolgirl Problem, přivedl na světlo světa roku 1850 britský kněz a matematik Thomas P. Kirkman. Ke všem (sedmi) navzájem neisomorfním řešením dospěl v roce 1862 Woulhouse. Zájemce je nalezne v [6]. Naším cílem bude ukázat si, jak lze rozličnými cestami dospět alespoň k jednomu řešení.

## 5.1 Přímočaré řešení

Nejdřív si uvědomme, že zadání úlohy je ekvivalentní požadavku, aby spolu šly každé dvě dívky právě jednou, nebo také nejvýše jednou, protože každá dívka má čtrnáct spolužaček a každý ze sedmi dní jde se dvěma z nich. Naším cílem je vytvořit týdenní rozpis vycházek tak, aby každý den šla každá dívka v jedné z trojic a aby se během týdne vyskytla každá dvojice právě jednou, viz např. tabulka 5.1.

| Po | Út | St | Čt | Pá | So | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1,2,3$ | $1,4,5$ | $1,6,7$ | $1,8,9$ | $1,10,11$ | $1,12,13$ | $1,14,15$ |
| $4,8,12$ | $2,9,11$ | $2,8,10$ | $3,5,7$ | $3,4,6$ | $2,5,6$ | $2,4,7$ |
| $5,10,14$ | $3,13,15$ | $3,12,14$ | $2,13,14$ | $2,12,15$ | $3,9,10$ | $3,8,11$ |
| $6,9,15$ | $6,8,14$ | $4,9,13$ | $4,10,15$ | $5,8,13$ | $4,11,14$ | $5,9,12$ |
| $7,11,13$ | $7,10,12$ | $5,11,15$ | $6,11,12$ | $7,9,14$ | $7,8,15$ | $6,10,13$ |

Tabulka 5.1: Ukázka řešení úlohy o školačkách.

Ač je zadání velmi prosté, najít řešení není úplně jednoduché. Je celkem přirozené pokoušet se vytvořit vhodný rozpis metodou pokus – omyl s jistou dávkou systematičnosti. Bez vhodné myšlenky se to ale nemusí hned podařit. (Nechť se čtenář chopí papíru a tužky a sám se o tom přesvědčí.) Zde si ukážeme Frostovo řešení uvedené v [8].

Vyplňujeme tabulku o sedmi sloupcích. Jednu dívku pevně zvolíme (označme ji $x$) a umístíme na první řádek v každém sloupci. Dívky, které jdou s $x$, označíme postupně $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, g_1, g_2$. Máme tedy:

| Po | Út | St | Čt | Pá | So | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $xa_1a_2$ | $xb_1b_2$ | $xc_1c_2$ | $xd_1d_2$ | $xe_1e_2$ | $xf_1f_2$ | $xg_1g_2$ |
| | | | | | | |

Dále budeme pracovat bez indexů 1 a 2 a z písmen $a, b, \ldots, g$ sestavíme trojice tak, aby se každá dvojice vyskytovala právě jednou. To je vzhledem k malému počtu prvků triviální. Dostaneme trojice $abc$, $ade$, $afg$, $bdf$, $beg$, $cdg$, $cef$. Každou z trojic umístíme do těch čtyř sloupců tabulky, kde se v prvním řádku nevyskytuje žádné z jejích písmen, viz tabulka 5.2.

| Po | Út | St | Čt | Pá | So | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $xa_1a_2$ | $xb_1b_2$ | $xc_1c_2$ | $xd_1d_2$ | $xe_1e_2$ | $xf_1f_2$ | $xg_1g_2$ |
| $bdf$ | $ade$ | $ade$ | $abc$ | $abc$ | $abc$ | $abc$ |
| $beg$ | $afg$ | $afg$ | $afg$ | $afg$ | $ade$ | $ade$ |
| $cdg$ | $cdg$ | $bdf$ | $beg$ | $bdf$ | $beg$ | $bdf$ |
| $cef$ | $cef$ | $beg$ | $cef$ | $cdg$ | $cdg$ | $cef$ |

Tabulka 5.2: Frostovo řešení – před přiřazením indexů.

Vidíme, že zbývá písmenům vhodně přiřadit indexy 1 nebo 2. To provedeme nejdřív pro všechny výskyty trojice $bdf$, potom pro všechny výskyty $beg$ atd. (trojice bereme podle jejich pořadí v tabulce). Při tom se řídíme těmito pravidly:

- V jednom sloupci nesmí být pro dané písmeno použit dvakrát stejný index.
- Žádná dvojice (indexovaných písmen) spolu nesmí být vícekrát.
- Pokud první dvě pravidla neurčí index jednoznačně, indexujeme číslem 1.

Tím je úloha vyřešena, viz tabulka 5.3. Použijeme-li pro označení dívek čísla místo písmen ($x = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $\ldots$, $g_2 = 15$), dostaneme rozpis uvedený na začátku kapitoly (tab. 5.1).

| Po | Út | St | Čt | Pá | So | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $xa_1a_2$ | $xb_1b_2$ | $xc_1c_2$ | $xd_1d_2$ | $xe_1e_2$ | $xf_1f_2$ | $xg_1g_2$ |
| $b_1d_1f_1$ | $a_1d_2e_2$ | $a_1d_1e_1$ | $a_2b_2c_2$ | $a_2b_1c_1$ | $a_1b_2c_1$ | $a_1b_1c_2$ |
| $b_2e_1g_1$ | $a_2f_2g_2$ | $a_2f_1g_1$ | $a_1f_2g_1$ | $a_1f_1g_2$ | $a_2d_2e_1$ | $a_2d_1e_2$ |
| $c_1d_2g_2$ | $c_1d_1g_1$ | $b_1d_2f_2$ | $b_1e_1g_2$ | $b_2d_1f_2$ | $b_1e_2g_1$ | $b_2d_2f_1$ |
| $c_2e_2f_2$ | $c_2e_1f_1$ | $b_2e_2g_2$ | $c_1e_2f_1$ | $c_2d_2g_1$ | $c_2d_1g_2$ | $c_1e_1f_2$ |

Tabulka 5.3: Frostovo řešení – konečná podoba.

