UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

SCHOPNOSTI POTREBNÉ K RIEŠENIU SLOVNÝCH ÚLOH

2012 Bc. Veronika HUBEŇÁKOVÁ

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

SCHOPNOSTI POTREBNÉ K RIEŠENIU SLOVNÝCH ÚLOH

ŠTUDENTSKÁ VEDECKÁ KONFERENCIA

Študijný program:	Matematika - Psychológia
Pracovisko:	Ústav matematických vied
Školiteľ:	Doc. RNDr. Matúš Harminc, CSc.

Košice 2012

Bc. Veronika HUBEŇÁKOVÁ

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu mojej práce, Doc. RNDr. Matúšovi Harmincovi, CSc., za cenné rady, trpezlivý prístup a čas, ktorý venoval tomu, aby táto práca mohla vzniknúť. Ďakujem učiteľom a žiakom, s ktorými som spolupracovala, za ich čas a ochotu. Zároveň ďakujem aj ostatným, ktorí mi akokoľvek pomohli, predovšetkým rodine, priateľom a spolužiačkam.

Abstrakt

Cieľom práce je naštudovať a spracovať problematiku schopností potrebných pre riešenie slovných úloh z matematiky. Teoretickým podkladom spracovania sú poznatky z oblasti slovných úloh a schopností, pričom sa samostatne zameriava aj na inteligenciu a špecifické poruchy učenia. V práci uvádzame spracovaný zoznam schopností potrebných k riešeniu slovných úloh, ktorý obsahuje nasledovné schopnosti: čítanie s porozumením, priestorová predstavivosť, sociálna a praktická predstavivosť, vizualizácia, zostavenie plánu riešenia, matematizácia, dematematizácia a matematická reflexia. Vymedzujeme ich, uvádzame príklady ich využitia i nevyužitia, navrhujeme spôsoby ich pedagogickej diagnostiky a rozvíjania. Práca poskytuje nový pohľad na vyučovanie slovných úloh a môže byť podnetom pre ďalší výskum v tejto oblasti.

Kľúčové slová: Slovné úlohy. Matematické schopnosti. Pedagogická diagnostika schopností. Rozvíjanie schopností.

Abstract

The object of this thesis is to learn and analyze mental skill sets required to solve word math problems. The theoretical background is based on knowledge of the word problems and mental skills; specifically it pays attention to the area of intelligence and learning disabilities. The work covers the list of required word problem-solving skills: reading comprehension, spatial imagination, social and practical imagination, visualisation, problem solving strategies design, mathematisation, demathematisation and mathematic reflexion. These skills are defined and described, including real-life examples (usage vs absence of it). Furthermore specific methods for the pedagogical diagnostics and its development are proposed. The thesis purpose is to offer new approaches for the verbal problems solution teaching and to encourage further research.

Key words: Word problems. Mathematical skills. Pedagogical diagnostics of skills. Skill development.

Obsah

Zoznam ilustrácií

Úvod

Riešenie slovných úloh z matematiky je pre mnohých žiakov skúsenosťou, v ktorej zlyhávajú a ktorej sa snažia vyhnúť. Na druhej strane sú slovné úlohy základom vyučovania matematiky ako predmetu použiteľného v praktickom živote. Tento rozpor vyzýva didaktikov matematiky k hľadaniu efektívnych spôsobov, ktoré žiakom pomôžu úspešne riešiť slovné úlohy a naučia ich tak aplikovať matematiku vo svojom živote. V tejto práci sa tejto výzvy chopíme tak, že naštudujeme a spracujeme problematiku schopností potrebných pre riešenie slovných úloh z matematiky. Myslíme si totiž, že presné pomenovanie týchto schopností, navrhnutie spôsobov ich pedagogickej diagnostiky a ich rozvíjania môžu dať učiteľom do rúk veľmi užitočný nástroj. Pomocou neho by mohli vytvoriť podmienky, v ktorých by deti zažívali viac úspechov pri riešení slovných úloh. A to s veľkou pravdepodobnosťou môže priniesť ovocie v podobe vnútornej motivácie detí k učeniu sa matematiky. Navyše taký nástroj by učiteľov podporil v diferencovanej práci s deťmi a jasne by zameral individuálny prístup k žiakom.

V práci sa odrazíme od medzinárodných štúdií PISA a TIMSS (Kapitola 1), ktoré poukazujú práve na rozmer matematiky ako vedy využiteľnej v praxi. Následne zhrnieme dôležité informácie o slovných úlohách (Kapitola 2) a pokračujeme kapitolou, ktorá prináša pohľad psychológov a špeciálnych pedagógov na oblasť schopností (Kapitola 3). V Kapitole 4 popisujeme ciele a metodiku našej práce. V záverečnej kapitole prinášame už samotný zoznam schopností, ich vymedzenia a podľa možností príklady ich využitia či nevyužitia, návrhy pedagogickej diagnostiky a rozvíjania daných schopností.

1 Medzinárodné štúdie PISA a TIMSS

Súčasťou sveta, v ktorom sa krajiny spájajú do rôznych medzinárodných organizácií, je porovnávanie týchto krajín navzájom medzi sebou aj s krajinami, ktoré nie sú členmi organizácie. Okrem iného to prináša odpovede na otázky, či je spájanie prínosné pre zoskupené krajiny a čo je potrebné urobiť pre ďalšie zlepšenie. Porovnávanie sa nevyhlo ani oblasti vzdelávania a aj v nej prináša odpovede, ktoré sa týkajú zlepšovania kvality vzdelávania a vzdelávacej politiky ako takej. K tejto práci sme boli sčasti inšpirovaní teoretickými východiskami, výskumnými metódami a predovšetkým výsledkami dvoch významných medzinárodných štúdií, ktoré sú známe pod skratkami PISA a TIMSS. Tieto štúdie vo svojich meraniach často využívajú slovné úlohy. (Príklady úloh, ktoré využila PISA v roku 2003, sú uvedené ako Príloha B.) Tým poukazujú na fakt, že schopnosť riešiť slovné úlohy je dôležitá z hľadiska vyučovania matematiky, pretože práve na nich sa ukazuje, ako žiaci vedia využiť matematiku v praxi. Z toho dôvodu v prvej kapitole uvádzame stručnú charakteristiku týchto dvoch štúdií, ich náhľad na vyučovanie matematiky či matematickú gramotnosť a výsledky Slovenskej republiky v rámci medzinárodného porovnania.

PISA – OECD je Program medzinárodného hodnotenia žiakov Organizácie pre hospodársku spoluprácu (OECD **P**rogramme for **I**nternational **S**tudent **A**ssesement). *Od roku 2000 v trojročných cykloch meria a hodnotí výsledky vzdelávania v kontexte krajín OECD na vzorke žiakov, ktorí už dovŕšili 15. rok veku a blížia sa k hranici povinného vzdelávania, mali by byť teda už pripravení na ďalšie vzdelávanie i trh práce. PISA testy merajú výkony žiakov v troch oblastiach – čitateľská gramotnosť, matematická gramotnosť a prírodovedná gramotnosť. PISA dotazníky zbierajú informácie o faktoroch, ktoré by mohli výsledky vzdelávania ovplyvňovať – sociálno-ekonomické zázemie žiaka, motivácia a záujmy žiaka, vybavenie školy a iné* (Koršňáková, Kováčová, 2007, s.3). Cieľom štúdie nie je hodnotenie jednotlivých žiakov, škôl alebo učiteľov. Jej cieľom je priniesť námety a motiváciu pre zlepšenie vzdelávacej politiky v krajinách po celom svete tak, aby boli pre každé dieťa vytvorené podmienky, ktoré mu umožnia dosiahnuť v živote to najlepšie. **Matematickú gramotnosť** PISA vymedzuje ako *schopnosť jedinca rozpoznať a pochopiť úlohu matematiky vo svete, robiť zdôvodnené hodnotenia, používať matematiku a zaoberať sa ňou spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám života konštruktívneho, zaujatého a rozmýšľajúceho občana* (Kubáček a kol.

2004, s.7). Pri podrobnejšom opise matematickej gramotnosti štúdia OECD PISA rozlišuje tri zložky:

- *situácie alebo kontexty, do ktorých sú problémy umiestnené,*
- *matematický obsah,*
- *kompetencie (schopnosti), ktoré treba aktivovať pre také prepojenie reálneho sveta (v ktorom sa problémy vyskytujú) s matematikou, ktoré povedie k riešeniu daného problému* (Kubáček a kol. 2004, s.7).

Tejto štúdie sa od roku 2000 zúčastňuje stále viac krajín. Pri poslednom meraní, v roku 2009, to bolo celkovo 65 štátov. To vytvára vhodné podmienky na spomínané porovnávanie. Navyše, š*túdia OECD PISA od svojho zahájenia v roku 2000 používa rovnaký základný dizajn, ktorý umožňuje porovnanie dosiahnutých výsledkov v čase. Od roku 2003, keď sa Slovenská republika po prvýkrát zúčastnila štúdie OECD PISA, nenastala v nameranom výkone Slovenska, reprezentovaného našimi žiakmi, žiadna významná zmena. Matematická gramotnosť osciluje okolo priemeru krajín OECD. Čitateľská gramotnosť a prírodovedná gramotnosť nedosahujú ani tento priemer* (Koršňáková, Kováčová, Heldová, 2010, s.3).

TIMSS - Trendy v medzinárodnom výskume matematiky a prírodovedných predmetov (Trends in International Mathematics and Science Study) je medzinárodná komparatívna štúdia, ktorá je realizovaná Medzinárodnou asociáciou pre evalváciu výsledkov vzdelávania (IEA). Táto asociácia:

- *uskutočňuje komplexné komparatívne výskumy vzdelávania zamerané na pochopenie vplyvu faktorov, ktoré spôsobujú rozdiely vo vzdelávacích výsledkoch,*
- *porovnáva výsledky medzi krajinami navzájom,*
- *poskytuje informácie o vedomostnej úrovni žiakov v medzinárodnom kontexte,*
- *zisťuje a porovnáva podmienky žiakov pri štúdiu,*
- *overuje efektívnosť školských systémov* (Kuraj, Kurajová Stopková, 2006, s.7).

Výskumnou vzorkou tejto štúdie sú žiaci ôsmeho ročníka základných škôl a štvrtého ročníka osemročných gymnázií alebo žiaci štvrtého ročníka základných škôl. Slovenská republika sa ostatnýkrát zapojila do monitoringu ôsmakov v roku 2003 (Kuraj, Kurajová Stopková, 2006, s.10). Podľa koncepcie TIMSS, sa štúdia zameriava prvotne na kurikulum, a to v rovinách plánovaného, realizovaného a dosiahnutého kurikula.

Tieto tri roviny kurikula reprezentujú:

- *vedomosti a zručnosti z matematiky a prírodovedných predmetov, ktoré si vyžaduje spoločnosť,*
- *ako má byť vzdelávací systém organizovaný, aby sa dosiahli ciele vzdelávania,*
- *čo sa v triede skutočne vyučuje,*
- *kto a ako vyučuje,*
- *čo sa žiaci skutočne naučili* (Kuraj, Kurajová Stopková, 2006, s.20).

Testové položky je možné rozdeliť podľa poznávacej dimenzie do štyroch úrovní, a to *ovládanie faktov a postupov, používanie pojmov, riešenie problémových úloh* a napokon *odôvodňovanie a argumentácia* (Kuraj, Kurajová Stopková, 2006, s.23). Úspešnosť slovenských žiakov bola vo všetkých úrovniach štatisticky významne lepšia než priemer. Úspešnosť však rovnako ako medzinárodný priemer so stúpajúcou náročnosťou úloh klesala. Slovenskí žiaci sa v prvých troch úrovniach umiestňovali okolo 14. miesta zo zúčastnených 47 krajín. Na poslednej úrovni mali naši žiaci o niečo výraznejšie problémy, čo sa odzrkadlilo na umiestnení na 20. mieste. Prehľadne to vyjadruje Tabuľka 1.

Tabuľka 1 Úspešnosť slovenských žiakov v TIMSS 2003 v oblasti matematiky v závislosti od úrovne poznávania

Úroveň poznávania	Úspešnosť medzinárodný priemer (%)	Úspešnosť slovenských žiakov (%)	Poradie slovenských žiakov
Ovládanie faktov a postupov	77	90	13.-15.
Používanie pojmov	65	74	13.-14.
Riešenie problémových úloh	46	54	13.-14.
Odôvodňovanie a argumentácia	21	26	20.

(Zdroj: Vlastné spracovanie podľa Kuraj, Kurajová Stopková, 2006 s.64, s.220)

Obe tieto štúdie tak poukazujú na to, že slovenskí žiaci majú ešte dostatočne veľký priestor na rast vo využívaní matematiky pre potreby bežného života. Pre tento rast môže byť vhodné riešenie slovných úloh, ktorým sa venujeme v nasledujúcej kapitole.

2 Slovné úlohy

Riešenie slovných úloh je súčasťou takmer každého tematického celku vo vyučovaní matematiky. Vyučovať matematiku bez slovných úloh by znamenalo pripraviť žiakov o zážitok z využiteľnosti matematiky v praxi, znamenalo by to urobiť z matematiky len teoretickú vedu, ktorá využíva množstvo čísel a abstraktných premenných. Slovné úlohy tak majú nezastupiteľné miesto vo vyučovaní matematiky. Dokumentujú to aj Divíšek a Buřil (1989, in: Bobovnická, 2005, s. 37), ktorí formulujú výchovno-vzdelávacie ciele, ktoré je potrebné rešpektovať pri riešení slovných úloh. Tieto ciele uvádzame hneď na začiatku prvej kapitoly, aby sme počas písania i čítania tejto práce nestratili zo zreteľa dôležitosť riešenia slovných úloh v škole. Ide o nasledovné ciele:

- *naučiť žiaka matematicky vyjadriť problémy pozorované alebo zámerne demonštrované v reálnych situáciách,*
- *motivovať žiaka k ovládnutiu matematického aparátu tým, že sa preukáže jeho potrebnosť a účelnosť v praxi,*
- *ukázať aplikovateľnosť preberaného matematického učiva,*
- *naučiť žiaka vyhľadávať a zisťovať potrebné údaje pre riešenie daného problému,*
- *naučiť žiaka vyhľadávať a sledovať jednoduché funkčné vzťahy a kvantitatívne súvislosti vo svojom okolí,*
- *aktívne rozvíjať u žiakov morálne a vôľové vlastnosti, ako aj vhodne formovať ich záujmy.*

Taktiež hneď v úvode chceme jasne vymedziť, čo presne chápeme pod pojmom „slovná úloha“. Z množstva definícií, ktoré nám ponúkajú rôzni autori, je pre túto prácu najviac výstižná **definícia** M. Hejného (1995, in Molnár, 2010, s.4): ***Slovná úloha*** *je typ matematickej úlohy, ktorý vyžaduje jazykové porozumenie a má presah do životných skúseností. Matematický model nie je zadaný priamo, žiak si ho musí zostaviť na základe porozumenia zadania úlohy a využitím životných skúseností.*. „Byť matematickou úlohou“ neznamená len to, že sa s ňou žiaci stretnú na hodine matematiky, ale predovšetkým to značí, že pri jej riešení žiak potrebuje využívať matematické schopnosti. Ďalej vyžaduje jazykové porozumenie – teda k jej riešeniu nestačí „iba počítať“, je nevyhnutné porozumieť úlohe v celom jej kontexte. Čo prakticky znamená, že žiak k úspešnému riešeniu – čím chápeme riešenie, ktoré je správne, zdôvodnené a nenáhodné – potrebuje správne uchopiť štyri ***vrstvy slovnej úlohy*** (Hejný, 1995 in:Molnár, 2010, s.10), ktorými sú:

- *vrstva príbehu či situácie* – týka sa rámcových predstáv o úlohe,
- *vrstva objektov* – týka sa toho, čo tvorí „podmet“ textu úlohy,
- *vrstva vzťahov* – týka sa väzieb medzi objektmi úlohy,
- *vrstva matematického modelu* – prezentuje prepis textu úlohy do formalizovaného jazyka.

Pre lepšie pochopenie uvedieme nasledovný príklad:

Príklad 1 Vrstvy slovnej úlohy

Hokejové klzisko má rozmery 60m a 30m. Na výrobu ľadu použijú 126000 l vody. Akú hrúbku bude mať ľad, ak sa hrúbka po zamrznutí vody zmení o 7%?

1. vrstva

Predstava vyrábania ľadu – predstava klziska, na ktoré sa vylieva voda, z ktorej po zamrznutí vzniká ľad.

2. vrstva

Klzisko v tvare obdĺžnika, voda, ľad.

3. vrstva

Obdĺžnik je dlhý 60m, široký 30m.

Vyliatím vody vznikne kváder s objemom 126 000 l, dĺžkou a šírkou 60m a 30m a neznámou výškou, ktorú je potrebné vypočítať.

Potrebujeme premeniť jednotky.

