Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: N7504 Učitelství pro střední školy

Studijní obor Učitelství tělesné výchovy pro 2. stupeň základní školy

Učitelství matematiky pro střední školy

SBÍRKA ŘEŠENÝCH ÚLOH Z ANALYTICKÉ GEOMETRIE DOPLNĚNÁ O JEJICH KONSTRUKČNÍ ŘEŠENÍ

COLLECTION OF SOLVED TASKS IN ANALYTIC GEOMETRY SUPPLEMENTED BY THEIR CONSTRUCTION SOLUTION

Diplomová práce: 12–FP–KMD–005

Autor:

Bc. Lucie HURTOVÁ

Podpis:

....

Vedoucí práce: Doc. PaedDr. Jaroslav Perný, Ph.D.

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
92	16	0	16	15	4

V Liberci dne: 25. 4. 2012

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2010/2011**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Lucie Hurtová**
Osobní číslo:	**P10000992**
Studijní program:	**N7504 Učitelství pro střední školy**
Studijní obory:	**Učitelství tělesné výchovy pro 2. stupeň základní školy** **Učitelství matematiky pro střední školy**
Název tématu:	**Sbírka řešených úloh z analytické geometrie doplněná o jejich konstrukční řešení**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

Cíl: Na dané téma z geometrie pro střední školy vypracovat a uvést analytické a konstrukční řešení úloh. Vytvořit sbírku řešených úloh, kterou budou moci žáci využít při studiu analytické geometrie na středních školách. Dané úlohy otestovat na žácích střední školy a vyhodnotit, kterou metodu řešení žáci lépe zvládají.

Požadavky: Základní znalost učiva a očekávaných výstupů z analytické a konstrukční geometrie podle RVP pro gymnaziální vzdělávání.

Metody: Seznámení se s různými metodami řešení úloh. Vypracování sbírky řešených úloh. Otestování úloh na střední škole. Vyhodnocení účinnosti navržené sbírky úloh.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Boček, L., Kočanderle, M. Matematika pro gymnázia - analytická geometrie. 2.vydání. Praha: Prometheus, 2004. 220s. ISBN 80-7196-163-9.
Frobisher, L., Orthon, A. Insight into Teaching Mathematics. London: Cassell, 1996.
Pomykalová, E. Matematika pro gymnázia - planimetrie. 4.vydání. Praha: Prometheus, 2004. 206s. ISBN 80-7196-174-4.
Pomykalová, E. Matematika pro gymnázia - stereometrie. 3.vydání. Praha: Prometheus, 2004. 223s. ISBN 80-7196-178-7.
Jeřábek, J., Krčková, S., Hučínová, L. a kol. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Praha: VÚP.
Urban, A. Deskriptivní geometrie. 4.vydání. Praha: SPN, 1953. 219s.
Jirásek, F., Kriegelstein, E., Tichý, Z. Sbírka řešených příkladů z matematiky : logika a množiny, lineární a vektorová algebra, analytická geometrie, posloupnosti a řady, diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné. 1.vydání. Praha: SNTL, 1979. 817s.

Vedoucí diplomové práce: **doc. PaedDr. Jaroslav Perný, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání diplomové práce: **18. dubna 2011**
Termín odevzdání diplomové práce: **27. dubna 2012**

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

L.S.

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

dne 27.03.2012

Čestné prohlášení

Název práce:	Sbírka řešených úloh z analytické geometrie doplněná o jejich konstrukční řešení
Jméno a příjmení autora:	Lucie Hurtová
Osobní číslo:	P10000992

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má diplomová práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložila elektronickou verzi mé diplomové práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedla jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 25. 4. 2012

Lucie Hurtová

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce doc. PaedDr. Jaroslavu Pernému, Ph.D. za cenné rady, připomínky, odborné vedení práce, čas strávený při konzultacích a zajištění možnosti aplikace úloh na Gymnáziu F. X. Šaldy v Liberci.

Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Jaromíru Oscádalovi ze SPŠSE a VOŠ Liberec za poskytnutí programu Cabri, který byl použit pro konstrukční řešení úloh. Děkuji Mgr. Vítězslavu Pěničkovi za možnost aplikace úloh v jeho vyučovacích hodinách matematiky na Gymnáziu F. X. Šaldy, která byla podkladem pro vypracování výzkumné části mé diplomové práce.

Anotace

Diplomová práce se zaměřuje na úlohy z analytické geometrie, které jsou dále vyřešeny konstrukčně, popř. početně. Práce zahrnuje tři části – teoretickou, praktickou a výzkumnou. V teoretické části je věnována pozornost Rámcovému vzdělávacímu programu pro gymnázia a vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Dále pak historickému vývoji geometrie, následně třem oblastem geometrie – planimetrii, stereometrii a analytické geometrii. Závěrem teoretické části jsou uvedeny přístupy k řešení stereometrických úloh, kde je čtenář seznámen na konkrétní úloze s jejím konstrukčním, analytickým a početním řešením.

Praktická část nabízí sbírku 22 úloh, z toho je devět úloh řešených a třináct neřešených s řešením v příloze č. 4. Ve výzkumné části se diplomová práce zabývá aplikací výzkumné sondy, dvou dotazníků a tří úloh, a to ve vyučovacích hodinách na Gymnáziu F. X. Šaldy v Liberci. Z výsledku šetření vyplývá, že se studenti s tímto komplexním přístupem nikdy nesetkali, ale řešení úloh zvládli bez větších obtíží.

Klíčová slova: analytické, konstrukční a početní řešení geometrických úloh, planimetrie, stereometrie, analytická geometrie

Annotation

The diploma thesis focuses on the analytic geometry tasks which are solved either structurally or arithmetically. The thesis consists of three parts – theory, practice and research. The theoretical part of the diploma thesis deals with Educational framework for secondary schools and educational area Mathematics and its application. It further discusses the historical development of geometry and the three areas of geometry – plane geometry, solid geometry and analytical geometry. The theoretical part is ended by the approach to solving solid geometry tasks, where the reader is acquainted with the structural, analytical and arithmetical solution of one chosen task.

The practical part of the diploma thesis offers a collection of twenty-two tasks, out of which nine are solved and thirteen unsolved with their solution in the attachment no. 4. The third part of the diploma thesis – the research – contains an application of the research probe, two questionnaires and three tasks in the mathematics lesson at Secondary school of F. X. Šalda in Liberec. The results show that even though students have never solved tasks using this complex technique, they solved the tasks without any trouble.

Key words: analytical, structural and arithmetical solving of geometry tasks, plane geometry, solid geometry, analytical geometry

Die Annotation

Diese Diplomarbeit orientiert sich an Aufgaben der analytischen Geometrie, die auch anhand einer Konstruktion oder rechnerisch gelöst sind. Diese Arbeit besteht aus einem theoretischen, praktischen und Forschungsteil. Der theoretische Teil widmet sich dem Ausbildungsprogramm für Gymnasien und dem Ausbildungsgebiet Mathematik und ihre Applikation. Weiterhin wird die historische Entwicklung der Geometrie betrachtet und ihre drei Teile – Planimetrie, Stereometrie und analytische Geometrie werden beschrieben. Schluss des theoretischen Teils gehört den Verfahren, wie die stereometrischen Aufgaben gelöst werden können. Der Leser erfährt, wie die konkreten Aufgaben anhand einer Konstruktion, analytischen oder rechnerischen Lösung zu lösen sind.

Der praktische Teil bietet eine Sammlung von 22 Aufgaben an. Neun Aufgaben sind gelöst, bei 13 Aufgaben ist ihre Lösung im Anhang Nr. 4 zu finden. Der Forschungsteil dieser Diplomarbeit befasst sich mit der Applikation der Forschung, zwei Umfragen und drei Aufgaben in den Unterrichtsstunden am Gymnasium F.X. Šalda in Liberec. Aus den Ergebnissen folgt, dass die Schüler nie so ein komplexes Verfahren getroffen haben. Trotzdem haben sie die Aufgaben ohne größere Schwierigkeiten gelöst.

Die Schlüsselwörter: analytische und rechnerische Lösung der geometrischen Aufgaben, Lösung der geometrischen Aufgaben anhand einer Konstruktion, Planimetrie, Stereometrie, analytische Geometrie

Obsah

ÚVOD

Výuka matematiky a znalosti studentů jsou velice proměnlivé. Učitelé mají možnost využívat interaktivní tabule, přehrávat prezentace, školy mohou poskytovat řadu pomůcek k výuce matematiky. Naproti tomu se u studentů zhoršuje prostorová představivost, klesá úroveň jejich znalostí, a tak se často stává, že se studenti učí matematiku nazpaměť a nespojí si znalosti z jejích různých oblastí. Uveďme například výuku planimetrie na střední škole, kdy studenti rýsují tečnu ke kružnici a poté analytickou geometrii, ve které studenti počítají rovnici tečny kružnice. Studenti si při výuce analytické geometrie vůbec neuvědomí, že uvedenou tečnu ke kružnici již řešili, ale jiným způsobem, konstrukčním.

Diplomovou práci s názvem Sbírka úloh z analytické geometrie doplněná o jejich konstrukční řešení jsem si zvolila z toho důvodu, že jsem chtěla předložit již známé, postupně výukou získávané přístupy k řešení úloh, a to v komplexní podobě, aby si studenti uvědomili návaznost těchto přístupů. Aby mohly být úlohy řešené s využitím prostředků analytické geometrie, liší se konstrukční úlohy uvedené v diplomové práci od běžných konstrukčních úloh zanesením prvků do souřadného systému. Studenti musí nejprve zakreslit zadané údaje do souřadného systému a poté je postup konstrukce již shodný s běžnou konstrukční úlohou.

Cílem práce je tedy vypracování analytického a konstrukčního, případně početního řešení úloh, s čímž souvisí vytvoření sbírky řešených úloh, kterou by mohli studenti využívat při výuce analytické geometrie na středních školách. Doplněním sbírky je aplikace vybraných úloh na středoškolských studentech ve třech vyučovacích hodinách, které budou zahrnovat i test a následné vyhodnocení, jakou metodu studenti nejlépe zvládají. Předpokládáme, že v testu budou úspěšnější chlapci oproti dívkám a že se studenti s takto komplexním přístupem k řešení úloh ještě nesetkali. Otázkou pak bude i zjištění, jaký přístup k řešení úloh studentům nejvíce vyhovuje a jaký bude úspěšnější u chlapců a u dívek, k čemuž využijeme dva dotazníky – úvodní před začátkem řešení úloh a závěrečný po skončení vyučovacích hodin týkajících se řešení těchto úloh.

1 Cíle práce

Hlavním cílem diplomové práce bylo na zadané téma z geometrie vypracovat a uvést pro střední školy analytické a konstrukční řešení úloh, v případě stereometrických úloh ještě uvést početní řešení těchto úloh.

K dosažení a naplnění hlavního cíle musely být splněny následující dílčí cíle:

- prostudovat obsah RVP G
- seznámit se s různými metodami řešení úloh
- vytvořit sbírku řešených úloh
- otestovat úlohy na studentech střední školy
- vyhodnotit výsledky testování
- vyhodnotit účinnost sbírky řešených úloh
- aplikovat stanovené závěry do praxe.

TEORETICKÁ ČÁST

2 Matematika a její aplikace v RVP G

2.1 Základní charakteristika Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia

Vzdělávací soustava v České republice zahrnuje kurikulární dokumenty, které jsou vytvářeny na státní a školní úrovni. Státní úroveň představuje Národní program vzdělávání (NVP) a Rámcový vzdělávací program (RVP), školní úroveň poté Školní vzdělávací programy (ŠVP).

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia je určen k tvorbě Školních vzdělávacích programů jak na čtyřletých gymnáziích, tak i na vyšším stupni víceletých gymnázií, který je přizpůsoben potřebám a zájmům žáků a regionálním podmínkám. Vzdělávací program si dále stanovuje základní vzdělávací úroveň všech absolventů gymnázia a specifikuje, jaké úrovně klíčových kompetencí by měli žáci dosáhnout na konci vzdělávání na gymnáziu.

RVP G vymezuje očekávané výstupy a učivo, tedy vzdělávací obsah. Do vzdělávání zařazuje průřezová témata a umožňuje vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami (SVP) a žáků mimořádně nadaných s potřebnými úpravami vzdělávacího obsahu.

Vzdělávání na gymnáziu má žáky především vybavit klíčovými kompetencemi a všeobecným přehledem odpovídající úrovni středoškolsky vzdělaného člověka a dále je má připravit na studium vysoké školy a na další typy terciárního vzdělávání, profesní specializaci i pro občanský život (Jeřábek aj., 2007 [2]).

2.2 Vzdělávací oblasti

V Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia je zahrnuto osm vzdělávacích oblasti, přičemž každá obsahuje charakteristiku vzdělávací oblasti, cílové zaměření vzdělávací oblasti a vzdělávací obsah:

- *„Jazyk a jazyková komunikace (Český jazyk a literatura, Cizí jazyk, Další cizí jazyk)“*
- *„Matematika a její aplikace (Matematika a její aplikace)“*
- *„Člověk a příroda (Fyzika, Chemie, Biologie, Geografie, Geologie)“*

- *„Člověk a společnost (Občanský a společenskovědní základ, Dějepis; Geografie)"*
- *„Člověk a svět práce (Člověk a svět práce)"*
- *„Umění a kultura (Hudební obor, Výtvarný obor)"*
- *„Člověk a zdraví (Výchova ke zdraví, Tělesná výchova)"*
- *„Informatika a informační a komunikační technologie (Informatika a informační a komunikační technologie),"* uvádí Jeřábek aj. (2007, s. 11).

Charakteristika vzdělávací oblasti představuje, jaké je její postavení a význam na gymnáziu a dále pak návaznost vzdělávací oblasti na koncepci oblastí v základním vzdělávání. Cílové zaměření vzdělávací oblasti vyjadřuje, jak se na rozvoji klíčových kompetencí podílí vzdělávací oblast a její obory. Vzdělávací obsah je souhrn očekávaných výstupů a učiva. Očekávané výstupy vyjadřují, jaké úrovně učiva mají žáci nabývat na konci vzdělávání na gymnáziu. Prostředkem k dosažení očekávaných výstupů je učivo. Očekávané výstupy i učivo jsou pro tvorbu ŠVP závazné.

Diplomová práce se zabývá tématem ze vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, a proto se následně zaměříme právě pouze na tuto vzdělávací oblast.

2.2.1 Matematika a její aplikace

Charakteristika vzdělávací oblasti

Vzdělávací oblast matematika a její aplikace je na gymnáziu charakteristická rozvíjením a prohlubováním pochopení kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa. Předpokladem pro další studium je disponování požadovaným matematickým aparátem, matematickým myšlením, vytvářením hypotéz a deduktivními úvahami.

Vzdělávání v matematice napomáhá k rozvoji abstraktního a logického myšlení a učí vhodné argumentaci. Smyslem výuky je schopnost formulace problému a možnosti řešení. Během studia mají žáci možnost si uvědomit, že matematika má uplatnění v mnoha dalších oborech (např. v ekonomii, společenských vědách), přičemž je ovlivňována vnějšími podněty (např. z oblasti přírodních věd). Dále poznávají, že matematika je součást naší kultury a výsledkem multikulturního historického vývoje.

Cílové zaměření

Vzdělávání ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí a to tím, že vede žáka k osvojení si základních pojmů a vztahů na základě poznávání jejich charakteristických vlastností, k určování, zařazování a využívání pojmů a zobecňování jejich vlastností. Dále je žák veden k vytváření zásoby matematických pojmů, vztahů a metod řešení matematických úloh, analyzování problému a vytváření plánu řešení, rozvoji logického myšlení a úsudku, k pochopení vzájemných vztahů a vazeb mezi okruhy učiva. V neposlední řadě se žák učí přesnému vyjadřování a zdokonalování grafického projevu, práci s kalkulátorem a moderními technologiemi, rozvíjí si geometrické vidění a prostorovou představivost a nakonec chápe matematiku jako součást naší kultury.

Vzdělávací obsah

Vzdělávací obsah Matematiky a její aplikace je rozdělen do pěti skupin (argumentace a ověřování; číslo a proměnná; práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost; závislost a funkční vztahy; geometrie), v nichž jsou v každé popsány očekávané výstupy a učivo.

Argumentace a ověřování

První skupinou je Argumentace a ověřování. Očekávané výstupy předpokládají, že žák zvládne čtení a zápis tvrzení matematickými symboly, užívá správné logické spojky a kvantifikátory, rozliší definici a větu, předpoklad a závěr věty. Žák je dále schopen rozlišit správný a nesprávný úsudek, vytvářet hypotézu a umět rozlišit jejich pravdivost či nepravdivost a nakonec zdůvodnit postup a ověřit správnost řešení problému.

Učivem jsou základní poznatky z matematiky (výrok, definice, důkaz, věta), množiny (inkluze a rovnost množin, operace s množinami) a výroková logika.

Číslo a proměnná

Ve skupině nazvané Číslo a proměnná jsou následující očekávané výstupy žáka – žák užívá vlastnosti dělitelnosti přirozených čísel, operuje s intervaly, používá geometrický význam absolutní hodnoty, provádí operace s mocninami a odmocninami, upravuje číselné výrazy, dále pak umí odhadnout výsledky numerických výpočtů, upravuje výrazy s proměnnými a určí jejich definiční obor. Žák je dále schopen rozložit mnohočlen na součin vytýkáním a užitím vzorců, což aplikuje při řešení rovnic a nerovnic, poté umí vyřešit kvadratické a lineární rovnice a nerovnice, řešit soustavy rovnic. V neposlední řadě žák rozliší ekvivalentní a neekvivalentní úpravy, geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorní řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav, analyzuje a řeší problémy, ve kterých aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav.

Učivo zahrnuje číselné obory (čísla přirozená, celá, racionální, reálná), mocniny (s přirozeným, celým a racionálním exponentem, odmocniny), dále výrazy s proměnnými (mnohočleny, lomené výrazy, výrazy s mocninami a odmocninami). Poslední oblastí učiva v této skupině jsou rovnice a nerovnice, které zahrnují lineární rovnice, nerovnice a jejich soustavy, kvadratické rovnice s potřebnou znalostí diskriminantů a vztahů mezi koeficienty, rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou, rovnice s neznámou ve jmenovateli a pod odmocninou a nakonec logaritmické, exponenciální a goniometrické rovnice.

Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

V očekávaných výstupech žák umí vyřešit reálné problémy z kombinatoriky, využít kombinatorické postupy při výpočtu pravděpodobnosti. Dále je schopen diskutovat a zhodnotit statistické situace a statistická sdělení, zvolit a užít vhodné statistické metody k analýze a zpracování dat a následně výsledky graficky reprezentovat, číst a interpretovat tabulky, diagramy a grafy.

Učivem je kombinatorika (kombinatorické úlohy, variace, permutace, kombinace, binomická věta, Pascalův trojúhelník), pravděpodobnost (náhodný jev a jeho pravděpodobnost, pravděpodobnost sjednocení a průniku jevů, nezávislost jevů) a práce s daty, pod kterou spadá analýza a zpracování dat a statistický soubor a jeho charakteristiky (aritmetický průměr, modus, medián, percentil, kvartil, směrodatná odchylka, mezikvartilová odchylka).

Závislost a funkční vztahy

Žák, dle očekávaných výstupů, načrtne grafy zadaných funkcí a určí jejich vlastnosti, formuluje a odůvodní vlastnosti studovaných funkcí a posloupností. Poznatky z funkcí využívá při řešení rovnic a nerovnic, dále aplikuje vztahy mezi hodnotami exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí a mezi těmito funkcemi. Na základě znalosti funkcí a posloupností řeší aplikační úlohy a z funkčního hlediska interpretuje složené úrokování, ve finanční matematice pak aplikuje exponenciální funkci a geometrickou posloupnost.

Učivo představují obecné poznatky o funkcích (pojem funkce, definiční obor a obor hodnot, graf funkce, vlastnosti funkcí), funkce (lineární, kvadratická, absolutní hodnota, lineární lomená, mocninná, druhá odmocnina, exponenciální, logaritmické, goniometrické a vztahy mezi goniometrickými funkcemi). Nakonec je v učivu zahrnuta ještě posloupnost (určení a vlastnosti posloupnosti, aritmetická a geometrická posloupnost).

Geometrie

Geometrie je poslední skupinou vzdělávacího obsahu ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace.

V očekávaných výstupech se od žáka očekává, že používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a prostoru, určí vzájemnou polohu lineárních útvarů, dále jejich vzdálenosti a odchylky, při řešení rovinného nebo prostorového útvaru využívá náčrt. Funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů aplikuje v úlohách početní geometrie, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly. Žák je dále schopen řešit polohové a nepolohové konstrukční úlohy na základě znalosti množiny bodů dané vlastnosti, pomocí shodných zobrazení a pomocí konstrukce na základě výpočtu. Ve volném rovnoběžném promítání zobrazí hranol a jehlan a sestrojí a zobrazí rovinný řez těchto těles, dále řeší planimetrické a stereometrické problémy. Různými způsoby užívá analytické vyjádření přímky v rovině, analyticky řeší polohové a metrické úlohy. Využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření, ze kterého určí údaje o kuželosečce a nakonec řeší analyticky úlohy na vzájemnou polohu přímky a kuželosečky.

Ve skupině Geometrie je učivem geometrie v rovině, v prostoru, trigonometrie a analytická geometrie v rovině. Do geometrie v rovině se zahrnují rovinné útvary, obvody a obsahy, shodnost a podobnost trojúhelníku, Pythagorova věta a Eukleidovy věty, množiny bodů dané vlastnosti, úhly v kružnici, shodná zobrazení, stejnolehlost a konstrukční úlohy. Geometrii v prostoru představují polohové a metrické vlastnosti, základní tělesa, povrchy a objemy a volné rovnoběžné promítání. Do trigonometrie se zahrnuje sinová a kosinová věta a trigonometrie pravoúhlého a obecného trojúhelníku. A nakonec v analytické geometrii v rovině se žák seznamuje s vektory a operacemi s nimi, s analytickým vyjádřením přímky v rovině a kuželosečkami - kružnice, elipsa, parabola, hyperbola (Jeřábek aj., 2007 [2]).

3 Historie geometrie

3.1 Antika

První revoluce geometrie je spjata se jménem řeckého matematika Eukleida. Kořeny řeckých úspěchů v oblasti geometrie jsou však z období starověkého Babylonu a Egypta, kdy rozvoj geometrie podnítil vznik daní. Staří Egypťané znali i úrok, uměli sčítání řad (znali aritmetickou a geometrickou posloupnost) a poměrně složitým způsobem dokázali vypočítat plochu čtverce, obdélníku a lichoběžníku. Babyloňané nepsali rovnice, ale veškeré úlohy a výpočty vyjadřovali slovy a pravděpodobně znali Pythagorovu větu. V době po záplavách docházelo ke znovu vyměřování pozemků a rozdělování potravin, což vedlo k aritmetickým úlohám. Všechny tyto znalosti Egypťanů a Babyloňanů přispěli k rozvoji matematiky pouze tím, že poskytli Řekům množství konkrétních matematických faktů a pravidel.

O rozvoj geometrie se zasloužil Thalet, filozof, původně obchodník. Jako první se zabýval shodností útvarů v prostoru, rozšířil pojem shodnost čísel na prostorové objekty. Předchůdcem Eukleida byl Pythagoras, se kterým se Thalet ve stáří setkal. Pythagorejci vypátrali a nazvali čtvercová a trojúhelníková čísla. Pythagoras si všiml, že mezi těmito čísly existuje vztah – součtem dvou po sobě jdoucích trojúhelníkových čísel vznikne číslo čtvercové. Na základě zkoumání pravoúhlých trojúhelníků objevil dnes známou Pythagorovu větu.

Život Eukleida je zahalen tajemstvím, o jeho životě nevíme téměř nic. Napsal několik knih. Kniha o kuželosečkách byla ztracená, přesto se stala základem pro dílo Apollonia z Pergy. Další slavná Eukleidova práce byly Základy. Jedná se o soubor třinácti pergamenových svitků, z nichž se nedochoval ani jeden originál. Ve svém díle popsal velice důkladně podstatu dvourozměrného prostoru. Eukleides byl v Základech zastáncem logického postupu – nejprve je nutná definice, kterou je zajištěno pochopení všech slov a symbolů. Následně se mají stanovit základní pojmy axiomy a nakonec je třeba vyvodit logické závěry s využitím logických pravidel uplatněných na axiomy, anebo již dokázané věty. Eukleides definoval bod, čáru, přímku, kruh, úhel, povrch a rovinu. Některé definoval přesně, jiné zcela špatně. Dále představil pět Eukleidovských axiomů.

Roku 212 př. n. l. Eratosthenés z Kyréné změřil jako první obvod zeměkoule. Další významnou osobností byl Archimedes, jehož úspěchem bylo zdokonalení diferenciálního počtu, přičemž za největší úspěch pokládal objev, že objem koule vepsané do válce je roven dvěma třetinám objemu válce.

Z římského období neexistují žádné nové matematické objevy, jelikož Římané matematiku nepodporovali, největší úctu věnovali válečníkům. Z tohoto období můžeme zmínit pouze Hypatiu, která je považována za autorku pojednání o dvou slavných řeckých dílech – Diofantově Aritmetice a Apolloniových Kuželosečkách. Hypatia navíc pořádala přednášky o Platonovi a Aristotelovi, kterými přilákala spoustu studentů z Říma, Athén a dalších velkých měst (Mlodinow, 2007 [4]; Struik, 1963 [7]; Folta, 2004 [1]).

3.2 Středověk

Po pádu Říma se řecké poznatky dočkaly znovuvzkříšení v pozdním středověku, kdy se o další vývoj geometrie zasloužil René Descartes.