## 5.2 Algebraické řešení

Následující řešení je také možné najít v [8]. Jednu dívku ($\star$) opět pevně zafixujeme a ostatní rozdělíme do dvou skupin. V obou skupinách očíslujeme dívky 0 až 6. V následujícím textu budeme označovat dívky první skupiny malými písmeny a druhé velkými. Pracovat budeme v tělese $Z_7$. Pokusíme se najít rozdělení dívek, které pro $r$-tý den ($r = 0$ pro pondělí,$\ldots$, $r = 6$ pro neděli) vypadá následovně:

$$\begin{array}{ccc} a+r & \alpha+r & A+r \\ b+r & \beta+r & B+r \\ c+r & \gamma+r & C+r \\ d+r & \star & D+r \\ E+r & F+r & G+r \end{array}$$

Díky tomu, že se $r$ každý den navýší o jedničku, dostane se každá z dívek právě jednou během týdne na každou z pozic svojí skupiny. Dívky z první skupiny se navzájem potkávají na prvních třech řádcích v prvních dvou sloupcích. Čísla každých dvou dívek se navzdájem liší o 1, 2 nebo 3. A každé dvě se musí setkat. To nám zaručí podmínky

$$\alpha - a = 1, \quad \beta - b = 2, \quad \gamma - c = 3. \tag{5.1}$$

Podobně se dívky z druhé skupiny potkávají na posledním řádku, pokaždé tři najednou. Ze stejných důvodů jako výše budeme požadovat

$$F - E = 1, \quad G - F = 2, \quad G - E = 3. \tag{5.2}$$

Zbývá nám zajistit kontakty mezi dívkami z různých skupin. Rozdíl čísla dívky z druhé skupiny a čísla dívky ze skupiny první je 0 až 6. Aby se setkaly každé dvě, musí platit

$$\{A - a,\ A - \alpha,\ B - b,\ B - \beta,\ C - c,\ C - \gamma,\ D - d\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \tag{5.3}$$

Nyní se budeme snažit splnit všechny výše uvedené podmínky. Jde to až překvapivě snadno. Nejdřív rozestavíme dívky z první skupiny tak, aby platilo (5.1). Dále umístíme dívky do sloupečku vpravo a snažíme se vyhovět (5.3). Zbydou nám čísla 3, 4 a 6, které, k naší radosti a spokojenosti, splňují (5.2).

$$\begin{array}{ccc} a & \alpha & A \\ b & \beta & B \\ c & \gamma & C \\ d & \star & D \\ E & F & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \_ \\ 2 & 4 & \_ \\ 3 & 6 & \_ \\ 5 & \star & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & \star & 2 \\ \_ & \_ & \_ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & \star & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}$$

Úloha je tedy vyřešena. Na závěr uvedeme rozpis vycházek na celý týden (dívky první skupiny přeznačíme na $a_0, \ldots, a_6$ a druhé $b_0, \ldots, b_6$).

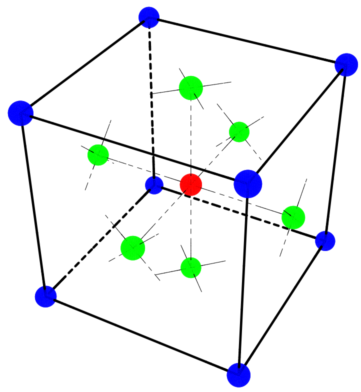
| Po | Út | St | Čt | Pá | So | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_0a_1b_0$ | $a_1a_2b_1$ | $a_2a_3b_2$ | $a_3a_4b_3$ | $a_4a_5b_4$ | $a_5a_6b_5$ | $a_6a_0b_6$ |
| $a_2a_4b_5$ | $a_3a_5b_6$ | $a_4a_6b_0$ | $a_5a_0b_1$ | $a_6a_1b_2$ | $a_0a_2b_3$ | $a_1a_3b_4$ |
| $a_3a_6b_1$ | $a_4a_0b_2$ | $a_5a_1b_3$ | $a_6a_2b_4$ | $a_0a_3b_5$ | $a_1a_4b_6$ | $a_2a_5b_0$ |
| $a_5 \star b_2$ | $a_6 \star b_3$ | $a_0 \star b_4$ | $a_1 \star b_5$ | $a_2 \star b_6$ | $a_3 \star b_0$ | $a_4 \star b_1$ |
| $b_3b_4b_6$ | $b_4b_5b_0$ | $b_5b_6b_1$ | $b_6b_0b_2$ | $b_0b_1b_3$ | $b_1b_2b_4$ | $b_2b_3b_5$ |

Tabulka 5.4: Algebraické řešení – konečná podoba.

## 5.3 Geometrická řešení – krychle a čtyřstěn

Zajímavým pohledem na úlohu o školačkách je pohled geometrický. Základním principem je zvolit strukturu, která má 15 prvků, jež odpovídají jednotlivým dívkám, a při konstrukci řešení pak využívat různé symetrie mezi nimi. Nejdříve si ukážeme řešení za pomoci krychle pocházející z [7]. Zde si ho především obohatíme o názorné obrázky.

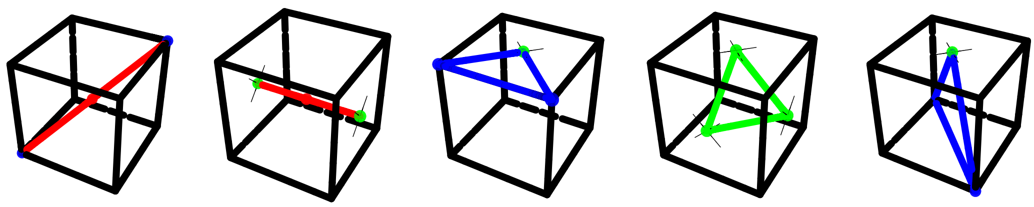
Jak jde krychle a hodnota 15 dohromady? Inu, osm vrcholů, šest stěn a krychle sama. Pro názornost bude nejjednodušší ztotožnit dívky s vrcholy krychle, středy stěn a středem krychle tak, jak je ukázáno na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Dívky odpovídají znázorněným bodům krychle.