Voda po zamrznutí zväčšuje svoj objem, teda k vypočítanej výške je potrebné prirátať (nie odčítať) 7%

4. vrstva

Táto vrstva už závisí od konkrétneho žiaka, existuje viac spôsobov ako danú úlohu matematizovať, ale pre úplnosť príkladu to môže byť nasledovne:

x – hrúbka ľadu

$x = 1,07 . (126 : (60.30))$ m; $x = 0,0749$ m = 7,49 cm

Zdroj: vlastné spracovanie

Aj keď žiak nepomenuje túto skutočnosť ako „vrstvy slovnej úlohy“, potrebuje si hneď na začiatku urobiť v úlohe „poriadok“. V opačnom prípade by sa jednalo iba o mechanické dosádzanie do vzorca, čo nepovažujeme za úspešné riešenie slovnej úlohy.

Úspešný riešiteľ pri riešení slovnej úlohy prechádza nasledovnými fázami, ktoré sa však môžu prelínať a v istom bode sa môže opätovne vracať k predchádzajúcim fázam (napríklad si ešte raz prečítať zadanie):

Fázy riešenia slovnej úlohy:

1. *porozumenie zadania úlohy*
2. *zostavenie matematického modelu*
3. *vyriešenie matematického modelu*
4. *kontrola získaného riešenia* (Molnár, 2010, s.9)

Pre ilustráciu uvedieme príklad:

Príklad 2 Fázy riešenia slovnej úlohy

Traja bratia majú spolu 99 €. Adam má o 17 € menej ako Jožko a ten má o 29 € menej ako Tibor. Môžu Adam s Jožkom kúpiť Tiborovi k narodeninám lístok na koncert, ktorý stojí 30 €?

1. **fáza – porozumenie zadania úlohy**

Žiak si odpovedá na nasledujúce otázky: Rozumiem všetkým slovám? Viem zopakovať zadanie vlastnými slovami? Viem, čo je dané? Viem, čo chcem vypočítať? Mám dosť informácií? Môžem využiť skúsenosti z riešenia podobnej úlohy? (Gerová 2003, in Bobovnická, 2005, s. 38). V tejto fáze si žiak robí zápis úlohy, poprípade náčrt, aby čo najlepšie pochopil úlohu.

Adam .... o 17 € menej ako Jožko

Jožko .... o 29 € menej ako Tibor

Tibor .... ? €

Spolu .... 99 €

Majú Adam s Jožkom spolu aspoň 30 €?

2. **fáza – zostavenie matematického modelu**

Táto fáza je závislá na stratégii riešenia slovnej úlohy, ku ktorým sa ešte dostaneme v ďalšej časti práce.

Adam .... $(x - 29 - 17)$ €

Jožko .... $(x - 29)$ €

Tibor .... x €

Spolu .... 99 €

Adam a Jožko spolu ..... $(x - 29 - 17) + (x - 29) = 99 - x$

Majú Adam s Jožkom spolu aspoň 30€? .....? $99 - x \geq 30$?

3. **fáza – vyriešenie matematického modelu**

Podľa počtu nutne použitých operácií delíme slovné úlohy na jednoduché a zložené. V jednoduchých sa využíva jediná operácia a tieto slovné úlohy sú typické pre prvý stupeň základných škôl. Zároveň ich vetná stavba je oveľa jednoduchšia oproti zloženým slovným úlohám, kde sa pri riešení využíva viac ako jedna operácia (Bobovnická, 2005, s.38-39). V predošlej fáze riešenia žiak premenil slovné zadanie na výpočtovú úlohu. Preto sa touto fázou, kde žiak rieši matematický model nebudeme hlbšie zaoberať.

$$(x - 29 - 17) + (x - 29) + x = 99$$

$$3x - 75 = 99$$

$$3x = 174$$

$$\underline{\underline{x = 58;}}$$

$$99 - 58 = 41 \geq 30$$

4. **fáza – kontrola získaného riešenia**

Riešenie slovnej úlohy je úspešné, ak je výsledok správny a žiak sa nepotrebuje uistiť o jeho správnosti u učiteľa. Na to slúži posledná fáza riešenia a teda kontrola získaného riešenia. Ide o návrat z abstrakcie do konkrétnej situácie a overenie riešenia v zmysle podmienok daných v úlohe. Je nutnou súčasťou riešenia, pretože je vždy potrebujeme overiť, či to čo vyšlo v „matematickom svete“, je možné v realite.

Adam .... $(58 - 29 - 17) = 12$ €

Jožko .... $(58 - 29) = 29$ €

Tibor .... 58 €

Spolu .... $12 + 29 + 58 = 99$ €

Zdroj: vlastné spracovanie

Aj keď pri riešení slovných úloh hovoríme o štyroch fázach, neznamená to, že všetci úspešní riešitelia musia riešiť slovnú úlohu rovnakým postupom. Pri mnohých úlohách nachádzame rôzne stratégie vedúce k dobrému výsledku. Postupy riešenia môžeme rozdeliť na ***algebraické*** a ***nealgebraické***. *Pri algebraickom spôsobe riešenia žiak využíva pri dosiahnutí cieľa aparát rovníc, resp. sústav rovníc. Pri nealgebraickom spôsobe riešenia žiak nevyužíva pri riešení rovnice, ale úvahy, skúšania, obrázky, grafy*. Nealgebraickými riešeniami sú riešenia typu *pokus – omyl*, *aritmetické = logický úsudok*, *cesta späť* a *grafické riešenia* (Kačengová, 2004, s.14-15). Keď som jednej svojej priateľke po seminári z didaktiky matematiky vysvetľovala vyššie spomenuté „rozdelenie riešení“ na algebrické a nealgebraické, reagovala na to veľmi zvláštne, ale možno typicky aj pre mnohých učiteľov: „To aritmetické, to nie je matematika!“ Žiaci sú často vedení k tomu, aby ich riešenia boli „čo najviac matematické“. Avšak mnohí žiaci takto jednoducho nemyslia. Vidia veci inak a pokiaľ ich toto videnie vedie k úspešnému riešeniu, je to rovnako dobré videnie ako algebrické. Pozadie rozdielov v tom, ako sa žiaci pozerajú na riešenie slovnej úlohy, sa pokúsime objasniť v druhej kapitole tejto práce, ktorá sa zaoberá inteligenciou a schopnosťami.

3 *Schopnosti*

3.1 Inteligencia

Konštrukt inteligencie je jedným zo základných psychologických konštruktov. Jeho definícia sa postupne vyvíjala a dnešný náhľad na inteligenciu a jej meranie sa líši od pôvodného. Stále sa odohráva dialóg medzi zástancami tradičného a novátorského náhľadu na inteligenciu. To sa odráža na častých chybách v chápaní a aplikovaní tohto pojmu aj v pedagogickej praxi. Učitelia často predpokladajú, že školský výkon je úplne determinovaný inteligenciou a taktiež mylne usudzujú, že inteligencia ako činiteľ školského výkonu je jednotná schopnosť (Džuka, 2003). Preto považujeme za dôležité objasniť význam tohto pojmu. Veľmi zaujímavo uvádza problematiku inteligencie Robert J. Sternberg. Dovolíme si použiť jeho výstižný príklad, ktorý sa zakladá na realite:

Alica je na strednej škole veľmi úspešnou študentkou, má vynikajúci priemer. Prijali ju na všetky vysoké školy, kam si podala žiadosť. Všetky testy ukazujú, že bude úspešná. Prvý rok vysokoškolského štúdia prebieha bez problémov a podľa očakávaní – Alica exceluje. Na druhý rok sa stane čosi zvláštne. Jej študijné výsledky sa zhoršia o 20%, aj keď jej motivácia uspieť ostáva veľká.

Alica je výborná v analyzovaní myšlienok a v zapamätávaní si informácií. Ale zaostáva v kreativite – ak má vytvoriť vlastné myšlienky, zlyháva. A to bolo to, čo sa v druhom ročníku jej vysokoškolského štúdia požadovalo.

Barbora nemá na strednej škole výrazne dobré známky. Na vysokú školu ju neprijali. Aj keď má skvelé odporúčania a z jej priloženej práce je vidieť nesmiernu kreativitu. Neuspela v teste. Po dvoch rokoch si opäť podáva prihlášku na tú istú vysokú školu, príjmu ju a je veľmi prínosnou študentkou.

Barbora je opakom Alice. Analytická inteligencia nie je jej silnou stránkou, no na druhej strane, je kreatívne inteligentná.

(Sternberg, 1996, s.205-206)

Tento príklad vyjadruje skutočnosť, že inteligencia nie je jednotná vlastnosť. Že byť alebo nebyť inteligentný sa viaže na určitú oblasť. Prvým, kto sa pokúsil ujasniť štruktúru inteligencie, bol v roku 1927 Charles Edward Spearman. Výsledkom jeho výskumu je **jediný faktor G**, ktorý sa podľa Spearmana uplatňuje vo väčšej či menšej miere v každej oblasti nášho fungovania. Louis Leon Thurstone odhalil v roku 1938 **sedem primárnych mentálnych faktorov**, ktoré podľa neho ovplyvňujú inteligenciu a sú to: chápanie slov, slovná plynulosť/pohotovosť, induktívne usudzovanie, priestorová vizualizácia, počítací faktor, pamäť a rýchlosť vnímania. Rovnakou metódou, akú použili predchodcovia, faktorovou analýzou, sa dopracoval Guilford v roku 1988 ku štruktúre inteligencie so **150 faktormi** v troch dimenziách. Tento prudký nárast faktorov, ktorý pokračoval, sa prejavil vo vzniku **hierarchických modelov** Raymonda Cattella, Philipa E. Vernona a Johna B. Carrolla. Úplne iný, novátorský pohľad zvolil Howard Gardner, keď neriešil rôzne faktory, ktoré tvoria jednu inteligenciu, ale odhalil **osem rôznych druhov inteligencie**, ktoré sú od seba navzájom nezávislé, a to: jazyková inteligencia, logicko-matematická inteligencia, priestorová inteligencia, hudobná inteligencia, telesne-kinestetická inteligencia, interpersonálna inteligencia, intrapersonálna inteligencia a prírodovedná inteligencia. A podobne Robert J. Sternberg vytvoril **triarchický model inteligencie**, v ktorom však dbá na spoluprácu jednotlivých inteligencií – analytickej, kreatívnej a praktickej (Sternberg, 2002, s.501-526). Vidíme, že inteligencia nie je jednotný faktor. Je preto normálne, ak má žiak skvelé výsledky v jednom predmete a priemerné v inom. Na druhej strane, nič neprekáža tomu, aby jednotkári v jazykoch mali jednotky aj v matematike či fyzike. Zároveň slovné úlohy, kde je potrebné porozumenie verbálne aj matematické, pravdepodobne môžu robiť problémy tým žiakom, ktorí majú síce dobre rozvinutú logicko-matematickú inteligenciu, ale nedostatky vo verbálnej inteligencii. Ďalším zistením je to, že podľa toho, ktorú inteligenciu má žiak viac rozvinutú, podľa toho sa bude prikláňať k stratégii riešenia. Nie každý žiak musí rovnako dobre rozumieť napr. náčrtu v trojrozmerného telesa. Preto je akékoľvek úspešné riešenie dosť dobré a učiteľ by mal mať záujem čo najviac rozvinúť „obľúbený“ spôsob riešenia konkrétneho žiaka

Druhú mylnú predstavu, ktorá hovorí o tom, že školský výkon je úplne determinovaný inteligenciou, môžeme vyvrátiť, ak sa bližšie pozrieme na testovanie inteligencie. Prvý test na meranie inteligencie zostavil Francis Galton a bol to test, ktorého úlohy boli psychofyzické (napr. rozlišovanie hmotnosti). Tento test sa však ukázal neúčinný pri rozlišovaní mentálnych schopností. Inými slovami, vzťah medzi psychofyzickými schopnosťami a inteligenciou nie je tesný. Oveľa úspešnejšími pri tvorbe testu, ktorý mal byť určený pre diferenciáciu detí, boli Alfred Binet a Theodor Simon. Bolo im jasné – a potvrdilo sa to aj praxou – že kľúčom k inteligencii nie sú psychofyzické schopnosti, ale úsudok, a to jeho zameranie, adaptácia a kritickosť.

Úlohy v ich teste boli rozdelené podľa toho, čo by malo zvládnuť štvorročné dieťa, päťročné dieťa, ... a takto vzniklo zisťovanie mentálneho veku dieťaťa, ktoré o niečo neskôr hrá dôležitú úlohu pri skórovaní inteligencie. Simonov a Binetov test sa stal základom pre dnes najrozsiahlejšie využívané Wechslerove testy, ktoré sú vyvinuté aj pre deti aj pre dospelých (Sternberg, 2002, s.501-505). Dôležité je uvedomiť si, že inteligenčné testy merajú zvyčajne len jazykovú a logicko-matematickú inteligenciu, niektoré navyše aj priestorovú. To stačí na to, aby boli dobrými nástrojmi na predvídanie možnej úspešnosti v školskom prostredí (Sternberg, 1996, s.209). Ale ak má dieťa aj perfektné predpoklady v logicko-matematickej, jazykovej a priestorovej inteligencii k tomu, aby uspelo, môže mať výrazné nedostatky v interpersonálnej alebo intrapersonálnej inteligencii, čo mu zabráni prejaviť svoje silné stránky. Príkladom môže byť mimoriadne nadané dieťa v matematickej oblasti, ktoré je výrazne podvýkonové, pretože nepovažuje svoj ďalší rozvoj za dôležitú hodnotu.

Zhrnutie pre nás podstatných informácií o inteligencii, je nasledovné:

- inteligencia je len jedným z viacerých faktorov ovplyvňujúcich výkon žiaka v škole,
- inteligenciu ovplyvňujú rôzne faktory (Thurstone), ba dokonca existujú rôzne druhy inteligencie (Gardner).

3.2 Schopnosti

*„**Schopnosti** sú vlastnosti, ktoré umožňujú človeku naučiť sa určitým činnostiam a dobre ich vykonávať*“ (Čáp, Mareš, 2007, s.152). Sú to *„vlastnosti osobnosti, ktoré sú podmienkou pre úspešné vykonávanie jednej alebo viacerých činností. Vystihujú kvalitatívnu stránku prežívania a správania.*“ Vrodený predpoklad pre rozvoj tej ktorej schopnosti nazývame **vloha**. Mať vlohu ešte neznamená mať schopnosť. Samotné schopnosti sa na základe vlôh rozvinú až precvičovaním a činnosťou. A teda nie je iný spôsob ako zistiť, či má dieťa na niečo vlohy ako pri činnosti. Na vykonávanie činnosti je spravidla potrebných viacero vlôh a zároveň sa každá vloha môže prejaviť v rôznych činnostiach. Ich súbor nazývame nadanie a vysoká miera nadania v niektorej oblasti sa nazýva **talent** (Orosová, 2005, s.152). Jedným z poslaní učiteľa je hľadať a nájsť vlohy svojich žiakov a pomôcť žiakom, čo najviac ich rozvinúť. To, že žiak nemá určitú schopnosť, sa nedá určiť po prvom neúspechu. Aj keď sa stáva, že žiaci nevedia prijať neúspech a svoje zlyhanie klasifikujú ako svoje obmedzenie, nie ako príležitosť k rozvoju. Učiteľ ich má priviesť k poznaniu, že je potrebné precvičovanie a činnosť.

Žiaci na druhom stupni si vytvárajú sebahodnotenie, či sú alebo nie sú matematicky zdatní (Bransford a kol., 1996, s.203). Preto je dôležité dať im pocítiť, že matematika nie je len o počítaní a dosádzaní do vzorcov. Že v nej môžu využiť rôzne spektrum schopností, z ktorých mnoho sa uplatňuje práve pri riešení slovných úloh.

Aj keď sa v tejto práci budeme venovať schopnostiam, nesmieme zabúdať, že schopnosti a zručnosti sú len jedným z faktorov, ktoré ovplyvňujú výkonnosť človeka. Miklová (1983, s. 58) tvrdí, že *vo všeobecnosti ovplyvňujú výkonnosť človeka tri typy premenných:*

- *premenné typu vedieť vykonať (schopnosti a zručnosti),*
- *premenné typu chcieť (vôľa, ašpirácia, záujmy, temperament, motivácia),*
- *premenné typu môcť (vnútorné normy, dedičnosť, materiálne a sociálne podmienky prostredia, atď.).*

Rozvoj schopností je teda len jedným z krokov potrebných k tomu, aby žiak úspešne riešil slovné úlohy. Pre komplexný pohľad na úspešnosť riešenia slovných úloh by bolo potrebné zahrnúť aj ostatné aspekty výkonnosti žiaka, napr. motiváciu, vôľu, vzťah k neúspechu,... I keď predpokladáme, že tieto aspekty majú veľký vplyv aj na rozvoj vlôh, a teda na schopnosti ako také. Nebudeme sa však púšťať do takýchto úvah, ale zameriame sa iba na schopnosti, ako na vlastnosti osobnosti, ktoré umožňujú žiakom riešiť slovné úlohy. Inými slovami, čo potrebuje žiak, ktorý *chce* a *môže* (v zmysle aký vyššie citujeme od Miklovej) k tomu, aby sa mu darilo riešiť slovné úlohy. I keď ešte v ďalšej podkapitole sa v krátkosti chceme venovať istej skupine žiakov, u ktorých premenné typu môcť môžu mať zlý vplyv na riešenie slovných úloh.