Za vlády Karla Velikého se z původně církevních škol postupně vyvinuly evropské univerzity, přičemž za vůbec první je považována univerzita v Bologni z roku 1088. Centrem matematiky se stala Francie. Významnými poznatky tohoto období je rozvinutí všech šesti trigonometrických funkcí, přeložení Eukleidových Základů do latiny, zásluhou Leonarda Pisánského zavedení nuly a rozšíření indické číselné soustavy (náš dnešní desítkový poziční systém). Roku 1348 vypukla morová epidemie a do roku 1351 vymřela polovina obyvatel Evropy. Tato bídná situace byla příčinou nevhodných podmínek k výuce na univerzitách. Profesoři přednášeli v pronajatých prostorách, penzionech či dokonce nevěstincích a byli dokonce placeni studenty, kteří k nim vůbec nevzhlíželi. Profesoři dostávali pokuty za pozdní příchod, neschopnost zodpovědět obtížnou otázku, za neomluvenou absenci apod.

V březnu roku 1596 se narodil chlapec, jeden z významných matematiků, René Descartes. Při svých studiích měl vzhledem ke svému zdravotnímu stavu určité výjimky – rektor mu například dovolil zůstávat v posteli až do dopoledne, než se cítil dostatečně silný pro práci s ostatními spolužáky. Ve škole si vedl dobře, po ukončení střední školy začal studovat práva, kterých nakonec zanechal a přestěhoval se do Paříže. Během dne se věnoval matematice, kterou měl velice rád a večery trávil ve společnosti, kde občas u hráčského stolu využil svých matematických znalostí. Následně se přidal k armádě dobrovolných vojáků. Jednoho dne se v nizozemském městě Breda objevilo oznámení s matematickou úlohou určenou pro veřejnost k vyřešení. Descartes prohlásil, že se jedná o úlohu poměrně snadnou, což mu přítomný matematik Isak Beckham nevěřil, a tak ho vyzval k vyřešení úlohy.

Descartes úlohu opravdu vyřešil, čímž Beckhama ohromil a od té doby byli dobrými přáteli. René Descartes zaujímal celý život velice kritický postoj k řeckým pracím, zejména oblasti geometrické. Řecká geometrie mu připadala velice složitá. Snažil se nalézt určitý systém, který by mu zjednodušil dokazování geometrických vět. Zavedl kartézskou soustavu souřadnic. Descartes dále algebraicky definoval přímku tvarem $ax + by + c = 0$. Definoval přímku, kružnici, elipsu, parabolu a hyperbolu. Psal a^2 místo aa, a^3 místo aaa atd. Prvním dílem Reného Descartese byla Rozprava o metodě, kam shrnul všechny své nabyté znalosti. Zemřel roku 1650 ve Švédsku, kde mu ještě švédská královna Kristina nechala před jeho smrtí postavit akademii, kterou měl možnost sám řídit (Mlodinow, 2007 [4]; Struik, 1963 [7]; Folta, 2004 [1]).

3.3 Novověk

Dochází ke změnám ve vztahu matematika a její aplikace. Matematika již totiž nahromadila tolik poznatků, že většinu problémů byla schopna řešit již známými metodami.

John Wallis, odborník z oblasti matematiky, která se zabývá šifrováním a dešifrováním zpráv, se stal profesorem geometrie a astronomie v Oxfordu. Zavedl symbol ∞ pro nekonečno.

Nejvýznamnější osobností tohoto období byl v oblasti matematiky bezpochyby Carl Friedrich Gauss. První zmínka o jeho talentu je z období 3 let věku, kdy Gauss opravil chybu ve výpočtech svého otce, který počítal mzdu pro dělníky. Gauss pocházel z chudé rodiny, a tak rodiče neměli peníze na školu, kde by mohl svůj talent rozvíjet. Otec navíc Gausse nepodporoval v jeho nadání. Nakonec začal chodit do základní školy v sedmi letech, kde ho matematiku učil Buettner. Byl to učitel, který opovrhoval hloupými žáky a naopak podporoval genialitu u žáků. Ve dvanácti letech začal Gauss kritizovat Eukleidovy Základy. Vystudoval vysokou školu a stal se profesorem matematické astronomie v Göttingenu. Jeho významným objevem bylo vypracování rovnic, které vyjadřují vztahy mezi částmi trojúhelníku v neeukleidovském prostoru. Dnes tuto strukturu nazýváme hyperbolická geometrie. Dále zavedl teorii pravděpodobnosti a statistiky a dále také diferenciální geometrii.

Gaspar Monge se zasloužil o rozvinutí deskriptivní geometrie a díky tomu začala geometrie rozkvétat. Pro novověk je důležitým poznatkem zavedení shodnosti (Henri Poincaré).

Roku 1826 se narodil Georg Riemann. Velice plachý a skromný mladík, ale mimořádně nadaný. V 19 letech nastoupil na univerzitu v Göttingenu, kde učil Carl Friendrich Gauss. Riemann studoval docenturu, která byla zakončená jeho přednáškou o interpretaci koule jako dvourozměrném eliptickém prostoru. Posléze se stal docentem a roku 1859 profesorem. Po smrti Gausse byl Riemann jmenován na jeho pozici. Riemannova přednáška byla publikována až dva roky po jeho smrti.

Albert Einstein, narozený v Göttingenu, je nejvýznamnějším fyzikem v dějinách lidstva. Jeho matematické nadání se projevilo ve třinácti letech. Se značnými problémy vystudoval vysokou školu a zakončil ji doktorátem s disertační prací zabývající se geometrií hmoty. Einstein vysvětlil tzv. speciální teorii relativity, o několik let později obecnou teorii relativity.

V polovině 20. století dochází k zavedení S-matice (matice rozptylu), která se využívala ke studiu elementárních částic, s čímž souvisí vznik teorie strun. Významnou osobností je Edward Witten, historik, který měl zálibu ve fyzice. Nakonec se věnoval studiu fyziky na Princetonské univerzitě. V roce 1995 měl přednášku o teorii strun na konferenci na Univerzitě v Jižní Karolíně, kde mluvil o matematickém zázraku dnes známém jako druhá superstrunová revoluce.

Nyní se nacházíme na okraji další etapy vývoje geometrie, která nabývá vysokého stupně abstrakce. V současné době není geometrie již tolik zkoumána po vědecké stránce. Využívá se v letecké navigaci, astronomii, robotice aj., z čehož je zřejmé její převážně praktické využití (Mlodinow, 2007 [4]; Struik, 1963 [7]; Folta, 2004 [1]).

V diplomové práci jsou zahrnuty úlohy z oblasti planimetrie, stereometrie a analytické geometrie, proto jim budou věnovány následující kapitoly.

4 Planimetrie

4.1 Rozdíly v učivu středoškolské a vysokoškolské planimetrie

Planimetrie se zabývá geometrickými útvary v rovině. Základními pojmy jsou bod, přímka a rovina.

4.1.1 Geometrické útvary v rovině

Na střední škole je v planimetrii věnována pozornost výše uvedeným základním pojmům a od nich odvození dalších pojmů. U přímky se jedná o polopřímku a úsečku, s rovinou poté souvisí polorovina, úhel a dvojice úhlů. V případě dvou přímek se definuje jejich rovnoběžnost a kolmost.

Následně planimetrie zahrnuje geometrické útvary v rovině – trojúhelník, mnohoúhelníky, čtyřúhelníky, kružnici a kruh a jejich obvody a obsahy. U jednotlivých útvarů popisuje nutnou znalost jednotlivých částí útvaru, např. vrchol, střední příčka trojúhelníka, kruhová výseč apod. Na základě znalostí těchto útvarů jsou studentům představeny Eukleidovy věty a Pythagorova věta a poté mocnost bodu ke kružnici.

Na vysoké škole je učivo doplněno o některé axiomy incidence, uspořádání, shodnosti, spojitosti a rovnoběžnosti. Dále je na VŠ věnována pozornost absolutní a neeukleidovské geometrii. Dalším rozdílem je konstrukce pravidelného n-úhelníku. Oproti pravidelnému pěti, šesti, osmi a desetiúhelníku, se kterými se pracuje na střední škole, je na vysoké škole navíc sedmi, dvanácti, patnácti, šestnácti a sedmnáctiúhelník. Nadstavbu středoškolské geometrie můžeme spatřit i v pojetí mocnosti bodu ke kružnici. Na vysoké škole se navíc setkáváme s definicí chordály, potenčního středu kružnic a jejich konstrukcí.

4.1.2 Konstrukční úlohy

V konstrukčních úlohách (synteticky řešených) jsou na střední škole nejprve zopakovány množiny bodů daných vlastností, které jsou studentům definovány již na základní škole (např. kružnice, osa úsečky, Thaletova kružnice aj.). Následují jednoduché geometrické konstrukce zahrnující přenesení úsečky, úhlu, trojúhelníka, sestrojení středu a osy úsečky, osy úhlu aj. Konstrukční úlohy lze řešit s využitím množin bodů, pomocí zobrazení, anebo algebraickou metodou. Tyto metody se často různým způsobem kombinují.

V úlohách, ve kterých se při řešení používají množiny bodů daných vlastností, se nejprve provádí rozbor úlohy, poté zápis a dále následuje její konstrukce. Po konstrukci se provádí zkouška, zda sestrojený útvar odpovídá zadání úlohy. Pokud je zadána úloha s parametrem, pak provádíme diskusi nad počtem řešení v závislosti na parametru a určujeme podmínky řešitelnosti. Konstrukční úlohy dělíme na polohové a nepolohové.

Mezi konstrukční úlohy, které musejí studenti SŠ zvládat, patří konstrukce trojúhelníku, čtyřúhelníku a kružnice. Dále by měli být schopni sestrojit konstrukci na základě výpočtu. Jedná se o tzv. metodu algebraickou. V rozboru řešení těchto úloh je důležité nalezení vztahu mezi délkami daných úseček a úseček hledaného útvaru. Tento vztah posléze vyjádříme rovnicí, popř. soustavou rovnic, a to užitím známých geometrických vět. Nalezneme kořeny rovnice, které odpovídají délkám úseček, a určíme konstrukční předpis. V případě potřeby provádíme zkoušku a diskusi v souvislosti s řešitelností rovnic.

Výuka na vysoké škole zahrnuje oproti škole střední navíc několik množin bodů daných vlastností. Můžeme uvést příklad – množina všech středů kružnic, které se kružnice k (S, r) dotýkají v bodě T, je přímka n = ST (normála kružnice k v bodě T) s výjimkou bodů S, T. Na vysoké škole se kružnice konstruují podle Apollionových nebo Pappových úloh, kdežto na střední škole je studentům představen pouze výčet možností těchto úloh, nikoli jejich praktická aplikace.

4.1.3 Zobrazení v rovině

Planimetrie na střední škole zahrnuje zobrazení v rovině, kam řadíme shodná a podobná zobrazení. Mezi shodná zobrazení patří osová souměrnost, otočení, středová souměrnost jako speciální příklad otočení, dále pak posunutí. Stejnolehlost je příkladem podobného zobrazení a shodnost je speciální podobné zobrazení s koeficientem podobnosti k = 1.

Jak jsme již uvedli, je možné řešit konstrukční úlohy i pomocí zobrazení. Příkladem je využití středové souměrnosti při sestrojení přímky, která na dvou protínajících se kružnicích s různými poloměry vytvoří shodné tětivy. Jako další příklad můžeme uvést sestrojení společné tečny ke dvěma protínajícím se kružnicím s různými poloměry, kdy se využívá stejnolehlosti, apod. (Martišek, 2003b [13]; Pomykalová, 2004a [5]; Urban, 1982 [8]; Žáčková, 2009 [11]).

5 Stereometrie

5.1 Rozdíly v učivu středoškolské a vysokoškolské stereometrie

Stereometrie je část geometrie, která se zabývá geometrickými útvary v prostoru. Na střední škole se tyto útvary zobrazují zpravidla ve volném rovnoběžném promítání. Pokud probíhá na střední škole výuka Deskriptivní geometrie, pak se tyto úlohy řeší ještě v Mongeově promítání. Na vysoké škole poté navíc v pravoúhlé axonometrii, případně v dalších zobrazeních. Další nadstavbou středoškolské stereometrie je na vysoké škole konstrukce prostorových křivek (např. šroubovice) a rotačních a rozvinutelných ploch ve zmíněném Mongeově promítání anebo v pravoúhlé axonometrii.

Mongeovo promítání je pravoúhlé promítání na dvě navzájem kolmé průmětny. Rovinu π ve vodorovné poloze nazýváme půdorysna, rovinu ν v poloze svislé nárysna. Průsečnice rovin π a ν nazýváme základnice, která je totožná s osou y souřadného systému. Výhodou Mongeova promítání je snadné řešení stereometrických úloh, nevýhodou pak ale může být menší názornost a poměrně složitější orientace ve dvou pohledech na jeden objekt.

Axonometrie je rovnoběžné promítání na průmětnu ρ takové, že směr promítání **s** není rovnoběžný s žádnou souřadnicovou rovinou, tj. osy se promítají do tří různých přímek x, y, z. Souřadnicové roviny xy (π) nazýváme půdorysna, yz (ν) nárysna a xz (μ) bokorysna. U pravoúhlé axonometrie je směr kolmý na průmětnu ρ. Průmětnou ρ je obecná rovina (tzv. axonometrická průmětna), která neprochází počátkem a protíná všechny tři osy. Průsečík roviny ρ s osami označíme body X, Y, Z. Trojúhelník XYZ je vždy ostroúhlý a nazýváme ho axonometrický trojúhelník. Tento trojúhelník se vždy zobrazuje ve skutečné velikosti, jelikož leží v axonometrické průmětně. Výhodou pravoúhlé axonometrie je oproti Mongeově promítání názorný pohled na objekt.

5.1.1 Polohové a metrické vlastnosti

Polohové vlastnosti

Polohové vlastnosti ve stereometrii vymezují základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami, dále pak vzájemnou polohu dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, resp. tří rovin. Následuje řešení polohových konstrukčních úloh, kam mezi jednoduché konstrukční úlohy řadíme sestrojení průsečnice dvou rovin; sestrojení roviny, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s danou rovinou a nakonec sestrojení přímky, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s dvěma danými (různoběžnými) rovinami. Dalšími konstrukčními úlohami je sestrojení průsečíku přímky s rovinou, řezu tělesa rovinou a průniku přímky s tělesem.

V konstrukčních úlohách je na SŠ zmíněno řešení úlohy i s využitím osové afinity (speciálním případem je osová souměrnost s charakteristikou afinity λ = -1) a středové kolineace, ale podrobněji se těmto způsobům konstrukce věnuje stereometrie až na vysoké škole a to jak v rovině, tak v prostoru.

Osová afinita v rovině α je zobrazení A: $\alpha \rightarrow \alpha'$, ve kterém platí: obrazem bodu A, resp. přímky a, je bod A´, resp. přímka a´; odpovídající si přímky se protínají na tzv. ose afinity nebo jsou s ní rovnoběžné; odpovídající si body leží na rovnoběžných přímkách, které určují tzv. směr afinity; osová afinita si zachovává incidenci. Mezi vlastnosti osové afinity patří následující: body osy afinity jsou samodružné a jiné samodružné body neexistují, zachovává se rovnoběžnost, dělící poměr a rovnoběžným přímkám odpovídají přímky rovnoběžné. Dělící poměr λ se nazývá charakteristika afinity a je vyjádřena vztahem λ = (A´AA´´) = (B´BB´´).

Středová kolineace je geometrická příbuznost, pro kterou platí: jsou dány dvě různé roviny α a α´ a bod S, který neleží v žádné z rovin α a α´, pak bodu jedné roviny odpovídá jeho středový průmět z bodu S do druhé roviny. Průsečnice rovin α a α´ se nazývá osa kolineace a bod S pak střed kolineace.

Metrické vlastnosti

Pro zjištění metrických vlastností přímek a rovin se využívá shodnost úseček a úhlů (odchylka přímek a rovin je definována pomocí planimetrického pojmu odchylka dvou přímek v rovině, vzdálenost bodu od přímky a od roviny pak pomocí pojmu délka úsečky).

Mezi metrické vlastnosti ve stereometrii patří odchylka dvou přímek, dvou rovin a odchylka přímky s rovinou. Dále pak vzdálenost dvou bodů, bodu od přímky, dvou rovnoběžných přímek, resp. rovin, vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné a vzdálenost dvou mimoběžných přímek.

Na střední škole se metrické vlastnosti v analytické geometrii počítají, na vysoké škole se tyto úlohy řeší jak početně, tak navíc konstrukčně.

5.1.2 Zobrazení v prostoru

Zobrazení ve stereometrii navazují na shodná a podobná zobrazení v planimetrii – tedy v rovině. Na střední škole je mezi shodná zobrazení řazena rovinná souměrnost, středová a osová souměrnost, dále pak otočení a posunutí. Mezi podobná zobrazení pak stejnolehlost. Tato část stereometrie bývá na středních školách často opomíjena a po metrických a polohových vlastnostech často následuje ve výuce hned kapitola Tělesa.

5.1.3 Tělesa

Kapitola Tělesa zahrnuje výklad rozdělení mnohostěnů a rotačních těles. U těchto těles je, stejně jako u útvarů v rovině, nutná znalost jejich částí jako např. podstava, výška hranolu/ jehlanu/ rotačního tělesa, boční a podstavná hrana, stěnová a tělesová úhlopříčka apod. Patří sem i sítě těchto těles.

Učivo na střední škole vyžaduje znalost vzorců pro objem a povrch následujících těles: hranol (konkrétně pak kvádr a krychle), jehlan, komolý jehlan, rotační válec, rotační kužel, komolý rotační kužel, koule, kulová úseč, kulová vrstva a kulová výseč.

Dále se u těles aplikuje určování odchylek přímek a rovin, vzdáleností bodů od přímek a rovin, vzdálenost přímek a rovin, atd., což už se týká především analytické geometrie. Na vysoké škole se toto učivo prohlubuje včetně konstrukce řezů a průniků pomocí afinity a kolineace (Martišek, 2003c [14]; Pomykalová, 2004b [6]; Urban, 1982 [8]; Žáčková, 2009 [11]).

6 Analytická geometrie

6.1 Rozdíly v učivu středoškolské a vysokoškolské analytické geometrie

Podstatou analytického řešení je převedení konstrukční úlohy pomocí souřadnic na úlohu algebraickou, vyřešení úlohy a následné převedení a vyjádření výsledku geometricky. Analytická geometrie řeší úlohy jak planimetrické, tak stereometrické. Studenti na střední škole jsou zpravidla seznámeni pouze s úlohami v rovině, s úlohami v prostoru se setkávají pouze na některých středních školách.

6.1.1 Souřadnice a vektory

Jako první jsou vysvětleny pojmy kartézská soustava souřadnic O_{xy}, počátek O kartézské soustavy souřadnic a souřadnicové osy x a y. Následně se pak studenti učí, jak zanést souřadnice bodu do kartézské soustavy souřadnic a to nejprve v rovině a poté v prostoru. Stejný postup výuky následuje u vzorce pro výpočet vzdálenosti dvou bodů a středu úsečky.

U vektorů jsou studenti seznámeni s pojmy orientovaná úsečka a vektor, poté následuje vzorec pro výpočet souřadnic vektoru, jeho zanesení do kartézské soustavy souřadnic a posunutí o vektor **u**. Vektory lze sčítat, odčítat, násobit číslem. Dalším vzorcem u vektorů je skalární, vektorový a smíšený součin vektorů.

Na některých středních školách počítají studenti lineární kombinace vektorů, na vysoké škole se navíc zjišťuje průnik a spojení vektorových podprostorů a dimenze průniku.

6.1.2 Geometrie v rovině a v prostoru

Jak jsme uvedli na začátku této kapitoly, analytická geometrie se zabývá jak úlohami v rovině, tak v prostoru.

Úlohy v rovině i v prostoru zahrnují parametrické vyjádření přímky. Liší se v počtu souřadnic – u řešení v rovině má přímka souřadnice x a y, v prostoru je navíc souřadnice z. V rovině lze přímka ještě vyjádřit obecnou rovnicí, která lze upravit na směrnicový či úsekový tvar. V prostoru vyjadřujeme parametrickou i obecnou rovnicí pouze rovinu.

Polohové a metrické úlohy řešíme v rovině i v prostoru. Jak jsme již uvedli v kapitole 4.1.1., mezi polohové vlastnosti v rovině patří vzájemná poloha bodů a přímek (převedení obecné rovnice přímky na parametrickou a opačně, dále nalezení průsečíku dvou přímek). V prostoru určujeme vzájemnou polohu přímky a roviny, dvou rovin, resp. dvou přímek a to opět s možností nalezení jejich průsečíku apod.

Mezi metrické vlastnosti v rovině i v prostoru patří výpočet vzdálenosti bodu od přímky, odchylka dvou přímek. V prostoru je možné navíc spočítat vzdálenost bodu od roviny, odchylku přímky a roviny a odchylku dvou rovin.

Na vysoké škole jsou úlohy převedeny na vyšší úroveň. Je definován afinní prostor a podprostor, jeho parametrické vyjádření, dále pak vzájemná poloha dvou prostorů či podprostorů, nadroviny a podprostoru. Dalším prostorem je eukleidovský, kde jsou studenti seznámeni s pojmy ortogonální a ortonormální prostor, s kolmostí a totální kolmostí a dále s výpočtem vzdálenosti a odchylky podprostorů.

6.1.3 Kuželosečky a kuželová plocha

Závěrečnou oblastí analytické geometrie, která se vyučuje na středních školách, jsou kuželosečky a kuželová plocha. Mezi kuželosečky patří kružnice, elipsa, hyperbola a parabola, které získáme jako průnik rotační kuželové plochy a roviny. Kuželosečky jsou na střední škole definovány pomocí množin bodů dané vlastnosti.

Každá kuželosečka má svou středovou i obecnou rovnici, přičemž je nutná znalost základních pojmů jako střed kružnice, poloměr kružnice, hlavní a vedlejší poloosa, hlavní vrcholy, ohniska, řídící přímka aj. U každé kuželosečky lze dále určit její vzájemná poloha s přímkou – tečna, sečna a vnější přímka. U hyperboly je speciálním případem tečny tzv. asymptotická přímka, která má s hyperbolou jeden společný bod, ale je zároveň rovnoběžná s jednou z asymptot hyperboly. U paraboly se jedná o přímku rovnoběžnou s osou x (pro $y^2 = 2px$), resp. s osou y (pro $x^2 = 2py$).

Kulová plocha je nejprve definována, stejně jako kuželosečky, pomocí množin bodů dané vlastnosti a poté vyjádřena její středovou rovnicí.

Kuželosečky a kuželová plocha se na střední škole pouze načrtávají (kromě kružnice) a to ve volném rovnoběžném promítání, popř. se s kuželosečkami podrobněji pracuje v Deskriptivní geometrii. Na vysoké škole se rýsují ve volném rovnoběžném promítání, v osové afinitě a v perspektivní kolineaci. V případě, že známe hlavní vrcholy kuželosečky, se k přesnému narýsování elipsy, hyperboly a paraboly na vysoké škole využívá bodová konstrukce, u elipsy je další možností trojúhelníková a proužková konstrukce. Pokud neznáme hlavní vrcholy, využívají se k narýsování kuželoseček pomocné konstrukce. Jako příklad můžeme uvést Rytzovu konstrukci elipsy, která nám umožní narýsovat elipsu, pokud známe její dva sdružené průměry. Na vysoké škole jsou studenti navíc seznámeni s oskulačními kružnicemi u elipsy, hyperboly a paraboly (Kočanderle aj., 2004 [3]; Martišek, 2003a [12]; Příhonská, 2011 [10]; Urban, 1982 [8]; Žáčková, 2009 [11]).

Výše uvedená témata se zpravidla vyučují na středních školách, ale závisí na ŠVP jednotlivých škol, který si každá tvoří individuálně na základě RVP G. Proto se témata ve výuce matematiky na středních školách mohou lišit.

7 Přístupy k řešení stereometrických úloh

Diplomová práce přichází se třemi způsoby řešení stereometrických úloh. Jedná se o konstrukční, analytické a početní řešení. Přičemž každé z těchto řešení může být ještě provedeno různým způsobem.

7.1 Konstrukční řešení

V konstrukčním řešení, kdy např. hledáme nějakou odchylku, provádíme náčrt řešení a je tedy nutné správně zakreslit těleso a vyznačit v něm hledanou odchylku. Na základě správného náčrtu bude možné provést konstrukci příslušných rovinných obrazců, např. pravoúhlých trojúhelníků, po jejímž provedení je možné úhloměrem změřit hledanou odchylku. Spolu s konstrukcí vyjadřujeme Postup konstrukce a nakonec je Závěr, kde je uveden výsledek. Konstrukční řešení úloh v diplomové práci se od běžných konstrukčních úloh odlišují tím, že se nejprve do souřadného systému nanášejí zadané údaje a poté se úloha konstruuje, jak je zřejmé z úlohy A.

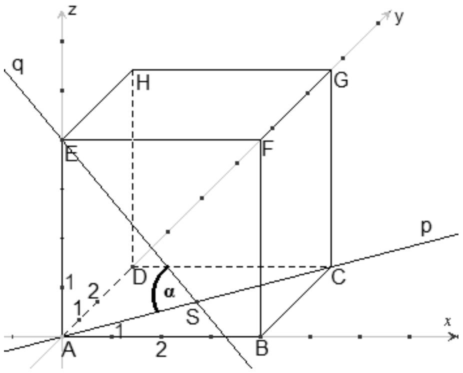
Každé konstrukční řešení (náčrt, konstrukce) bylo vypracováno v programu Cabri (získáno na SPŠSE a VOŠ Liberec). Pro práci v tomto programu jsme nejprve prostudovali příručku pro uživatele (Vrba, 2003a [9]), dále pak webové stránky programu Cabri (Vrba, 2003b [15]). Následně jsme provedli několik základních konstrukcí, abychom se s programem naučili pracovat, a poté bylo možné provádět potřebné konstrukční řešení úloh této diplomové práce.