Budeme postupovat ve dvou krocích. Nejdříve vytvoříme trojice, které splňují podmínku, že každé dvě dívky jsou spolu právě jednou. Ve druhém kroku ukážeme, jak je možné rozmístit tyto trojice do sedmi dnů. V tomto řešení se objeví následující typy trojic (viz obr. 5.2):

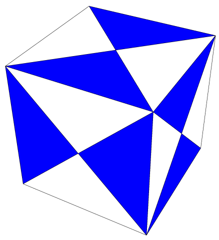
- střed krychle a dva protilehlé vrcholy (typ $a$)
- střed krychle a středy dvou protějších stěn (typ $b$)
- dva sousední vrcholy a střed přilehlé stěny (typ $c$)
- středy tří sousedních stěn (typ $d$)
- dva protější vrcholy jedné stěny a střed stěny protější (typ $e$)



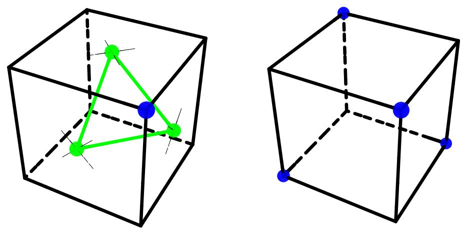
Obrázek 5.2: Typy utvářených trojic, postupně $a$ až $e$.

Co se týče trojic typů $a$, $b$ a $e$, je situace jednoduchá – vezmeme všechny možné trojice daného typu (tj. čtyři $a$, tři $b$ a dvanáct $e$). V případě typu $c$ zvolíme

12 z 24 možností. Pro každé dva sousední vrcholy je potřeba zvolit jednu ze dvou stěn, s jejímž středem budou tvořit trojici. (Kdyby tvořily trojice se středy obou stěn, vyskytovaly by se tyto dva vrcholy spolu dvakrát, což nechceme.) Trojice vybereme tak, jak je znázorněno na obrázku 5.3 – za trojici volíme vrcholy každého z modrých trojúhelníků (symetricky pro zakrytou část krychle). Podobně pro typ $d$ je potřeba vybrat 4 z 8 možností tak, aby se středy žádných dvou stěn spolu nevyskytovaly vícekrát. Výběr provedeme podle obrázku 5.4 – každá trojice je určena jedním vrcholem krychle (modrý). Vybereme trojice příslušející zvýrazněným vrcholům.

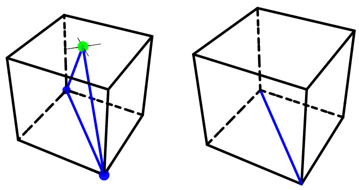


Obrázek 5.3: Volba trojic typu $c$.

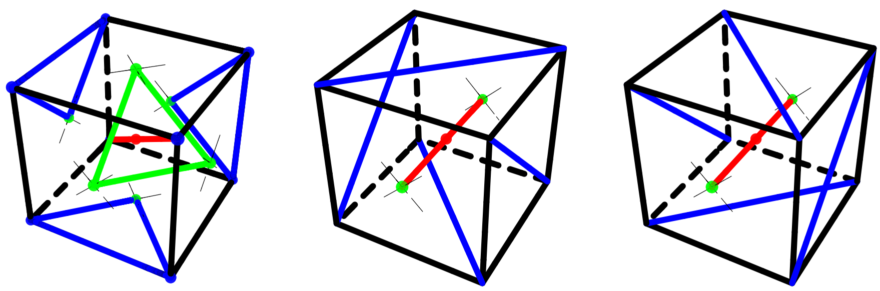


Obrázek 5.4: Volba trojic typu $d$.

Celkem jsme získali $4 + 3 + 12 + 12 + 4 = 35$ trojic. Není těžké ověřit, že se žádná dvojice spolu nevyskytuje vícekrát, takže první krok je splněn. Nyní zbývá rozdělit příslušné trojice do sedmi dní. Pro pondělí až čtvrtek vybereme vždy jednu trojici typu $a$, jednu typu $d$ a tři typu $c$, přičemž pro danou trojici typu $a$ je zbytek výběru jednoznačný. Pátku až neděli bude náležet jedna trojice typu $b$ a k ní čtyři příslušející trojice typu $e$. Zde si můžeme vybrat jednu ze dvou možností, jak budou zkombinovány. (Pro přehlednost budeme trojici typu $e$ znázorňovat tak, jak je ukázáno na obrázku 5.5.) Výsledné řešení ukazuje obrázek 5.6.



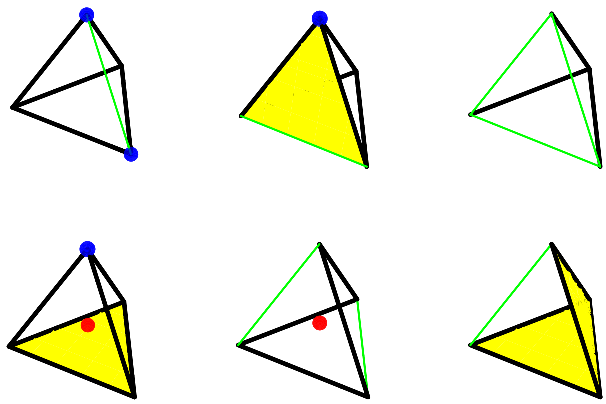
Obrázek 5.5: Zjednodušené znázorňování trojice typu $e$.



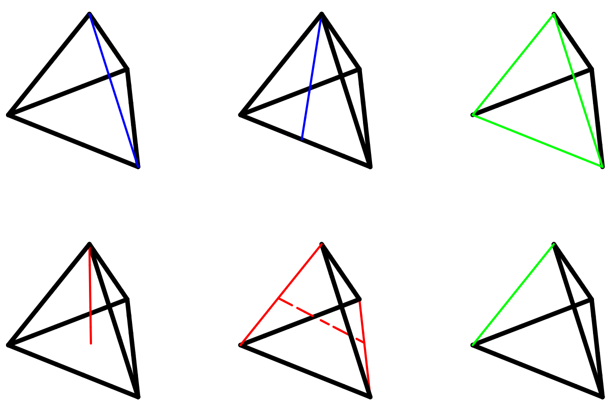
Obrázek 5.6: Rozvržení do dnů – první krychle znázorňuje Po až Čt, druhá Pá až Ne, třetí je alternativou ke druhé (tj. volíme jednu z nich).