3.3 Špecifické poruchy učenia

Žiakov so špecifickými poruchami učenia by sme vzhľadom k Miklovej klasifikácii typov premenných ovplyvňujúcich výkon mohli označiť ako tých, ktorí výkon (v oblasti čítania, písania, matematiky) *nemôžu* podať, pretože sa u nich prejavujú následky dedičnosti, či ľahkej mozgovej dysfunkcie. Títo žiaci v istom zmysle slova nemajú vlohy pre čítanie, písanie či počítanie a príslušné schopnosti si vytvárajú veľmi namáhavo pomocou špeciálnej pedagogiky. Žiaci so špecifickými poruchami učenia potrebujú samozrejme špecifický prístup, ktorý je pre učiteľov v praxi často buď neznámy alebo nezvládnuteľný. Učitelia v praxi sa sťažujú na to, že pracovať so žiakmi so špeciálnymi výchovno-vzdelávacími potrebami je náročné. Často s nimi ani špeciálne nepracujú, snažia sa ich nejako „zabaviť“, dať im úlohy, ktoré zvládnu a to je všetko. Keďže sa jedná o širokú problematiku, neuvedieme komplexné informácie o celom probléme. Radi by sme však uviedli aspoň vymedzenia pojmov týkajúcich sa porúch učenia, ktoré výraznejšie ovplyvňujú vyučovanie matematiky (dyslexie, dysgrafie a dyskalkúlie) a poskytli zásady práce s takýmito deťmi. V ďalších častiach práce budeme mať na mysli už len žiakov, ktorí nemajú takto zvýšené nároky na vyučovanie.

Špecifické poruchy učenia (napr. dyslexia, dysgrafia, dysortografia, dyskalkúlia) patria spolu so špecifickými poruchami správania (napr. hyperkinetická porucha) medzi špecifické vývinové poruchy.

Špecifická vývinová **dyslexia** je vymedzená ako *porucha prejavujúca sa neschopnosťou naučiť sa čítať napriek tomu, že sa dieťaťu dostáva bežné výukové vedenie, má primeranú inteligenciu a sociokultúrnu príležitosť. Je podmienená poruchami v základných poznávacích schopnostiach, pričom sú tieto poruchy často konštitučného pôvodu.* Samotná dyslexia má množstvo podtypov, o ktorých by mal učiteľ mať prehľad (Šturma, 2006, s.159, 170-173). Je jasné, že deti s dyslexiou budú mať práve s riešením slovných úloh veľké problémy.

Dysgrafia je *špecifická porucha grafického prejavu, predovšetkým písania.* Jej podkladom je väčšinou porucha jemnej motoriky. *V matematike môže dysgrafia negatívne ovplyvniť výkon žiaka nesprávnym písaním číslic alebo čísel.* Tieto deti *potrebujú často viac času na osvojenie i zapamätanie zápisu riešenia slovných úloh, geometrických zápisov a pod. V niektorých prípadoch po sebe nedokážu tieto zápisy ani správne prečítať, nie to s nimi ešte správne pracovať* (Jucovičová, Žáčková, 2008).

Dyskalkúliu definuje L.Košč ako *štrukturálnu poruchu matematických schopností, ktorá má svoj pôvod v ... narušení tých partií mozgu, ktoré sú priamym anatomicko-fyziologickým substrátom veku primeraného zrenia matematických funkcií, ktorá ale nemá za následok súčasne i poruchu všeobecne mentálnych funkcií.* Delí ju na šesť typov, a to:

- *verbálna* – neschopnosť pomenovávať slovne množstvo, počet, čísla a číslice, pre dieťa je reč čísel cudzia,
- *praktognostická* – porucha schopnosti matematickej manipulácie s konkrétnymi či nakreslenými predmetmi (na ktorej kôpke je viac guľôčok, ...)
- *lektická* – porucha čítania matematických znakov,

- *grafická* – porucha písania čísel a číslic,
- *ideografická* – neschopnosť vytvárať koncepty (nedokáže pochopiť, že 12 je zároveň 8+4 aj 3.4),
- *operacionálna* – obmedzenie v oblasti vykonávania matematických operácií (Košč, 1972).

Za všetky znaky, ktoré tu boli spomenuté chceme ešte raz zdôrazniť, že na diagnostiku špecifickej poruchy učenia je nutné, aby bol žiak v aspoň priemernom pásme inteligencie. To znamená, že má potenciál k lepším školským výsledkom, než na ktoré sú učitelia u týchto žiakov bežne zvyknutí. V 5. kapitole našej práce, kde sa budeme venovať priamo schopnostiam potrebným k riešeniu slovných úloh, sa budeme snažiť poskytnúť aj možnosti pedagogickej diagnostiky a spôsoby rozvíjania daných schopností. Pri niektorých schopnostiach sme si uvedomovali potrebu vedieť, ako má učiteľ pracovať s deťmi so špecifickými poruchami učenia (napríklad pri schopnosti čítanie s porozumením sa nám vynorila otázka, ako na hodinách pracovať s dyslektikmi). Preto tu chceme uviesť strategické zásady pre nápravu špecifických porúch učenia, ktorými by sa podľa V. Pokornej mali riadiť špeciálni pedagógovia. A zároveň môžu byť inšpiráciou pre učiteľov, ako pracovať so žiakmi so špecifickými poruchami učenia. Zásady sú nasledovné:

1. *Zameranie terapie na špecifiku jednotlivého prípadu* – v oblasti špecifických porúch učenia vo zvýšenej miere platí, že sa prípad od prípadu veľmi líšia.
2. *Psychologická analýza celkovej situácie dieťaťa* – z pohľadu učiteľa je dôležité uvedomiť si, že dieťa so špecifickou poruchou učenia príliš často zažíva neúspech – ako to vplýva na dieťa, ktoré učím? Ako na to reagujú jeho rodičia? Má ešte dieťa motiváciu učiť sa?
3. *Najpresnejšia diagnostika ťažkostí dieťaťa* – diagnostiku určite nemôže urobiť učiteľ, ten by sa však mal poctivo oboznámiť s diagnózou dieťaťa a v prípade nejasností konzultovať túto diagnózu s odborníkom. Nikto by nemal čakať od učiteľa, že bude expertom aj na špeciálnu pedagogiku. Avšak práca učiteľa si (čoraz viac) vyžaduje spoluprácu s takýmito expertmi.
4. *Stanoviť primeranú obtiažnosť úloh*
5. *Zabezpečiť, aby dieťa zažilo úspech už pri prvej návšteve v poradni alebo pri prvej nápravnej hodine v škole* – pre učiteľa matematiky to môže znamenať, že ocení

posun, ktorý dieťa urobí vďaka návštevám v poradni a zároveň, že sa aktívne napomáha tomu, aby dieťa zažilo naozajstný úspech.

6. *Pri náprave postupujeme po malých krokoch.*
7. *Pracovať pravidelne, pokiaľ možno denne* – učiteľ by preto mal v prvom rade povzbudzovať rodičov k systematickej práci s ich dieťaťom a potvrdiť im viditeľnosť zmien, ktoré u ich dieťaťa nastávajú. Zároveň by sa mal vyhnúť hrubej chybe, ktorou je vynechávanie dieťaťa zo vzdelávacieho procesu, len preto že je to náročné.
8. *Cvičenia vykonávať s porozumením.*
9. *Dieťa sa musí sústrediť* – čo môže byť v školskej triede problematické, ale koniec koncov nie nedosiahnuteľné. V učiteľových možnostiach je vždy minimálne to, aby svojím sústredením a pokojom upokojil i svojho žiaka a pomohol mu prehĺbiť jeho sústredenie. Navyše táto zásada znamená, že 45 minútová hodina je pre dieťa s poruchou učenia príliš dlhá na to, aby dokázalo celý čas pracovať.
10. *Náprava špecifických porúch učenia obvykle vyžaduje dlhodobý nácvik* – preto by učitelia nemali čakať od špeciálnych pedagógov či psychológov „zázraky na počkanie“, ale zosúladiť svoj krok s krokom žiaka.
11. *Schopnosť, ktorú u dieťaťa rozvíjame, je potrebné cvičiť tak dlho, pokiaľ nie je zautomatizovaná.*
12. *Používame čo najprirodzenejšie metódy a techniky, ktoré rešpektujú situáciu, v ktorej sa musí dieťa osvedčiť.*
13. *Všetko, čo má dieťa pochopiť a čo mu predkladáme, by malo mať štruktúru.*

(Pokorná, 2001, s.232-238)

Uvedomujeme si, že táto podkapitola o špecifických poruchách učenia podáva len veľmi stručnú informáciu. Chceme ňou však zdôrazniť, že pre učiteľov (zvlášť pre začínajúcich) je náročné kvalitne pracovať s deťmi so špecifickými poruchami učenia, ak nemajú dostatočne široké a kvalitné vedomostné zázemie v tejto oblasti a je potrebné rozširovanie si svojich poznatkov aj z tejto oblasti pedagogiky.

4 Cieľ a metodika práce

Cieľom tejto práce je naštudovať a spracovať problematiku schopností potrebných pre riešenie slovných úloh z matematiky. Úplná vedecká práca na túto tému by podľa nás mala tieto schopnosti vymenovať, ku každej z nich uviesť jej jasné vymedzenie, ilustrovať príkladom, kedy bola daná schopnosť využitá / nevyužitá, poskytnúť overené možnosti pedagogickej diagnostiky problémov s jednotlivými schopnosťami a na záver uviesť možné spôsoby ich rozvíjania a toto všetko podložiť pedagogickou praxou. V tejto práci sa budeme držať uvedenej štruktúry (aspoň pri väčšine schopností), ale kvôli obmedzenosti z hľadiska času, možností i pedagogických skúseností, bude chýbať dostatočné podloženie pedagogickou praxou. Táto práca má však ponúknuť dostatok informácií a nápadov, ako sa postaviť k problematike riešenia slovných úloh na druhom stupni základných škôl.

Zoznam schopností potrebných k riešeniu slovných úloh, sme vypracovali po naštudovaní príslušnej literatúry, a to konkrétne knihy *Ladislava Košča (1972) Psychológia matematických schopností* a dizertačnej práce *Jozefa Sekeráka (2008) Diagnostikovanie a rozvíjanie kľúčových kompetencií v matematickom vzdelávaní.* Spomedzi schopností, ktoré boli uvedené v týchto prácach, sme vybrali tie, ktoré sme považovali za dôležité z hľadiska riešenia slovných úloh. Urobili sme tak aj na základe prvej etapy zberu dát, ktorú opisujeme nižšie. V nej a aj v druhej etape sme zároveň získavali **príklady využitia resp. nevyužitia tej ktorej schopnosti**. Chceme upozorniť, že využitie resp. nevyužitie schopnosti sme hodnotili len situačne a v kontexte, ktorý vznikol pri riešení danej úlohy. Autorka žiakov nepoznala natoľko, aby podľa ich riešenia resp. jeho časti mohla usúdiť, že žiak má rozvinutú alebo nerozvinutú schopnosť. Skutočne ide len o príklady, ktorými chceme podložiť to, čo hovoríme v texte.

Pri **pedagogickej diagnostike a rozvíjaní schopností** sme mali na pamäti, že *z psychologického hľadiska je chyba v počiatkoch učenia zákonitý jav, ktorý je potrebné využiť v ďalších etapách učenia* (Mareš, 1997, In: Kosíková, 2011, s. 138). Teda nechceme preceňovať význam chýb, ktoré robia žiaci pri učení sa riešenia slovných úloh a diagnostikovať ich nálepkou „absencia či nerozvinutie schopnosti“. Zároveň platí aj to, že *odnaučiť sa osvojenú, zafixovanú „chybu“, je omnoho zložitejšie než pravidelná kontrola a spätná väzba* (Kosíková, 2011, s.141). Z toho dôvodu význam chýb nemáme v úmysle ani podceňovať. Je určite lepšie urobiť preventívne opatrenia, čím máme možnosť schopnosti rozvíjať, než to zanedbať a sprostredkovať tak žiakom negatívnu skúsenosť s matematikou. *Piaget preukázal, že ak sa dieťa dopustí chyby, nie je to obvykle spôsobené jeho neschopnosťou, dieťa jednoducho reaguje na základe svojej dosiahnutej úrovne myslenia. Túto úroveň je možné zvýšiť, ak poskytneme deťom príslušnú znalostnú základňu a ak venujeme pozornosť procesom, ktorých prostredníctvom môžu túto základňu vhodne štrukturovať a využívať* (Fontana, 2010, s.76). Konkrétne spôsoby pedagogickej diagnostiky a rozvíjania schopností sme tvorili buď priamo na základe odborných podkladov alebo sme sa sami snažili nájsť spôsob, ako by sme mohli zistiť, ako má žiak danú schopnosť rozvinutú.

Metodika zberu dát vychádzala z potrieb tejto práce. Nešlo nám o získanie nových poznatkov precíznymi vedeckými metódami (i keď je to cesta lákavá a zaujímavá). Snažili sme sa nimi získať výrečné príklady, ktorými chceme dobre ilustrovať jednotlivé schopnosti potrebné k riešeniu slovných úloh. Preto tieto metódy majú svoje nedostatky a ak by ich chcel použiť výskumník, určite by potrebovali prepracovanie.

Prvou etapou zberu dát bolo „zoznámenie sa" s myslením žiakov na druhom stupni základnej školy. Autorka práce si uvedomovala svoje medzery v schopnosti vžiť sa do spôsobu myslenia žiakov vo veku 10-15 rokov. Preto v prvom rade išla na základnú školu, kde mohla individuálne pracovať s tromi piatakmi a dvomi šiestačkami. Žiaci boli postupne uvoľňovaní z piatej a šiestej vyučovacej hodiny. Ich úlohou bolo „riešiť nahlas" zadané úlohy. Samozrejme si mohli aj písať, ale boli požiadaní, aby všetko čo si myslia, hovorili nahlas. Išlo o nasledujúce úlohy:

Výskumná úloha 1 Slovná úloha pre piaty ročník

Skladačka puzzle, ktorá obsahuje 1000 dielikov stojí 19 eur a skladačka, ktorá obsahuje 2000 dielikov stojí 25 eur. Ktorá skladačka je drahšia a o koľko?

Zdroj: vlastné spracovanie

Výskumná úloha 2 Slovná úloha pre šiesty ročník

Skladačka puzzle, ktorá obsahuje 1000 dielikov stojí 19,55 eur a skladačka, ktorá obsahuje 2000 dielikov stojí 25,44 eur. Ktorá skladačka je drahšia a o koľko? Koľko zaplatíme, keď si kúpime 2 väčšie a jednu menšiu skladačku?

Zdroj: vlastné spracovanie

Výskumná úloha 3 Slovná úloha pre piaty aj šiesty ročník

V rodine boli synovia a dcéry. Každý syn mal toľko bratov ako sestier a každá dcéra mala dvakrát viac bratov ako sestier. Koľko synov a koľko dcér mala rodina?

Zdroj: Kováčik, Scholtzová, in: Molnár, 2010, s.70

V tejto etape bolo cieľom naučiť sa pozorovaním vnímať slovné úlohy viac z perspektívy riešiteľa ako zadávateľa a získať materiály, ktoré doplnia text o názorné príklady z praxe. Zároveň sa táto etapa stala inšpiráciou pre vznik nástrojov v druhej etape.

Druhá etapa zberu dát už mala za cieľ pozrieť sa na niektoré konkrétne schopnosti potrebné k riešeniu slovných úloh, poprípade na spôsoby ich rozvíjania. Keďže šlo o pozorovanie niekoľkých žiakov, nebolo zámerom robiť z nich výskumné závery. Rozhodli sme sa pre skúmanie dvoch oblastí – schopnosť zostavenia plánu riešenia a schopnosť vizualizácie.

Schopnosť zostavenia plánu riešenia sme skúmali s dvomi ôsmačkami (tie riešili Výskumnú úlohu 5), jednou deviatačkou a jedným deviatakom (tí riešili Výskumné úlohy 4 a 5). Úlohy boli nasledujúce:

Výskumná úloha 4 Slovná úloha na pozorovanie schopnosti zostaviť plán riešenia

V škole na hodinách prírodopisu písal Martin niekoľko testov, z ktorých mohol získať až 100 bodov. Martin mal z prvých štyroch testov priemer 60 bodov. Z piateho testu dostal 80 bodov. Aký je Martinov bodový priemer z prírodopisu po piatich testoch?