Úloha A

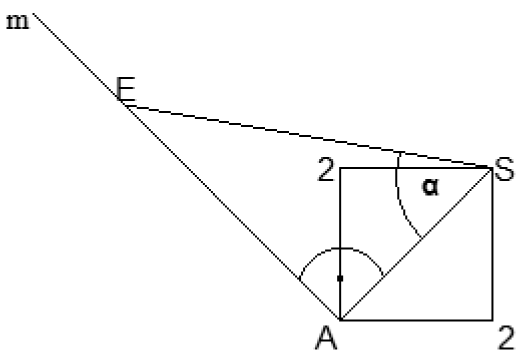
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky AS a ES. A[0;0;0], a = 4cm, S je střed dolní podstavy krychle.

Řešení:

Náčrt



Konstrukce



Postup konstrukce

1. čtverec A2S2, a = 2cm
2. →m; →m ⊥ AS, A ϵ →m
3. E; |AE| = 4cm, E ϵ →m
4. trojúhelník ASE
5. α; α = |∢ASE|

Závěr:

Odchylka přímek AS a ES je asi 55°.

Poznámka:

Všimněme si umístění souřadného systému této diplomové práce, které se může lišit od umístění uvedených v jiných literaturách. I proto mohou být tyto úlohy pro studenty náročnější, jelikož mohou znát právě jiné umístění souřadného systému. Velice důležitá je tedy jejich prostorová představivost.

7.2 Analytické řešení

Analytické řešení vyžaduje nalezení vhodných přímek odpovídající zadání, jejichž odchylku budeme hledat. K tomu je nutné vyjádřit směrové vektory přímek pomocí dvou bodů, kterými je přímka určena, a následné dosazení do vztahu pro odchylku dvou přímek, jak si ukážeme na následující úloze.

Úloha B

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky AS a ES. A[0;0;0], a = 4cm, S je střed dolní podstavy krychle.

Řešení:

a) Před řešením této úlohy je vhodné si povšimnout, že je zadání shodné s úlohou A (viz kapitola 7), a proto k řešení můžeme využít pro představu náčrt ze zmíněné úlohy A.

b) Přímka p je určena body A, S, přímka q body E,S. Jelikož známe souřadnice bodu A a délku strany krychle: A[0;0;0], a = 4cm, snadno dopočítáme souřadnice bodů S a E, S[2;2;0], E[0;0;4].

c) Odchylku přímek p a q vypočítáme podle vzorce $\cos\alpha = \dfrac{|\mathbf{u_p}.\mathbf{u_q}|}{|\mathbf{u_p}|.|\mathbf{u_q}|}$, kde

$\mathbf{u_p}$ je směrový vektor přímky p, $\mathbf{u_p}$ = S – A = (2;2;0)

$\mathbf{u_q}$ je směrový vektor přímky q, $\mathbf{u_q}$ = S – E = (2;2;-4)

$|\mathbf{u_p}.\mathbf{u_q}| = |u_{p_1}.u_{q_1}+u_{p_2}.u_{q_2}+u_{p_3}.u_{q_3}| = |2.2 + 2.2 + 0.(-4)| = |8| = 8$

$$|\mathbf{u_p}| = \sqrt{u_{p_1}^2 + u_{p_2}^2 + u_{p_3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{u_q}| = \sqrt{u_{q_1}^2 + u_{q_2}^2 + u_{q_3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{2\sqrt{2}.2\sqrt{6}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

α = 54°44´ Odchylka přímek AS a ES je 54^{o} 44´.

7.3 Početní řešení

Početní řešení bývá jakýmsi doplňkem konstrukčního řešení. Je založené na obdobném přístupu, jako má konstrukční řešení, liší se však v užití matematického modelu používaného pro řešení úloh. Nejprve je nutné nalézt vhodný pravoúhlý trojúhelník, resp. obecný trojúhelník, a to z náčrtu zadaného útvaru, určit známé délky stran trojúhelníka a aplikovat Pythagorovu větu a goniometrické funkce, resp. sinovou a kosinovou větu, čímž dopočítáme hledanou odchylku. Početní řešení stereometrické úlohy si představíme na uvedené úloze C.

Stejně jako konstrukční řešení úloh, tak i náčrt k početnímu řešení byl vytvořen v programu Cabri.

Úloha C

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky AS a ES. A[0;0;0], a = 4cm, S je střed dolní podstavy krychle.

Řešení:

a) Opět si můžeme povšimnout, že zadání úlohy je shodné s úlohou A, a proto opět není nutné zadání načrtávat, jelikož je tak provedeno v úloze A.

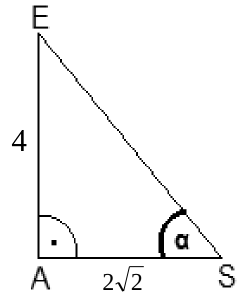
b) Z náčrtu je zřejmé, že budeme vycházet z pravoúhlého trojúhelníku SAE s pravým úhlem při vrcholu A.

c) Pravoúhlý trojúhelník načrtneme, určíme délky stran a vyznačíme hledanou odchylku $\alpha = |\sphericalangle ASE|$. |AE| = 4cm, |AS| = $2\sqrt{2}$.

poznámka: |AS| má délku poloviny úhlopříčky čtverce dolní podstavy ABCD s délkou strany a = 4cm –> polovina úhlopříčky ve čtverci je rovna $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, což je v našem případě

$\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

d) Výběrem vhodné goniometrické funkce vypočítáme hledanou odchylku α.



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{|AE|}{|AS|}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2},$$

α = 54°44´ Odchylka přímek AS a ES je 54°44´.

PRAKTICKÁ ČÁST

8 Charakteristika výzkumných metod

Cílem diplomové práce bylo zjistit, jak studenti gymnázia v dané chvíli zvládnou řešení úloh různými metodami, konstrukčně, analyticky a početně, když se s těmito metodami seznamovali v různých obdobích svého studia.

K naplnění tohoto cíle bylo nutné vypracovat sbírku úloh řešených jak konstrukční metodou, tak analytickou, popř. početní. Aby bylo možné sestavit sbírku úloh, museli jsme nejprve prostudovat RVP G a konkrétně vzdělávací oblast Matematika a její aplikace. Dále bylo nutné některé úlohy představit studentům střední školy, následně je otestovat a vyhodnotit, jakou metodu studenti nejlépe zvládají.

Součástí zjišťování potřebných informací k dosažení cíle diplomové práce byly i dva dotazníky, které nám umožnili nahlédnout na matematiku z pohledu středoškolského studenta a jeho vztahu k této vzdělávací oblasti.

8.1 Sbírka úloh

Sbírka úloh sestává celkem z 22 úloh. Z toho po jedné úloze na trojúhelník a lichoběžník, z šesti úloh na sestrojení tečny ke kružnici nebo kružnice k tečně, jedna na sestrojení tečny k elipse, následuje šest úloh na průsečík přímek a rovin v krychli. Mezi další úlohy patří sedm úloh na výpočet odchylky přímek a rovin v krychli. Sbírka řešených úloh zahrnuje devět úloh, sbírka neřešených úloh třináct úloh s výsledky v příloze č. 4, z toho tři úlohy byly součástí výzkumné sondy, a proto je jim pozornost věnována v kapitole 12 (Úloha 10, 11, 12) a řešení jedné úlohy je uvedeno po částech v kapitole 7 (Úloha A, B, C).

Úlohy s odchylkami zahrnují tři možná řešení – konstrukční, analytické a početní, ostatní úlohy nemají uvedené početní řešení, ale pouze konstrukční a analytické. Úlohy s kružnicemi mají analytické řešení dvěma způsoby – s využitím vzorce pro tečnu ke kružnici a s využitím kolmosti dvou přímek.

8.2 Úvodní dotazník

Hlavička úvodního dotazníku zahrnuje ročník, pohlaví a nejčastější známku studenta. Dále pak, zda student po maturitě zamýšlí studovat vysokou školu, anebo nastoupit do pracovního poměru. V případě dalšího studia na VŠ jsou uvedeny možnosti výběru následujících oborů: humanitní, umělecký, přírodovědný, technický.

Úvodní dotazník obsahuje pět otázek, vždy se třemi možnostmi odpovědi, přičemž je možné zaškrtnout křížkem „X“ pouze jednu správnou odpověď. V pravém dolním rohu je poté poděkování studentům za vyplnění dotazníku.

8.3 Závěrečný dotazník

Závěrečný dotazník již oproti dotazníku úvodnímu nezahrnuje otázky týkající se dalšího studia po maturitě, popř. nastoupení do pracovního poměru. V hlavičce je nutné vyplnit pouze ročník, pohlaví a nejčastější známku z matematiky.

Stejné je u obou dotazníků množství otázek. V závěrečném dotazníku je tedy také pět otázek, přičemž první čtyři otázky nabízejí možnost výběru ze tří možností odpovědí, ale je možné označit křížkem „X“ pouze jednu správnou odpověď. Poslední, pátá otázka, patří mezi otázky otevřené. V pravém dolním rohu je opět poděkování za vyplnění dotazníku.

9 Sbírka řešených úloh

Sbírka řešených úloh zahrnuje celkem 9 úloh. Nejprve si představíme jednu úlohu na trojúhelník a lichoběžník, poté bude následovat kapitola Tečna kružnice a elipsy, kde ukážeme dvě řešené úlohy na kružnici a jednu na elipsu. Následně pak po dvou úlohách u kapitol Průsečík přímek a rovin a Odchylka přímek a rovin.

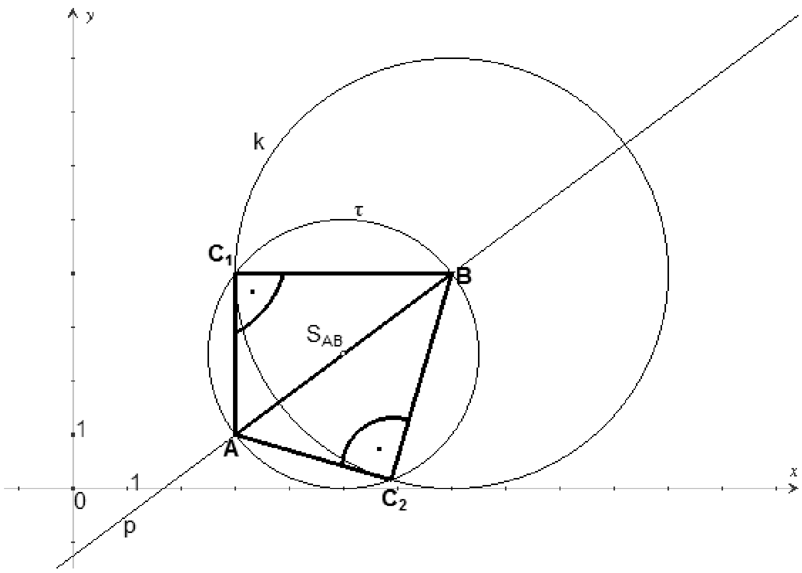
9.1 **Trojúhelník, lichoběžník**

Úloha 1

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. A[3;1], a = 4cm, c = 5cm, p: $y = \frac{3x-5}{4}$, A ϵ p, B ϵ p. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

<u>*Konstrukce*</u>



<u>*Postup konstrukce*</u>

1. A; A[3;1]
2. p; p: $y = \frac{3x-5}{4}$, A ϵ p
3. B; |AB| = 5cm, B ϵ p
4. τ; τ (S_{AB}; 2,5cm)
5. k; k (B; 4cm)
6. C_1, C_2; $C_1 = \tau \cap k$,
   $C_2 = \tau \cap k$
7. trojúhelník ABC

<u>*Závěr:*</u> Úloha má 2 řešení.

Analytické řešení

a) V analytickém řešení budeme hledat souřadnice jednotlivých bodů. Víme, že A[3;1], |AB| = c = 5cm a pro vzdálenost bodů A a B platí:

$$|AB|^2 = \underline{25 = (x-3)^2 + (y-1)^2}, \text{ kde } B[x;y]$$

b) Dále víme, že B ϵ p, proto budeme pracovat i s rovnicí $y = \frac{3x-5}{4}$, kterou dosadíme do výše uvedené rovnice a dostáváme:

$$25 = (x-3)^2 + \left(\frac{3x-5}{4} - 1\right)^2$$

$$25 = x^2 - 6x + 9 + \left(\frac{3x-9}{4}\right)^2$$

$$25 = x^2 - 6x + 9 + \left(\frac{9x^2 - 54x + 81}{16}\right) \qquad /.16$$

$$400 = 16x^2 - 96x + 144 + 9x^2 - 54x + 81$$

$$0 = x^2 - 6x - 7$$

$$0 = (x-7)(x+1) \Rightarrow x_1 = 7,\ x_2 = -1$$

=> zachováváme trojúhelník ABC, nikoli BAC, což nesplňuje $x_2 = -1$, proto je správným výsledkem pouze $x_1 = 7$

c) Dopočítáme souřadnici $y = \frac{3x-5}{4}$, $y = \frac{3.7-5}{4}$, $y = 4$ **=> B[7;4].**

d) Bod C najdeme jako průsečík kružnic k (B; 4cm) a τ (S_{AB}; 2,5cm), $S_{AB}\left[5; \frac{5}{2}\right]$

I. k: $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 16$

II. τ: $(x-5)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

I. $x^2 - 14x + y^2 - 8y + 49 = 0$

II. $x^2 - 10x + y^2 - 5y + 25 = 0$

I. $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 16$

I.- II. $-4x - 3y + 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{24-3y}{4}$ a dosadíme do rovnice I.

$$\left(\frac{24-3y}{4} - 7\right)^2 + (y-4)^2 = 16$$

$$\left(-1 - \frac{3}{4}y\right)^2 + y^2 - 8y + 16 = 16$$

$$1 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16}y^2 + y^2 - 8y = 0 \qquad /.\ 16$$

$$16 + 24y + 9y^2 + 16y^2 - 128y = 0$$

$$25y^2 - 104y + 16 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{104 \pm \sqrt{(-104)^2 - 4.25.16}}{2.25} \Rightarrow y_1 = 4,\ y_2 = \frac{4}{25}$$

- dopočítáme souřadnice x_1, x_2

$$x_1 = \frac{24-3y_1}{4},\ x_1 = 6 - \frac{3.4}{4}, x_1 = 3 \Rightarrow \mathbf{C_1[3;4]}$$

$$x_2 = \frac{24-3y_2}{4}, x_2 = 6 - \frac{3.\frac{4}{25}}{4}, x_2 = \frac{147}{25} \Rightarrow \mathbf{C_2}\left[\mathbf{\frac{147}{25}};\mathbf{\frac{4}{25}}\right]$$

Úloha má dvě řešení – trojúhelníky ABC_1 a ABC_2. A[3;1], B[7;4], C_1[3;4], $C_2\left[\frac{147}{25},\frac{4}{25}\right]$.

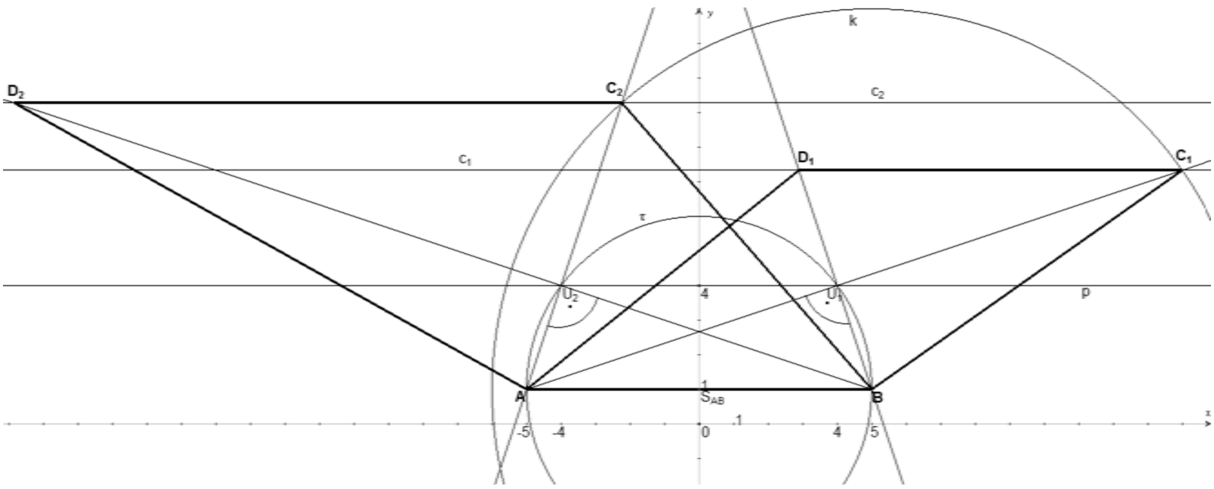
• •

Úloha 2

Sestrojte lichoběžník ABCD, jehož úhlopříčky AC a BD svírají pravý úhel. A[-5;1], a = 10cm, a||x, b = 11cm, |Ua| = 3cm, U je průsečík úhlopříček. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

<u>Konstrukce</u>



Postup konstrukce

1. A; A[-5;1]
2. B; |AB| = 10cm, AB||x
3. τ; τ (S_{AB}; 5cm)
4. p; p: y = 4, p||AB
5. U_1, U_2; $U_1 = p \cap \tau$, $U_2 = p \cap \tau$
6. k; k (B; 11cm)
7. C_1; $C_1 = k \cap \rightarrow AU_1$
8. C_2; $C_2 = k \cap \rightarrow AU_2$
9. c_1; $c_1 || AB$, $C_1 \in c_1$
10. c_2; $c_2 || AB$, $C_2 \in c_2$
11. D_1; $D_1 = c_1 \cap \rightarrow BU_1$
12. D_2; $D_2 = c_2 \cap \rightarrow BU_2$
13. lichoběžník ABCD

Závěr

Úloha má 2 řešení v zadané poloorovině.

Analytické řešení

a) Budeme hledat souřadnice jednotlivých bodů lichoběžníka. Bod A je zadán – A[-5;1], známe délku strany a = 10cm a víme, že a||x, proto snadno nalezneme souřadnice bodu B - B[5;1].

b) K nalezení souřadnic bodů C a D nejprve určíme souřadnice bodů U_1 a U_2:
   - body U_1 a U_2 vzniknou jako průsečík kružnice τ (S_{AB}; 5cm) s přímkou p: y = 4
   - p: y = 4 dosadíme do rovnice τ: $x^2 + (y - 1)^2 = 25$

$$x^2 + (4 - 1)^2 = 25$$
$$x^2 + 9 = 25$$
$$x^2 = 16$$
$$x_1 = 4,\ x_2 = -4 \Rightarrow \mathbf{U_1[4;4],\ U_2[-4;4]}$$

c) C_1: $\rightarrow AU_1 \cap k$, $\rightarrow AU_1$

$\rightarrow AU_1$: $y = ax + b$

$A \in \rightarrow AU_1$ $1 = -5a + b$

$U_1 \in \rightarrow AU_1$ $\underline{4 = 4a + b}$ => rovnice odečteme

k (B; 11cm), B [5;1]

k: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 11^2$

k: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 121$

$-3 = -9a \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

$1 = -5a + b \Rightarrow \mathbf{b} = 1 + \frac{5}{3} = \mathbf{\frac{8}{3}}$

$y = ax + b$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

=> $\rightarrow$**AU**$_\mathbf{1}$: $y = \frac{x+8}{3}$

- do rovnice **k** dosadíme $\rightarrow$**AU**$_\mathbf{1}$**:**

$$(x-5)^2 + \left(\frac{x+8}{3} - 1\right)^2 = 121$$

$$(x-5)^2 + \left(\frac{x+5}{3}\right)^2 = 121$$

$$x^2 - 10x + 25 + \frac{x^2 + 10x + 25}{9} = 121 \qquad / .9$$

$$9x^2 - 90x + 225 + x^2 + 10x + 25 - 1089 = 0$$

$$10x^2 - 80x - 839 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{80 \pm \sqrt{(-80)^2 - 4.10.(-839)}}{2.10},\ x_1 = \frac{40 + 3\sqrt{1110}}{10},\ x_2 = \frac{40 - 3\sqrt{1110}}{10}$$

–> z konstrukce je zřejmé, že x_2 nemá smysl

- $y = \frac{x+8}{3} \Rightarrow y = \dfrac{\frac{40 + 3\sqrt{1110}}{10} + 8}{3}$, po úpravách $y = \frac{40 + \sqrt{1110}}{10}$

=> $\mathbf{C_1}\left[\mathbf{\frac{40 + 3\sqrt{1110}}{10}; \frac{40 + \sqrt{1110}}{10}}\right]$

d) D_1: $\overrightarrow{BU_1} \cap c_1$

$c_1 \| a$, $C_1 \in c_1$ => c_1: $y = \dfrac{40+\sqrt{1110}}{10}$

$\overrightarrow{BU_1}$: $y = ax + b$

$B \in \overrightarrow{BU_1}$ $1 = 5a + b$

$U_1 \in \overrightarrow{BU_1}$ $\underline{4 = 4a + b}$ –> rovnice odečteme

- 3 = a

$\underline{1 = 5a + b \Rightarrow \mathbf{b} = 1 + 15 \mathbf{= 16}}$

$y = ax + b$

=> $\overrightarrow{\mathbf{BU_1}}$: $y = -3x + 16$

- do $\overrightarrow{BU_1}$ dosadíme c_1 (nalezneme tak bod D):

$$\frac{40+\sqrt{1110}}{10} = -3x + 16 \qquad / .10$$

$$40+\sqrt{1110} = -30x + 160$$

$$x = \frac{120-\sqrt{1110}}{30}$$

=> $\mathbf{D_1}\left[\mathbf{\dfrac{120-\sqrt{1110}}{30};\dfrac{40+\sqrt{1110}}{10}}\right]$

e) Souřadnice bodu C_2 spočítáme analogicky, jako bod C_1: $C_2 = \overrightarrow{AU_2} \cap k$

=> $\mathbf{C_2}\left[\mathbf{\dfrac{-40+\sqrt{310}}{10};\dfrac{40+3\sqrt{310}}{10}}\right]$

f) D_2 spočítáme analogicky jako bod D_1: $D_2 = \overrightarrow{BU_2} \cap c_2$

=> $\mathbf{D_2}\left[\mathbf{\dfrac{-40-9\sqrt{310}}{10};\dfrac{40+3\sqrt{310}}{10}}\right]$

Úloha má dvě řešení – lichoběžníky ABC_1D_1 a ABC_2D_2. A[-5;1], B[5;1], $C_1\left[\dfrac{40+3\sqrt{1110}}{10},\dfrac{40+\sqrt{1110}}{10}\right]$, $C_2\left[\dfrac{-40+\sqrt{310}}{10},\dfrac{40+3\sqrt{310}}{10}\right]$, $D_1\left[\dfrac{120-\sqrt{1110}}{30},\dfrac{40+\sqrt{1110}}{10}\right]$, $D_2\left[\dfrac{-40-9\sqrt{310}}{10},\dfrac{40+3\sqrt{310}}{10}\right]$.

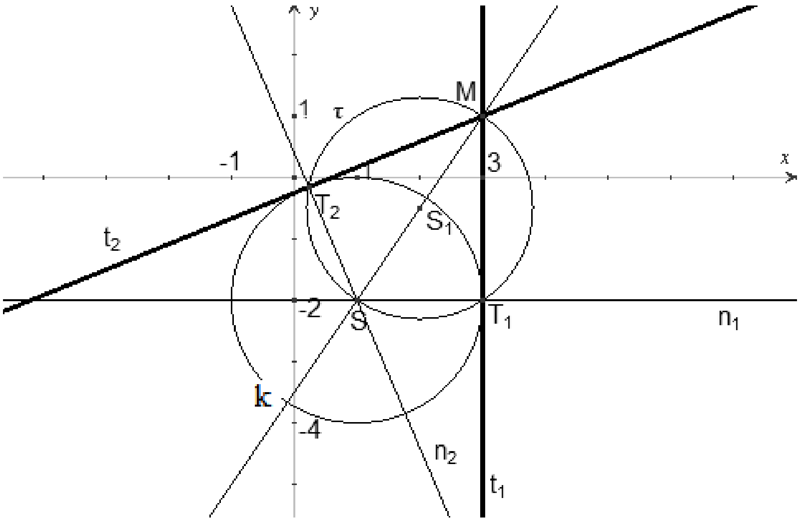
9.2 Tečna kružnice a elipsy

Úloha 3

Najděte tečnu ke kružnici k (S; r) vedenou bodem M, který leží vně kružnice. S [1;-2], r = 2cm, M [3;1]. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

<u>*Konstrukce*</u>



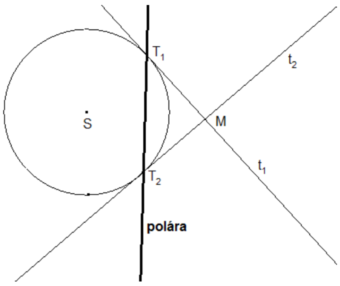
<u>*Postup konstrukce*</u>

1. S, k (S; 2cm), M
2. S_1; S_1 střed SM
3. τ; τ (S_1; $|S_1M|$)
4. T_1; $T_1 = k \cap \tau$
5. T_2; $T_2 = k \cap \tau$
6. n_1; $n_1 = ST_1$
7. n_2; $n_2 = ST_2$
8. t_1; $t_1 \perp n_1$, $T_1 \in t_1$
9. t_2; $t_2 \perp n_2$, $T_2 \in t_2$

<u>*Závěr:*</u>

Úloha má 2 řešení.