Obdobně jako krychli je možné využít i čtyřstěn. Řešení pochází z [9], kde lze najít podrobnosti. Čtyřstěn má čtyři stěny, čtyři vrcholy, šest hran a sám sebe. Příslušné trojice opět utvoříme poměrně přirozeným způsobem (pro názornost viz obr. 5.7 a 5.8):

- dva vrcholy a hrana, která je spojuje (typ $a$)
- vrchol, hrana, která v něm nezačíná, a stěna, již mají společnou (typ $b$)
- tři hrany příslušející jedné stěně (typ $c$)
- vrchol, protější stěna a čtyřstěn sám (typ $d$)
- dvě nesousední hrany a čtyřstěn sám (typ $e$)
- hrana a dvě stěny, které s ní nesousedí (typ $f$)

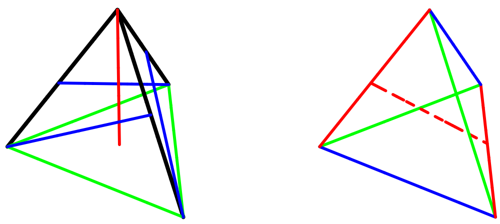


Obrázek 5.7: Čtyřstěn – typy utvářených trojic, zleva doprava $a$ až $f$.



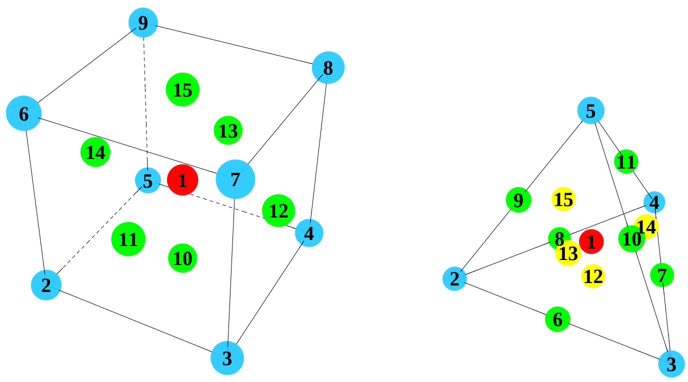
Obrázek 5.8: Čtyřstěn – zjednodušené znázornění trojic, zleva doprava $a$ až $f$.

V případě čtyřstěnu je situace jednoduchá – do výběru zařazujeme všechny existující trojice daných typů. To je celkem šest trojic typu $a$, dvanáct $b$, čtyři $c$, čtyři $d$, tři $e$ a šest $f$. Vidíme, že dohromady dávají potřebných 35 trojic a snadno dokážeme ověřit, že se spolu žádná dvojice nevyskytuje vícekrát. Zbývá tedy provést rozdělení do jednotlivých dnů. Pro pondělí až čtvrtek využijeme vždy jednu trojici typu $c$, jednu $d$ a tři $b$, pro pátek až neděli dvě $a$, jednu $e$ a dvě $f$, jak je ukázáno na obrázku 5.9.



Obrázek 5.9: Rozvržení do dnů – první čtyřstěn znázorňuje Po až Čt, druhý Pá až Ne.

Ještě si uveďme, jak mohou vypadat rozpisy vycházek na základě zde zmíněných řešení. Jeden pro krychli, jeden pro čtyřstěn. Odpovídají jim tabulky 5.5 a 5.6, pričemž dívky jsou očíslovány podle obrázku 5.10.




Obrázek 5.10: Označení dívek – krychle a čtyřstěn.

| Po | Út | St | Čt | Pá | So | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1, 5, 7$ | $1, 4, 6$ | $1, 3, 9$ | $1, 2, 8$ | $1, 11, 13$ | $1, 12, 14$ | $1, 10, 15$ |
| $2, 3, 10$ | $2, 5, 14$ | $2, 6, 11$ | $3, 4, 12$ | $2, 9, 12$ | $2, 4, 15$ | $2, 7, 13$ |
| $4, 8, 13$ | $3, 7, 11$ | $4, 5, 10$ | $5, 9, 13$ | $3, 5, 15$ | $3, 6, 13$ | $3, 8, 14$ |
| $6, 9, 14$ | $8, 9, 15$ | $7, 8, 12$ | $6, 7, 15$ | $4, 7, 14$ | $5, 8, 11$ | $4, 9, 11$ |
| $11, 12, 15$ | $10, 12, 13$ | $13, 14, 15$ | $10, 11, 14$ | $6, 8, 10$ | $7, 9, 10$ | $5, 6, 12$ |

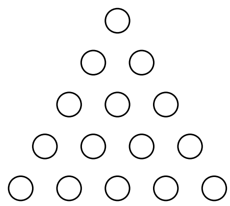
Tabulka 5.5: Rozpis podle řešení využívajícího krychli.

| Po | Út | St | Čt | Pá | So | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 5, 12 | 1, 2, 14 | 1, 3, 15 | 1, 4, 13 | 1, 7, 9 | 1, 8, 10 | 1, 6, 11 |
| 2, 10, 13 | 3, 9, 13 | 2, 7, 12 | 2, 11, 15 | 2, 3, 6 | 2, 5, 9 | 2, 4, 8 |
| 3, 11, 14 | 4, 6, 12 | 4, 10, 14 | 3, 8, 12 | 4, 5, 11 | 3, 4, 7 | 3, 5, 10 |
| 4, 9, 15 | 5, 8, 15 | 5, 6, 13 | 5, 7, 14 | 8, 13, 14 | 6, 14, 15 | 7, 13, 15 |
| 6, 7, 8 | 7, 10, 11 | 8, 9, 11 | 6, 9, 10 | 10, 12, 15 | 11, 12, 13 | 9, 12, 14 |

Tabulka 5.6: Rozpis podle řešení využívajícího čtyřstěn.