Zdroj: Koršňáková, 2004 (PISA 2003)

Výskumná úloha 5 Slovná úloha na pozorovanie schopnosti zostaviť plán riešenia

Pes je na záhrade priviazaný reťazou dlhou 5 m ku krúžku, ktorý sa dá posúvať pozdĺž vodorovnej tyče dlhej 6 m. Určte obsah plochy po ktorej sa pes môže pohybovať, ak je tyč tesne pri zemi.

Zdroj: Molnár, 2010

Žiaci dostávali individuálne nasledujúce inštrukcie, počas riešenia bol zapnutý diktafón:

1. inštrukcia – Prípravná úloha.

Predstav si, že si na dolnej autobusovej zastávke a stretneš turistu, ktorý ťa požiada o to, aby si mu vysvetlil ako sa dostane k našej škole. Aké inštrukcie by si mu dal?

2. inštrukcia – Zostavenie plánu riešenia.

Teraz si prečítaš zadanie jednej úlohy. Tvojou úlohou však nebude túto úlohu vyriešiť, ale povedať mi (podobne ako si tomu turistovi vysvetľoval cestu), ako by som mala úlohu riešiť, aby som došla k správnemu výsledku.

3. inštrukcia – Riešenie úlohy.

Teraz písomne vyrieš zadanú úlohu.

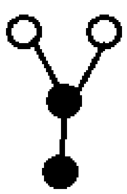
Pri schopnosti vizualizácie sme sa chceli pozrieť na jeden možný spôsob jej rozvíjania, a to využívaním grafov v chápaní diskrétnej matematiky. V prvej etape sme si totiž všimli, že jednému žiakovi pri riešení Výskumnej úlohy 3 pomohlo, keď od experimentátora dostal ponuku vyskúšať si nakreslenie situácie spôsobom, ktorý je na Obrázku 1:

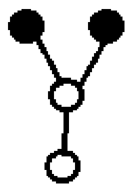
Obrázok 1Vizualizácia Výskumnej úlohy 3

Chceli sme to teda vyskúšať s viacerými žiakmi. Išlo o dve šiestačky, jedného šiestaka a dve siedmačky. Ako výskumnú úlohu sme si zvolili Výskumnú úlohu 3, pričom žiaci dostali nasledujúce inštrukcie:

1. inštrukcia – nácvik kreslenia grafov

a) Predstav si rodinu, v ktorej sú štyria súrodenci – dvaja bratia a dve sestry. Aby sa nám s tým ľahko pracovalo, pomôžeme si takýmto obrázkom: *(tento obrázok bude experimentátor vytvárať pred žiakom – čierne vrcholy predstavujú chlapcov, biele dievčatá, obrázok sa kreslí z perspektívy niektorého súrodenca)*

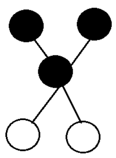




z pohľadu chlapca z pohľadu dievčaťa

b) Skús teraz podobne zakresliť situáciu vo vašej rodine z tvojho pohľadu.

c) Ja ti teraz nakreslím obrázok a ty mi povedz, koľko má každý chlapec sestier a bratov a koľko má bratov a sestier každé dievča.



3. inštrukcia – riešenie úlohy

Teraz si prečítaš zadanie jednej úlohy. Skús si pri riešení tejto úlohy pomôcť podobnými obrázkami.

5 *Schopnosti potrebné k riešeniu slovných úloh*

V tejto kapitole sa budeme postupne venovať schopnostiam potrebným k riešeniu slovných úloh. Najprv uvádzame ich zoznam, ktorý vznikol spracovaním odbornej literatúry (Košč, 1972 a Sekerák, 2008) a následne sa budeme osobitne venovať každej z nich. Triedenie schopností potrebných k riešeniu slovných úloh sme urobili podľa fáz riešenia slovnej úlohy (pozri Kapitolu 2, s.14), aby bolo čo najviac praktické. Vynechávame fázu riešenia matematického modelu, pretože táto fáza nie je typická len pre slovné úlohy, a tak by sme rozšírili svoj záber aj na iné ako slovné úlohy.

Zoznam schopností potrebných k riešeniu slovných úloh z hľadiska fáz riešenia slovných úloh je nasledovný:

- 1. fáza: porozumenie zadania úlohy:
    - **čítanie s porozumením**,
    - predstavivosť:
        - **priestorová predstavivosť**,
        - **sociálna a praktická predstavivosť**.
- 2. fáza: zostavenie matematického modelu:
    - **vizualizácia,**
    - **zostavenie plánu riešenia,**
    - **matematizácia.**
- 4. fáza: kontrola získaného riešenia
    - **dematematizácia**,
    - **matematická reflexia.**

5.1 Schopnosti potrebné vo fáze porozumenia zadaniu slovnej úlohy

5.1.1 Čítanie s porozumením

Prvým bodom v riešení slovnej úlohy je prečítanie jej zadania. L. Košč (1972) hovorí o *slovných (verbálnych) faktoroch*, ktoré definuje ako *špeciálny faktor, ktorý sa uplatňuje pri riešení slovných úloh*. Chápeme ho ako súhrn schopností, ktoré umožňujú žiakovi správne pochopiť zadanie slovnej úlohy ako text. Sú to schopnosti, ktoré môžeme skrátene nazvať aj čítanie s porozumením. V prvom rade žiak musí úlohu prečítať tak, ako je mu učiteľom zadaná. Správne prečítanie zadania je základom pre všetky ďalšie kroky riešenia slovnej úlohy. **Správne prečítanie chápeme ako také prečítanie, ktoré je bezchybné z obsahového hľadiska.** Neprekáža nám teda, ak žiak namiesto „dve hrušky" prečíta „dva hrušky", i keď je to gramaticky nesprávne, ale obsah je ten istý. Druhou vrstvou je pochopenie významu, ktorý sa za zadaním slovnej úlohy ukrýva. **Čítanie s porozumením vymedzujeme ako správne prečítanie zadania slovnej úlohy, na ktoré nadväzuje pochopenie významu tohto zadania.**

Pedagogická diagnostika

Vo všeobecnosti nie je náročné zistiť, či žiak úlohe porozumel alebo nie. Je ale dôležité rozlíšiť, či je problém v samotnom čítaní alebo úlohe nevie porozumieť z iných dôvodov (napríklad nemá dostatočne rozvinutú predstavivosť. Pozri 5.1.2). A ak v čítaní, tak prečo? Ide o neporozumenie v dôsledku nepozornosti alebo v dôsledku problémov s čítaním s porozumením?

<u>Preformulovanie úlohy:</u>

Túto techniku by sme mohli použiť aj v rámci pedagogickej diagnostiky aj v rámci rozvíjania schopnosti čítať s porozumením. Učiteľ môže dať žiakovi úlohu: „Povedz zadanie slovnej úlohy svojimi vlastnými slovami!" Žiak môže mať spočiatku komunikačný problém s vlastnou formuláciou zadania. Preto zo začiatku túto činnosť môže vykonávať s asistenciou učiteľa. Ak žiak vôbec nereaguje na učiteľove otázky a nechápe, čo sa učiteľ pýta, môžeme sa oprávnene domnievať, že danú slovnú úlohu žiak nepochopil. Ak sa takáto situácia opakuje častejšie, žiak potrebuje učiteľove vedenie v rozvíjaní tejto schopnosti. Napríklad aj tým, že si slovné úlohy bude skúšať preformulovať.

Analýza zápisu slovnej úlohy:

Zápis slovnej úlohy nám môže taktiež napovedať, či žiak číta s porozumením zadania slovných úloh. Tento spôsob však závisí od toho, ako učiteľ učí žiakov robiť zápis slovnej úlohy a od toho, akú veľkú dôležitosť pripisuje žiak svojmu zápisu. Najmä pri oprave písomiek je potrebné pozrieť sa už do zápisu a v prípade, že žiak už tam urobil chybu, mal by sa učiteľ opýtať, ako to žiak pochopil a či je možná taká interpretácia zadania, ktorá by logicky umožnila takýto zápis – takéto pochopenie. Je to príležitosť nahliadnuť do žiakovho spôsobu rozmýšľania a nájsť slabé miesto v jeho schopnosti porozumieť zadaniu. Samozrejme, naše pochopenie žiakovho zápisu a pochopenie jeho myslenia ostávajú len dohadmi, pokiaľ to so žiakom nepreberieme osobne.

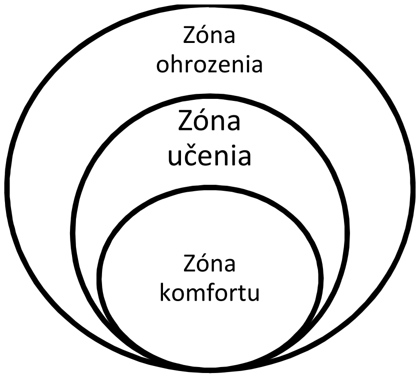
Rozvíjanie schopnosti

Pre rozvoj schopnosti čítania s porozumením je určite nevyhnutné investovať čas do čítania. Je to priestor pre rodičov, aby svojim deťom venovali čas aj tak, že si budú spolu čítať a následne sa o prečítanom texte rozprávať. Okrem vplyvu na detskú schopnosť čítať s porozumením, to určite bude mať vplyv aj na ich vzájomné vzťahy. Čo však pre rozvoj tejto schopnosti môže urobiť učiteľ matematiky?

Čítanie náročnejšej literatúry:

Učiteľ matematiky môže pre svojich žiakov vytvoriť úlohy, ktoré ich budú nútiť k čítaniu náročnejších textov. Cieľom je, aby žiak dokázal na vysokej úrovni vnímať text, ktorý má v sebe množstvo exaktných údajov. Podľa výskumu so stredoškolákmi, ktorý urobil P. Molnár k svojej dizertačnej práci, *čítanie kníh vo voľnom čase nemá štatisticky významný vplyv na schopnosť žiaka porozumieť zadaniu slovnej úlohy.* Ale *čítanie odborných kníh a odborných časopisov vo voľnom čase má štatisticky významný pozitívny vplyv na schopnosť žiaka porozumieť zadaniu slovnej úlohy.* A navyše *to, že žiak vo svojom voľnom čase nečíta (knihy, dennú tlač a časopisy číta veľmi zriedka alebo výnimočne), má štatisticky významný negatívny vplyv na jeho schopnosť porozumieť zadaniu slovnej úlohy* (Molnár, 2010, s.55-56). Z toho vidíme, že rozvinutie čítania s porozumením môžeme docieliť systematickou prácou žiakov s odbornými textami primeranými ich veku. Je jasné, že dať prváčikovi, ktorého čítanie sa ešte skôr podobá na lúštenie náročnej krížovky, prečítať encyklopédiu, je zbytočné ak nie demotivujúce. Tu je vhodné pomôcť si zónovou teóriou učenia, ktorá hovorí nasledovné: Učíme sa postupným rozširovaním tzv. komfortnej zóny. To je zóna, kde sa cítime bezpečne a nie sme v nej nútení zaoberať sa vecami, ktoré nám nejdú, v ktorých sa cítime neisto. Jej rozšírenie sa deje pri získavaní nových zručností a znalostí. Osvojovanie nových zručností a znalostí sa deje buď v zóne učenia – kde je vysoká pravdepodobnosť úspechu, ktorý zónu komfortu rozširuje alebo v zóne ohrozenia, kde je naopak vysoká pravdepodobnosť neúspechu, ktorý zónu komfortu zmenšuje (Sokolová, 2010, s.87-88). Obrázok 2 vysvetľuje Zónovú teóriu učenia:

Obrázok 2 Zónová teória učenia



(Sokolová, 2010)

Poznámka: Tento obrázok netreba chápať ako klasické Vennové diagramy. Autorka ním nechce povedať, že zóna komfortu je podmnožinou zóny učenia a tá podmnožinou zóny ohrozenia.

Je možné, že systematicky by sa takejto práci mohli venovať skôr učitelia jazykov, ale nič nebráni učiteľovi matematiky zadať za domácu úlohu napísanie referátu. Totiž písanie referátu ich donúti čítať odbornú literatúru a pracovať s ňou. Téma a rozsah primerané veku a záujmom žiakov môžu pôsobiť motivačne. Navyše, ak témy vhodne vyberieme, môžeme si pripraviť veľký priestor na aplikačné úlohy na vyučovacej hodine. V nasledujúcej tabuľke uvádzame príklady vhodných úloh, ktoré žiakov podnietia k rozvoju svojej schopnosti čítať s porozumením:

Tabuľka 2 Témy referátov pre rozvoj čítania s porozumením

Ročník	Návrhy tém referátov pre rozvoj schopnosti čítania s porozumením	Vyučovacia téma
5.	Najbohatší ľudia na svete.	Práca s veľkými číslami.
6.	Najväčšie a najmenšie krajiny na svete.	Obsah, jednotky obsahu.
7.	Volebný systém na Slovensku.	Pomery. Percentá.
8.	Tipovacie súťaže.	Pravdepodobnosť.
9.	Využívanie súmernosti v architektúre.	Súmernosť.

Pomalšie čítanie nahlas:

Cieľom je prispôsobenie rýchlosti čítania rýchlosti chápania, uvedomenie si dôležitosti správneho prečítania. Pri pozorovaní riešenia slovnej úlohy niektorými žiakmi sme si všimli, že problémom bolo príliš rýchle čítanie. Je možné, že niektorí žiaci majú sami so sebou skúsenosť, že rýchlo a správne čítať dokážu. Avšak túto skúsenosť získali pri čítaní jednoduchších textov, než je zadanie slovnej úlohy. Aj skúsený riešiteľ si zadanie číta pomalšie, než bežné správy v novinách či beletriu. Preto je potrebné toto nadmerné sebavedomie správne korigovať.

V práci v škole je vhodné využiť tzv. teóriu podmieňovania tak, že odmeníme (pochvalou, bodom na nástenke, spoločným tlesknutím ...) toho žiaka, ktorý prečítal zadanie úlohy pomaly a zreteľne. Ak niekto prečíta slovnú úlohu rýchlo, aj keď správne, je potrebné ho na to upozorniť. Pre deti je prirodzené *učenie napodobovaním,* do ktorého Albert Bandura (1977, in: Sollárová, 2008, s.56-58) zahŕňa nasledovné štyri komponenty: *pozornosť, retenciu, reprodukovanie a posilnenie.* V skratke ide o to, že ak dieťa niečomu venuje pozornosť, uchováva si to v pamäti, začne to skúšať a dostane za to odmenu, osvojí si dané správanie. Problém je v tom, že na hodinách čítania a literatúry je nutné čítať plynule a dostatočne rýchlo. Pričom porozumenie textu nie je až také náročné. Žiaci si to však nemusia uvedomovať, a tak sa snažia prečítať text rovnako rýchlo, aj keď je pre nich náročnejší. Preto musí byť v kolektíve jasne zadefinované, že čítať zadanie slovnej úlohy pomaly je lepšie, ako jej rýchle prečítanie.

Pri práci doma, v ideálnom prípade ak sa žiakovi venujú aj rodičia, je skutočne možné využívať individuálny prístup. Rodič, ktorý s dieťaťom slovnú úlohu počíta, by mal dbať na primeranú rýchlosť čítania – a to aj v prípade, že slovná úloha nie je náročná. Ak dieťa urobí chybu pri čítaní, je dobré nechať ho dopočítať príklad aj s chybou. Potom rodič navedie dieťa k objaveniu vlastnej chyby (poprípade, ak to jeho pedagogické schopnosti neumožňujú, priamo na chybu poukáže) a spolu môžu vymýšľať, čo by sa stalo, keby to nebola len slovná úloha, ktorú má vypočítať do školy. Napríklad ak by sa takto pomýlila pani predavačka v obchode, musela by potom zaplatiť ona a podobne. Ak sa dieťaťu výpočet príliš skomplikuje, resp. znemožní po urobení tejto chyby, je možné opäť to využiť v prospech rozvinutia schopnosti čítania s porozumením. Dalo by sa to spraviť tak, že začneme od začiatku a na záver s dieťaťom porozmýšľame, že ak by sme úlohu prečítali hoci aj dvakrát a poriadne, tak by sme sa vyhli chybe a zabralo by nám menej času, prísť k dobrému výsledku.

Kladenie si otázok

Čítanie s porozumením možno podporiť i tak, že naučíme žiaka klásť si v priebehu čítania zadania slovnej úlohy otázky, ktoré mu napomôžu uchopiť jednotlivé vrstvy slovnej úlohy (pozri Kapitola 2, s.13). Otázky by mali viesť k tomu, aby si žiak pomenoval *objekty* slovnej úlohy a *vzťahy*. Spočiatku tieto otázky môže klásť učiteľ resp. rodič, neskôr by si ich malo klásť dieťa samostatne.