Analytické řešení



Středová rovnice kružnice je $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

K nalezení bodů T_1 a T_2 využijeme bod $M[x_1;y_1]$ a $S[m;n]$ a nalezneme rovnici poláry $\mathbf{(x_1 - m)(x - m) + (y_1 - n)(y - n) = r^2}$ (*polára* je průsečík tečen s přímkou spojující body dotyku T).

a) $(x_1 - m)(x - m) + (y_1 - n)(y - n) = r^2$

$$(3 - 1)(x - 1) + (1 + 2)(y + 2) = 4$$

$$2x – 2 + 3y + 6 – 4 = 0$$

$$2x + 3y = 0$$ … *obecná rovnice poláry*

b) Nyní nalezneme body T_1 a T_2 jako průsečík kružnice k a poláry T_1T_2.

$$2x + 3y = 0$$
$$\underline{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4}$$

$$x = -\frac{3y}{2}$$
$$\underline{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4}$$

$$\left(-\frac{3y}{2} - 1\right)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$\frac{9}{4}y^2 + 3y + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4$$

$$9y^2 + 28y + 4 + 4y^2 = 0$$

$$13y^2 + 28y + 4 = 0$$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 28^2 - 4.13.4$

$D = 576$, $\sqrt{D} = 24$, $y_{1,2} = \frac{-28 \pm 24}{26}$; $y_1 = -2$, $y_2 = -\frac{2}{13}$

- dopočítáme x-ové souřadnice bodů T_1 a T_2:

$x_1 = -\frac{3.(-2)}{2}$, $x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{3\left(-\frac{2}{13}\right)}{2}$, $x_2 = \frac{3}{13}$

=> **$T_1[3;-2]$, $T_2\left[\frac{3}{13};-\frac{2}{13}\right]$**

c) Vypočítáme obecnou rovnici tečny ke kružnici.

1. s využitím vzorce pro tečnu ke kružnici

$t: (x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$, $S[m;n]$, $T[x_0;y_0]$

t_1: $(3-1)(x-1) + (-2+2)(y+2) = 4$

$$2x - 2 = 4$$
$$2x - 6 = 0 \quad /:2$$
$$\mathbf{t_1: x - 3 = 0}$$

t_2: $\left(\frac{3}{13} - 1\right)(x-1) + \left(-\frac{2}{13} + 2\right)(y+2) = 4$

$$-\frac{10}{13}x + \frac{10}{13} + \frac{24}{13}y + \frac{48}{13} - \frac{52}{13} = 0$$
$$-10x + 24y + 6 = 0$$
$$\mathbf{t_2: 10x - 24y - 6 = 0}$$

2. **s využitím kolmosti**

   t: ax + by + c = 0; a, b, c ϵ R; (a;b) ≠ (0;0); n = (a;b), T[x;y]

$ST_1 = \mathbf{n_1} = T_1 - S = (2;0)$ $\qquad$ $ST_2 = \mathbf{n_2} = T_2 - S = \left(-\frac{10}{13};\frac{24}{13}\right)$

t_1: $2x + c = 0$ $\qquad$ t_2: $-\frac{10}{13}x + \frac{24}{13}y + c = 0$

$T_1 \in t_1$: $2.3 + c = 0$ $\qquad$ $T_2 \in t_2$: $-\frac{10}{13}.\frac{3}{13} + \frac{24}{13}.\left(-\frac{2}{13}\right) + c = 0$

$c = -6$ $\qquad$ $c = \frac{6}{13}$

$2x - 6 = 0 \quad /:2$ $\qquad$ $-\frac{10}{13}x + \frac{24}{13}y + \frac{6}{13} = 0 \quad /.(-13)$

$\mathbf{t_1}$**: x - 3 = 0** $\qquad$ $\mathbf{t_2}$**: 10x - 24y – 6 = 0**

Úloha má dvě řešení – tečny t_1, t_2 a body dotyku T_1 a T_2. t_1: x - 3 = 0, t_2: 10x - 24y – 6 = 0, $T_1[3;-2]$, $T_2\left[\frac{3}{13};-\frac{2}{13}\right]$.

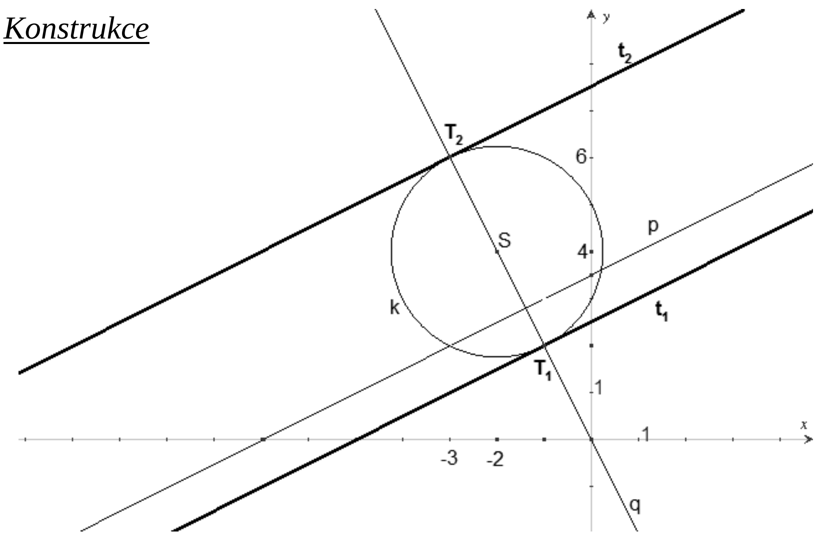
● ●

Úloha 4

Nalezněte rovnice tečen ke kružnici k (S; r), které jsou rovnoběžné s přímkou p. S [-2;4], r = $\sqrt{5}$ cm, p: x - 2y + 7 = 0. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

<u>Konstrukce</u>



<u>Postup konstrukce</u>

1. S, k (S; r), p
2. q; q ⊥ p, S ϵ q
3. T_1; $T_1 = k \cap q$
4. T_2; $T_2 = k \cap q$
5. t_1; $t_1 \| p$, $T_1 \in t_1$
6. t_2; $t_2 \| p$, $T_2 \in t_2$

<u>Závěr</u>

Úloha má 2 řešení.

Analytické řešení

a) Nejprve nalezneme rovnici přímky q.

$p: x - 2y + 7 = 0$, $\mathbf{n} = (1; -2)$, $\mathbf{u} = (2;1)$, $q \perp p$

$q: 2x + y + c = 0$

$S \in q: 2.(-2) + 4 + c = 0$

$c = 0$

$q: 2x + y = 0$

b) Poté určíme souřadnice bodů T_1 a T_2 a to pomocí průsečíku přímky q a kružnice k.

$k: (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 5,$

$\underline{q: 2x + y = 0}$ => $y = -2x$ dosadíme do rovnice kružnice

$(x + 2)^2 + (-2x - 4)^2 = 5$

$x^2 + 4x + 4 + 4x^2 + 16x + 16 = 5$

$5x^2 + 20x + 15 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x + 3)(x + 1) = 0$ => $x_1 = -1$, $x_2 = -3$

- nalezneme y-ové souřadnice bodů T_1 a T_2 dosazením do $y = -2x$

  $y_1 = -2.(-1)$, $y_1 = 2$, $y_2 = -2.(-3)$, $y_2 = 6$

  => **$T_1[-1;2]$, $T_2[-3;6]$**

c) Vypočítáme obecnou rovnici tečny ke kružnici.

1. s využitím vzorce pro tečnu ke kružnici

$t_1: (-1 + 2)(x + 2) + (2 - 4)(y - 4) = 5$

$x + 2 - 2y + 8 = 5$

$t_1: x - 2y + 5 = 0$

$t_2: (-3 + 2)(x + 2) + (6 - 4)(y - 4) = 5$

$-x - 2 + 2y - 8 = 5$

$t_2: x - 2y + 15 = 0$

2. s využitím kolmosti

$ST_1 = \mathbf{n_1} = T_1 - S = (1;-2)$

$t_1: x - 2y + c = 0$

$T_1 \in t_1: -1 - 2.2 + c = 0$

$c = 5$

$t_1: x - 2y + 5 = 0$

$ST_2 = \mathbf{n_2} = T_2 - S = (-1;2)$

$t_2: -x + 2y + c = 0$

$T_2 \in t_2: 3 + 2.6 + c = 0$

$c = -15$

$t_2: x - 2y + 15 = 0$

3. s využitím vzorce pro vzdálenost bodu od přímky

Obecná rovnice přímky p: $x - 2y + 7 = 0$. Víme, že p||t, proto snadno určíme obecnou rovnici přímky t: $x - 2y + c = 0$. Dále víme, že $|tS| = r = \sqrt{5}$.

- aplikujeme vzorec pro vzdálenost bodu S od přímky t:

  $\frac{|am+bn+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = |tS|$, kde $\mathbf{n_t} = (a;b)$ je normálový vektor přímky t; $\mathbf{n_t} = (1;-2)$

  S[m;n] je střed kružnice k, S[-2;4]

  a dosadíme do vzorce:

  $$\frac{|1.(-2)+(-2).4+c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \sqrt{5}$$

  $$\frac{|-2-8+c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad /.\sqrt{5}$$

  $$|-10+c| = 5$$

  $\Rightarrow c_1 = 5,\ c_2 = 15$

- nalezené hodnoty c dosadíme do rovnice t: $x - 2y + c = 0$ a nalezneme tak řešení úlohy:

  t_1: $x - 2y + 5 = 0$, t_2: $x - 2y + 15 = 0$

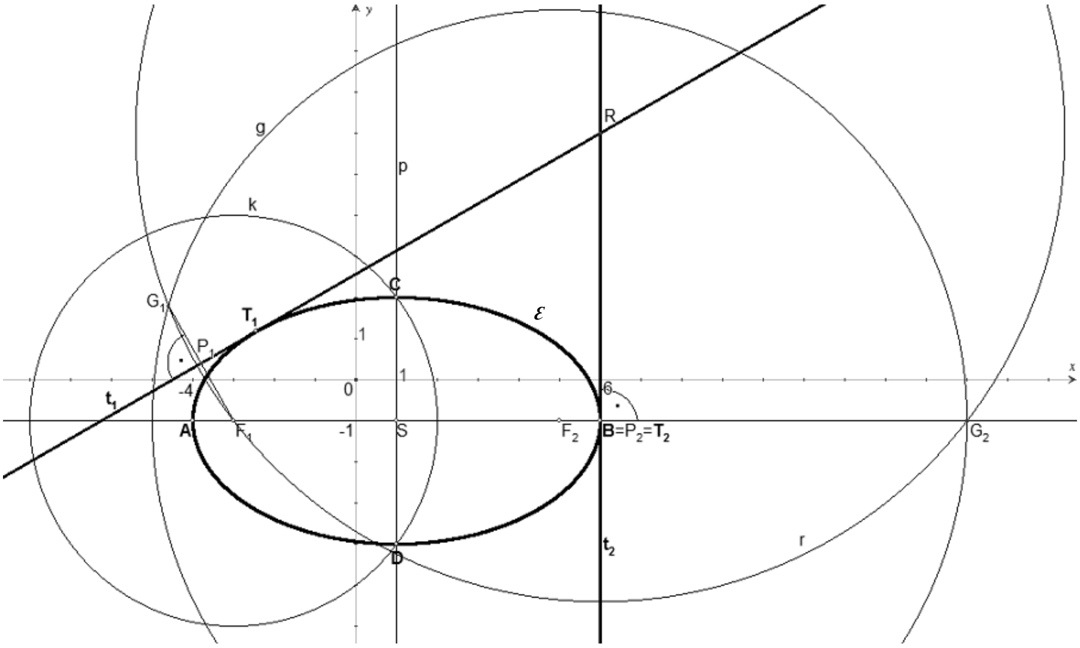
Úloha má dvě řešení – tečny t_1, t_2 a body dotyku T_1 a T_2. t_1: $x - 2y + 5 = 0$, t_2: $x - 2y + 15 = 0$, $T_1[-1;2]$, $T_2[-3;6]$.

Úloha 5

Sestrojte tečnu t s bodem dotyku T k elipse Ɛ procházející bodem R, jsou-li dány její ohniska a délka hlavní poloosy. R[6;6], F_1[-3;-1], F_2[5;-1], a = 5cm. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

<u>Konstrukce</u>



<u>Postup konstrukce</u>

1. R, F_1, F_2
2. S; $|SF_1| = |SF_2|$, $S \in F_1F_2$
3. A,B; $|SA| = |SB| = a$, $A \in F_1F_2$, $B \in F_1F_2$
4. k; k (F_1; a)
5. p; $p \perp AB$, $S \in p$
6. C,D; $C = k \cap p$, $D = k \cap p$
7. g; g (F_2;2a)
8. r; r (R; $|RF_1|$)
9. G_1, G_2; $G_1 = g \cap r$, $G_2 = g \cap r$
10. P_1; P_1 střed F_1G_1
11. P_2; P_2 střed F_1G_2
12. t_1; $t_1 = P_1R$, $t_1 \perp F_1G_1$
13. t_2; $t_2 = P_2R$, $t_2 \perp F_1G_2$
14. bodová konstrukce elipsy Ɛ
15. T_1; $T_1 = t_1 \cap Ɛ$
16. T_2; $T_2 = t_2 \cap Ɛ$, $T_2 = B$

<u>*Závěr*</u>

Úloha má 2 řešení.

Analytické řešení

a) V analytickém řešení nalezneme nejprve souřadnice středu S a hlavních vrcholů A, B. Bod S je střed F_1F_2, S $= \frac{F_1 + F_2}{2}$ => **S[1;-1].** Dále víme, že |AS| = |BS| = a = 5cm a body A a B leží na přímce F_1F_2 => **A[-4;-1], B[6;-1].**

b) Souřadnice bodů C a D nalezneme jako průsečík přímky p s kružnicí k (F_1; 5cm).

p: x = 1, jelikož p $\perp$ AB a S ϵ p

k: $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ –> p dosadíme do k

$$(1 + 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$$
$$16 + y^2 + 2y + 1 – 25 = 0$$
$$y^2 + 2y – 8 = 0$$
$$(y - 2)(y + 4) = 0 \Rightarrow y_1 = 2,\ y_2 = -4$$

=> **C[1;2], D[1;-4]**

c) Následně určíme délku vedlejší poloosy a excentricitu.

|CS| = |DS| = b = 3cm

$|F_1S| = |F_2S|$ = e = 4cm

d) K nalezení obecného tvaru tečny t musíme nejprve nalézt souřadnice bodu G: r∩g.

r (R; $|RF_1|$), $|RF1| = \sqrt{(-3-6)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{130}$, I. **r:** $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 130$

g (F_2; 2a), 2a = 10cm, II. **g:** $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 100$

- rovnice upravíme

$$\text{I.}\quad x^2 - 12x + y^2 – 12y – 58 = 0$$
$$\underline{\text{II.}\quad x^2 - 10x + y^2 + 2y – 74 = 0}$$
$$\text{I.}\quad (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 130$$
$$\text{I. - II.}\quad \underline{- 2x - 14y + 16 = 0} \quad \Rightarrow x = 8 - 7y \text{ a dosadíme do rovnice I.}$$
$$(8 - 7y - 6)^2 + (y - 6)^2 = 130$$
$$(2 - 7y)^2 + (y - 6)^2 = 130$$
$$4 - 28y + 49y^2 + y^2 - 12y + 36 = 130$$
$$5y^2 - 4y – 9 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.5.(-9)}}{2.5},\ y_1 = \frac{9}{5},\ y_2 = -1$$

- dopočítáme souřadnice x_1 a x_2:

$x_1 = 8 - 7y_1$ $\qquad$ $x_2 = 8 - 7y_2$

$x_1 = 8 - 7.\ \frac{9}{5}$ $\qquad$ $x_2 = 8 - 7.(-1)$

$x_1 = -\frac{23}{5}$ $\qquad$ $x_2 = 15$

=> $\mathbf{G_1}\left[-\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{5}},\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}\right]$ $\qquad$ $\mathbf{G_2 = [15;-1]}$

Tečna t prochází bodem P, což je střed F_1G. Jelikož máme body G_1 a G_2, získáme tak body P_1 a P_2 a tedy i dvě tečny t_1 a t_2.

- $P_1 = \frac{F_1 + G_1}{2}$, $\mathbf{P_1}\left[-\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{5}},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right]$, $P_2 = \frac{F_1 + G_2}{2}$, $\mathbf{P_2[6;-1]}$

poznámka: můžeme si všimnout, že P_2 má shodné souřadnice s hlavním vrcholem B

- $t_1 = RP_1$, R[6;6], $P_1\left[-\frac{19}{5};\frac{2}{5}\right]$

t_1: $y = ax + b$

$R \in t_1$ $\quad 6 = 6a + b \qquad /. (-5)$

$P_1 \in t_1$ $\quad \frac{2}{5} = -\frac{19}{5}a + b \qquad /.5$

$- 30 = - 30a - 5b$

$2 = - 19a + 5b$ –> rovnice sečteme

$- 28 = - 49a$

$a = \frac{28}{49}$, $\mathbf{a = \frac{4}{7}}$

$6 = 6a + b \Rightarrow b = 6 - 6a$

$b = 6 - 6.\frac{4}{7}$, $\mathbf{b = \frac{18}{7}}$

t_1: $y = ax + b$

$y = \frac{4}{7}x + \frac{18}{7}$

$\mathbf{t_1: 7y - 4x - 18 = 0}$

$t_2 = RP_2$, R[6;6], P_2[6;-1]

- body mají stejné x-ové souřadnice, proto je výslednou tečnou t_2: x = 6

=> $\mathbf{t_2: x - 6 = 0}$

e) Nakonec nalezneme body dotyku tečny s elipsou Ɛ: $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ a to tak, že rovnici tečny dosadíme do rovnice elipsy:

- $T_1 = t_1 \cap Ɛ$, t_1: $y=\frac{4x+18}{7}$

$$\frac{x^2-2x+1}{25}+\frac{\left(\frac{4x+18}{7}+1\right)^2}{9}=1 \qquad /.\ 225$$

$$9x^2 - 18x + 9 + 25.\left(\frac{4x+25}{7}\right)^2 = 225$$

$$9x^2 - 18x - 216 + 25.\frac{16x^2+200x+625}{49}=0 \qquad /.\ 49$$

$$441x^2 - 882x - 10584 + 400x^2 + 5000x + 15625 = 0$$

$$841x^2 + 4118x + 5041 = 0$$

$x_{1,2}=\frac{-4118\pm\sqrt{4118^2-4.841.5041}}{2.841}$, $x_1 = x_2 = -\frac{71}{29}$ –> dosadíme do $y=\frac{4x+18}{7}$

$y=\frac{4.\left(-\frac{71}{29}\right)+18}{7}$, $y=\frac{34}{29}$ => **$T_1\left[-\frac{71}{29};\frac{34}{29}\right]$**

- $T_2=t_2 \cap Ɛ$, t_2: $x = 6$

$$\frac{(6-1)^2}{25}+\frac{y^2+2y+1}{9}=1 \qquad /\ .\ 9$$

$$1+\frac{y^2+2y+1}{9}=1 \qquad /\ .9$$

$$y^2 + 2y + 1 = 0$$

$(y + 1)^2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = -1$ **=> $T_2[6;-1]$**

poznámka: Můžeme si všimnout, že nám v této úloze vyšlo $B = P_2 = T_2$.

Úloha má dvě řešení – tečny t_1, t_2 a body dotyku T_1 a T_2. t_1: $7y - 4x - 18 = 0$, t_2: $x - 6 = 0$, $T_1\left[-\frac{71}{29};\frac{34}{29}\right]$, $T_2[6;-1]$.

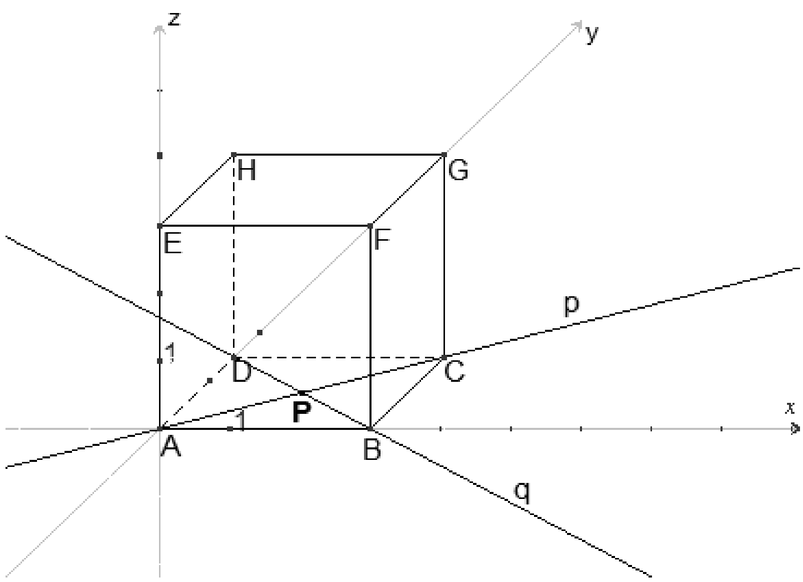
9.3 Průsečík přímek a rovin

Úloha 6

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík přímek AC a BD. A[0;0], a = 3cm. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení:

<u>*Konstrukce*</u>



<u>*Postup konstrukce*</u>

1. krychle ABCDEFGH
2. p; p = AC
3. q; q = BD
4. P; P = p∩q

<u>*Závěr*</u>

Úloha má 1 řešení.

Analytické řešení:

a) Různoběžné přímky p, q mají jeden společný bod, leží v rovině podstavy ABC krychle ABCDEFGH, proto při výpočtu budeme využívat souřadnice bodů v rovině a nikoli v prostoru.
b) Přímka p je určena body A a C, A[0;0], C snadno určíme, jelikož známe délku strany a = 3cm, C[3;3].

obecná rovnice přímky	**parametrické vyjádření přímky**
p: $ax + by + c = 0$, $(a;b) \neq (0;0)$, $\mathbf{n_p} = (a;b)$	p: $X = A + t\mathbf{u_p}$, $A[a_1;a_2]$, $\mathbf{u_p} = (u_1;u_2) = C - A$
$\mathbf{u_p} = C - A = (3; 3)$, $\mathbf{n_p} = (-3;3)$	$x = a_1 + tu_1$
	$\underline{y = a_2 + tu_2,\ t \in R}$
=> p: $-3x + 3y + c = 0$	p: $x = 0 + 3t$
A ϵ p: $-3.0 + 3.0 + c = 0$	$\underline{y = 0 + 3t,\ t \in R}$
$c = 0$	
$-3x + 3y + 0 = 0$	
p: $x - y = 0$	**p: $x = 3t$**
	$y = 3t,\ t \in R$

c) Přímka q je určena B a D, B[3;0], D[0;3].

obecná rovnice přímky	**parametrické vyjádření přímky**
q: $ax + by + c = 0$, $(a;b) \neq (0;0)$, $\mathbf{n_q} = (a;b)$	q: $X = B + s\mathbf{u_q}$, $B[b_1;b_2]$, $\mathbf{u_q} = (u_1;u_2) = D - B$
$\mathbf{u_q} = D - B = (-3; 3)$, $\mathbf{n_q} = (-3;-3)$	$x = b_1 + su_1$
	$\underline{y = b_2 + su_2,\ s \in R}$
=> q: $-3x - 3y + c = 0$	
B ϵ q: $-3.3 - 3.0 + c = 0$	q: $x = 3 - 3s$
$c = 9$	$\underline{y = 0 + 3s,\ s \in R}$
$-3x - 3y + 9 = 0$	
q: $x + y - 3 = 0$	**q: $x = 3 - 3s$**
	$y = 3s,\ s \in R$

Nalezli jsme předpis přímek p a q v obecném tvaru i parametrickém vyjádření. Průsečík P přímek p a q nalezneme jejich položením do rovnosti p = q.

d) Nejprve si ukážeme, jak najít průsečík přímek v obecném tvaru.

$$p = q$$

$$x = - x + 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

- y-ovou souřadnici nalezneme dosazením x do předpisu jedné z přímek, zvolíme např. p: x – y = 0 => y = $\frac{3}{2}$

  => $\mathbf{P}\left[\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$

e) Následně si ukážeme, jak postupovat při hledání průsečíku z parametrického vyjádření.

- p = q znamená, že budeme dávat do rovnosti parametrická vyjádření přímek p a q, p: x = 3t; q: x = 3 – 3s

  y = 3t, t ϵ R y = 3s, s ϵ R
- dostáváme dvě rovnice, které dále upravíme:

  3t = 3 – 3s

  <u>3t = 3s, t ϵ R, s ϵ R</u> => t = s dosadíme do 1. rovnice

  3s = 3 – 3s

  6s = 3

  s = $\mathbf{\frac{1}{2}}$**, t =** $\mathbf{\frac{1}{2}}$
- dopočítáme souřadnice průsečíku P dosazením do přímky p nebo q, zvolili jsme si dosazení do přímky p a získáme x **=** $\frac{3}{2}$, y = $\frac{3}{2}$ => $\mathbf{P}\left[\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$

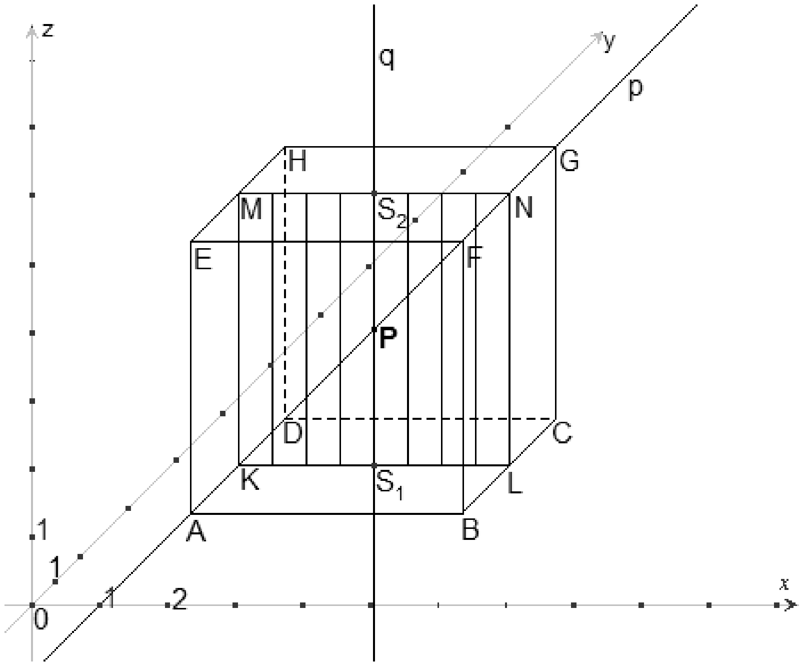
Úloha má jedno řešení - průsečík přímek p a q je bod P$\left[\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$.