## 5.4 Geometrické řešení – pyramida

Po zhlédnutí výše uvedených řešení je zajímavé zapřemýšlet, jaká další struktura by se dala využít, a pokusit se najít vlastní způsob řešení. Nejdřív nás mohou napadat ostatní platónská tělesa*. Dvanáctistěn a dvacetistěn jsou ale pro naše účely příliš „velké“. Osmistěn by se použít dal, ale vzhledem k tomu, že je duální s krychlí (krychle má šest stěn a osm vrcholů, osmistěn naopak), nebyl by výsledek nijak zajímavý. Nuže, zkusme to jinak. Kde jinde je možné najít patnáctku? Např. zde: $1+2+3+4+5 = 15$. A dvourozměrná pyramida je na světě! (Viz obr. 5.11.)

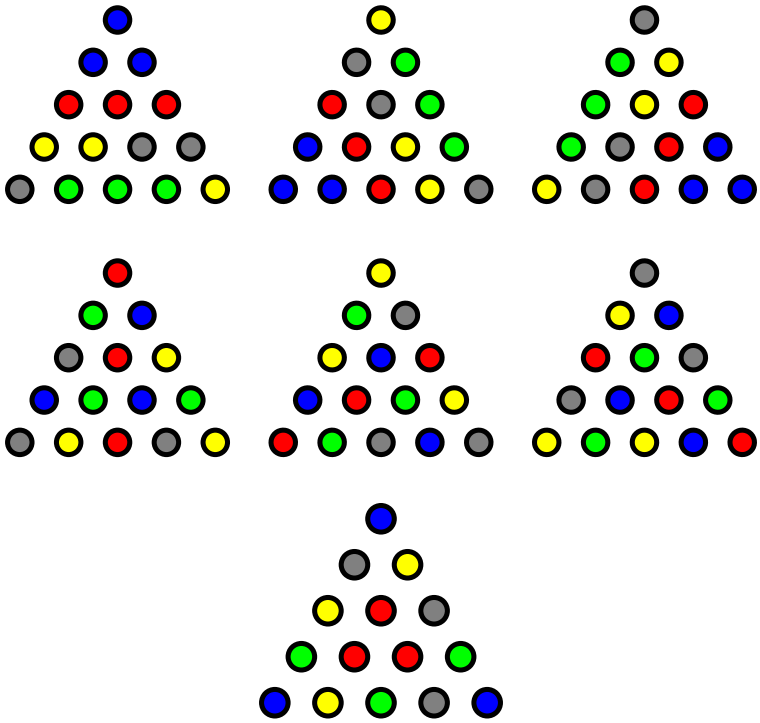


Obrázek 5.11: Pyramida z patnácti prvků.

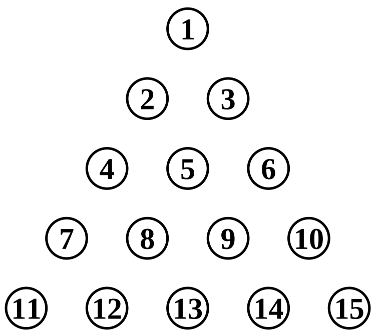
Na každé kolečko se můžeme dívat jako na jednu školačku. Trojice dívek jdoucích společně obarvujeme toutéž barvou. Na rozdíl od krychle nebo čtyřstěnu nebudeme nejdřív hledat rozdělení do trojic a ty pak rozvrhovat do dnů, nýbrž se budeme přímo snažit konstruovat rozvrh pro daný den. Hlavní ideou je možnost dvakrát po sobě otočit pyramidu o 120 stupňů na sebe samu. Neobarvíme-li v pyramidě jednou barvou žádnou trojici koleček, která se navzájem otáčí na sebe, můžeme stejný způsob obarvení použít tři dny za sebou, což je přesně to, co nám usnadní práci při hledání řešení. Pyramida je také osově souměrná, což můžeme intuitivně využít při obarvování. Snažíme se tedy dospět k tomu, aby pondělí až středa a čtvrtek až sobota byly utvořeny pomocí jednoho obarvení. Jedno úspěšné řešení je ukázáno na obr. 5.12.

Rozpis vycházek daný tímto řešením při očíslování podle obrázku 5.13 znázorňuje tabulka 5.7.

*Platónské těleso je pravidelný konvexní mnohostěn. Existuje jich celkem pět – čtyřstěn, šestistěn (krychle), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.



Obrázek 5.12: Výsledné řešení pomocí pyramidy.




Obrázek 5.13: Označení dívek – pyramida.

| Po | Út | St | Čt | Pá | So | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, 2, 3 | 1, 9, 14 | 1, 8, 12 | 1, 5, 13 | 1, 4, 10 | 1, 6, 7 | 1, 11, 15 |
| 4, 5, 6 | 2, 5, 15 | 2, 4, 7 | 2, 8, 10 | 2, 9, 12 | 2, 11, 13 | 2, 6, 14 |
| 7, 8, 15 | 3, 6, 10 | 3, 5, 11 | 3, 7, 9 | 3, 13, 15 | 3, 8, 14 | 3, 4, 12 |
| 9, 10, 11 | 4, 8, 13 | 6, 9, 13 | 4, 11, 14 | 5, 7, 14 | 4, 9, 15 | 5, 8, 9 |
| 12, 13, 14 | 7, 11, 12 | 10, 14, 15 | 6, 12, 15 | 6, 8, 11 | 5, 10, 12 | 7, 10, 13 |

Tabulka 5.7: Rozpis podle řešení využívajícího pyramidu.

## 5.5 Úloha o golfistech a Schurigovy tabulky

Nyní zmíníme jedno možné zobecnění úlohy o školačkách. V originále se nazývá Social Golfer Problem.