5.1.2 Predstavivosť

Jedna z prvých reakcií učiteľov z praxe v rozhovore o vyučovaní slovných úloh bola veta oznamujúca, že „deti nemajú predstavivosť." Je to veľmi závažné tvrdenie, pretože *predstavivosť je kognitívnym priestorom na učenie sa matematiky* (Kotsopoulos, Cordy, 2009). R.J. Sternberg (2002, s.246) vymedzuje predstavy *ako mentálne reprezentácie tých vecí (predmetov, udalostí, scenérií a pod.), ktoré v okamihu reprezentácie nie sú vnímané zmyslovými orgánmi.* Ďalej hovorí o základných mentálnych manipuláciách s predstavami, ktorými sú *rotácia, vzájomné porovnávanie predstáv a prezeranie predstáv* (s.256-264). Pre potreby tejto práce, rozdelíme predstavivosť na dva typy, a to:

- priestorová predstavivosť,
- sociálna a praktická predstavivosť.

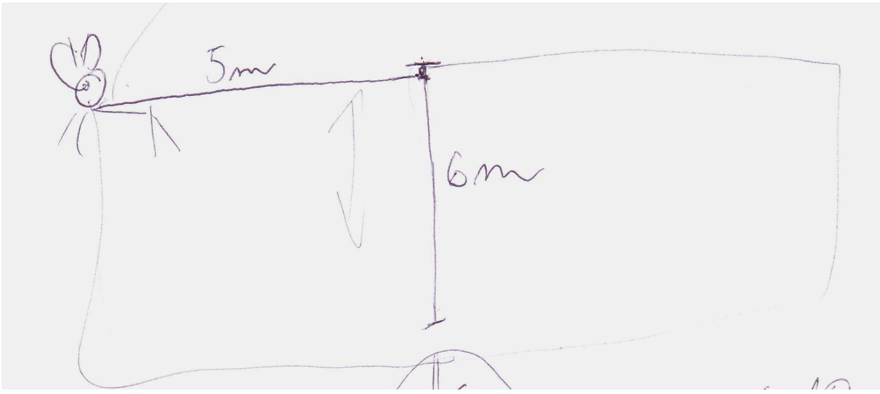
5.1.2.1 Priestorová predstavivosť

L. Košč vymedzuje pojmem priestorové, vizuálno-percepčné faktory ako faktory, ktoré *sa týkajú pohybu aj nehybných telies a to reálnych alebo aj predstavovaných, týkajú sa schopnosti orientovať sa v zrakovo vnímateľnom priestore, resp. schopnosti manipulovať so skutočným alebo nejako znázorneným materiálom v zrakovom poli* (Košč, 1972). Teda **priestorovou predstavivosťou budeme rozumieť schopnosť vytvoriť si správnu mentálnu reprezentáciu rôznych objektov a manipulovať s ňou.** Rozvíjanie tejto schopnosti je – na rozdiel od sociálnej a praktickej predstavivosti, či čítania s porozumením – tesnejšie viazané na matematiku. V oblasti stereometrie sú vytvorené priaznivé podmienky na to, aby žiak rozvíjal túto schopnosť, ktorá je široko uplatniteľná v rôznych povolaniach aj v bežnom živote. To, či žiak využil alebo nevyužil svoju priestorovú predstavivosť, je možné dobre odčítať z náčrtov. Pre ilustráciu uvedieme príklady využitia a nevyužitia danej schopnosti na Výskumnej úlohe 5 (s. 25):

Nevyužitie tejto schopnosti

Kristína po zadaní úlohy hneď povedala, že si to treba najprv nakresliť. Začala ilustráciou psa, a potom pokračovala v kreslení. Dospela najprv k obrázku obdĺžnika s rozmermi 5m x 6m a následne po otázke experimentátora, či je z druhej strany plot, dokreslila aj obdĺžnik z druhej strany, čím vznikol obdĺžnik 10m x 6m, ktorý však ešte stále nezodpovedal realite.

Obrázok 3 Nevyužitie priestorovej predstavivosti

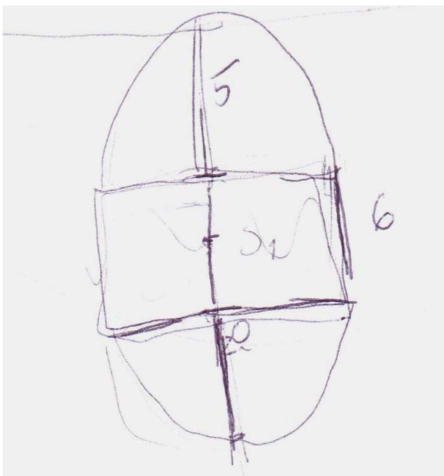


(Kristína, 9.ročník)

Využitie tejto schopnosti

Kristína následne po otázke experimentátora, či je to všetko, či sa pes ďalej nemôže hýbať, porozmýšľala a sama, bez spolupráce s experimentátorom dokreslila aj bočné strany, ktoré tvorili polkruhy. Uvedomila si, že krajné polohy pohybu psa na reťazi upevnenej na konci tyče môžu byť modelované ako rysovanie kružnice.

Obrázok 4 Využitie priestorovej predstavivosti



(Kristína, 9. ročník)

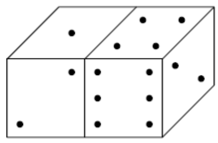
Pedagogická diagnostika

„<u>Kocky</u>“

Psychológovia v Teste štruktúry inteligencie (Amthauer, 1973) tzv. I-S-T v subškále priestorovej predstavivosti používajú úlohu, v ktorej figurujú kocky a mentálne narábanie s nimi. Pre naše účely nie je potrebné rozvádzať presný charakter testovej úlohy. Ale je možné, že v triede môže učiteľ využiť napríklad hracie kocky a pomocou jednoduchých úloh si vytypovať žiakov, ktorí budú potrebovať viac jeho podpory v oblasti priestorovej predstavivosti. Príklady úloh sú nasledujúce:

Príklad 3 Pedagogická diagnostika priestorovej predstavivosti I

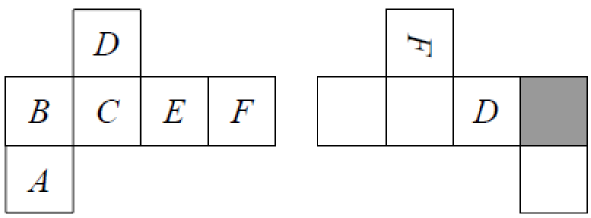
Urč súčet bodov na stenách, ktoré nevidíme. (Súčet bodov na protiľahlých stenách kocky je vždy 7.)



Zdroj: Matematický klokan, 2007, kategória junior

Príklad 4 Pedagogická diagnostika priestorovej predstavivosti II

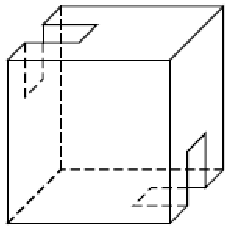
Na stenách hracej kocky sú namiesto bodiek napísané písmená. Na prvom obrázku je znázornená jedna z jej možných sietí. Ktoré písmeno patrí do tmavého štvorca na druhom obrázku, ktorý zachytáva inú sieť tej istej kocky?



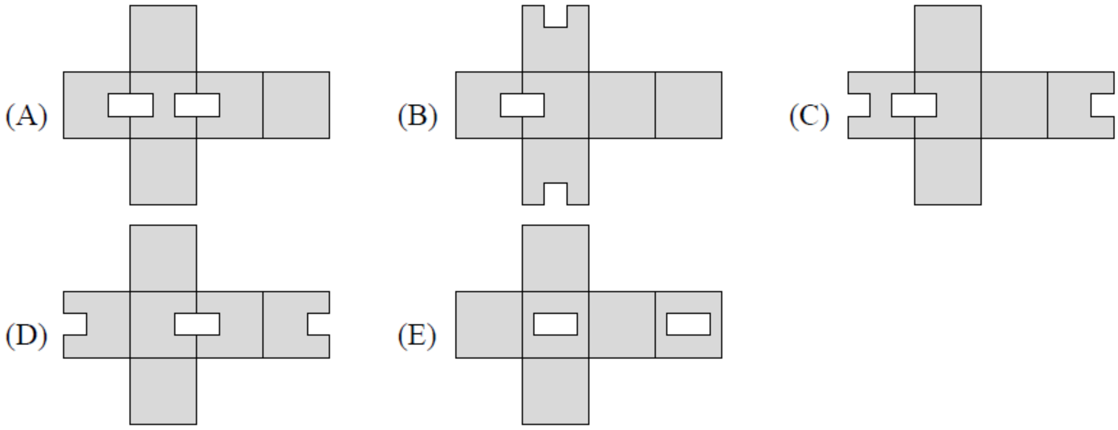
Zdroj: Matematický klokan, 2006, kategória benjamín

Príklad 5 Pedagogická diagnostika priestorovej predstavivosti III

Jurko zložil z kartónu škatuľu v tvare kocky. Do stien škatule vyrezal dva otvory, ako vidíš na obrázku:



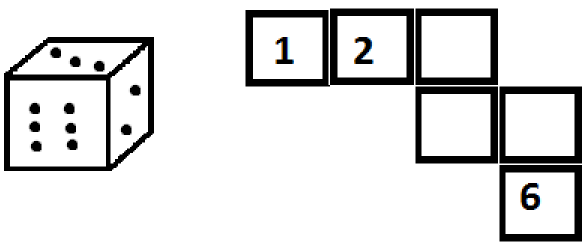
Ktorý z nasledujúcich obrázkov zachytáva kartón po rozložení škatule?



Zdroj: Matematický klokan 2006, kategória kadet

Príklad 6 Pedagogická diagnostika priestorovej predstavivosti IV

Aký počet bodiek bude na spodnej stene kocky, keď prejde celý hrací plánik z políčka č.1 na políčko č.6? Kocka je postavená na políčko č.1 v tej polohe, ako je vyobrazená na obrázku. Pohybuje sa tak, že sa vždy prevráti z políčka na políčko cez tú hranu, ktorú má spoločnú s políčkom, na ktoré sa presúva. (Súčet bodov na protiľahlých stenách kocky je vždy 7.)



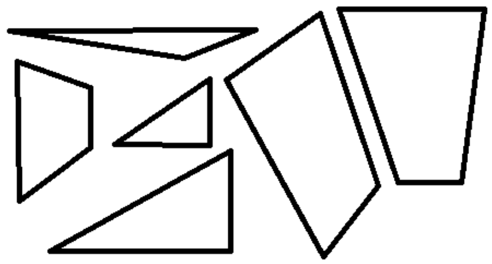
Zdroj: vlastné spracovanie

„<u>Rozstrihanie</u>“

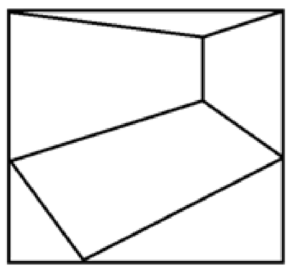
V spomínanom I-S-T sa nachádza aj subškála predstavivosti, ktorú autori testu „merajú“ pomocou úlohy, v ktorej má testovaný určiť, ktorý z predložených obrazcov sa dá zostaviť pomocou vyobrazených dielikov. Podobný princíp môžeme využiť v pedagogickej diagnostike problémov s priestorovou predstavivosťou. Príkladom môže byť takáto úloha:

Príklad 7 Pedagogická diagnostika priestorovej predstavivosti V

Žiak dostane nasledovné dieliky, s nasledovným zadaním:



Z dielikov, ktoré si dostal, poskladaj útvar, ktorý vidíš na obrázku.



Zdroj: vlastné spracovanie

Rozvíjanie schopnosti

<u>Názornosť:</u>

„Ľudí treba učiť podľa možnosti nie z kníh, ale z neba, zo zeme, z dubov a bukov, to jest poznať a skúmať veci samy a nielen cudzie pozorovania a svedectvá o veciach. Nech sa teda podávajú mládeži veci a nie tiene vecí. Preto nech je pre učiacich zlatým pravidlom, aby sa všetko podávalo všetkým možným zmyslom. Totiž veci viditeľné zraku, počuteľné sluchu, čuchateľné čuchu, chutnateľné chuti a hmatateľné hmatu; a ak možno niektoré veci vnímať súčasne viacerými zmyslam, nech sa podávajú súčasne viacerým“ (Komenský, IN: Turek, 2008, s.151). Inak povedané – didaktická zásada názornosti.

Piagetova teória kognitívneho vývinu, s ktorou je oboznámených mnoho učiteľov, uvádza nasledovné štádia: senzomotorické štádium (0-2 roky), predoperačné štádium (2-6 rokov), štádium konkrétnych operácií (7-11 rokov) a štádium formálnych operácií (12 a viac rokov) (Fontana, s.65). Čo je však podstatné, d*nes panuje medzi psychológmi všeobecná zhoda v názore, že najpokročilejšie úrovne formálneho myslenia dosahuje i vo veku 16 rokov len menšina* (Coleman, Hendry 1990, in Fontana 2010, s.74). Pričom štádium formálnych operácií znamená, že dieťa pracuje s abstraktnými pojmami a symbolmi, ktoré nemusia mať fyzickú, konkrétnu podobu. Deti začínajú chápať niektoré veci, ktoré si samy priamo nevyskúšali (Inhelder, Piaget 1958, In: Sterneberg, 2002, s.475). Z toho nám vyplýva to, čo Komenský tvrdil už dávno – čo sa dá, to je potrebné žiakom ukázať.

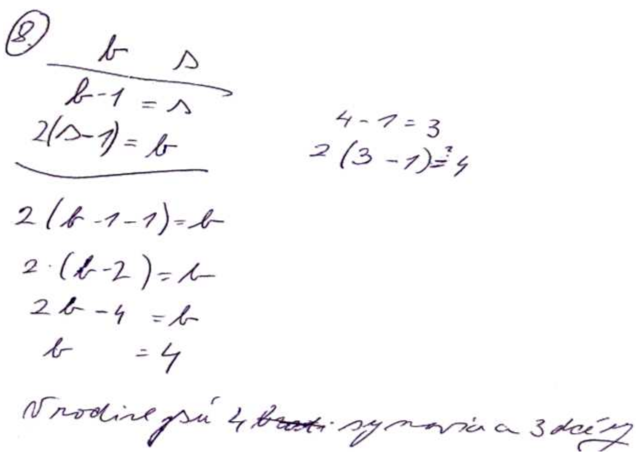
5.1.2.2 Sociálna a praktická predstavivosť

P. Molnár vo svojej dizertačnej práci uvádza úlohu s nasledujúcim zadaním: „*V rodine boli synovia a dcéry. Každý syn mal toľko bratov ako sestier a každá dcéra mala dvakrát viac bratov ako sestier. Koľko synov a koľko dcér mala rodina?*“(Kováčik, Scholtzová, in: Molnár, 2010, s.70). Túto úlohu sme použili pri prvotnom pozorovaní riešení slovných úloh žiakmi na základnej škole (Výskumná úloha 3). Bolo zaujímavé pozorovať, že žiaci, ktorí mali len jedného súrodenca, mali s jej pochopením väčšie problémy než tí, ktorí mali súrodencov viac. Ďalším príkladom môže byť problém so slovnými úlohami, kde vystupujú úroky, pretože žiak nemá skúsenosť s užívaním vlastného účtu v banke. Je zjavné, že na porozumenie takýmto slovným úlohám, si žiak potrebuje predstaviť istý sociálny kontext, vzťahy, či bežne zaužívané postupy v danej spoločnosti. Ide o iný typ predstavivosti, ako je priestorová predstavivosť. A tak ako je potrebné pre správne budovanie predstavy kocky u detí, aby túto kocku videli, mohli si ju chytiť,... rovnako je dôležité, aby zažili rôzne sociálne situácie, o ktorých hovoria slovné úlohy, premýšľali o nich a uvedomili si vzťahy a súvislosti. To sa bežne deje v procese socializácie spontánne, bez toho aby dieťa muselo vynakladať energiu navyše. Avšak sú deti, ktoré tú ktorú skúsenosť nemajú, a preto majú s riešením niektorých slovných úloh problém. Aj pri testovaní (špeciálne sa o to zaujímame pri testoch inteligencie) je potrebné zachovať tzv. kultúrnu korektnosť testovania. Vhodný príklad, ktorý nám poslúži na poukázanie jej dôležitosti, máme z praxe jedného z učiteľov psychológie. Deti z istého rómskeho sídliska absolvovali testovanie inteligencie. V testoch skórovali hlboko pod hranice normality, ale ich správanie a reakcie na podnety boli celkom iné. Na otázky o mestskej hromadnej doprave (ktorou električkou sa kam dostanú a podobne) reagovali správne a veľmi živo. Testy boli voči nim kultúrne nekorektné. Ich inteligenčné schopnosti prevyšovali skóre, ktoré dosiahli v teste, pretože úlohy, aké boli v teste, nie sú považované v ich kultúre za podstatné. Navyše aj Ruppeldtová (2005, s.225) hovorí o skúsenosti riešiteľa s kontextom úlohy ako o jednom z fenoménov náročnosti slovnej úlohy. Teda jeden rozmer schopnosti sociálnej a praktickej predstavivosti, je **mať skúsenosť** s daným sociálnym kontextom. Druhá dimenzia schopnosti spočíva v spôsobilosti žiaka **využiť skúsenosť**, ktorú má, v prospech riešenia zadanej slovnej úlohy. Sociálnu a praktickú predstavivosť teda vymedzíme na základe spomenutých príkladov ako **schopnosť orientovať sa v sociálnom priestore a využívať skúsenosti zo života v riešení slovných úloh.**

Využitie schopnosti

Využitie schopnosti sociálnej a praktickej predstavivosti môžeme dobre ilustrovať na riešení práve spomínanej úlohy, avšak tieto riešenia preberáme od P. Molnára (2010), keďže sú výrečné viac než tie, s ktorými sme sa stretli my. Na Obrázku 5 vidíme, že žiak si veľmi dobre uvedomuje, že syn a dcéra v tej istej rodine majú rôzny počet bratov a sestier. Z toho, že správne zapísal prvú rovnicu (b-1 = s) vyplýva, že sa vie na situáciu v rodine pozrieť z pohľadu syna. Z toho, že správne napísal druhú rovnicu (2(s-1)=b) vyplýva, že sa dokáže pozrieť aj z pohľadu dcéry. Samozrejme, tento zápis si vyžadoval aj schopnosť matematizácie, ale vidíme za ním aj to, že si danú situáciu predstavil. U žiakov, ktorí si situáciu predstaviť vedeli, ale nevedeli ju matematizovať pomocou rovníc sa P. Molnár stretol skôr s riešeniami pokus-omyl (a dokonca ich bola väčšina).