Úloha 7

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík přímky AG s rovinou KLM. A[2;1;1], a = 4cm, K ϵ AD, K = S_{AD}, L ϵ BC, L = S_{BC}, M ϵ FG, M = S_{FG}. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

<u>*Konstrukce*</u>



<u>*Postup konstrukce*</u>

1. krychle ABCDEFGH
2. p; p = AG
3. KLM
4. S_1; S_1 střed KL
5. S_2; S_2 střed MN
6. q; q = S_1S_2
7. P; P = p∩q

<u>*Závěr:*</u>

Úloha má 1 řešení.

Analytické řešení

a) Rovina KLM a přímka p mají jeden společný bod P, přímka p je různoběžná s rovinou KLM, společný bod P je jejich průsečík.

b) K nalezení souřadnic průsečíku P nalezneme přímku q ϵ KLM, q = S_1S_2, S_1 je střed úsečky KL, S_2 je střed úsečky MN.

c) Přímka p = AG, snadno určíme souřadnice bodů G, S_1 a S_2, jelikož známe délku strany a = 4cm, G[6;5;5], S_1[4;3;1], S_2[4;3;5].

d) Vzhledem k tomu, že jsme již v prostoru, lze přímky vyjádřit pouze parametricky.

p: $X = A + t\mathbf{u_p}$, $A[a_1;a_2;a_3]$, $\mathbf{u_p} = (u_1;u_2;u_3) = G - A = (4;4;4)$

$x = a_1 + tu_1$	**p: $x = 2 + 4t$**
$y = a_2 + tu_2$	**$y = 1 + 4t$**
$\underline{z = a_3 + tu_3,\ t \in R}$	**$\underline{z = 1 + 4t,\ t \in R}$**

q: $X = S_1 + s\mathbf{u_q}$, $S_1[s_1;s_2;s_3]$, $\mathbf{u_q} = (u_1;u_2;u_3) = S_2 - S_1 = (0;0;4)$

$x = s_1 + su_1$	**q: $x = 4$**
$y = s_2 + su_2$	**$y = 3$**
$\underline{z = s_3 + su_3,\ s \in R}$	**$\underline{z = 1 + 4s,\ s \in R}$**

e) Abychom nalezli průsečík přímek p a q, musíme dát parametrická vyjádření přímek do rovnosti.

$2 + 4t = 4 \quad \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$1 + 4t = 3 \quad \Rightarrow \mathbf{t = \frac{1}{2}}$ dosadíme do 3. rovnice

$\underline{1 + 4t = 1 + 4s,\ t \in R,\ s \in R}$

$1 + 4.\frac{1}{2} = 1 + 4s$

$\mathbf{s = \frac{1}{2}}$

Nalezli jsme parametry s a t a nyní nalezneme souřadnice průsečíku a to buď dosazením parametru t do parametrického vyjádření přímky p anebo parametru s do parametrického vyjádření přímky q. Vybrali jsme si přímku q:

$x = 4,\ y = 3,\ z = 3 \Rightarrow$ **P[4;3;3]**

Úloha má jedno řešení - průsečík přímek p a q je bod P[4;3;3].

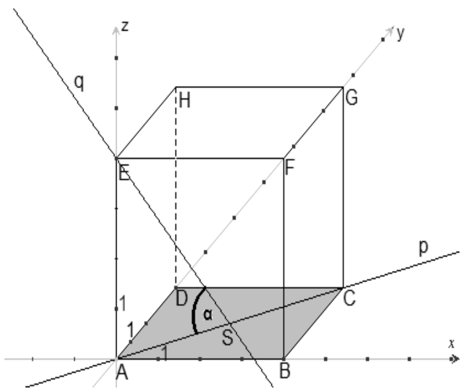
9.4 Odchylky přímek a rovin

Úloha 8

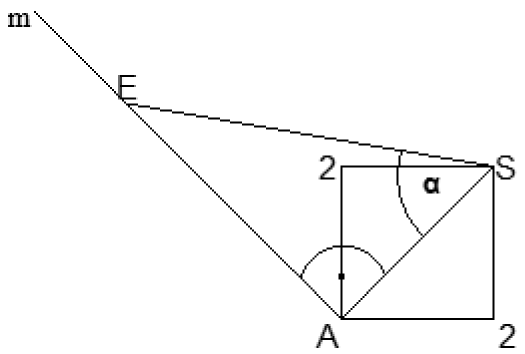
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky ES od roviny ABC. A[0;0;0], a = 4cm, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

Konstrukční řešení

Náčrt



Konstrukce



Postup konstrukce

1. čtverec A2S2, a = 2cm
2. →m; →m ⊥ AS, A ϵ →m
3. E; |AE| = 4cm, E ϵ →m
4. trojúhelník ASE
5. α; α = |∢ASE|

Závěr:

Odchylka přímky ES od roviny ABC je asi 55°.

Analytické řešení

a) Hledáme nejmenší odchylku přímky od roviny. Přímka q = ES prochází bodem S, proto si budeme všímat odchylek přímky q s přímkami z roviny ABC procházející bodem S. Máme na výběr přímku DS, BS a AS. Nejmenší je odchylka přímek ES = q a AS = p, proto budeme počítat právě tuto odchylku.
b) Nejprve ale určíme souřadnice bodů A, S, E. A[0;0;0], a = 4cm, a tak snadno dopočítáme souřadnice bodů: S[2;2;0], E[0;0;4].
c) Odchylku přímek p a q vypočítáme podle vzorce $\mathbf{cos}\,\alpha = \dfrac{|\mathbf{u_p}.\mathbf{u_q}|}{|\mathbf{u_p}|.|\mathbf{u_q}|}$, kde

   $\mathbf{u_p}$ je směrový vektor přímky p, $\mathbf{u_p}$ = S – A = (2;2;0)

   $\mathbf{u_q}$ je směrový vektor přímky q, $\mathbf{u_q}$ = S – E = (2;2;-4)

   $|\mathbf{u_p}.\mathbf{u_q}| = |u_{p_1}.u_{q_1} + u_{p_2}.u_{q_2} + u_{p_3}.u_{q_3}| = |2.2 + 2.2 + 0.(-4)| = |8| = 8$

   $|\mathbf{u_p}| = \sqrt{u_{p_1}^2 + u_{p_2}^2 + u_{p_3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   $|\mathbf{u_q}| = \sqrt{u_{q_1}^2 + u_{q_2}^2 + u_{q_3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

   $\cos\alpha = \dfrac{8}{2\sqrt{2}.2\sqrt{6}}$,

   $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

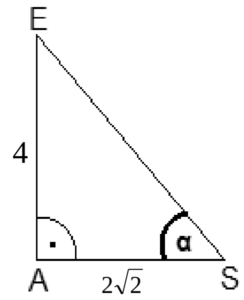
   α = 54°44´ Odchylka přímky ES od roviny ABC je 54°44´.

Početní řešení

a) Zjistili jsme, že odchylkou přímky ES od roviny ABC je |∢pq| = |∢ASE|. V početním řešení budeme odchylku zjišťovat z pravoúhlého trojúhelníku SAE s pravým úhlem při vrcholu A.
b) Délka strany |AE| = 4cm, strany |AS| = $2\sqrt{2}$.

   poznámka: |AS| má délku poloviny úhlopříčky čtverce dolní podstavy ABCD s délkou strany a = 4cm –> polovina úhlopříčky ve čtverci je rovna $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, což je v našem případě $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

c) Výslednou odchylku vypočítáme pomocí goniometrické funkce tangens.



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{|AE|}{|AS|},$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2},$$

α = 54°44´ Odchylka přímky ES od roviny ABC je 54°44´.

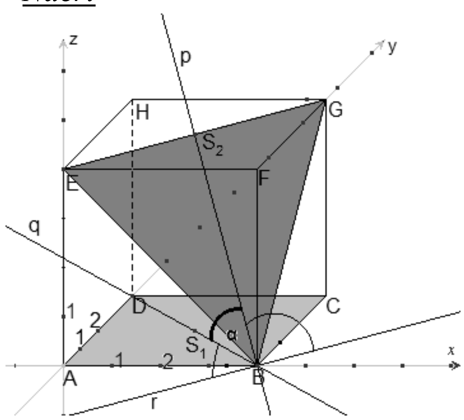
••

Úloha 9

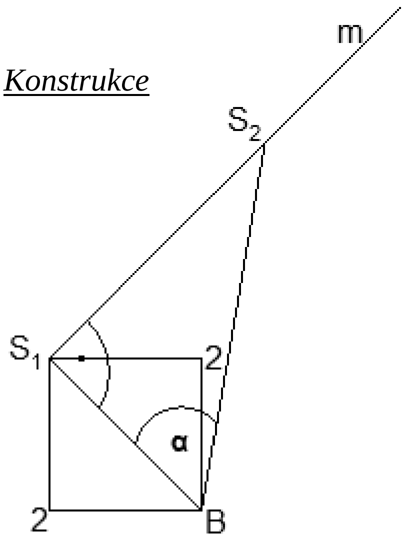
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku rovin ABC a BEG. A[0;0;0], a = 4cm. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

Konstrukční řešení

<u>*Náčrt*</u>



<u>*Konstrukce*</u>



<u>*Postup konstrukce*</u>

1. čtverec $2B2S_1$, a = 2cm
2. $\rightarrow m$; $\rightarrow m \perp BS_1$, $S_1 \in \rightarrow m$
3. S_2; $|S_1S_2|$ = 4cm, $S_2 \in \rightarrow m$
4. trojúhelník S_1BS_2
5. α; $\alpha = |\sphericalangle S_1BS_2|$

<u>*Závěr:*</u> Odchylka roviny ABC od BEG je asi 55°.

Analytické řešení

a) Nejprve nalezneme průsečnici rovin ABC a BEG, na kterou je kolmá přímka z roviny ABC a zároveň z roviny BEG. S_1 je střed AC, S_2 je střed EG, přímka r || EG, B ϵ r. Přímka p = S_2B, p ⊥ r, B ϵ r, q = S_1B, q ⊥ r, B ϵ r

–> přímka r je průsečnicí rovin ABC a BEG

–> odchylkou rovin ABC a BEG je tedy |∢pq| = |∢S_1BS_2|.

b) Jsou zadány souřadnice bodu A[0;0;0], a tak snadno dopočítáme souřadnice bodů S_1,S_2 a B, jelikož známe délku strany a = 4cm: S_1[2;2;0], S_2[2;2;4], B[4;0;0].

c) Odchylku přímek p a q vypočítáme opět podle vzorce $\mathbf{cos}\alpha = \dfrac{|\mathbf{u_p}.\mathbf{u_q}|}{|\mathbf{u_p}|.|\mathbf{u_q}|}$

$\mathbf{u_p} = B - S_2 = (2;-2;-4)$, $\mathbf{u_q} = B - S_1 = (2;-2;0)$

$|\mathbf{u_p}.\mathbf{u_q}| = |2.2 + (-2).(-2) + (-4).0| = |8| = 8$

$$|\mathbf{u_p}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$|\mathbf{u_q}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{2\sqrt{2}.2\sqrt{6}},$$

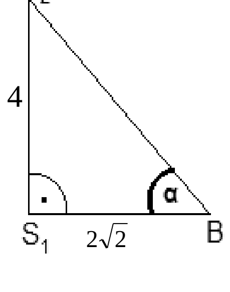
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

α = 54°44´ Odchylka rovin ABC a BEG je 54°44´.

Početní řešení

a) Při výpočtu budeme vyjadřovat úhel α z pravoúhlého trojúhelníku BS_1S_2, pravý úhel je při vrcholu B. Délka strany $|S_1B| = 2\sqrt{2}$ cm, $|S_1S_2|$ = 4cm.

b) Načrtneme pravoúhlý trojúhelník BS_1S_2 a pomocí funkce tangens vypočítáme odchylku rovin ABC a BEG:



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{|S_1S_2|}{|S_1B|},$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2},$$

α = 54°44´ Odchylka rovin ABC a BEG je 54°44´.

Úloha k zamyšlení

Jaký bude rozdíl, pokud budou souřadnice vrcholu A krychle ABCDEFGH jiné, než A[0;0;0]? Jak se změní odchylky v krychli?

Řešení

Odchylky v krychli budou vždy stejné, nezáleží na posunu krychle v prostoru.

10 Sbírka neřešených úloh

Sbírka neřešených úloh zahrnuje 13 úloh, z toho čtyři úlohy na tečnu kružnice, stejný počet úloh na průsečík přímek a rovin a dále pak pět úloh na odchylku přímek a rovin. Řešení úloh je uvedeno v příloze č. 4 – Komplexní přístup k řešení geometrických úloh – konstrukční, analytické/početní řešení.

Úlohy

1. Najděte tečnu ke kružnici k (S; r) v bodě T. S[0;0], r = 5cm, T[3;4]. Řešte konstrukčně a analyticky.

2. Najděte tečnu ke kružnici k (S; r) v jejím průsečíku s přímkou p. S[0;0], r = 6cm, p: x = 3. Řešte konstrukčně a analyticky.

3. Určete rovnici kružnice, jestliže je dán bod A, T a tečna t. A[0;4], T[1;1], A, T $\in$ k, T $\in$ t, A $\notin$ t, t je tečna ke kružnici k, t: $2x - y - 1 = 0$. Řešte konstrukčně a analyticky.

4. Jsou dány dvě tečny t_1, t_2 ke kružnici k (S; r) s body dotyku T_1 a T_2. Nalezněte rovnici kružnici k. $T_1[-2;2]$, $T_2[-1;5]$, t_1: $x - 2y + 6 = 0$, t_2: $2x + y - 3 = 0$. Řešte konstrukčně a analyticky.

5. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík roviny BDF s přímkou AC. A[0;0;0], a = 3cm. Řešte konstrukčně a analyticky.

6. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík přímek AG a S_1S_2. S_1 je střed dolní podstavy krychle, S_2 je střed horní podstavy krychle, A[2;1;1], a = 4cm. Řešte konstrukčně a analyticky.

7. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík přímky p s krychlí. A[0;0;0], a = 4cm, p = PQ, P $\in$ CG, |CP| = 1,5 |CG|, Q $\in$ AC, A = S_{CQ}. Řešte konstrukčně a analyticky.

8. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík přímky p s krychlí. A[1;2;-1], a = 3cm, p = PQ, P $\in$ AE, |AP| = $\frac{4}{3}$ |AE|, Q $\in$ CG, |GQ| = $\frac{4}{3}$ |CG|. Řešte konstrukčně a analyticky.

9. Určete odchylku přímek AB a BC, jestliže A[0;0;0], B[2;2;0], C[0;0;4]. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

10. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky AS a ES. A[0;0;0], a = 4cm, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně, analyticky a početně (viz kapitola 7 – Úloha A, B, C).

11. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky BS a FS. A[0;0;0], a = 5cm, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně, analyticky a početně (viz kapitola 12 - Úloha 12).

12. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímek p a q. A[0;0;0], a = 5cm, p = BD, q = AH. Řešte konstrukčně, analyticky a početně (viz kapitola 12 - Úloha 10).

13. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku roviny ABC a BDE. A[0;0;0], a = 4cm. Řešte konstrukčně, analyticky a početně (viz kapitola 12 - Úloha 11).

VÝZKUMNÁ ČÁST

11 Charakteristika souboru

K získání potřebných údajů jsme si vybrali Gymnázium F. X. Šaldy v Liberci. Šetření probíhalo ve vyučovacích hodinách matematiky a to ve třetím ročníku. V první vyučovací hodině bylo přítomno 26 studentů, z toho 8 chlapců a 18 dívek. Druhé hodiny se účastnilo 24 studentů, osm chlapců, šestnáct dívek, třetí hodiny 23 studentů, z toho osm chlapců a patnáct dívek.

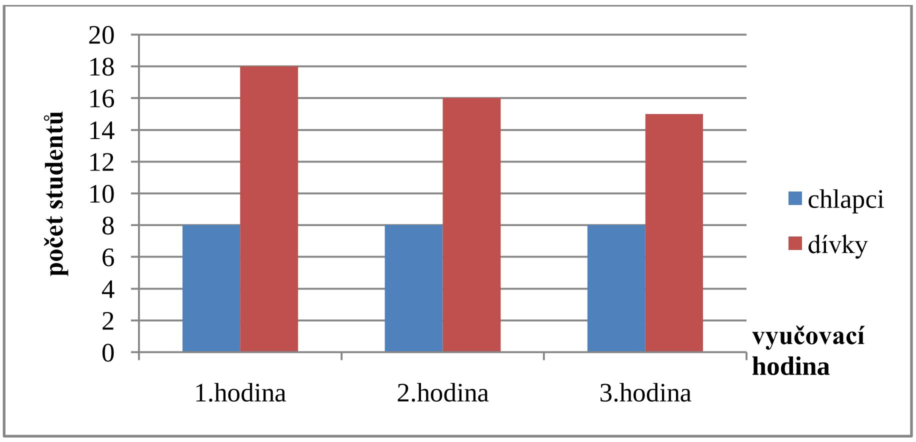
Výběr 3. ročníku nebyl náhodný, naopak cíleně vybrán, jelikož právě studenti tohoto ročníku mají již probranou látku potřebnou k zpracování zadaných úloh.

Tabulka 1 – Četnost studentů 3. ročníku ve vyučovacích hodinách

	1. hodina	**2. hodina**	**3.hodina**
3.ročník	**N**	**N**	**N**
chlapci	8	8	8
dívky	18	16	16

N… četnost studentů

Graf 1 – Četnost studentů 3. ročníku ve vyučovacích hodinách



12 Vyhodnocení

Šetření probíhalo ve třech vyučovacích hodinách matematiky. Do výzkumné sondy jsme zařadili dva dotazníky – úvodní a závěrečný, dále jednu úlohu na zopakování výpočtu odchylek v krychli s využitím analytické geometrie, následně řešení stereometrické úlohy všemi třemi metodami (konstrukční, analytická, početní) a test. V první hodině bylo ve vyučování 26 studentů, kteří vyplnili úvodní dotazník. Jemu předcházelo přesné vysvětlení, jak dotazník správně vyplnit. Následně byli studenti seznámeni s přístupy řešení stereometrických úloh. V další hodině si napsali test, tentokrát bylo přítomno 24 studentů a ve třetí hodině s 23 studenty proběhlo vyplnění závěrečného dotazníku, který se vztahoval k testu z předchozí hodiny. Po vyplnění dotazníku byli studenti seznámeni se správným řešením testu a jeho zhodnocením.

Původním záměrem bylo otestování jak stereometrické úlohy, tak úlohy planimetrické a to alespoň ve dvou třídách. Na gymnáziích jsme však našli pouze jedinou třídu, která měla probrané požadované učivo na zvládnutí stereometrické úlohy, nikoli však úlohy planimetrické – neměli ještě dobranou analytickou geometrii, konkrétně výpočet tečny ke kružnici. Je to způsobeno tím, že školní vzdělávací programy středních škol se liší. Navíc jsme chtěli testovat úlohy ve více vyučovacích hodinách, což nám nebylo umožněno. Musíme proto k těmto skutečnostem u výsledků přihlížet.

Prvním předpokladem výzkumné sondy bylo, že chlapci budou úspěšnější než dívky. Jako druhý předpoklad jsme si zvolili skutečnost, že se studenti s takovým komplexním přístupem v hodinách matematiky ještě nesetkali. Z výsledků testu a dotazníku zjistíme, jestli byly naše předpoklady správné. Zajímavé bude také zjištění, který z přístupů bude pro studenty přijatelnější a který úspěšnější.

12.1 **Úvodní dotazník**

ročník		pohlaví		nejčastější známka z matematiky	

<table>
<tr><td rowspan="3">po maturitě zamýšlíte
(ano - ne)</td><td colspan="4">studovat na VŠ obor</td><td rowspan="3">nastoupit do pracovního poměru</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>humanitní</td><td></td><td>přírodovědný</td><td></td></tr>
<tr><td>technický</td><td></td><td>umělecký</td><td></td></tr>
</table>

Správnou odpověď označte křížkem „X“.

1. **Matematika u mě patří mezi předměty:**

   a) oblíbené

   b) méně oblíbené

   c) neoblíbené

2. **Geometrie u mě patří mezi předměty:**

   a) oblíbené

   b) méně oblíbené

   c) neoblíbené

3. **V hodinách geometrie nejčastěji:**

   a) počítáme

   b) rýsujeme

   c) děláme jiné činnosti, jaké? ……………………………………………………….

4. **Nejraději mám geometrii:**

   a) početní

   b) konstrukční

   c) analytickou

5. **Více mám rád geometrii:**

   a) rovinnou (planimetrii)

   b) prostorovou (stereometrii)

   c) je mi to jedno

Velice Vám děkuji za vyplnění dotazníku.

12.1.1 Hlavička dotazníku

Nejčastější známka z matematiky

Do hlavičky se do úvodního dotazníku vyplňovala nejčastější známka z matematiky. Jelikož jsou studenti během roku hodnoceni bodově, jednalo se o známky z matematiky, které mají zpravidla na vysvědčení. Některým studentům se známky střídají, a proto uvedli např. možnost 2,5 (pro známku 2-3).

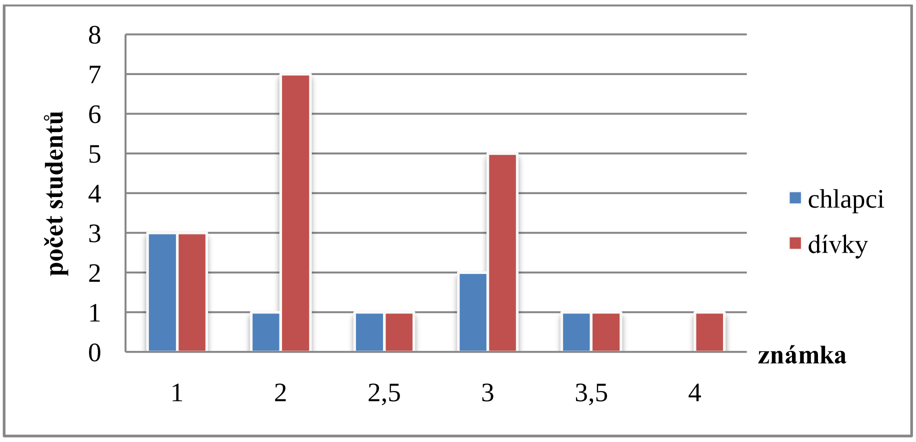
Tabulka 2 – Nejčastější známka z matematiky

	N	známka						$\bar{x}$	s^2	s	$\hat{x}$	$\tilde{x}$
		1	2	2,5	3	3,5	4					
chlapci	8	3	1	1	2	1	0	2,13	1,05	1,03	1	2,25
dívky	18	3	7	1	5	1	1	2,33	0,74	0,86	2	2

N …četnost studentů $\bar{x}$ … aritmetický průměr známek s … směrodatná odchylka
s^2 … rozptyl $\hat{x}$ … modus $\tilde{x}$ … medián

poznámka: uvedené vysvětlivky u následujících tabulek již neuvádíme, jelikož jsou stejné

Graf 2 – Nejčastější známka z matematiky



Šest studentů, tři dívky a tři chlapci (23%), vyplnilo, že jeho nejčastější známkou z matematiky je 1. Osm studentů (30,8%) uvedlo, že na vysvědčení dostává dvojku – jeden chlapec a sedm dívek. Jedné dívce a jednomu chlapci (7,7%) se na vysvědčení střídají známky 2 a 3, stejně tak u známek 3 a 4 (7,7%). Trojku dostávají dva chlapci a pět dívek (26,9%) a pouze jedna dívka (3,9%) uvedla známku 4. Z výsledků je zřejmé, že studenti matematiku zvládají poměrně dobře.

Průměrná známka z matematiky je u chlapců 2,13 a u dívek 2,33. Rozptyl činí u chlapců 1,05 a u dívek 0,74. U chlapců se nejčastěji vyskytuje známka 1 a u dívek známka 2 (modus). Medián ze známek u chlapců je 2,25, u dívek pak 2.

Pokračování po maturitě (*Po maturitě zamýšlíte*)

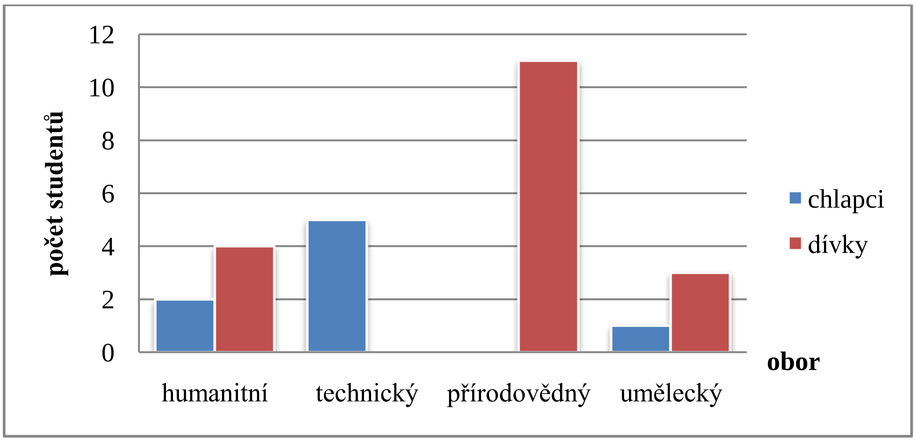
V hlavičce dále studenti vyplňovali, zda chtějí po maturitě pokračovat ve studiu na vysoké škole, anebo mají v plánu nastoupit do pracovního poměru.

Tabulka 3 – Pokračování po maturitě

		studium na VŠ				pracovní	
	N	Hum.	Tech.	Přír.	Uměl.	**poměr**	**x̂**
chlapci	8	2	5	0	1	0	Tech.
dívky	18	4	0	11	3	0	Přír.