**Úloha 28.** *Celkem $s \cdot h$ golfistů hraje jedenkrát týdně golf v $s$ skupinách po $h$ hráčích. Mohou hrát $t$ týdnů, aniž by se spolu někteří dva setkali víc než jednou?*

Nejdřív poznamenejme, že tento problém je stále otevřený, řešení je známé jen pro některé jeho instance. Jednou z nich je právě úloha o školačkách ($s = 5$, $h = 3$, $t = 7$).

Zpravidla je cílem najít největší možné $t$ pro daná $s$ a $h$. Je snadné odhadnout $t$ shora. Během každého z $t$ týdnů hraje každý hráč s $h-1$ dalšími a celkový počet těch, se kterými hraje, nemůže přesáhnout počet všech hráčů (bez něho samého). Odtud $t \cdot (h-1) \leq s \cdot h - 1$, čili

$$t \leq (s \cdot h - 1)/(h - 1). \tag{5.4}$$

Původní otázka, položená v květnu 1998 (viz [30]), se ptala konkrétně na 32 golfistů ve skupinách po čtyřech. Záhy bylo nalezeno řešení pro $t = 9$. Zřejmě $t < 11$, takže zbývalo zodpovědět, zda lze $t = 10$. Roku 2004 dokázal A. Aguado, že ano, viz [1].

Řešení dalších instancí problému uvádí např. [17]. Odtud pochází i tabulka 5.8, která ukazuje maximální možné $t$ pro kombinace některých hodnot $s$ a $h$. Zde si můžeme povšimnout jedné skutečnosti. Například pro 12 hráčů hrajících ve čtyřech skupinách po třech je nejvyšší dosažitelné $t$ rovno čtyřem, ačkoliv bychom podle (5.4) mohli doufat v řešení, kde $t = 5$. Odtud vidíme, že nemůžeme být „příliš optimističtí“, a předpokládat, že vždy existuje řešení dané naším horním odhadem.

| | Hráčů ve sk. | | |
|---|---|---|---|
| Skupin | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 7 | 4 | 5 |
| 5 | 9 | 7 | 5 |
| 6 | 11 | 8 | 7 |
| 7 | 13 | 10 | 9 |
| 8 | 15 | 11 | 10 |
| 9 | 17 | 13 | 11 |

Tabulka 5.8: Přehled toho, kolikrát mohou golfisté hrát v daném počtu skupin o dané velikosti, aniž by se někteří dva potkali vícekrát.

Závěrem ještě zmiňme, že za speciální případ úlohy o golfistech můžeme považovat např. i šachový turnaj, kde soupeří nepříliš velký sudý počet hráčů a požaduje se, aby každý s každým sehrál právě jednu partii (a pochopitelně i to, aby v každém kole hráli všichni účastníci). Tj. máme $h = 2$ a chceme $t = h \cdot s - 1$. Řešení existuje vždy a je velmi snadné jej zkonstruovat. Nejen čeští šachisté za tímto účelem využívají tabulky, které v devatenáctém století sestavil německý matematik R. Schurig. Způsob jejich konstrukce i další podrobnosti přehledně popisuje [32].

Zde si ukážeme, jak dostat Schurigovu tabulku pro šest hráčů. A to i včetně toho, aby se jednotlivým hráčům, pokud možno, střídaly kolo od kola bílé a černé kameny, byť to není požadováno v naší úloze. Analogický postup lze použít i pro jiný počet hráčů.

Hráče označíme čísly 1 až 6. Celkem sehrají 5 kol, rozpis každého kola bude na jednom řádku. V každém kole se spolu střetnou tři dvojice. V každé dvojici má bílé ten, kdo je napsán na prvním místě.

V prvním kroku budeme postupovat po řádcích a psát čísla 1 až 5 (tj. číslo 6 vynecháváme). Po pětce vždy pokračujeme jedničkou, viz tabulka 5.9.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. kolo: | 1 - | 2 - | 3 - |
| 2. kolo: | 4 - | 5 - | 1 - |
| 3. kolo: | 2 - | 3 - | 4 - |
| 4. kolo: | 5 - | 1 - | 2 - |
| 5. kolo: | 3 - | 4 - | 5 - |

Tabulka 5.9: Schurigova tabulka pro 6 hráčů – první krok.

Ve druhém kroku si zakryjeme první sloupec, nic do něj nepřipisujeme. Opět postupujeme po řádcích, čísla tentokrát píšeme v sestupném pořadí, od pětky k jedničce, viz tabulka 5.10.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. kolo: | 1 - | 2 - **5** | 3 - **4** |
| 2. kolo: | 4 - | 5 - **3** | 1 - **2** |
| 3. kolo: | 2 - | 3 - **1** | 4 - **5** |
| 4. kolo: | 5 - | 1 - **4** | 2 - **3** |
| 5. kolo: | 3 - | 4 - **2** | 5 - **1** |

Tabulka 5.10: Schurigova tabulka pro 6 hráčů – druhý krok.

Nyní už jen zbývá doplnit do prvního sloupce číslo 6. Kvůli střídání barev je v sudých kolech uvedeno na prvním místě. Výsledek ukazuje tabulka 5.11.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. kolo: | 1 - **6** | 2 - 5 | 3 - 4 |
| 2. kolo: | **6** - 4 | 5 - 3 | 1 - 2 |
| 3. kolo: | 2 - **6** | 3 - 1 | 4 - 5 |
| 4. kolo: | **6** - 5 | 1 - 4 | 2 - 3 |
| 5. kolo: | 3 - **6** | 4 - 2 | 5 - 1 |

Tabulka 5.11: Schurigova tabulka pro 6 hráčů – hotovo.