Obrázok 5 Využitie schopnosti sociálnej a praktickej predstavivosti

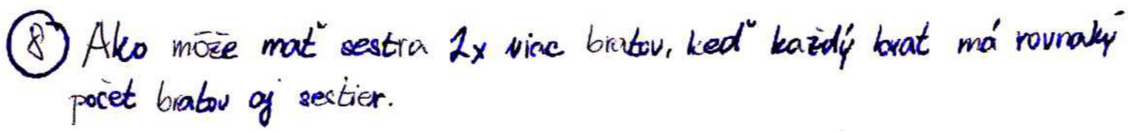


(Zdroj: Molnár, 2010)

Nevyužitie schopnosti

Na druhej strane žiak, ktorý si tento sociálny kontext nevie predstaviť, úlohu nedokáže riešiť ani pomocou sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych, ani pokusne. Ukážka toho, ako sa pozerá na túto slovnú úlohu takýto žiak, je na Obrázku 6.

Obrázok 6 Nevyužitie schopnosti sociálnej a praktickej predstavivosti



(Zdroj: Molnár, 2010)

Pedagogická diagnostika a rozvíjanie schopnosti

Ukazovateľom, že problémom nezvládania slovných úloh je nedostatočné rozvinutie schopnosti sociálnej a praktickej predstavivosti, môže byť v prvom rade informácia, že dieťa je zo sociálneho prostredia chudobného na podnety. Ako sme už spomenuli, mnohému sa dieťa učí spontánne v procese socializácie. Ak sociálne prostredie dieťaťa, v ktorom vyrastá neposkytuje dostatok príležitostí, podnetov, skúseností, proces socializácie neprebieha tak, ako by bolo želateľné. V tomto prípade sú možnosti rozvíjania schopnosti sociálnej a praktickej predstavivosti na hodinách matematiky dosť obmedzené, keďže sú podmienené aktívnym zapojením dieťaťa do rôznych sociálnych situácií. Na hodinách matematiky nie je možné doplniť to, čo dieťaťu chýba z jeho sociálneho prostredia. Azda len v obmedzenej miere pri skupinovej práci, či pri projektovom vyučovaní.

Taktiež sa môže stať, že žiak zlyháva v slovných úlohách, ktoré majú navzájom spoločnú tému. To by mohol byť pre učiteľa signál, že žiak nemá dostatočnú skúsenosť práve v tej oblasti, ktorej sa úlohy týkajú. V tomto prípade je azda rozvíjanie viac v kompetencii učiteľa, ktorý môže žiakovi aspoň doplniť chýbajúce informácie, poprípade požiadať jeho rodičov, aby tak urobili.

5.2 Schopnosti potrebné vo fáze zostavenia matematického modelu

5.2.1 Vizualizácia

J. Sekerák uvádza v zozname kľúčových kompetencií pre vyučovanie matematiky kompetenciu *znázorňovanie a popisovanie matematických objektov a situácií, reprezentácia.* Túto kompetenciu vymedzuje nasledovne:

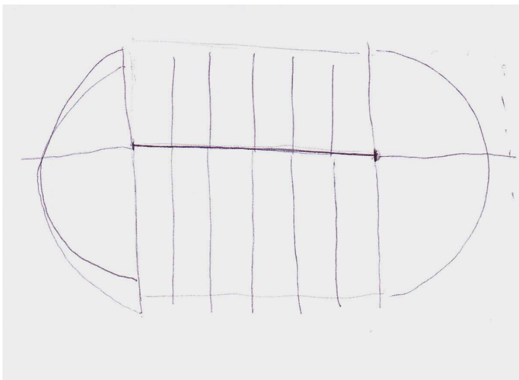
- *dekódovať, interpretovať a rozlišovať medzi rôznymi formami znázorňovania (popisovania) matematických objektov a situácií a chápať vzájomné vzťahy medzi nimi,*
- *vyberať medzi rôznymi formami znázorňovania a prechádzať medzi nimi podľa situácie a účelu,*
- *popisovať a znázorňovať matematické objekty a situácie jasne, stručne, presne, zrozumiteľne,*
- *vyhodnocovať informácie kvantitatívneho a kvalitatívneho charakteru obsiahnutých v grafoch, diagramoch, tabuľkách, atď.,*
- *prezentovať a spracovať získané informácie a výsledky formou grafov, diagramov, tabuliek, atď. použitím rôznych pomôcok (IKT,...)* (Sekerák, 2008, s.28).

M. Hejný (2005, s.22) vizualizáciou nazýva ten *graficko-výtvarný produkt žiaka, ktorý bol vytvorený s cieľom porozumieť úlohe, nájsť jej riešenie, alebo napomôcť formulovať výsledok. Výtvarný produkt žiaka, ktorý neplní žiadnu z vyššie uvedených funkcií a má len estetický význam, alebo je vedený inou ako matematickou snahou o sebarealizáciu, považujeme za ilustráciu.* Z toho vidieť, že schopnosť vizualizácie je možné využiť v rôznych fázach riešenia slovnej úlohy. Naše zaradenie do fázy zostavovania matematického modelu sme urobili s vedomím, že nie je celkom presné. V knihe Nápady na ubrousku D. Roam dokladuje mnohými príkladmi, že vizuálne myslenie je prínosné pre riešenie praktických problémov, pričom vizuálne myslenie *znamená využiť našu prirodzenú schopnosť vidieť – a to tak normálnymi očami, tak aj „vnútorným zrakom“ - a vďaka tejto schopnosti prichádzať na nápady, ktoré inak nie sú viditeľné, objavovať tieto nápady rýchlo a intuitívne, a potom sa o tieto nápady podeliť s ostatnými spôsobom, ktorému budú rozumieť* (Roam, 2009, s.14). Na základe spomenutých vymedzení schopnosťou vizualizácie budeme rozumieť ***schopnosť graficky reprezentovať slovnú úlohu alebo jej riešenie.*** Pri niektorých typoch slovných úloh je vizualizácia bežným krokom v riešení. Vizualizovať pri slovnej úlohe na výpočet obvodu, obsahu, povrchu či objemu chápu aj žiaci ako výhodný a užitočný krok. Možno aj preto že sú k tomu intenzívne vedení svojimi učiteľmi. Napríklad tým, že pri týchto úlohách má vizualizácia aj svoje meno: náčrt, ktorý je dokonca v didaktických testoch predmetom hodnotenia a možného bodového zisku. Ďalším typom slovných úloh, kde žiaci môžu spontánne využívať vizualizáciu a často tak aj robia, sú slovné úlohy na pravdepodobnosť (Zahner, Corter, 2010, s.194), i keď pri týchto úlohách zvlášť záleží na vyučovacom štýle učiteľa. Pri zložitých slovných úlohách však žiaci spontánne nevyužívajú vizualizáciu – nakreslenie problémovej situácie, čo nie je situácia len v slovenských školách (De Bock a kol., 1998, in Kajamies, 2010, s.336). Chceme poukázať na to, že nie len pri geometrických slovných úlohách a slovných úlohách na pravdepodobnosť je možné a vhodné využívať vizualizáciu. Ako hovorí Roam (2009), pri tvorení nápadov môžeme využívať našu prirodzenú schopnosť vidieť. Ak si uvedomíme, že väčšinu (podľa niektorých zdrojov až 80%) informácií o svete prijímame zrakom, oceníme význam schopnosti vizualizácie pre riešenie slovných úloh.

Využitie tejto schopnosti

Ako prvý príklad využitia schopnosti vizualizácie uvádzame časť riešenia ôsmačky Veroniky, ktorá riešila Výskumnú úlohu 5 (s.25). Je to úloha, ktorej riešením je výpočet obsahu plochy. Tradične žiaci pri takýchto úlohách okamžite využívajú náčrt, čo sa ukázalo aj pri zbieraní materiálu pre túto prácu – všetci žiaci, ktorí riešili túto úlohu sa snažili – úspešne či neúspešne – nakresliť si k nej obrázok podobný tomu, ktorý je uvedený na Obrázku 7.

Obrázok 7 Využitie schopnosti vizualizácie I



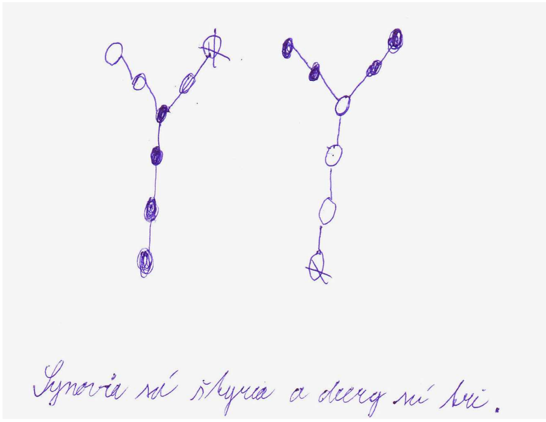
(Veronika, 8.ročník)

Veronika si navyše pomáhala aj kreslením zvislých čiar, ktoré znázorňovali, kam až dosiahne reťaz v rôznych polohách na tyči. Pravdepodobne Veronika takto uviazaného psa ešte nevidela a potrebovala si túto situáciu postupne kresliť, aby objavila, obsah akého útvaru má vypočítať.

Druhý príklad využitia schopnosti vizualizácie, ktorý chceme poskytnúť, nebol nakreslený spontánne, ale ako výsledok inštrukcií k Výskumná úloha 3 (s.25). Chceme ním poukázať na to, že žiaci sú schopní využívať vizualizáciu – a je pre nich užitočná –

aj pri iných úlohách. Riešenie šiestaka Daniela na Obrázok 8 je oveľa prehľadnejšie, než riešenie piataka Tomáša na Obrázok 9.

Obrázok 8 Využitie schopnosti vizualizácie II

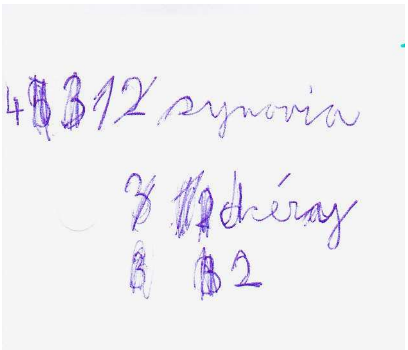


(Daniel ,6.ročník)

Nevyužitie tejto schopnosti

Tomášove riešenie vznikalo podobným myšlienkovým procesom ako Danielove. Je však neprehľadné a ani samotný žiak v závere vlastne nevie, koľko synov a koľko dcér má rodina.

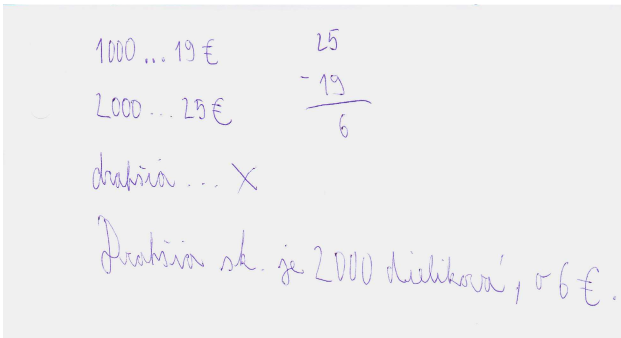
Obrázok 9 Nevyužitie schopnosti vizualizácie I



(Tomáš, 5.ročník)

Ako posledný príklad k nevyužitiu schopnosti vizualizácie, uvádzame riešenie Výskumná úloha 1 (s.24) piatakom Jakubom (Obrázok 10). Táto úloha je už pre žiaka typovo známa, a preto si nepotrebuje nič kresliť. Týmto príkladom chceme zdôrazniť, že si nemyslíme, že vizualizáciu je potrebné používať za každú cenu. Uvedomujeme si, že pri niektorých úlohách by kreslenie obrázka bolo zbytočné.

Obrázok 10 Nevyužitie schopnosti vizualizácie II



(Jakub, 5. ročník)

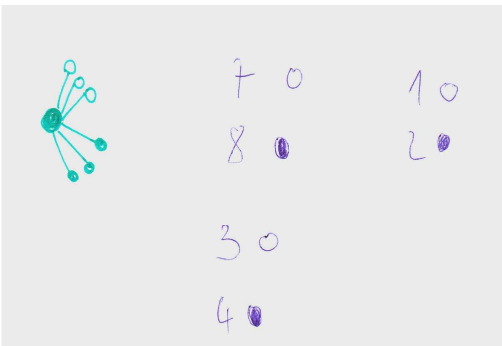
Rozvíjanie schopnosti

Diskrétna matematika:

Grafy z diskrétnej matematiky sú len jedným z mnohých nástrojov, ktoré môžu slúžiť ako spôsob vizualizácie slovných úloh. Napríklad niektoré úlohy z kombinatoriky (počet podaní rúk) sa dajú prehľadne reprezentovať pomocou grafov. Azda by preto bolo vhodné poskytnúť žiakom aj tento spôsob vizualizácie, i keď na základe skúsenosti zo základných škôl priznávame, že je potrebné venovať istý čas, kým s ním žiaci bezpečne pracujú. Domnievame sa však, že tento čas by bol rozumnou investíciou. Žiakom sa takýto spôsob zobrazovania vzťahov páčil, čo je pre autorku práce dostatočnou motiváciou k tomu, aby to vo vlastnej pedagogickej praxi vyskúšala.

Úlohou, ktorá nám slúžila ako nástroj na vyskúšanie, ako sú deti schopné a ochotné pracovať s grafmi, bola Výskumná úloha 3 (s.25). Obrázok 11 vznikol pri nasledovnej situácii: Piatak Jakub mal problém s pochopením, pretože má len jednu sestru a nedokázal si dosť dobre predstaviť celý kontext úlohy. Experimentátorka mu navrhla, nech si situáciu zakreslí pomocou obrázka vľavo, Jakub už ďalej skúšal rôzne možnosti počtu súrodencov sám a nemal problém s ich počítaním.

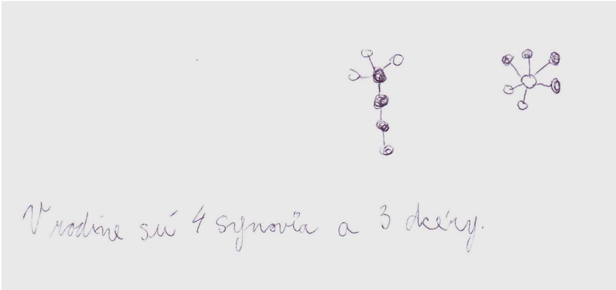
Obrázok 11 Rozvíjanie schopnosti vizualizácie III



(Jakub, 5.ročník)

Siedmačka Veronika riešila tú istú úlohu ako Jakub. Dostala však pred tým krátku inštrukciu o využívaní grafov (pozri Kapitolu 4). Obrázok 12 ukazuje jej vizuálne riešenie úlohy. Ona a aj ostatní žiaci, ktorí riešili túto úlohu, zobrazovali situáciu tak, ako je na grafe vľavo. Neboli schopní samostatne bez pomoci experimentátorky nakresliť graf podobný tomu, ktorý je na pravej strane Obrázka 12, i keď takto boli inštruovaní.

Obrázok 12 Rozvíjanie schopnosti vizualizácie IV



(Veronika, 7.ročník)

Z týchto príkladov pre nás vyplýva, že žiaci sú zrejme dosť rýchlo schopní pochopiť vizualizáciu pomocou grafu, ale s jeho samotným nakreslením môžu mať problémy. Je otázkou, či je to spôsobené len nedostatkom skúsenosti alebo tým, že sa jedná už o prílišnú abstrakciu.