Hum. … humanitní obor Tech. … technický obor
Přír. … přírodovědný obor Uměl. … umělecký obor

Graf 3 – Pokračování po maturitě



Ze všech studentů se nikdo nerozhodl (0%), že by chtěl nastoupit do pracovního poměru. Každý má tedy v plánu studovat vysokou školu. Dva chlapci a čtyři dívky (23%) zvolili humanitní obor na vysoké škole. Můžeme si všimnout, že obor technický si zvolili pouze chlapci, a to celkem pět (19,2%). Naopak je tomu u přírodovědného oboru, který zamýšlí studovat jedenáct dívek (42,3%), žádný chlapec. Možná bude pro někoho překvapivá volba uměleckého oboru jednoho chlapce. Tento obor si pro další studium vybraly i tři dívky (15,5%). Modus z hlediska volby vysokoškolského oboru je u chlapců obor technický, u dívek pak obor přírodovědný.

12.1.2 Otázky v dotazníku

Přesné znění každé otázky z dotazníku je uvedeno vždy v závorce. Při vyplňování otázek mohli studenti volit jako správnou odpověď pouze jednu.

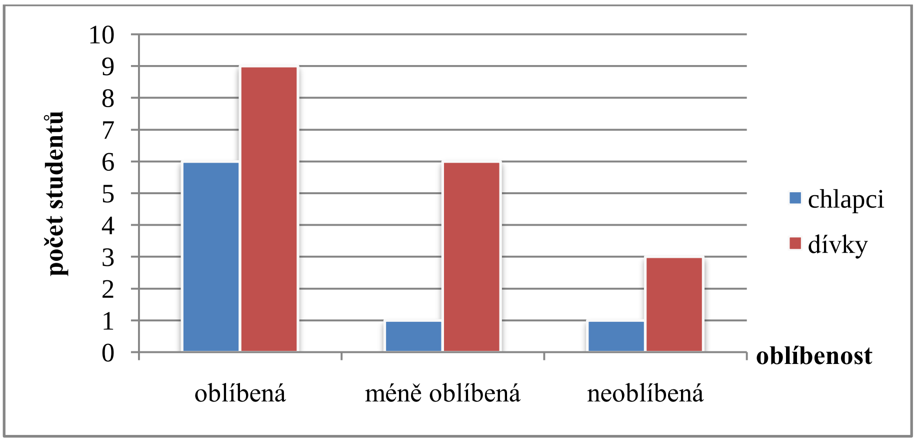
Oblíbenost matematiky (*Matematika u mě patří mezi předměty*)

Studenti si mohli volit ze tří možností – matematika patří u mě mezi předměty oblíbené; méně oblíbené a třetí možností je neoblíbené.

Tabulka 4 – Oblíbenost matematiky

	N	oblíbená	méně oblíbená	neoblíbená
chlapci	8	6	1	1
dívky	18	9	6	3

Graf 4 – Oblíbenost matematiky



Matematiku zvolilo za oblíbenou šest chlapců a devět dívek (57,7%). Nejčastěji se jedná o studenty, kteří mají na vysvědčení jedničku, dále pak několik studentů s dvojkou. Za méně oblíbenou považuje matematiku jeden chlapec a šest dívek (26,9%). Matematika patří u studentů i mezi předměty neoblíbené, jak uvedl jeden chlapec a tři dívky (15,4%).

Při výběru správné odpovědi někteří studenti zvažovali, jakou možnost zvolit. Často se tak v dotazníku stalo, že byly zaškrtnuté dvě odpovědi. Měla být však jedna správná odpověď. Proto se nakonec tito studenti rozhodli pouze pro jednu možnost.

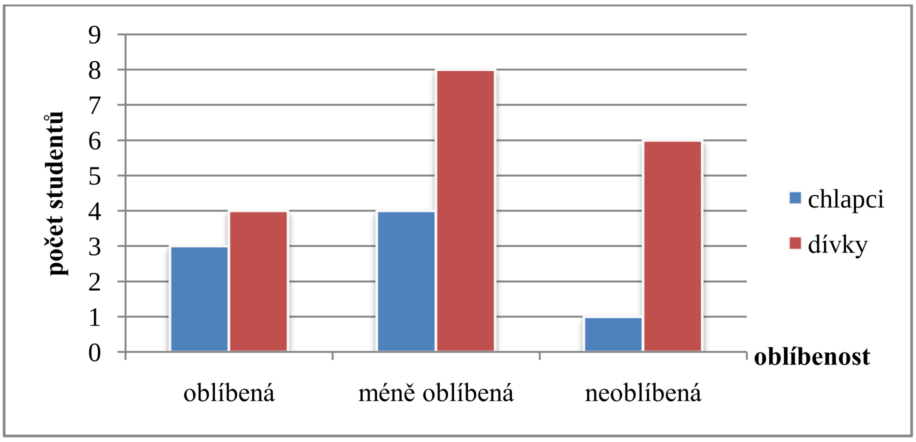
Oblíbenost geometrie (*Geometrie u mě patří mezi předměty*)

Stejně jako u předchozí otázky, tak i u této měli studenti možnost výběru tří odpovědí – geometrie u mě patří mezi předměty oblíbené; méně oblíbené; neoblíbené.

Tabulka 5 – Oblíbenost geometrie

	N	oblíbená	méně oblíbená	neoblíbená
chlapci	8	3	4	1
dívky	18	4	8	6

Graf 5 – Oblíbenost geometrie



Při vyplňování této otázky měli studenti jasno, jakou zvolit odpověď. V žádném dotazníku se nevyskytly dvě odpovědi s jednou přeškrtnutou.

Celkem sedm studentů, tři chlapci a čtyři dívky (26,9%), považují geometrii za oblíbenou součást matematiky. Čtyři chlapci a osm dívek (46,2%) volilo možnost méně oblíbená a pro ostatní studenty je geometrie neoblíbená ve vyučovacích hodinách matematiky, tedy pro jednoho chlapce a šest dívek (26,9%).

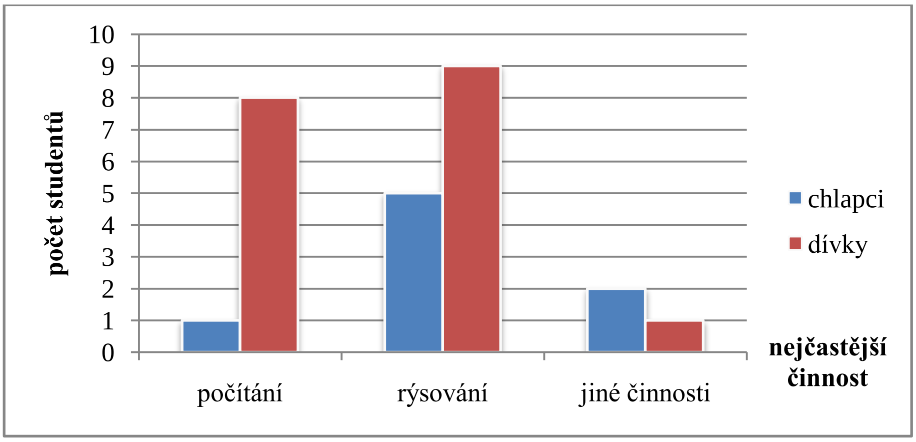
Nejčastější činnosti v hodinách geometrie (*V hodinách geometrie nejčastěji*)

Další otázky v úvodním dotazníku zjišťovaly, jakým činnostem je v hodinách geometrie věnována nejvíce pozornost. Jako možnosti byly uvedeny: počítáme; rýsujeme; děláme jiné činnosti, jaké?

Tabulka 6 – Nejčastější činnost v hodinách geometrie

	N	počítání	rýsování	jiné činnosti
chlapci	8	1	5	2
dívky	18	8	9	1

Graf 6 – Nejčastější činnost v hodinách geometrie



Z odpovědí na tuto otázku vyplývá, že odpovědi studentů nejsou jednotné. To může být způsobeno nejspíše tím, že pod pojmem geometrie si studenti často představí rýsování a nikoli například analytickou geometrii, kde jsou nutné k nalezení řešení výpočty.

Jeden chlapec a osm dívek (34,6%) uvedlo, že nejčastější činnosti v hodinách geometrie je počítání – v předchozích hodinách studenti probírali analytickou geometrii. Nejčastější činností je podle pěti chlapců a devíti dívek (53,8%) rýsování. Tři studenti (11,6%) zvolili třetí možnou odpověď – v hodinách geometrie provádíme jiné činnosti než počítání a rýsování. Jeden chlapec a jedna dívka zvolili do této odpovědi za nejčastější činnost v hodinách geometrie počítání i rýsování. Někteří studenti uváděli činnosti, které do hodin geometrie nepatří, jako například spánek, či kreslení.

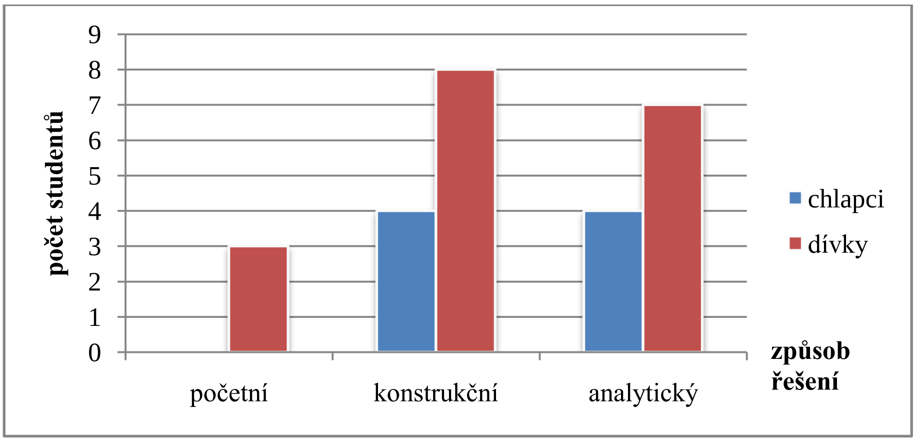
Oblíbený způsob řešení geometrické úlohy (*Nejraději mám geometrii*)

V otázce č. 4 jsme zjišťovali, jaká geometrie je pro studenty neoblíbenější, resp. jaký způsob řešení geometrické úlohy je pro ně nejbližší. Jako možnosti byly uvedeny početní; konstrukční; analytický způsob řešení.

Tabulka 7 – Oblíbený způsob řešení geometrické úlohy

	N	početní	konstrukční	analytický
chlapci	8	0	4	4
dívky	18	3	8	7

Graf 7 – Oblíbený způsob řešení geometrické úlohy



Početní řešení je oblíbeným způsobem pro tři dívky (11,5%). Žádný chlapec neuvedl tuto možnost. Čtyřem chlapcům a osmi dívkám (46,2%) více vyhovuje způsob konstrukční, ostatní zvolili třetí možnost, a tedy způsob analytický. Učinili tak čtyři chlapci a sedm dívek (42,3%).

Z výsledku této otázky je zřejmé, že dívky považují za oblíbenější způsob řešení geometrické úlohy metodu konstrukční, u chlapců je nerozhodná volba mezi způsobem konstrukčním a analytickým. Ukazuje se také, že početní řešení se příliš nevyužívá.

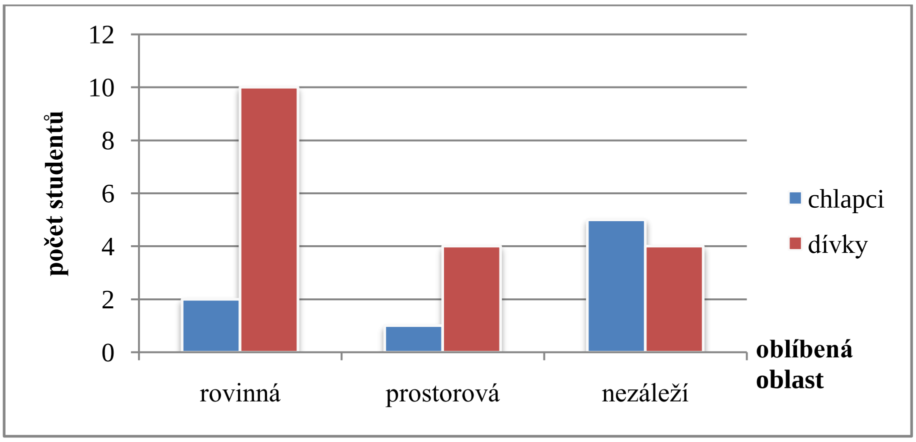
Oblíbená dimenze geometrie (*Více mám rád geometrii*)

Pátá otázka se zaměřila na zjištění, jakou geometrii mají studenti raději, resp. v kolika rozměrném prostoru studenti raději řeší geometrické úlohy. Měli možnost si vybrat geometrii rovinnou (planimetrie), prostorovou (stereometrie) a jako třetí možnost mohli zaškrtnout, že jim na volbě geometrie nezáleží.

Tabulka 8 – Oblíbená oblast geometrie

	N	rovinná	prostorová	nezáleží
chlapci	8	2	1	5
dívky	18	10	4	4

Graf 8 – Oblíbená oblast geometrie



Z výše uvedené tabulky a grafu je zřejmé, že dva chlapci a deset dívek (46,2%) má raději geometrii rovinnou (planimetrii). Prostorovou geometrii (stereometrii) uvedlo jako oblíbenou oblast jeden chlapec a čtyři dívky (19,2%). Pěti chlapcům a čtyřem dívkám (34,6%) nezáleží na volbě dimenze geometrie.

12.2 **Cílené řešení stereometrických úloh**

Na úvod první společné vyučovací hodiny byli studenti seznámeni s cílem šetření, a jaké z něj pro ně budou plynout závěry – test, který se bude psát následující hodinu, se bude započítávat do klasifikace.

12.2.1 Úvodní úloha

Pro připomenutí učiva z předešlých vyučovacích hodin vyřešili studenti nejprve úvodní úlohu u tabule. Aby dokázali úlohu vyřešit, byly jim kladeny otázky určující správný směr k nalezení řešení. Úlohu posléze poměrně snadno vyřešili.

Úloha 10

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímek p a q. A[0;0;0], a = 5cm, p = BD, q = AH.

Řešení:

a) Aby mohli studenti nalézt odchylku dvou přímek, museli nejprve určit jejich směrové vektory. K tomu bylo nutné znát souřadnice jednotlivých bodů. Zadány byly souřadnice bodu A a délka strany a, A[0;0;0], a = 5cm, a proto mohli ihned určit souřadnice bodů B, D a H: B[5;0;0], D[0;5;0], H[0;5;5].

b) Dále určili souřadnice směrových vektorů.

p = BD, $\mathbf{u_p}$ = D - B = (-5;5;0); q = AH, $\mathbf{u_q}$ = H - A = (0;5;5)

$$\mathbf{\cos\alpha = \frac{|u_p . u_q|}{|u_p| . |u_q|}}$$

$$\cos\alpha = \frac{|25|}{\sqrt{50}.\sqrt{50}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},$$

$\boldsymbol{\alpha = 60°}$ Odchylka přímek p a q je 60°.

• •

12.2.2 Řešení stereometrické úlohy

Jak jsme již uvedli, bylo v první hodině záměrem představit studentům řešení stereometrické úlohy různými metodami – konstrukční, analytickou a početní, aby mohli následující hodinu vyřešit tímto způsobem úlohu v testu.

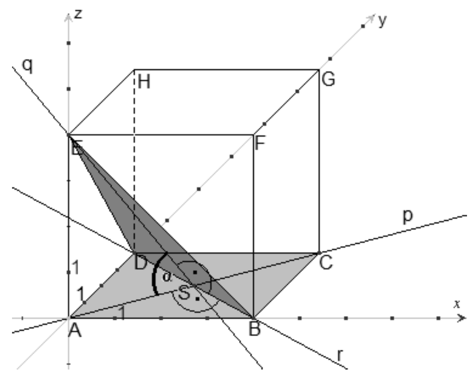
Při řešení následující úlohy byly studentům opět kladeny vhodné otázky, aby bylo dosaženo správného řešení.

Úloha 11

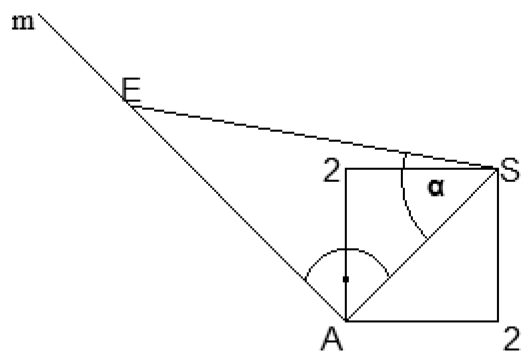
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku rovin ABC a BDE. A[0;0;0], a = 4cm. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

Konstrukční řešení

Náčrt



Konstrukce



Postup konstrukce

1. čtverec A2S2, a = 2cm
2. →m; →m ⊥ AS, A ϵ →m
3. E; |AE| = 4cm, E ϵ →m
4. trojúhelník ASE
5. α; α = |∢ASE|

Závěr: Odchylka rovin ABC a BDE je asi 55°.

Analytické řešení

a) Nejprve bylo nutné nalézt průsečnici rovin ABC a BDE, na kterou je kolmá přímka z roviny ABC a zároveň z roviny BDE. S je střed BD, p = AS, p $\perp$ BD, p ϵ ABC, q = ES, q $\perp$ BD, q ϵ BDE. Přímka BD = r je průsečnicí rovin ABC a BDE.

   => odchylkou rovin ABC a BDE je tedy |∢pq| = |∢ASE|.

b) Určili jsme souřadnice bodů A, S, E. A[0;0;0], a = 4cm, pak tedy S[2;2;0], E[0;0;4].

c) Odchylku přímek p a q jsme vypočítali podle vzorce $\mathbf{cos}\alpha = \frac{|\mathbf{u_p}.\mathbf{u_q}|}{|\mathbf{u_p}|.|\mathbf{u_q}|}$, kde

$\mathbf{u_p}$ je směrový vektor přímky p, $\mathbf{u_p}$ = S – A = (2;2;0)

$\mathbf{u_q}$ je směrový vektor přímky q, $\mathbf{u_q}$ = S – E = (2;2;-4)

$|\mathbf{u_p}.\mathbf{u_q}| = |u_{p_1}.u_{q_1} + u_{p_2}.u_{q_2} + u_{p_3}.u_{q_3}| = |2.2 + 2.2 + 0.(-4)| = |8| = 8$

$$|\mathbf{u_p}| = \sqrt{u_{p_1}^2 + u_{p_2}^2 + u_{p_3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{u_q}| = \sqrt{u_{q_1}^2 + u_{q_2}^2 + u_{q_3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{2\sqrt{2}.2\sqrt{6}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

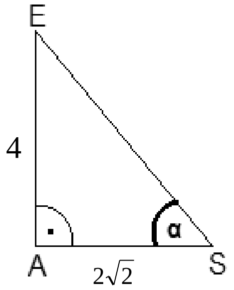
α=54°44´ Odchylka rovin ABC a BDE je 54°44´.

Početní řešení

Zjistili jsme, že odchylkou rovin ABC a BDE je |∢pq| = |∢ASE|. Odchylku jsme tedy zjišťovali z pravoúhlého trojúhelníku SAE s pravým úhlem při vrcholu A

a) |AE| = 4cm, |AS| = $2\sqrt{2}$
   - |AS| má délku poloviny úhlopříčky čtverce dolní podstavy ABCD.

b) Výslednou odchylku jsme vypočítali pomocí goniometrické funkce tangens.



$$\text{tg}\ \alpha = \frac{|AE|}{|AS|},$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{tg}\ \alpha = \sqrt{2},$$

α = 54°44´ Odchylka rovin ABC a BDE je 54°44´.

12.2.3 Průběh a hodnocení první vyučovací hodiny

V úloze 10 museli studenti nejprve určit souřadnice bodů A, B, D, H. Zpočátku si nebyli jistí, jak souřadnice nalézt, jelikož jsou zvyklí na odlišné zadání souřadného systému. Proto jim byl vysvětlen způsob nalezení souřadnic u bodu B, jelikož byl zadán bod A a délka strany krychle, a poté bez problému určili souřadnice hledaných bodů. Odchylku přímek poté už snadno vyřešili, jelikož se jedná o učivo, které probírali v předešlých hodinách.

Následovala úloha 11, ve které museli studenti provést náčrt a konstrukci, dále pak analytické řešení a nakonec řešení početní. Náčrt provedl jeden student na tabuli, který se zároveň snažil o nalezení průsečnice rovin ABC a BDE. Vzhledem k tomu, že se jednalo o jednoho z nejlepších studentů ve třídě, tak průsečnici našel, ale tímto způsobem úlohy na gymnáziu nikdy neřeší. Vždy hledají normálové vektory rovin a počítají odchylku.

Následovala konstrukce, se kterou se již studenti dříve setkali, ale nepamatovali si ji, proto bylo nutné jim ji narýsovat na tabuli a vysvětlovat postup konstrukce. Bylo zřejmé, že se studentům postup konstrukce vybavil, jelikož občas zmínili, jak postupovat.

Po konstrukci jsme se zaměřili na analytické řešení, které zvládli studenti poměrně snadno, jelikož zjistili, že stačí nalézt odchylku dvou přímek, což jsme dělali v úvodní úloze na začátku hodiny.

Třetí přístup k řešení stereometrické úlohy uvedený v této diplomové práci je početní řešení, které nebylo pro studenty také žádným problémem. Dokázali si zvolit správný trojúhelník, ve kterém vypočítali příslušnou odchylku pomocí goniometrické funkce tangens.

Ve vyučovací hodině byl přítomen i pan učitel matematiky tohoto třetího ročníku. Během výuky jsme stihli vše, co bylo naplánováno, a tak bylo možné dát studentům následující hodinu test zahrnující právě tyto tři přístupy k řešení stereometrických úloh.

12.3 **Test**

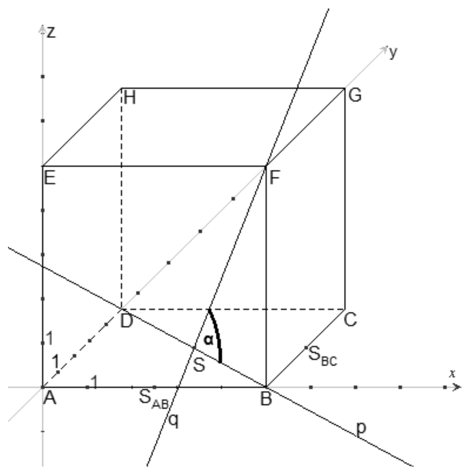
Druhou vyučovací hodinu proběhl test. Všichni studenti měli stejnou variantu, proto byli rozsazeni, aby nemohli opisovat. Celkový čas na test byl 40 min. Každý student musel napsat datum, ročník a své jméno, příjmení.

Úloha 12

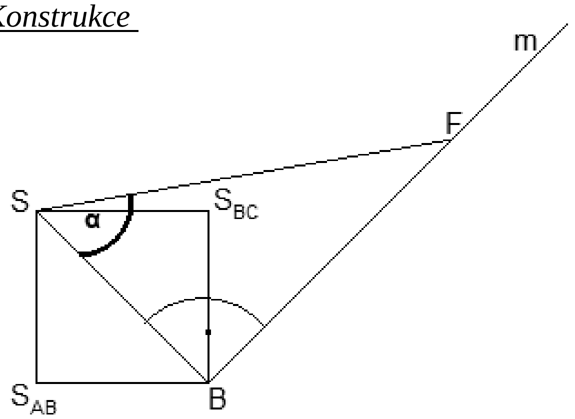
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky BS a FS. A[0;0;0], a = 5cm, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

Konstrukční řešení

<u>Náčrt</u>



<u>Konstrukce</u>



<u>Postup konstrukce</u>

1. čtverec $S_{AB}BS_{BC}S$, a = 2,5cm
2. $\rightarrow m$; $\rightarrow m \perp BS$, $B \in \rightarrow m$
3. F; |BF| = 5cm, $F \in \rightarrow m$
4. trojúhelník BSF
5. α; α = |∢BSF|

<u>Závěr:</u> Odchylka přímky BS a FS je asi 55°.

Analytické řešení

a) Je dána přímka p a přímka q, p = BS, q = FS. Známe souřadnice bodu A a délku strany a, A[0;0;0], a = 5cm, určíme souřadnice bodů B, F a S: B[5;0;0], F[5;0;5], S$\left[\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right]$.

b) Odchylku přímek p a q vypočítáme podle vzorce **cos α =** $\frac{|\mathbf{u_p u_q}|}{|\mathbf{u_p}|.|\mathbf{u_q}|}$, kde

$\mathbf{u_p}$ je směrový vektor přímky p, $\mathbf{u_p}$ = B - S = $\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2};0\right)$

$\mathbf{u_q}$ je směrový vektor přímky q, $\mathbf{u_q}$ = F - S = $\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2};5\right)$

$|\mathbf{u_p u_q}| = |u_{p_1}.u_{q_1} + u_{p_2}.u_{q_2} + u_{p_3}.u_{q_3}| = \left|\frac{5}{2}.\frac{5}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right).\left(-\frac{5}{2}\right)+0.5\right| = \frac{50}{4}$

$$|\mathbf{u_p}| = \sqrt{u_{p_1}^2+u_{p_2}^2+u_{p_3}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2+0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$|\mathbf{u_q}| = \sqrt{u_{q_1}^2+u_{q_2}^2+u_{q_3}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2+5^2} = \sqrt{\frac{150}{4}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{50}{4}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}.\frac{5\sqrt{6}}{2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{12}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

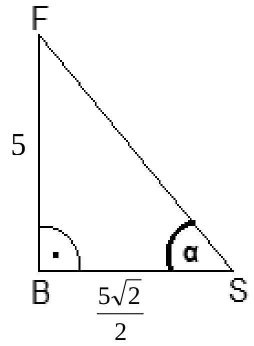
α = 54°44´ Odchylka přímek BS a FS je 54°44´.