Ještě si ukažme, že Schurigova tabulka opravdu „funguje“, tj. každá dvojice se střetne. Pro $2k$ hráčů má tabulka $2k-1$ řádků (kol) a $k$ sloupců (stolů). Ptejme se, kdo hraje v $r$-tém kole na $s$-tém stole (kromě prvního, který se obsazuje jiným způsobem). Nechť $b$ je číslo hráče hrajícího s bílými kameny, $c$ s černými. (Zabýváme se všemi hráči kromě $2k$.) Ze způsobu, jak je tabulka tvořena není těžké odvodit, že

$$
\begin{aligned}
b &\equiv (r-1)k + s \\
c &\equiv -((r-1)(k-1) + (s-1)) + 1,
\end{aligned}
$$

přičemž v těchto i následujících kongruencích počítáme (mod $2k-1$). Odtud po úpravách dále dostáváme

$$\begin{aligned} b &\equiv rk - k + s \\ c &\equiv -rk + k - s + r + 1 \\ b + c &\equiv r + 1. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Výsledek (5.5) nám říká především to, že pokud spolu dva hráči v průběhu turnaje hrají, pak je jednoznačně určeno, ve kterém kole. (Zde je potřeba vzít do úvahy i to, že ze způsobu odvození (5.5) vyplývá, že platí pro obě možnosti toho, jaké barvy kamenů mají hráči. Vzniká totiž sečtením dvou kongruentních rovnic, a kdybychom v nich zaměnili $b$ a $c$, dostali bychom totéž.) Dále si uvědomíme, že (5.5) splňuje právě $k-1$ dvojic různých čísel z $1, \ldots, 2k-1$. To odpovídá tomu, že v každém kole je takto obsazeno $k-1$ stolů (první uvažujeme zvlášť).

Potřebujeme ale ještě ověřit, že se na žádném řádku nevyskytuje žádná dvojice vícekrát. K tomu nám pomůže o něco silnější tvrzení. Ukážeme, že hráč hrající v $r$-tém kole na posledním stole s černými, označme jej $x$, je tentýž jako hráč na prvním stole v $(r+1)$-ním kole. (Můžeme uvažovat, že následujícím kolem k poslednímu je první.) Z toho pak plyne, že v prvním kroku tvorby tabulky bylo na $r$-tý řádek napsáno $k$ čísel předcházejících $x$ a ve druhém kroku $x$ a $k-2$ čísel následujících. Každé číslo se tedy na řádku vyskytuje právě jednou, a tudíž se žádná dvojice nemůže objevit vícekrát.

Označme hráče na prvním stole v $(r+1)$-ním kole jako $y$ a dokažme, že $x = y$. Pro dané $r$ opět můžeme vypočítat, o koho přesně se jedná:

$$\begin{aligned} x &\equiv -((r-1)(k-1) + (k-1)) + 1 \\ y &\equiv ((r+1) - 1)k + 1 \end{aligned}$$

A po úpravách

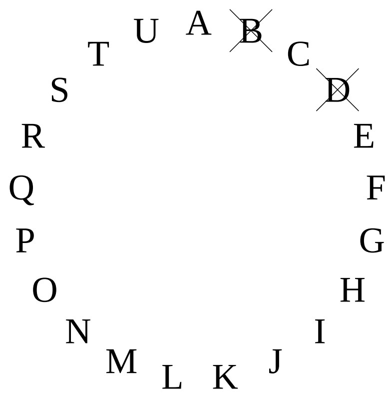
$$\begin{aligned} x &\equiv -r(k-1) + 1 \\ y &\equiv rk + 1 \\ y - x &\equiv r(2k-1) \\ y - x &\equiv 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

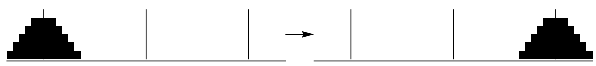
Vzhledem k tomu, že čísla hráčů jsou mezi 1 a $2k-1$, z (5.6) plyne $x = y$. „Platnost“ Schurigových tabulek už jsme tedy ukázali pro všechny stoly vyjma prvního. Tam je ale situace jednoduchá. Snadno můžeme domyslet, že se na něm každý z $2k-1$ hráčů objeví právě jednou a utká se s hráčem $2k$.

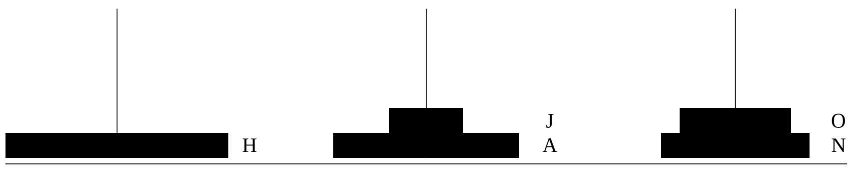
Tím jsme hotovi. A pozitivní navíc je, že na základě zjištění, která jsme využili k důkazu, dokážeme bez toho, abychom si vypsali celou tabulku, říct, ve kterém kole se střetnou daní dva hráči, nebo domyslet, jak vypadá její řádek pro dané kolo.

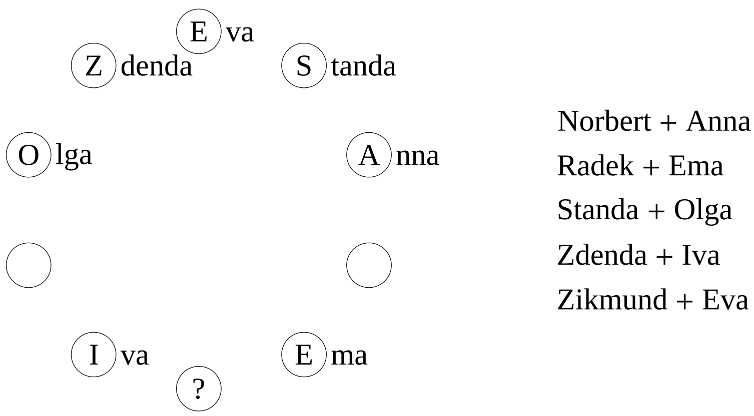
# Závěr

Závěrem si připomeňme, s jakými úlohami jsme se seznámili. Aneb co bychom byli za kombinatoriky, kdybychom všechno nezkombinovali?





| | |
|---|---|
| A) | AABAAB |
| B) | AAABBA |
| C) | AAAABB |
| D) | AABABA |
| E) | AABBAA |
| F) | AAABAB |

| Po | Út | St | Čt | Pá | So | Ne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BEN | DEJ | LOK | DIK | HEK | FOG | KAM |
| MLJ | ... | ... | ... | ... | ... | BIL |
| ... | MNO | ... | H**?**N | ... | LCD | ... |
| ... | ... | FIN | ... | MCF | ... | ... |
| ... | ... | ... | AJO | ... | ... | ... |

1. Kdo přežije?
2. Který kotouč se pohne?
3. Kdo sedí mezi Ivou a Emou?
4. Která posloupnost není dobrá?
5. Kdo jde na vycházku společně s $H$ a $N$?