<u>Náčrty:</u>

Robenie náčrtov je súčasťou riešenia niektorých typov úloh. Či už ide o slovné, konštrukčné alebo výpočtové úlohy, je potrebné, aby v prvom rade učiteľ pri robení náčrtu na tabuľu robil náčrt tak, aby žiaci nedospeli k chybnému poznatku. Zaujímavosťou, s ktorou sa stretáva aj autorka práce na doučovaniach a zrejme aj učitelia v praxi, je neschopnosť žiaka načrtnúť kosoštvorec. Kosodĺžnik pritom nerobí žiaden problém, kosoštvorec však pre žiakov často znamená len štvorec „postavený na jeden zo svojich vrcholov.“ Tento problém zrejme vzniká kdesi na začiatku osvojovania pojmu kosoštvorec, kedy sa žiaci nesprávne naučia, že rozhodujúca je poloha útvaru, nie veľkosť jeho uhlov a dĺžky strán. Podľa nás by sa mal učiteľ zamerať na to, aby načrtol:

- **(1) všeobecný útvar** (ak nie je v úlohe zadané inak), t.j. nie rovnostranný, rovnoramenný či pravouhlý trojuholník ale nejaký iný,
- **(2) obrázok čo najviac zodpovedajúci zadaniu –** napr. pomery strán nech sú približne také, ako hovorí zadanie,

- **(3) aj v takej polohe, v akej sa bežne útvar nekreslí –** napr. lichobežník dlhšou základňou hore, tupouhlý lichobežník, ...

Náčrty, ktoré nespĺňajú kritéria (1) a (2), zrejme neprinášajú žiakovi pomoc pri riešení úlohy, skôr ho zmätú. Opodstatnenosť kritéria (3) môžeme podložiť skúsenosťou z praxe, kedy po dokončení konštrukčnej úlohy žiaci tvrdili, že má len jedno riešenie, pretože „to druhé" nie je lichobežník, pričom „to druhé" bol tupouhlý lichobežník.

Ja opíšem, ty nakreslíš:

Jednoduchá didaktická hra môže odbúravať strach a nechuť z kreslenia a zároveň môže žiakom pomôcť pri vizuálnom vyjadrovaní svojich myšlienok, či pri pochopení toho, že jeden dobrý obrázok môže povedať viac ako mnoho slov. Zadanie hry je uvedené v Príklad 8.

Príklad 8 Rozvíjanie schopnosti vizualizácie

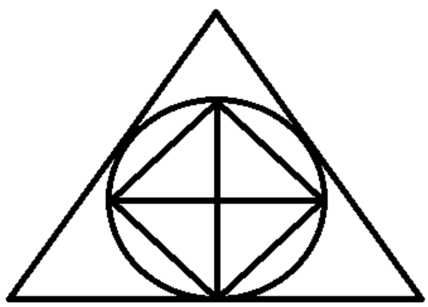
Organizačná forma: dvojice

Pomôcky: predtlačený obrázok pre každú dvojicu, papier, písacie potreby, poprípade tvrdá podložka

Organizácia: Žiaci vytvoria dvojice, sedia k sebe chrbtom, jeden z nich má k dispozícii papier, písaciu pomôcku a tvrdú podložku/lavicu. Druhý dostane obrázok, ktorý nesmie ukázať svojmu partnerovi.

Inštrukcia: V rukách máš obrázok, ktorý má tvoj spolužiak nakresliť na svoj papier tak, aby ho pri tom vôbec nevidel. Tvojou úlohou je slovne ho navigovať k tomu, aby sa mu to podarilo.

Príklad obrázka:



Zdroj: vlastné spracovanie

5.2.2 Zostavenie plánu riešenia

Ďalšou z kompetencií, ktoré zaradil J. Sekerák do zoznamu kľúčových kompetencií pre vyučovanie matematiky, je *položenie otázky, vymedzenie problému a jeho riešenia.* Žiak, ktorý má túto schopnosť rozvinutú, dokáže

- *tvoriť otázky,*
- *vymedziť, analyzovať, formulovať a definovať rôzne druhy matematických problémov (čistý, aplikovaný, s otvoreným koncom, uzavretý),*
- *identifikovať hlavné východiská, sporné otázky,*
- *znalosť algoritmov a schopnosť aplikovať ich pri riešení problémov,*
- *riešiť rôzne druhy matematických problémov rôznymi spôsobmi, aplikovať a prispôsobiť primeranú stratégiu na riešenie problému a nachádzať nové spôsoby riešenia,*
- *pozorovať a uvedomiť si proces riešenia matematických problémov,*
- *budovať nové matematické poznatky riešením problémov,*
- *aplikovať osvojené poznatky a metódy riešenia problémov v iných oblastiach*

(Sekerák, 2008, s.30).

M. Hejný a A. Michalcová (2001, s.81) vymedzujú pojem stratégie nasledovne: *stratégia je plán, podľa ktorého človek uskutočňuje alebo zamýšľa uskutočniť cieľ sledujúcu činnosť*. M. Hejný nepožaduje, aby bola stratégia premyslená, alebo uvedomovaná. My toto jeho chápanie stratégie preberieme do nášho vymedzenia schopnosti zostaviť plán riešenia, a teda pre využitie tejto schopnosti **stačí, ak je žiakovi jasná len východisková situácia (poprípade cieľ – podľa typu problému, ktorý rieši) a nasledujúci krok, ktorý musí urobiť.** Počet krokov, ktoré vedia presne naplánovať zrejme závisí od známosti úlohy, ktorú riešia. Žiak nemusí vedieť pomenovať všetky nasledujúce kroky, a to aj v prípadoch, keď sú mu v podstate jasné. Je však pre neho náročné vedieť ich pomenovať, lebo si to vyžaduje stupeň abstrakcie, na ktorý ešte nedospel. Bolo to vidieť u deviatakov Jakuba a Kristíny vo Výskumnej úlohe 4 (s.25), ktorí aj keď pochopili zadanie, že majú experimentátorovi povedať plán riešenia, neboli schopní povedať len niečo v zmysle: „Najprv si potrebuješ zistiť súčet všetkých bodov, ktoré Martin získal. Potom tento súčet vydelíš počtom všetkých testov.“ Hneď počítali, čo u oboch viedlo k rovnakej chybe, ktorú si Martin okamžite všimol, ale Kristína nie. Oba príklady sú podrobnejšie rozobraté v časti 5.2.3.

Využitie tejto schopnosti

Pri Výskumnej úlohe 5 (s.25) môžeme u Kristíny dobre pozorovať, ako sa schopnosť tvoriť plán rozširuje a zužuje podľa miery uchopenia úlohy:

Príklad 9 Schopnosť zostavenia plánu riešenia

Proces riešenia:

Experimentátor 01: Takže podobne ako pred tým, skús.

(Kristína pred tou úlohou riešila Výskumnú úlohu 4 a vedela už, že od nej experimentátor chce, aby povedala kroky vedúce k riešeniu.)

Pauza, v ktorej Kristína číta zadanie úlohy.

Kristína 01: No, najlepšie pre teba je, keď si to nakreslíš. Čiže si nakreslíš nejakého psa, ktorý je priviazaný reťazou, ktorá je 5 m dlhá, ku nejakému krúžku, ktorý sa dá posúvať nejakou vodorovnou tyčou, ktorá je tesne pri zemi, čiže tam nie je nejaké miesto. A tá tyč, je 6 m dlhá.

Kristína celý čas kreslí svoj obrázok a vpisuje doň rozmery.

... (tu sa experimentátor a Kristína bavia o náčrte) ...

Exp 07: Dobre, takže máme náčrt, a potom by som čo mala urobiť s tým?

Kr 07: Obsah tohto vypočítam. (ukazuje na nakreslený útvar)

Exp 08: Dobre, a ako vypočítam obsah?

Kr 08: No vypočítala by som obsah tohto obdĺžnika a plus obsah tohto polkruhu a tohto polkruhu, čiže to je vlastne jeden kruh.

(Kristína, 9.ročník)

Kristína vie, že prvým krokom riešenia takýchto úloh, je nakresliť si to. Bez toho, aby vedela obsah čoho má vypočítať, nevie pomenovať ďalšie kroky. Robí to však so zámerom, že bude počítať obsah. Teda v jej mysli zrejme existujú dva kroky: nakresli náčrt, potom vypočítaš obsah. Vypočítanie obsahu tiež dokáže po nakreslení náčrtu krokovať: vypočítať obsah obdĺžnika, vypočítať obsah dvoch polkruhov (teda jedného kruhu) a následne spočítať.

Nevyužitie tejto schopnosti

Pre Veroniku bola táto úloha problémová. V zadaní sa nevyskytovali žiadne konkrétne číselné údaje okrem **toľko ako** a **dvakrát viac**. Poznala vstupné údaje, vedela, kam má dôjsť, ale cesta bola pre ňu neznáma.

Príklad 10 Nevyužitie schopnosti zostavenia plánu riešenia

Výskumná úloha 3 (s.25)

Proces riešenia:

> Experimentátor 01: Teraz skús vyriešiť túto úlohu, ak chceš, môžeš si ju prečítať nahlas. Ako ti je lepšie.
>
> (Dlhá pauza, počas ktorej Veronika najprv číta, potom rozmýšľa.)
>
> Veronika 01: Hm, ako to zrobiť?
>
> Ex 02: Nevieš, ako na to ísť?
>
> Ver 02: Nie.

(Veronika, 7. ročník)

Nevedela urobiť ani prvý krok, ktorým v tomto prípade mohlo byť vyskúšanie nejakej možnosti. Tu sa dá polemizovať o tom, kde pramení zlyhanie v plánovaní činnosti. Môžeme predpokladať, že ako siedmačka by už Veronika radšej použila nejakú odskúšanú stratégiu na riešenie slovnej úlohy. Avšak, ako sme už spomenuli v Kapitole 2, algebraické stratégie nie sú považované za príliš „matematické“. Zároveň ju žiadna „viac matematická“ stratégia nenapadla, tak jej ostala už iba otázka: *Ako to zrobiť?* bez čo i len črtajúcej sa odpovede na ňu.

Rozvíjanie schopnosti

Aké kroky sme urobili?

Prvým spôsobom (bez ktorého sa bude ťažko používať nasledujúci spôsob) rozvíjania schopnosti zostaviť plán riešenia, by mohla byť doplňujúca úloha zadaná čo najčastejšie k rôznym slovným úlohám. Jej zadanie by bolo: Pomenuj kroky, ktoré sme urobili pri riešení tejto slovnej úlohy. Takáto doplňujúca úloha prinesie viacero výsledkov:

- učiteľ dostane spätnú väzbu o tom, či žiak porozumel celému riešeniu slovnej úlohy, či vidí súvis medzi jednotlivými krokmi,
- žiak si uvedomí súvislosti, ktoré potrebuje pri riešení slovných úloh podobného typu,

- žiak získa skúsenosť s pomenovávaním jednotlivých krokov.

Je dôležité upozorniť na to, že takéto doplňujúce úlohy by sa nemali stať spôsobom prehĺbenia formalizmu u žiakov – teda učiteľ by mal dbať na to, aby žiak pomenoval aj súvislosti medzi jednotlivými krokmi, teda nielen čo urobil, ale aj prečo urobil tento krok.

Aké kroky urobíme?

Keď žiaci bezpečne vedia pomenovávať kroky, ktoré ich viedli k riešeniu slovnej úlohy, bolo by azda vhodné začať im dávať prípravnú úlohu k niektorým slovným úlohám, ktorej zadanie by znelo: Pomenuj kroky, ktoré urobíš pri riešení slovnej úlohy. Bolo by veľmi užitočné, ak by žiak dokázal pomenovať aj kroky typu: Vyskúšam toto a potom uvidíme, čo s tým. Takto rozvíjané strategické myslenie pomôže žiakovi aj v budúcnosti pri robení rozhodnutí v bežnom živote.

5.2.3 Matematizácia

Ďalšou z kľúčových kompetencií, ktoré vymenúva vo svojej práci J. Sekerák je matematické modelovanie. Táto kompetencia je vymedzená nasledovne:

- *štrukturalizovať oblasti alebo situácie, ktoré sa majú modelovať,*
- *„matematizácia“ (prevod „reality“ do matematických štruktúr) – odhaliť kvantitatívne alebo priestorové vzťahy a zákonitosti reálnych situácií,*
- *vytvárať matematické modely, konštrukčné a rysovacie zručnosti,*
- *pracovať s matematickým modelom, experimentovať,*
- *overovať model z hľadiska reálnej situácie,*
- *„dematematizácia“ (interpretácia matematických modelov v zmysle „reality“),*
- *uvažovať, analyzovať model a jeho výsledok, prezentovať model a jeho výsledky (vrátane ich ohraničenia či obmedzenia),*
- *sledovať a kontrolovať proces modelovania*

(Sekerák, 2008, s.30-31).

Túto kompetenciu rozdelíme na dve schopnosti: schopnosť matematizácie, ktorú opisujeme v tejto kapitole a schopnosť dematematizácie (pozri 5.3.1). Jednak je to vhodné z hľadiska fáz riešenia slovnej úlohy a navyše zmysluplnosť tohto rozdelenia môžeme podložiť aj tým, že sa pri riešení slovných úloh stáva (napr. pri riešení úloh z analytickej geometrie), že riešiteľ nevie, čo vypočítal. Výsledok je z hľadiska učiteľa, ktorý ho dokáže interpretovať, správny, ale výkon žiaka je z hľadiska úplnosti riešenia nedostatočný.

Riešiteľ slovnej úlohy prechádza v istom momente riešenia z jazyka, ktorý sa používa bežne, k jazyku matematickému. Jednotlivé kroky, ktoré si pomenoval ako vedúce k riešeniu, potrebuje teraz zmatematizovať, aby úlohu doviedol k výsledku. Využitie resp. nevyužitie schopnosti matematizácie musíme posudzovať vzhľadom k tomu, ako žiak prešiel prvou fázou riešenia slovnej úlohy, teda ako ju uchopil.

Využitie schopnosti matematizácie

Jakub matematizuje nahlas a po prvom nevydarenom pokuse sa okamžite opravuje.

Príklad 11 Využitie schopnosti matematizácie

Výskumná úloha 4 (s.25)

Riešenie:

> Jakub 03: Zo štyroch testov bol priemer 60 bodov, z piateho testu dostal 80 bodov. Čiže spočítame to dokopy, to vyjde 140 a delene 100. Nie! **4 . 60**, to bude, koľko mal dokopy z tých štyroch a **plus 80**, to bude 320, a potom dáme delene 4. Nie! **Delene 5**, to je priemer jedného testu.

(Jakub, 9. ročník)

Nevydarený pokus vzniká zrejme z osvojenej myšlienky, že vypočítať aritmetický priemer znamená všetky údaje spočítať a potom získaný súčet vydeliť počtom údajov. Potom Jakub sám zisťuje, že zafixovanú šablónu „nenasadil“ správne a prichádza na správny spôsob, ktorý aj správne vysvetľuje a zdôvodňuje.

Nevyužitie schopnosti matematizácie

Kristína má pojem aritmetického priemeru pochopený správne, vidno to z „Kristína 01“, kde vysvetľuje, ako vznikol údaj 60.

Príklad 12 Nevyužitie schopnosti matematizácie

Výskumná úloha 4 (s.25)

Riešenie:

> Kristína 01: Čiže my vieme, že Martin písal päť testov a z prvých štyroch mal priemer 60 bodov, čiže ak spočítame koľko mal bodov z tých štyroch a dáme ich delene štyri, tak zistíme priemer 60. A vieme, že v piatom teste

dostal 80 bodov. Čiže ten priemer sa nám zvýši alebo zníži, keď pripočítame tie body.

Kr 02: Čiže môžeme to vypočítať takto napríklad: že z toho priemeru si vypočítame jeden test, takže si dáš 60 : 4. Či počkaj, ako to je?

Experimentátor 02: Skús si ešte raz prečítať.

Kr 03: Čiže jednoducho by si to vypočítala asi tak, že tento priemer **60** si musíš dať ešte **plus 80 a delene 5**.

Ex 03: Takže si dám (60 + 80) : 5 ?

Kr 04: No, tak by sa to dalo.

Kristína, 9. ročník

Avšak pri matematizácii sa opäť dopúšťa podobnej chyby ako Jakub v predchádzajúcom príklade, no neopravuje sa. Riešenie sa jej celkom pozdáva.

Pedagogická diagnostika

Problémom, ktorý často stojí za nedostatočným rozvinutím schopnosti matematizácie, je formalizmus. To, že riešenie Kristíny je poznačené formalizmom, vidíme z toho, že do známeho vzorca na výpočet aritmetického priemeru: $\frac{\sum a_n}{n}$ dosadila všetky číselné údaje, ktoré našla v zadaní. Preto ako pedagogickú diagnostiku nedostatkov v schopnosti matematizácie, uvedieme diagnostikovanie formalizmu podľa Hejného a Michalcovej. *Formálnosť poznania charakterizujú najmä jeho dve vlastnosti:*

- *izolovanosť* – každý poznatok je chápaný samostatne, nemá prepojenie na ďalšie poznatky,
- *absencia modelov* – žiak nevie uvádzať príklady.