Početní řešení

a) K výpočtu využijeme pravoúhlý trojúhelník SBF s pravým úhlem při vrcholu B

b) |BF| = 5cm, |BS| = $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

c) Získáváme pravoúhlý trojúhelník SBF



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BF|}{|BS|},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\frac{5\sqrt{2}}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$$

α = 54°44´ Odchylka přímek BS a FS je 54°44´.

● ●

12.3.1 Průběh a hodnocení druhé vyučovací hodiny

Ve druhé vyučovací hodině psali studenti test. Nejprve jim byly sděleny pravidla při psaní testu a následky při jejich porušení. Následně byl rozdán test, který byl předtištěný na papíře. Studenti jej dostali otištěnou stranou dolů a ve chvíli, kdy měl každý své zadání, mohli test otočit a pracovat.

Nejprve bylo apelováno na vyplnění záhlaví, kde museli studenti uvést datum, ročník a jméno, příjmení – čitelně. Následně pak mohli vypracovávat test. Z předchozího dne byli upozorněni, že si mají přinést vlastní rýsovací pomůcky a že mohou používat kalkulačku.

Vzhledem k tomu, že měl každý student stejné zadání, museli jsme na ně dohlížet, aby neopisovali. Pracovali však samostatně, ve třídě byl relativně klid, který byl narušován pouze půjčováním kalkulačky, což jsme tolerovali.

Během testu měli někteří studenti otázky, a tak jim byly v tichosti zodpovězeny. Po 40 min byl test vybrán. Následující den byly již testy opravené, a tak bylo bodové hodnocení testu zadáno na internet, kde mají studenti možnost sledovat známky z jednotlivých předmětů.

12.3.2 Zhodnocení testu

Za test mohli studenti získat celkem 8 bodů. Tři body za konstrukční řešení, tři body za analytické řešení a dva body za řešení početní. Ve vyučovací hodině bylo přítomno 24 studentů, z toho osm chlapců a šestnáct dívek.

Konstrukční řešení (*náčrt a konstrukce*)

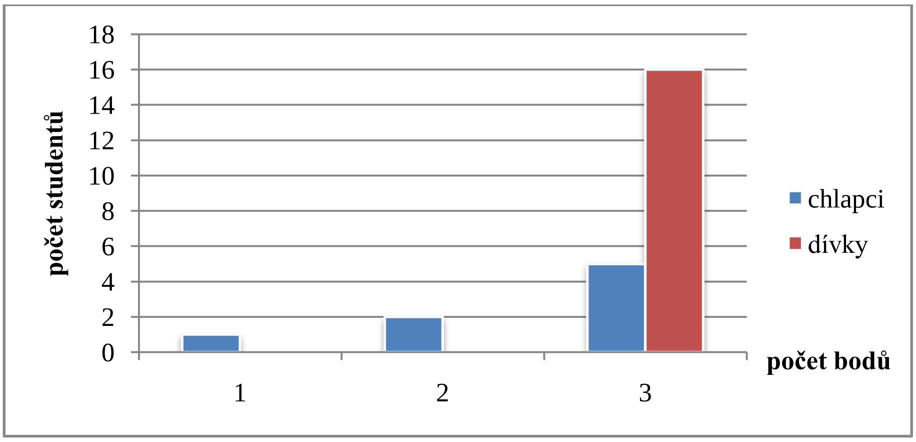
Studenti mohli získat jeden bod za náčrt a dva body za konstrukci, z toho jeden bod za správnou konstrukci a druhý bod za změření hledaného úhlu úhloměrem a napsání odpovědi.

Tabulka 9 – Bodové hodnocení konstrukčního řešení

		náčrt	**konstrukce**				
	N	1 b	0 b	1 b	2 b	**Σ**	**$\bar{x}$**
chlapci	8	8	1	2	5	3	2,5
dívky	16	16	0	0	16	3	3

Σ… maximální počet bodů za konstrukční řešení $\bar{x}$ … průměrný počet bodů za konstrukční řešení

Graf 9 – Bodové hodnocení konstrukčního řešení



Každý student provedl správný náčrt, proto byl ohodnocen jedním bodem. Rozdíly nastaly v konstrukci. Jeden chlapec nedostal ani jeden bod za konstrukci, dva chlapci nezměřili úhel úhloměrem a nenapsali slovní odpověď, proto dostali jeden bod, ostatních pět chlapců získalo za konstrukci dva body. Dívky získaly za náčrt i konstrukci maximální počet bodů. Celkově měl tedy jeden chlapec pouze jeden bod, dva chlapci pak po dvou bodech a pět chlapců tři body. Všech 16 dívek dostalo za konstrukční řešení tři body. Průměrný počet bodů u chlapců byl 2,5, u dívek body tři. Úspěšnost chlapců byla celkově 83,3% a dívek 100%.

Analytické řešení

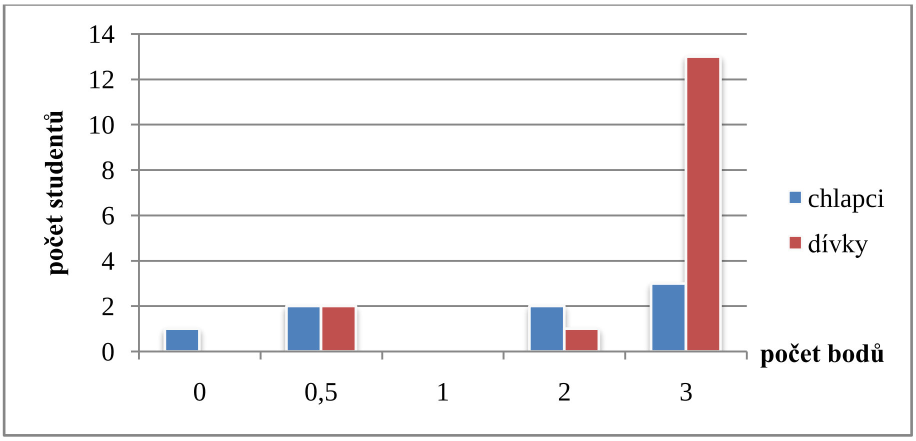
Jak jsme již uvedli, měli studenti možnost získat za analytické řešení tři body. Jeden bod za správné určení souřadnic směrových vektorů **u** a **v**, resp. $\mathbf{u_p}$ a $\mathbf{u_q}$, další bod za využití správného vzorce pro výpočet úhlu α a dosazení, třetí bod pak za správný výsledek, tedy úhel α. Pokud student napsal alespoň vzorce pro výpočet úhlu α, získal tak půl bodu.

Tabulka 10 – Bodové hodnocení analytického řešení

	N	0 b	0,5 b	2 b	3 b	Σ	$\bar{x}$
chlapci	8	1	2	2	3	3	1,75
dívky	16	0	2	1	13	3	2,63

Σ… maximální počet bodů za analytické řešení $\bar{x}$ … průměrný počet bodů za analytické řešení

Graf 10 – Bodové hodnocení analytického řešení



Z maximálních tří bodů, které bylo možné získat za analytické řešení úlohy, získal jeden chlapec nula bodů, jelikož neuvedl ani vzorec pro výpočet úhlu α. Dva chlapci a dvě dívky naopak uvedli pouze tento vzorec, proto byli ohodnoceni půl bodem. Jeden bod nezískal nikdo, dva body dva chlapci a dvě dívky. Maximální počet bodů měli tři chlapci a třináct dívek.

Chlapci získali průměrně 1,75 bodů a dívky 2,63 bodů, jak je zřejmé z tabulky 10. Úspěšnost chlapců byla tedy 58,3% a u dívek pak 87,7%.

Početní řešení

Za tento přístup k řešení stereometrické úlohy měli studenti možnost získat dva body. Jeden bod za správně zvolený pravoúhlý trojúhelník s vyznačenými délky stran a druhý bod za zvolení vhodné goniometrické funkce a vypočtení hledaného úhlu α.

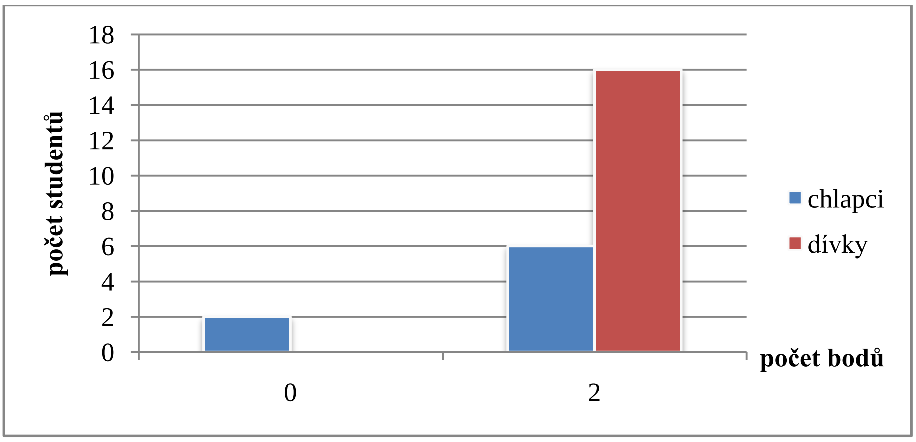
Tabulka 11 – Bodové hodnocení početního řešení

	N	0	2	Σ	$\overline{x}$
chlapci	8	2	6	2	1,5
dívky	16	0	16	2	2

Σ… maximální počet bodů za početní řešení

$\overline{x}$ … průměrný počet bodů za početní řešení

Graf 11 – Bodové hodnocení početního řešení



Početní řešení jsme považovali za nejsnazší přístup k řešení stereometrické úlohy, a proto bylo ohodnoceno dvěma body, nikoli třemi, jako dva předchozí přístupy. Přesto byli dva studenti, chlapci, kteří početní řešení nezvládli a získali proto nula bodů. Ostatní studenti, šest chlapců a 16 dívek mělo početní řešení správně, a proto měli za tuto část testu dva body. Žádný student neprovedl pouze načrtnutí trojúhelníku nebo výpočet úhlu, proto nikdo neměl pouze jeden bod.

V tabulce 11 si můžeme všimnout, jaké měli chlapci a dívky průměrné bodové hodnocení. U chlapců byl průměrný počet bodů za tuto úlohu 1,5 bodu a u dívek body dva. U chlapců byla úspěšnost 75% a u dívek činila 100%.

Nejúspěšnějším přístupem k řešení stereometrické úlohy bylo u dívek konstrukční a početní řešení, chlapci nejlépe zvládli řešení konstrukční.

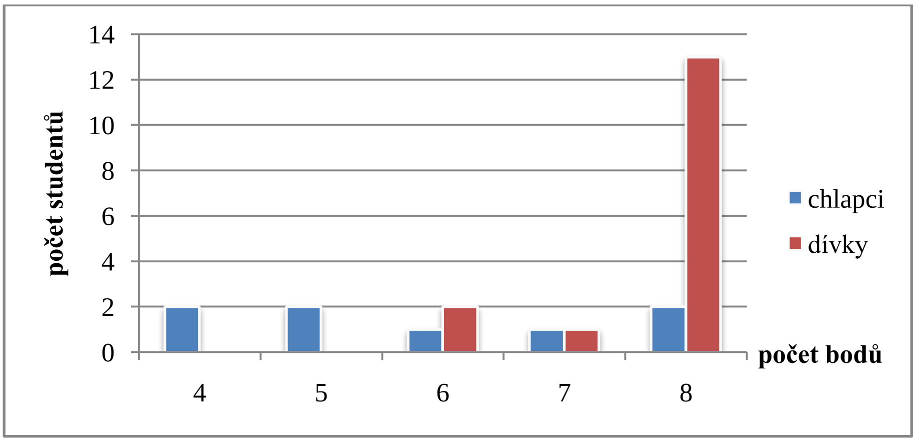
Celkové bodové hodnocení

Studenti měli možnost získat dohromady z celého testu osm bodů. Při sčítání bodů jsme zvolili zaokrouhlení směrem nahoru. Pokud měl tedy student například 5,5 bodů, získal celkově bodů šest.

Tabulka 12 – Celkové bodové hodnocení

	N	počet bodů					$\bar{x}$	s^2	s	$\tilde{x}$
		4 b	5 b	6 b	7 b	8 b				
chlapci	8	2	2	1	1	2	5,88	2,70	1,64	5,5
dívky	16	0	0	2	1	13	7,69	0,50	0,70	8

Graf 12 – Celkové bodové hodnocení



Plný počet bodů získali z testu dva chlapci a třináct dívek. Jeden bod ztratil jeden chlapec a jedna dívka, celkem tedy měli sedm bodů. Bodů šest dostal jeden chlapec a dvě dívky. Dva chlapci napsali test na pět bodů a dva na čtyři body.

Průměrný počet bodů z testu byl u chlapců 5,88 a u dívek 7,69, což je u chlapců 73,5% a u dívek 96,1% úspěšnost. Z výsledku je tedy zřejmé, že náš předpoklad o větším úspěchu chlapců se nepotvrdil. Rozptyl bodů u dívek je mnohem menší než u chlapců. U dívek činí 0,5, u chlapců pak 2,7. Medián je u chlapců 5,5 a u dívek osm.

Řešení některých chlapců se lišilo v umístění souřadného systému, jelikož jsou tak zvyklí z hodin fyziky (měli opačně osy y a z oproti našemu řešení). Nicméně na výsledku se nic samozřejmě nemění. Další rozdíl se objevil v konstrukčním řešení. Někteří studenti rýsovali celou podstavu ABCD, nalezli bod S jako střed úhlopříčky BD a poté dokončili konstrukci shodným způsobem, jako jsme postupovali ve vyučovací hodině.

12.4 **Závěrečný dotazník**

ročník		pohlaví		nejčastější známka z matematiky	

Správnou odpověď označte křížkem „X“.

1. **S takovými úlohami jsem se v hodinách matematiky:**
   a) setkal/a často
   b) setkal/a občas
   c) nesetkal/a

2. **Úlohy pro mě byly:**
   a) lehké
   b) středně těžké
   c) těžké

3. **Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejlehčí:**
   a) konstrukční
   b) početní
   c) analytický

4. **Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejtěžší:**
   a) konstrukční
   b) početní
   c) analytický

5. **Co by podle mě měla/mohla obsahovat ideální hodina geometrie:**
   ……………………………………………………………………………………..
   ……………………………………………………………………………………..
   ……………………………………………………………………………………..

Velice Vám děkuji za vyplnění dotazníku.

12.4.1 Otázky v dotazníku

Hlavičku v závěrečném dotazníku vyplnili studenti shodně, jako v dotazníku úvodním, proto jí nebudeme věnovat další pozornost.

Jak jsme uvedli v kapitole 8.3, otázek bylo celkem pět, z toho mohli studenti zaškrtnout vždy pouze jednu správnou odpověď a pátá otázka byla pro studenty otevřená.

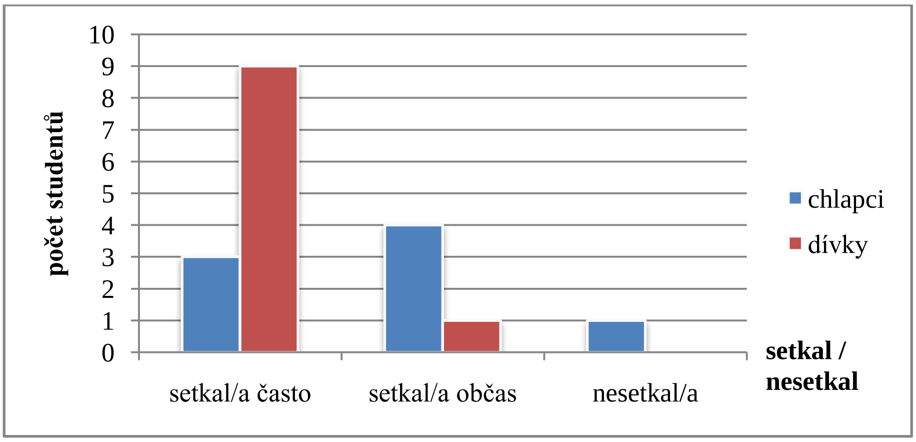
Povědomí o uvedeném typu úloh (*S takovými úlohami jsem se v hodinách matematiky*)

První otázka v závěrečném dotazníku zjišťovala, jestli se studenti s tímto typem úloh setkali v hodinách matematiky. Jako možné odpovědi bylo setkal/a často; setkal/a občas; nesetkal/a.

Tabulka 13 – Povědomí o uvedeném typu úloh

	N	setkal/a často	setkal/a občas	nesetkal/a
chlapci	8	3	4	1
dívky	15	9	6	0

Graf 13 – Povědomí o uvedeném typu úloh



Tři chlapci a devět dívek (52,1%) uvedlo, že se s těmito úlohami setkávali často, nicméně ne s tolika přístupy k řešení úloh najednou. Čtyři chlapci a šest dívek (43,7%) uvedlo možnost setkal/a občas a pouze jeden chlapec (4,2%) nabyl dojmu, že se s uvedenými úlohami nikdy nesetkal. Tím se potvrdil náš předpoklad o tom, že se studenti s takovým komplexním přístupem k řešení stereometrických úloh nikdy nesetkali.

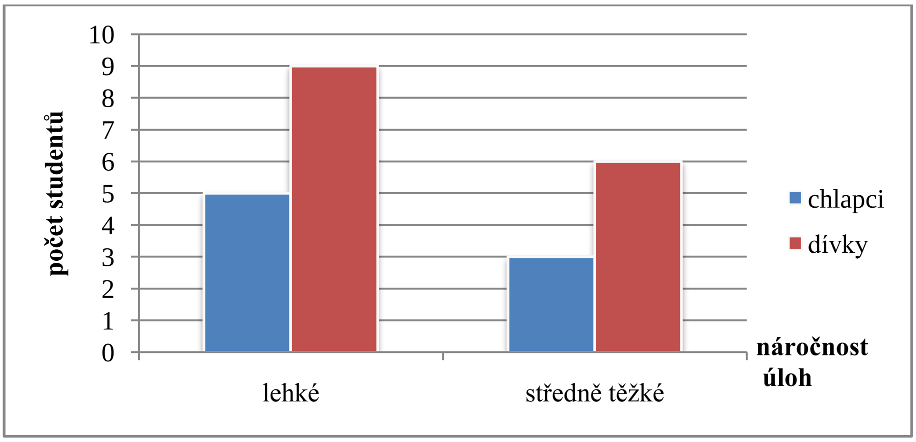
Náročnost úloh (*Úlohy pro mě byly*)

Ve druhé otázce jsme se zabývali náročností úloh pro studenty. Možnosti pro odpověď byly opět tři – úlohy pro mě byly lehké; středně těžké nebo těžké.

Tabulka 14 – Náročnost úloh

	N	lehké	středně těžké	těžké
chlapci	8	5	3	0
dívky	15	9	6	0

Graf 14 – Náročnost úloh



Vzhledem k tomu, že měli studenti právě probrané základy z analytické geometrie a počítali odchylky přímek, byly pro ně tyto úlohy převážně snadné. Lehké byly pro pět chlapců a devět dívek (60,9%). Ostatní studenti, tři chlapci a šest dívek (39,1%), považovali úlohy za středně těžké. Žádný student (0%) neuvedl třetí možnost, že se mu jevily úlohy těžké, proto jsme tuto skutečnost zohlednili v grafu, kam jsme třetí možnost odpovědi nezahrnuli.

Pravdou je, že výběr úloh pro studenty byl následující – v první vyučovací hodině jsme společně vyřešili náročnější úlohu, ve které jsme hledali odchylku dvou rovin. V testu studenti řešili odchylku dvou přímek, což je úloha snadnější, proto je pochopitelné, že považovali úlohy za lehké či středně těžké. Důvodem je i to, že výzkumná byla sonda prováděna ve třídě, která je v matematice velmi dobrá.

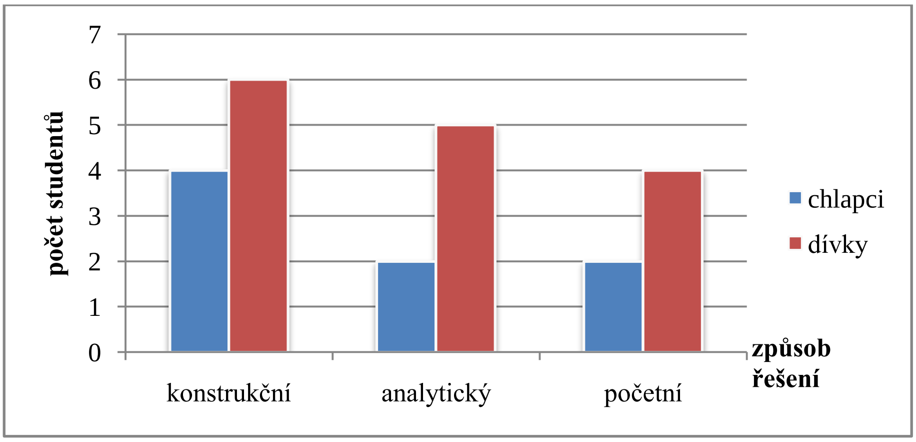
Nejlehčí přístup k řešení úloh (*Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejlehčí*)

V této otázce jsme zjišťovali, jestli byl nejlehčím přístupem k řešení úloh způsob konstrukční; analytický či početní.

Tabulka 15 – Nejlehčí přístup k řešení úloh

	N	konstrukční	analytický	početní
chlapci	8	4	2	2
dívky	15	6	5	4

Graf 15 – Nejlehčí přístup k řešení úloh



Mysleli jsme si, že nejlehčím způsobem bude pro studenty přístup analytický, jelikož toto učivo studenti zrovna probírali, ale k našemu očekávání tomu bylo jinak. Za nejlehčí řešení považovalo deset studentů konstrukční řešení, z toho čtyři chlapci a šest dívek (43,5%). Analytický přístup k řešení úlohy přišel nejlehčí dvěma chlapcům a pěti dívkám (30,4%). Početní řešení dopadlo podobně jako analytické, nejlehčí bylo pro dva chlapce a čtyři dívky (26,1%), což je poměrně paradoxní, jelikož právě početní řešení je ze všech tří přístupů nejsnazší.

Můžeme si tedy všimnout, že celkově má největší zastoupení u chlapců i dívek pro nejlehčí přístup konstrukční řešení úlohy.

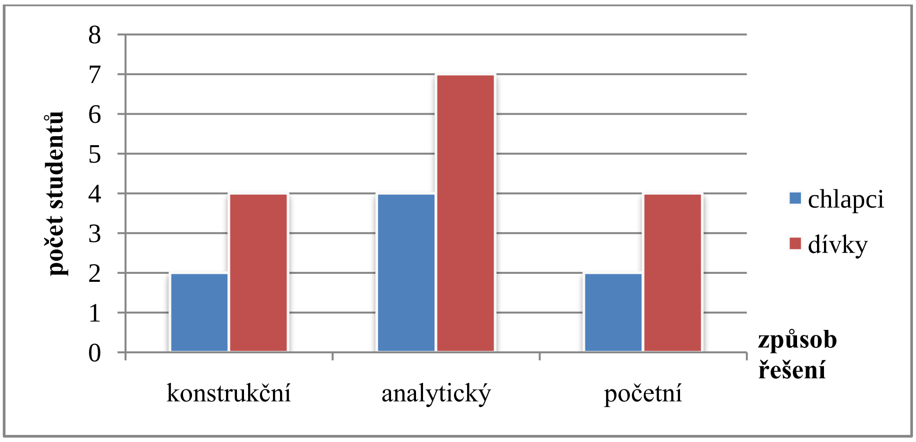
Nejtěžší přístup k řešení úloh (*Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejtěžší*)

Čtvrtá otázka se zajímala naopak o nejtěžší způsob řešení úloh. Výběr možných odpovědí byl shodný, jako v otázce třetí a tedy – konstrukční; analytický či početní.

Tabulka 16 – Nejtěžší přístup k řešení úloh

	N	konstrukční	analytický	početní
chlapci	8	2	4	2
dívky	15	4	7	4

Graf 16 – Nejtěžší přístup k řešení úloh



Při zjišťování nejtěžšího přístupu pro studenty bylo konstrukční řešení uvedeno šestkrát, analytické jedenáctkrát a početní šestkrát. Konstrukční přístup uvedli za nejtěžší dva chlapci a čtyři dívky (26,1%), analytický pak čtyři chlapci a sedm dívek (47,8%). Početní řešení je považováno dvěma chlapci a čtyřmi dívkami (26,1%) za nejtěžší.

Pro chlapce byl celkově nejtěžším způsobem k řešení stereometrických úloh přístup analytický, stejně tak i pro dívky. Zvážíme-li skutečnost, že studenti toto učivo zrovna probírali ve škole, může být výsledek této otázky poněkud překvapující.

Ideální hodina geometrie (*Co by podle mě měla obsahovat ideální hodina geometrie*)

Poslední otázka závěrečného dotazníku byla otevřená a zaměřila se na zjištění, jaké aktivity by podle studentů měly ideálně probíhat ve vyučovací hodině geometrie. Někteří studenti samozřejmě uvedli možnosti, které v hodinách geometrie nejsou možné, např. spánek, pouštění videí na youtube nebo surfování po internetu, ale napsali i několik vhodných aktivit a připomínek uskutečnitelných v hodinách geometrie.

Nejčastější odpovědí byla potřeba více rýsovat a méně počítat. Konstrukčním úlohám je málo věnována pozornost. Studenti cítí potřebu provádět náčrt, a navíc je dle jejich názoru nutné dostatečně vysvětlovat postup konstrukce. Jiní byli naopak proti rýsování, a konkrétně pak proti rýsování na tabuli, jelikož to může působit komicky.

Další potřebou pro studenty bylo spočítání co největšího množství příkladů, ale s dostatečným výkladem. Ze strany vyučujícího by měla být snaha o eliminaci vyvolávání pouze šikovnějších studentů a naopak zvýšení počtu vyvolání i těch méně šikovných v matematice. Následně pak vyřešení příkladu u tabule a případné vysvětlení nejasností.