# A TO JE _____ _____ _____ _____ _____ .

# Seznam použité literatury


[1] Aguado, A. *A 10 Days Solution to the Social Golfer Problem.* 2004. [Citováno 26. března 2012]. Dostupné z: `http://www.maa.org/editorial/mathgames/socgolf1.pdf`

[2] Bogart, K. P. – Doyle, P. G. Non-sexist Solution of the Ménage Problem. *The American Mathematical Monthly,* August–September 1986, vol. 93, no. 7, s. 514–519.

[3] Calda, E. Ještě jednou o věžových polynomech. *Učitel matematiky,* 1998, roč. 6, č. 3, s. 146–152.

[4] Calda, E. Permutace s omezujícími podmínkami a věžové polynomy. *Učitel matematiky,* 1998, roč. 6, č. 2, s. 75–88.

[5] Calda, E. *Kombinatorika pro učitelské studium.* 1. vydání. Praha: Matfyzpress, 1996. ISBN 80-85863-13-8.

[6] Cole, F. N. Kirkman Parades. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 1922, vol. 28, s. 435–437.

[7] Davis, E. W. A Geometric Picture of the Fifteen School Girl Problem. *The Annals of Mathematics,* 1897, vol. 11, s. 156–157.

[8] Dörrie, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution.* New York: Dover Publications, 1965. ISBN 0486613488.

[9] Falcone, G. – Pavone, M. Kirkman's Tetrahedron and the Fifteen Schoolgirl Problem. *American Mathematical Monthly,* 2011, vol. 118, s. 887–900.

[10] Frame, J. S. – Stewart, B. M. Solution to Advanced Problem 3918. *The American Mathematical Monthly,* March 1941, vol. 48, no. 3, s. 216–219.

[11] Graham, R. L. – Knuth, D. E. – Patashnik, O. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* 1st edition. Massachusetts: Addison Wesley, 1988. ISBN 0-201-14236-8. Chapter 1, Recurrent Problems, s. 1–20.

[12] Groër, C. The Mathematics of Survival: From Antiquity to the Playground. *The American Mathematical Monthly,* November 2003, vol. 110, no. 9, s. 812–825.

[13] Hardy, G. H. – Wright, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers.* 4th edition. Oxford University Press, 1975.

[14] Holst, L. On the 'problème des ménages' from a probabilistic viewpoint. *Statistic & Probability Letters,* March 1991, vol. 11, no. 3, s. 225–231.

[15] Kudělka, M. – Snášel, V. Josephova funkce. *Rozhledy mat. – fyz.,* 1999, roč. 76, s. 217–221.

[16] Matoušek, J. – Nešetřil, J. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* 3. vydání. Praha: Karolinum, 2007. ISBN 978-80-246-1411-3.

[17] Pegg, E. Social Golfer Problem. *Math Games* [online], August 2007. [Citováno 26. března 2012]. Dostupné z:
http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_08_14_07.html#g15o3d7

[18] Pelánek, R. Hanojské věže: Interdisciplinární hádanka. *Vesmír,* září 2010, roč. 89, s. 544–546.

[19] Perelman, J. I. *Zajímavá matematika.* 2. vydání. Praha: Mladá fronta, 1961.

[20] Poole, D. G. The Towers and Triangles of Professor Claus (or, Pascal Knows Hanoi). *Mathematics Magazine,* December 1994, vol. 67, no. 5, s. 323–344.

[21] Renault, M. Lost (and Found) in Translation: André's Actual Method and Its Application to the Generalized Ballot Problem. *American Mathematical Monthly,* 2008, vol. 115, s. 358–363.

[22] Renault, M. Four Proofs of the Ballot Theorem. *Mathematics Magazine,* 2007, vol. 80, no. 5, s. 345–352.

[23] Ruskey, F. – Williams, A. *The Feline Josephus Problem.* 2010. [Citováno 27. října 2011]. Dostupné z:
http://webhome.cs.uvic.ca/~ruskey/Publications/Josephus/FelineJosephus.html

[24] Schumer, P. The Josephus Problem: Once More Around. *Mathematics Magazine,* February 2002, vol. 75, no. 1, s. 12–17.

[25] Shams-Baragh, A. *Formulating The Extended Josephus Problem.* 2002. [Citováno 20. srpna 2011]. Dostupné z:
http://www.cs.manchester.ac.uk/~shamsbaa/Josephus.pdf

[26] Shevelev, V. *The Ménage Problem with a Known Mathematician.* 2011. [Citováno 6. dubna 2012.] Dostupné z:
http://arxiv.org/pdf/1101.5321v1.pdf

[27] Stanley, R. P. *Catalan Addendum* [online]. Last version 22nd of October 2011 [citováno 19. března 2012]. Dostupné z:
http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/

[28] Stanovský, D. *Základy algebry.* 1. vydání. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-105-7.

[29] Stockmeyer, P. K. Variations on the Four-Post Tower of Hanoi Puzzle. *Congressus Numerantium,* 1994, vol. 102, s. 3–12.

[30] Maximum Socializing on the Golf Course. *Google Groups: sci.op-research* [online]. [Citováno 26. března 2012]. Dostupné z:
http://groups.google.com/group/sci.op-research/browse_thread/thread/2ca0d1b186314c40/

[31] Tower of Hanoi. *Wikipedia, The Free Encyklopedia* [online]. Last revision 25th of August 2011 [citováno 6. září 2011]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

[32] *Webový portál Šachového svazu České republiky* [online]. [Citováno 27. března 2012]. Dostupné z: http://www.chess.cz/www/informace/komise/kr/materialy/schurigovy-tabulky.html