Poměrně zajímavou odpovědí byla touha po návštěvě matematického muzea. Tato exkurze by samozřejmě nemohla být uskutečnitelná pouze v rámci jedné hodiny geometrie, ale jednalo by se o celodenní akci. Nicméně si myslíme, že je to vhodný námět pro jiný pohled na matematiku.

Poněkud překvapivé je zjištění, že není uváděno žádné řešení geometrických hádanek, hlavolamů a didaktických her, které mohly studentům ukázat právě ten jiný pohled na geometrii.

12.5 **Porovnání dotazníků**

Závěrem naší výzkumné sondy bychom porovnali úvodní a závěrečný dotazník.

V úvodním dotazníku uvedla spousta studentů, že v hodinách geometrie jak počítají, tak rýsují, rýsování dokonce uvedlo více studentů. Přesto se v závěrečném dotazníku objevila odpověď, že by se studenti chtěli rýsování věnovat mnohem více.

Čtvrtá otázka úvodního dotazníku zjistila, že analytická a konstrukční geometrie patří u studentů mezi oblíbené, což je poměrně zajímavé, jelikož v závěrečném dotazníku uvedlo analytický přístup k řešení úloh jako nejtěžší nejvíce studentů. Konstrukční přístup považují studenti za nejlehčí, proto je logické, že ho studenti považují za oblíbený.

Pouze několik studentů uvedlo, že geometrie pro ně není oblíbeným předmětem, ale na výsledcích testu to nebylo nijak znát, dopadly poměrně slušně. Proto si dovolíme tvrdit, že ačkoli matematika, jmenovitě geometrie, nemusí být oblíbeným předmětem, jsou studenti schopni se na test co nejlépe připravit, a navíc mají snahu se v této oblasti více vzdělávat.

ZÁVĚR

Záměrem naší diplomové práce bylo naplnění hlavního a dílčích cílů. Potřebné informace jsme získali z prostudování RVP G, na jehož základě bylo možné sestavit úlohy z analytické geometrie s jejich konstrukčním řešením. Sestrojili jsme tedy sbírku úloh a několik jich aplikovali ve třech vyučovacích hodinách matematiky na Gymnáziu F. X. Šaldy v Liberci. Dvě úlohy v první vyučovací hodině a jednu úlohu formou testu v hodině druhé. Dále jsme využili dva dotazníky, úvodní před prováděním výzkumné sondy, závěrečný po realizaci výzkumného šetření.

Předpokládali jsme, že v testu budou chlapci úspěšnější než dívky a že se studenti s takovým komplexním přístupem, který jsme jim předložili, nikdy nesetkali. Dále jsme z dotazníku zjišťovali, jaký přístup je dle studentů nejlehčí, jaký naopak nejtěžší a porovnali jsme tyto skutečnosti s výsledky z testu.

V první vyučovací hodině bylo ve třídě 26 studentů, z toho 8 chlapců a 18 dívek. Z hlavičky úvodního dotazníku jsme zjišťovali nejčastější známku z matematiky a dále pak, kam chtějí studenti pokračovat po maturitě. Chlapci dostávají nejčastěji na vysvědčení jedničku a dívky mají nejčastěji známku 2. Celkově je však průměrná známka u chlapců 2,13 a u dívek 2,33. Po maturitě chce každý student studovat vysokou školu, nikdo nemá v plánu nastoupit do pracovního poměru. Nejvíce chlapců se rozhodlo pro studium technického oboru na vysoké škole, dívky by volily raději obor přírodovědný.

Úvodní dotazník zjišťoval oblíbenost matematiky a poté konkrétně geometrie. Překvapením možná bude, že nejvíce chlapců a dívek zvolilo možnost, že matematika u nich patří mezi předměty oblíbené. Geometrie již není tolik oblíbená, a tak studenti zvolili možnost odpovědi – geometrie je pro nás méně oblíbená. Zabývali jsme se otázkou, jakým činnostem se studenti věnují nejvíce v hodinách geometrie. Chlapci i dívky uvedli, že v hodinách geometrie nejčastěji rýsují. Možná proto patří konstrukční přístup k řešení úloh k nejoblíbenějším u studentů. Domníváme se, že dívky mají sníženou prostorovou představivost oproti chlapcům, a proto uváděly, že mají raději geometrii rovinnou, nikoli prostorovou. Chlapcům na volbě dimenze řešení úloh nezáleží. Ukázky vyplněných dotazníků jsou k dispozici v příloze č. 1.

Druhou vyučovací hodinu jsme na studentech testovali jednu úlohu řešenou třemi přístupy uvedenými v předchozí hodině – konstrukčním, analytickým a početním. Na test přišlo 8 chlapců a 16 dívek, tedy o dvě dívky méně než hodinu předchozí. Test za plný počet 8 bodů dopadl celkem slušně. Někteří chlapci měli tedy pouze čtyři nebo pět bodů, ale jiní měli i osm bodů. Dívky dopadly mnohem lépe než chlapci. Třináct dívek z 16 mělo plný počet bodů z testu. Průměrný počet bodů u chlapců činil 5,88 a u dívek pak 7,69, a tak můžeme konstatovat, že náš předpoklad o větší úspěšnosti v testu u chlapců byl nesprávný. Některé ukázky testů jsou uvedeny v příloze č. 2. Z důvodu zachování anonymity jsme skryli jména studentů.

Závěrečný dotazník ve třetí vyučovací hodině zjišťoval, zdali se studenti někdy setkali s takovými úlohami v hodinách matematiky. Největší zastoupení měla odpověď ano, ale ne s tolika přístupy najednou. Tím se potvrdil náš předpoklad o tom, že se studenti nesetkávají s takto komplexním přístupem k řešení úloh. Studentům přišly úlohy poměrně snadné, což je pravděpodobně dáno tím, že právě skončili učivo analytické geometrie (čekalo je ještě probrání kuželoseček) a že jsme těžší úlohu řešili společně v první vyučovací hodině a úlohu lehčí řešili studenti sami v testu. Toto rozhodnutí jsme udělali z důvodu, že během první vyučovací hodiny museli být studenti často naváděni otázkami, aby úlohu vyřešili. Dále pak studenti úlohy nikdy neřešili v souřadném systému, jak to po nich bylo žádáno tentokrát. A za třetí jsme využívali jiné umístění souřadného systému, než který znali studenti z hodin fyziky.

Za nejlehčí přístup považovali studenti konstrukční řešení, za nejtěžší naopak analytické, jak se ukázalo i v testu. Úspěšnost chlapců v analytickém řešení byla 58,3% a v konstrukčním naopak 83,3%. Analytické řešení u dívek zaznamenalo 87,7% úspěšnost a konstrukční byla u dívek 100%. Stejně tak tomu měly dívky v početním řešení, také 100% úspěšnost.

Z poslední otázky závěrečného dotazníku jsme zjistili, že by studenti chtěli více v hodinách geometrie rýsovat a naopak méně počítat. Při rýsování by preferovali provést náčrt, poté vysvětlovat postup konstrukce a vyřešit co nejvíce úloh. Ukázky vyplněných dotazníků jsou k nahlédnutí v příloze č. 3.

Závěrem tedy můžeme říci, že ačkoli byli studenti seznámeni již v dřívějším studiu postupně s těmito různými přístupy řešení, ale nikdy ne v takto komplexní podobě, neměli nakonec příliš velké problémy s vyřešením úloh. Velice si vážíme toho, že jsme měli možnost tyto přístupy studentům představit a jsme toho názoru, že by tímto způsobem mohla probíhat výuka analytické geometrie na středních školách.

LITERATURA

[1] FOLTA, J.: *Dějiny matematiky 1*. Praha: Národní technické muzeum Praha, 2004. 145 s. ISBN 80-239-4031-7.

[2] JEŘÁBEK, J., aj.: *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Praha: VÚP, 2007. 100 s. ISBN 978-80-87000-11-3.

[3] KOČANDRLE, M.; BOČEK, L.: *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie.* Praha: Prometheus, 2004. 220 s. ISBN 80-7196-163-9.

[4] MLODINOW, L.: *Eukleidovo okno*: *příběh geometrie od rovnoběžek k hyperprostoru*. Praha: Slovart, 2007. 259 s. ISBN 978-80-7209-900-9.

[5] POMYKALOVÁ, E.: *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. Praha: Prometheus, 2004a. 206 s. ISBN 80-7196-174-4.

[6] POMYKALOVÁ, E.: *Matematika pro gymnázia: Stereometrie*. Praha: Prometheus, 2004b. 223 s. ISBN 80-7196-178-7.

[7] STRUIK, D. J.: *Dějiny matematiky.* 1. vyd. Praha: Orbis, 1963. 250 s.

[8] URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie I.* 3. vyd. Praha: SNTL, 1982. 416 s. ISBN 04-009-82.

[9] VRBA, A.: *Cabri Geometrie II Plus – příručka pro uživatele.* Cabrilog S.A.S. 2003a. 85 s.

[10] PŘÍHONSKÁ, J.: *Přednášky z afinní geometrie.* FP TU v Liberci 2011.

[11] ŽÁČKOVÁ, P.: *Přednášky z geometrie*. FP TU v Liberci 2009.

[12] MARTIŠEK, D.: *Analytická geometrie* [online]. 2003a [cit. 2012-03-30]. Dostupné z: <http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka/Prij/skripta7.pdf>.

[13] MARTIŠEK, D.: *Planimetrie* [online]. 2003b [cit. 2012-03-28]. Dostupné z: <http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka/Prij/skripta6.pdf>.

[14] MARTIŠEK, D.: *Stereometrie* [online]. 2003c [cit. 2012-03-29]. Dostupné z: <http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka/Prij/skripta8.pdf>.

[15] VRBA, A., aj.: Cabri geometrie. In: *Český výukový portál* [online]. 2003b [cit. 2012-04-08]. Dostupné z: <http://www.pf.jcu.cz/cabri/index.html>.

Seznam použitých zkratek a symbolů

aj.	a jiné
apod.	a podobně
atd.	a tak dále
č.	číslo
např.	například
NVP	Národní program vzdělávání
př. n. l.	před naším letopočtem
resp.	respektive

RVP G	Rámcový vzdělávací program pro gymnázia
SŠ	střední škola
SVP	speciální vzdělávací potřeba
ŠVP	Školní vzdělávací program
tzv.	takzvaný
viz	videre licet
VŠ	vysoká škola

$A[a_1;a_2]$	bod A o souřadnicích a_1, a_2
$A \in p$	bod A leží na přímce p
A, B, C,…	body
$\in$	je prvkem
$= (\neq)$	je (není) rovno
$\parallel$	je rovnoběžno
$\perp$	je kolmo
k (S; r)	kružnice k se středem S a poloměrem r
R	množina reálných čísel
$\rightarrow$	polopřímka
$\cap$	průnik
$p \cap q$	průnik přímek p a q
p, q,…	přímka p, q
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$\mathbf{u_p}.\mathbf{u_q}$	skalární součin vektorů u_p, u_q
S_{AB}	střed úsečky AB
°, ′	stupeň, minuta

τ	Thaletova kružnice
$\sphericalangle$	úhel
α	úhel alfa
$\mathbf{u_p} = (u_{p_1};u_{p_2})$	vektor **u** o souřadnicích u_{p_1} a u_{p_2}
$\mathbf{u_p}$, $\mathbf{u_q}$,…	vektory
$\lvert\sphericalangle ABC\rvert$	velikost úhlu ABC
$\lvert\mathbf{u_p}\rvert$	velikost vektoru u_p
$\lvert AB\rvert$	vzdálenost bodů A, B
$\lvert Ap\rvert$	vzdálenost bodu A od přímky p

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha č. 1 – Ukázky vyplněných úvodních dotazníků

Příloha č. 2 – Ukázky opravených testů

Příloha č. 3 – Ukázky vyplněných závěrečných dotazníků

Příloha č. 4 – Komplexní přístup k řešení geometrických úloh – konstrukční, analytické/ početní řešení.

Poznámka: Příloha č. 4 je umístěna v záložce diplomové práce.

Příloha č. 1 – Ukázky vyplněných úvodních dotazníků

ročník	3	pohlaví	2	nejčastější známka z matematiky	1

po maturitě zamýšlíte *(ano - ne)*	studovat na VŠ obor				nastoupit do pracovního poměru	
	humanitní		přírodovědný	ANO		
	technický		umělecký			

Správnou odpověď označte křížkem „X".

1. **Matematika u mě patří mezi předměty:**
    a) oblíbené
    b) méně oblíbené
    c) neoblíbené

2. **Geometrie u mě patří mezi předměty:**
    a) oblíbené
    b) méně oblíbené
    c) neoblíbené

3. **V hodinách geometrie nejčastěji:**
    a) počítáme
    b) rýsujeme
    c) děláme jiné činnosti, jaké? ……………………………………………………

4. **Nejraději mám geometrii:**
    a) početní
    b) konstrukční
    c) analytickou

5. **Více mám rád geometrii:**
    a) rovinnou (planimetrii)
    b) prostorovou (stereometrii)
    c) je mi to jedno

Velice Vám děkuji za vyplnění dotazníku.

ročník	3.	pohlaví	M	nejčastější známka z matematiky	2

po maturitě zamýšlíte *(ano - ne)*	studovat na VŠ obor				nastoupit do pracovního poměru	
	humanitní	NE	přírodovědný	NE		NE
	technický	ANO	umělecký	NE		

Správnou odpověď označte křížkem „X".

1. **Matematika u mě patří mezi předměty:**

X a) oblíbené

b) méně oblíbené

c) neoblíbené

2. **Geometrie u mě patří mezi předměty:**

a) oblíbené

X b) méně oblíbené

c) neoblíbené

3. **V hodinách geometrie nejčastěji:**

a) počítáme

b) rýsujeme

X c) děláme jiné činnosti, jaké? ...a) i b)...

4. **Nejraději mám geometrii:**

a) početní

b) konstrukční

X c) analytickou

5. **Více mám rád geometrii:**

a) rovinnou (planimetrii)

b) prostorovou (stereometrii)

X c) je mi to jedno

Velice Vám děkuji za vyplnění dotazníku.

ročník	3.	pohlaví	žena	nejčastější známka z matematiky	3

po maturitě zamýšlíte (ano - ne)	studovat na VŠ obor				nastoupit do pracovního poměru	
	humanitní		přírodovědný	ano		
	technický		umělecký			

Správnou odpověď označte křížkem „X".

1. **Matematika u mě patří mezi předměty:**
   - a) oblíbené
   - X b) méně oblíbené
   - X c) neoblíbené

2. **Geometrie u mě patří mezi předměty:**
   - a) oblíbené
   - X b) méně oblíbené
   - c) neoblíbené

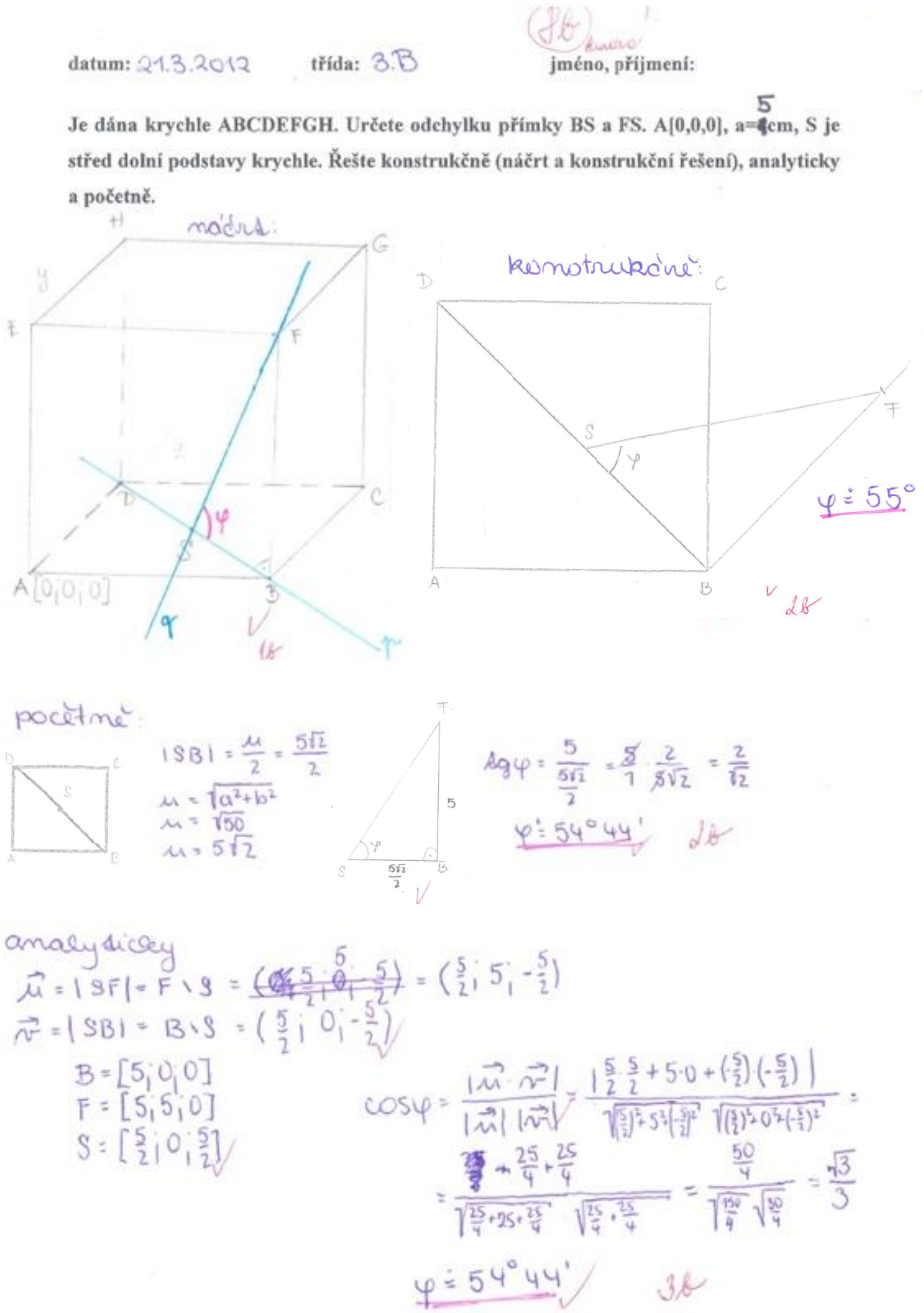
3. **V hodinách geometrie nejčastěji:**
   - X a) počítáme
   - b) rýsujeme
   - c) děláme jiné činnosti, jaké? ……………………………………………………

4. **Nejraději mám geometrii:**
   - a) početní
   - X b) konstrukční
   - c) analytickou

5. **Více mám rád geometrii:**
   - X a) rovinnou (planimetrii)
   - b) prostorovou (stereometrii)
   - c) je mi to jedno

Velice Vám děkuji za vyplnění dotazníku.

Příloha č. 2 – Ukázky opravených testů

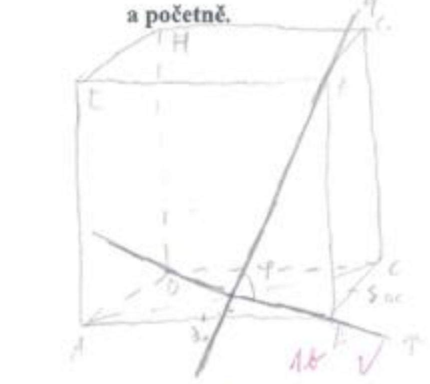

datum: 21.3.2012 třída: 3.B jméno, příjmení:

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky BS a FS. A[0,0,0], a=5cm, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně (náčrt a konstrukční řešení), analyticky a početně.

8b

datum: 27.3. třída: 3.A jméno, příjmení:

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky BS a FS. A[0,0,0], a=4cm, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně (náčrt a konstrukční řešení), analyticky a početně.



1b

A [0; 0; 0]
B [5; 0; 0]
S [$\frac{5}{2}$; $\frac{5}{2}$; 0]
F [5; 0; 5]

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\varphi \doteq 54°44'$

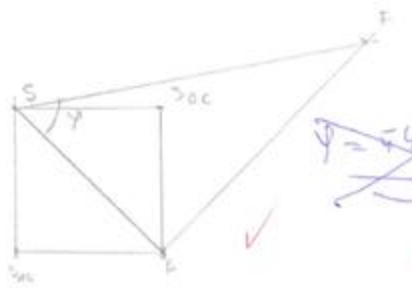
2b

$\vec{u} = B \to S = \left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; 0\right)$
$\vec{v} = F \to S = \left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; 5\right)$

$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}}{\frac{5}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{50}{4} + 25}} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{5}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{75}{2}}} = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\varphi \doteq 54°44'$

3b



~~$\varphi \doteq 54°44'$~~ $\varphi \doteq 55°$

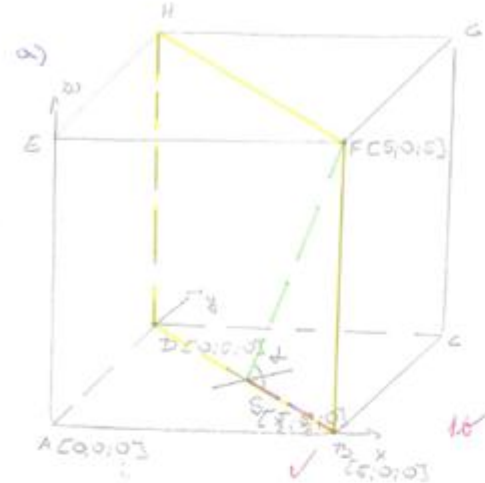
2b

datum: 21. 3. 2012 třída: 3.B jméno, příjmení:

7b

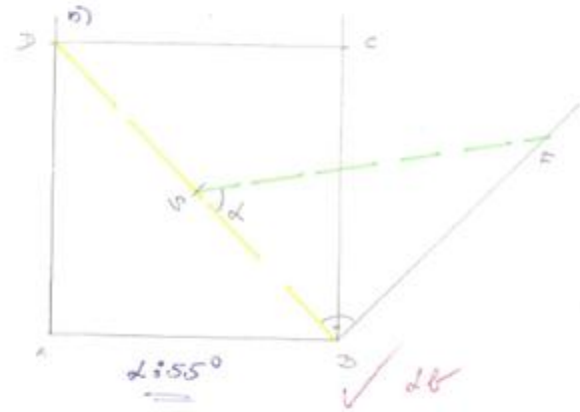
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky BS a FS. A[0,0,0], a=~~4cm~~ 5cm, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně (náčrt a konstrukční řešení), analyticky a početně.

a)



1b

b)



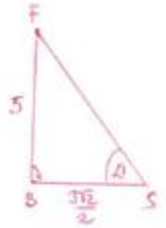
$\alpha \doteq 55°$

2b

a) $|BS| = \frac{\sqrt{5^2+5^2}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|FB|}{|BS|} = \frac{5}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

~~$\alpha \doteq 55°$~~ $\alpha \doteq 54°44'$



2b

d) $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

$\vec{u} = S'F = \left(-\frac{5}{2}; +\frac{5}{2}; -5\right)$

$\vec{v} = S'B = \left(-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$

$\cos \alpha = \frac{\left|\left(\frac{25}{4} + \frac{25}{4} - 0\right)\right|}{\sqrt{\frac{50}{4}+25} \cdot \sqrt{\frac{50}{4}+0}} = \frac{\frac{50}{4}}{\sqrt{\frac{75}{2}} \cdot \sqrt{\frac{25}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha \doteq 54°44'$

2b

Příloha č. 3 – Ukázky vyplněných závěrečných dotazníků

ročník	3.	pohlaví	ž	nejčastější známka z matematiky	1

Správnou odpověď označte křížkem „X".

1. **S takovými úlohami jsem se v hodinách matematiky:**

   ~~a)~~ setkal/a často

   b) setkal/a občas

   c) nesetkal/a

2. **Úlohy pro mě byly:**

   ~~a)~~ lehké

   b) středně těžké

   c) těžké

3. **Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejlehčí:**

   a) konstrukční

   b) početní

   ~~c)~~ analytický

4. **Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejtěžší:**

   ~~a)~~ konstrukční

   b) početní

   c) analytický

5. **Co by podle mě měla/mohla obsahovat ideální hodina geometrie:**

   řešení co nejvíce různých příkladů, modely……………………………………

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

Velice Vám děkuji za vyplnění dotazníku.

ročník	3	pohlaví	Ž	nejčastější známka z matematiky	2

Správnou odpověď označte křížkem „X".

1. **S takovými úlohami jsem se v hodinách matematiky:**
   a) setkal/a často
   b) setkal/a občas
   c) nesetkal/a

2. **Úlohy pro mě byly:**
   a) lehké
   b) středně těžké
   c) těžké

3. **Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejlehčí:**
   a) konstrukční
   b) početní
   c) analytický

4. **Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejtěžší:**
   a) konstrukční
   b) početní
   c) analytický

5. **Co by podle mě měla/mohla obsahovat ideální hodina geometrie:**
   procvičování na příkladech, vysvětlení zajímavostí a
   zodpovězení případných otázek od studentů
   ....

Velice Vám děkuji za vyplnění dotazníku.

ročník	3	pohlaví	M	nejčastější známka z matematiky	3

Správnou odpověď označte křížkem „X".

1. **S takovými úlohami jsem se v hodinách matematiky:**
   a) setkal/a často X
   b) setkal/a občas
   c) nesetkal/a

2. **Úlohy pro mě byly:**
   a) lehké
   b) středně těžké X
   c) těžké

3. **Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejlehčí:**
   a) konstrukční X
   b) početní
   c) analytický

4. **Který způsob řešení úlohy byl pro mě nejtěžší:**
   a) konstrukční
   b) početní
   c) analytický X

5. **Co by podle mě měla/mohla obsahovat ideální hodina geometrie:**
   Více konstrukčních řešení úloh a méně počítání, protože tak můžu rozvíjet představivost

Velice Vám děkuji za vyplnění dotazníku.