Konkrétne diagnostické kritéria sú napríklad:

- *po zabudnutí formálneho poznatku ho žiak nevie samostatne obnoviť,*
- *žiak nevie odhaliť a už vôbec nie opraviť chybu,*
- *žiak navzájom zamieňa pojmy,*
- *v novom kontexte nevie žiak použiť svoje poznanie,*
- *žiak nevie zreťaziť viacero známych poznatkov,*
- *žiak nevie svoje poznatky vysvetľovať vlastnými slovami,*
- *žiak nevie odpovedať na otázku „prečo?“* (Hejný, Michalcová, 2001, s.33-34).

Rozvíjanie schopnosti

Na rozvíjanie tejto schopnosti sa nám núka pohľad z dvoch zorných uhlov – na jednej strane je to prevencia vzniku formalizmu a na druhej strane je to jeho „liečba" (pojmy prevencia a liečba korešpondujú z označením formalizmu ako choroby, ktoré je bežne zaužívane v prácach prof. Milana Hejného). Prevencia sa zakladá na rešpektovaní mechanizmu nadobúdania poznatkov (Hejný, Michalcová, 2001). Tento mechanizmus sa dá opísať v nasledujúcich piatich etapách:

1. motivácia – využiť rozpor medzi „neviem" a „chcel by som vedieť", poznávanie by malo vyplývať z túžby po poznaní,

2. izolované modely – stretávanie sa s mnohými konkrétnymi modelmi podmieňuje kvalitu neskoršieho poznania, modely sú spočiatku od seba nezávislé, postupne dieťa objavuje podobnosť medzi nimi a napokon aj príčinu podobnosti,

3. generický model – je príkladom alebo reprezentantom všetkých izolovaných modelov (napr. počítanie na prstoch)

4. abstrakčná znalosť – hlbší vhľad do daného poznania, vyznačuje sa schopnosťou použiť získaný poznatok aj v novom kontexte,

5. kryštalizácia – zapracovanie nového poznania do už existujúcej kognitívnej štruktúry, ide o dlhodobý proces začínajúci na úrovni modelov a až neskôr na úrovni abstraktného poznania.

(Hejný, in Stehlíková, 2007, s.15-21)

Hejný a Stehlíková (1999) taktiež hovoria, že *liečba formalizmu je založená na troch zásadách:*

- *je nutné začať s problematikou, do ktorej má žiak vhľad, aby bol schopný vlastnými silami ísť konštruktivistickou cestou od separovaných cez univerzálne modely k poznatkom,*
- *učiteľ musí byť trpezlivý, nesmie sa nechať odradiť tým, že náznaky úspechu jeho reedukačnej práce sa dostavujú veľmi pomaly,*
- *tradičný pohľad na chybu ako na niečo nežiaduce pôsobí na žiaka demotivačne. V snahe neurobiť chybu, žiak robí len to, čo mu už bolo predvedené ako správne. Pritom chyba je nutný prostriedok na nadobudnutiu autonómneho poznania.*

Na tieto tri zásady je potrebné pamätať pri akejkoľvek činnosti smerujúcej k odstráneniu formalizmu v poznávaní žiaka.

„Preventívne“ i „liečebné“ činnosti formalizmu by sme mohli postaviť na základe diagnostických prejavov formalizmu, ktoré sme spomínali vyššie:

- pýtať sa žiakov otázku „prečo?“,
- požiadať žiakov, aby vysvetlili poznatok vlastnými slovami,
- dávať žiakom zámerne úlohy, ktoré vyžadujú zreťazenie jeho poznatkov,
- úlohami tvoriť predstavu o širokom spektre možností využitia nového poznatku (inými slovami, nevytvoriť „starý známy kontext“),
- venovať dostatok času na prácu s definíciami pojmov a špeciálne sa venovať pojmom, ktoré sú žiakmi zamieňané (napr. obvod, obsah, povrch, objem) už na začiatku ich poznávania,
- využívať úlohy typu „nájdi chybu“, a to aj vo vlastnom aj v cudzom riešení,
- ak žiak zabudne na nejaký poznatok (vzorec,...), nevyzývať ho k rozpamätaniu spôsobom „Spomeň si, ako to bolo! Ako to máš v zošite? Mali sme to napísané tuto na tabuli,“ ale pomôcť mu ešte raz prejsť konštruktivistickou cestou osvojovania poznatkov.

5.3 Schopnosti potrebné vo fáze kontroly získaného riešenia

5.3.1 Dematematizácia

Proces opačný k matematizácii nazývame dematematizácia. Tento proces však vyžaduje inú schopnosť ako matematizácia. Pre vysvetlenie môžeme jazyk matematiky prirovnať k cudziemu jazyku, ktorý sa žiak učí. Je veľký rozdiel jazyku rozumieť a vedieť v ňom hovoriť. Často sa stáva, že hovoriť jazykom naučeným v škole nie je až taký problém, ako porozumieť človeku, pre ktorého je tento jazyk rodným jazykom. **Dematematizáciou rozumieme schopnosť interpretovať výsledok fázy riešenia matematického modelu a posúdiť jeho správnosť v kontexte zadania slovnej úlohy.** Myslíme si, že táto schopnosť je často nedostatočne ocenená, i keď práve ona prepája matematiku s realitou a pomáha ľuďom robiť zdôvodnené rozhodnutia, čo je jedna zo stránok matematickej gramotnosti podľa PISA.

Pedagogická diagnostika a rozvíjanie schopnosti

To, čo vidíme ako výsledok dematematizácie pri riešení slovnej úlohy, je odpoveď. Zo skúsenosti zo školskej praxe sa dá usúdiť, že žiakom sa zdá nadbytočná. Často im stačí dvakrát podčiarknuť výsledok. Možno je to tak preto, lebo „x=...“ je naozaj dostatočne výrečné. Chceme podotknúť, že *schopnosť riešiť problém a schopnosť artikulovať vlastné myšlienkové postupy a výsledky týchto postupov, sú odlišné schopnosti* (Hejný, 2005, s.25). Z týchto dôvodov je pri pedagogickej diagnostike nutné rozlíšiť, či žiak nevie dematizovať alebo nevie resp. nechce formulovať odpovede. Spôsoby, ktoré sú podľa nás použiteľné pri pedagogickej diagnostike, sú v tomto prípade rovnaké ako tie, ktoré môžeme použiť pri rozvíjaní schopnosti dematematizácie. Preto ich uvádzame v jednom celku.

Formulácia odpovede:

Hejný (2005, s.25) odporúča pri formulovaní odpovedí individuálny prístup: požadovať od žiaka takú formuláciu výsledku, ktorej by porozumel aj niekto, kto danú úlohu neriešil. Teda ani písanie odpovede by nemalo dospieť k formalizmu, ktorému sa žiaci často spontánne bránia tým, že odpoveď jednoducho nenapíšu. Ak učiteľ chce, aby žiaci písali odpoveď celou vetou, bolo by dobré, aby odpoveď nebola len slovným zopakovaním formulácie „x=...“. Nepýtať sa napríklad, koľko bude stáť pletivo na oplotenie záhrady, ale či majiteľovi záhrady bude stačiť na jej oplotenie 200 €. Poprípade sformulovať k slovnej úlohe viac otázok, ktoré má žiak zodpovedať. Tým sa žiak bude musieť viac zamyslieť nad tým, čo vypočítal a tým sa naučí, že riešenie slovnej úlohy nekončí vyriešením matematického modelu. Zároveň učiteľ môže sledovať, či sa žiak dokáže vrátiť do kontextu slovnej úlohy a posúdiť vzhľadom k nemu správnosť / vhodnosť riešenia.

Úlohy, kde niektoré výsledky riešenia matematického modelu nie sú výsledkami slovnej úlohy:

Schopnosť posúdiť vhodnosť riešenia sa dá posúdiť a zároveň rozvíjať zrejme len vtedy, keď žiak nadobudne skúsenosť, že nájdenie výsledku rovnice, či iného matematického postupu nemusí byť vždy riešením slovnej úlohy ako takej. Príkladom takýchto úloh sú tie, ktoré sa riešia pomocou kvadratickej rovnice a jeden z koreňov nevyhovuje realite (napr. sa nejedná o prirodzené číslo a výsledkom slovnej úlohy je počet niečoho). Bolo by dobré, aby sa žiaci stretávali s úlohami, ktoré nemajú riešenie, pretože aj v praktickom živote sa stáva, že sa problém nedá vyriešiť so splnením všetkých podmienok.

Obe tieto požiadavky na rozvíjanie schopnosti dematematizácie smerujú vo veľkej miere na tvorcov učebníc a zbierok úloh, ktoré by mali poskytnúť učiteľovi dostatok úloh rozvíjajúcich schopnosť dematematizácie.

5.3.2 Matematická reflexia

J. Sekerák hovorí o kompetencii *matematickej argumentácie, dôkazu*, ktorá znamená:

- *argumentovať, dokazovať,*
- *poznať povahy matematických dôkazov a ich odlišnosti od iných druhov matematického overovania,*
- *rozvíjať a vyhodnocovať matematickú argumentáciu a dokazovanie,*
- *mať cit pre heuristiku (Čo sa môže/nemôže stať a prečo?), uvedomovať si kauzalitu,*
- *vyberať a používať vhodný spôsob argumentácie a dokazovania* (Sekerák, 2008, s.31).

I keď sa na základnej škole dôkaz ako taký nevyskytuje, úspešný riešiteľ slovnej úlohy, by mal na záver riešenia **zodpovedať** ešte dve otázky: **otázku korektnosti riešenia**: „Je moje riešenie resp. sú moje riešenia správne? Sú naozaj riešeniami danej úlohy?“ **a otázku úplnosti riešenia**: „Neexistuje už žiadne ďalšie riešenie?“ Na základnej škole sa bežne stretávame s vykonaním skúšky správnosti, ktorá je často len preverením správnosti riešenia matematického modelu (napr. overenie, či riešenie vyhovuje zostavenej rovnici). Podľa nášho názoru by skúška správnosti mala ísť ďalej a preveriť aj model samotný.

Rozvíjanie schopnosti

Skúška nie je formalita

Učiteľ by podľa nášho názoru mal od žiaka požadovať skúšku len v prípade, že je nutnou súčasťou riešenia, v ostatných prípadoch by ju mal odporučiť skôr individuálne (napr. žiakom, o ktorých vie, že často robia chyby z nepozornosti). Tak sa vyhne znechuteniu, ktoré u žiaka robenie zbytočných vecí vyvoláva. Žiak by mal mať jasne pomenované, či je skúška kontrolou výsledku a teda súčasťou riešenia alebo žiakovou sebakontrolou.

Kontrola „jednotiek“

To, čo môžeme od žiaka požadovať a na čom sa môže učiť matematickej reflexii, je kontrola jednotiek v pravom slova zmysle i v tom význame, že si skontroluje, či nespočítava „hrušky s jablkami“. Jednotky v pravom slova zmysle môže žiak kontrolovať napríklad v slovných úlohách o rýchlosti, či o obvodoch, obsahoch, povrchoch a objemoch. Otázkami: „Naozaj som svojím výpočtom došiel k objemu? – Je výsledok v m^3? Je výsledok môjho výpočtu skutočne v jednotkách rýchlosti? – Delil som dráhu časom?“ môže žiak vykonať vcelku úspešnú reflexiu, ktorá mu okrem iného napomôže lepšie pochopiť pojmy, s ktorými v slovnej úlohe pracoval. Ale nie je potrebné sa obmedzovať len na jednotky, ktoré sú medzinárodne zaužívané. Žiak si môže pomenovať „vlastné jednotky“, ktoré sú špecifické pre danú slovnú úlohu, či už ide o počet jabĺk alebo počet bodov za test a podobne.

Úlohy, v ktorých je viac riešení

Podobne ako pri schopnosti dematematizácie, aj tu kladieme požiadavky na zbierky slovných úloh. Žiak by mal zažiť, že úloha môže mať viacero možných riešení. Okrem iného preto, lebo aj v praktickom živote majú rôzne situácie viacero možných riešení, medzi ktorými si človek musí/môže vyberať. Je to príležitosť rozvíjať aj hodnotiace myslenie. Rozvoju schopnosti matematickej reflexie to poslúži tak, že žiak sa začne samostatne pýtať, na úplnosť svojho riešenia, čo je prvým krokom k tomu, aby túto úplnosť aj dokázal.

Záver

Cieľ tejto práce, ktorým bolo naštudovať a spracovať problematiku schopností potrebných pre riešenie slovných úloh z matematiky, sme rozmenili na čiastkové ciele:

- vypracovať zoznam schopností potrebných k riešeniu slovných úloh, a ku jednotlivým schopnostiam uviesť
- ich vymedzenie spolu s príkladmi ich využitia či nevyužitia,
- návrhy ich pedagogickej diagnostiky
- a možné spôsoby ich rozvíjania.

Prvý čiastkový cieľ sme naplnili vypracovaním zoznamu schopností potrebných k riešeniu slovných úloh rozdelených podľa fáz riešenia slovných úloh (s vynechaním fázy riešenia matematického modelu), ktorý obsahuje osem schopností, menovite (1) čítanie s porozumením, (2) priestorová predstavivosť, (3) sociálna a praktická predstavivosť, (4) vizualizácia, (5) zostavenie plánu riešenia, (6) matematizácia, (7) dematematizácia a (8) matematická reflexia.

Druhý čiastkový cieľ sme realizovali porovnávaním vymedzení v literatúre a pri schopnostiach (2), (3), (4), (5), (6) sa nám podarilo tieto vymedzenia podložiť aj výrečnými príkladmi využitia resp. nevyužitia tej ktorej schopnosti. Tieto príklady sme získali pri práci so žiakmi na základných školách (pozri Kapitolu 4).

Tretí čiastkový cieľ sme naplnili pri všetkých schopnostiach, ale s rôznou hĺbkou spracovania pri jednotlivých schopnostiach. Návrhy pedagogickej diagnostiky sú v niektorých prípadoch podložené teoretickými zdrojmi, niektoré sú originálnymi nápadmi autorky práce. V oboch prípadoch sú však podnetmi pre ďalší výskum v tejto oblasti.

Štvrtý čiastkový cieľ je uskutočnený na podobnej úrovni ako tretí. Navyše sme sa osobitne venovali rozvíjaniu schopnosti vizualizácie pomocou grafov diskrétnej matematiky. Takýto spôsob považujeme za veľmi užitočný a hodný zvláštnej pozornosti učiteľov matematiky.

Celkovo vnímame túto prácu ako prínosnú pre pedagogickú prax priamo, pretože takéto spracovanie témy poskytuje učiteľom matematiky nový uhol pohľadu na vyučovanie slovných úloh, i nepriamo, pretože obsahuje viacero podnetov pre prípadný výskum, ktorý by následne obohatil pedagogickú prax.

Zoznam použitej literatúry

AMTHAUER, R. 1973. Test struktury inteligence: Příručka pro administraci, intepretaci a vyhodnocení testu. 3. prepracované vyd., Bratislava: Psychodiagnostické a didaktické testy, 1973. 29 s.

BOBOVNICKÁ, G. 2005. Pojem, definícia a rozdelenie slovných úloh v matematike. In Naša škola. ISSN 1335-2733, 2005, roč. 8, č. 9, s. 35-39.

BRANSFORD a kol. 1996. Fostering mathematical thinking in middle school students: Lessons from research. In The nature of mathematical thinking. New Jersey: Lawrence Arlbaum Associates, 1996. ISBN 0-8058-1798-0, s.203-252.

ČÁP, J. – MAREŠ, J. 2007. Psychologie pro učitele. 2. vyd. Praha: Portál, 2007. 655 s. ISBN 978-80-7367-273-7.

DŽUKA, J. 2003. Základy pedagogickej psychológie. Prešov: Prešovská univerzita, 2003. 121 s. ISBN 80-8068-170-8.

FONTANA, D. 2010. Psychologie ve školní praxi. 3. vyd. Praha: Portál, 2010. 384 s. ISBN 978-80-7376-725-1.

HEJNÝ, M. 2005. Rozmanitost řešení žáků jako diagnostický nástroj edukačního stylu učitele. In: Pytagoras 2005. Dostupné 12.3.2012 na: http://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2005/019_hejny_rozmanitost.pdf

HEJNÝ, M., MICHALCOVÁ, A. 2001. Skúmanie matematického riešiteľského postupu. 1.vyd. Metodické centrum v Bratislave. Bratislava, 2001. 188 s. ISBN 80-8052-085_2.

HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. 1999. Číselné představy dětí: Kapitoly z didaktiky matematiky. 1.vyd. Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta. Praha, 1999. 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

JUCOVIČOVÁ, D. – ŽÁČKOVÁ, H. 2008. Reedukace specifických poruch učení u dětí. 1. vyd. Praha: Portál, 2008. 176 s. ISBN 978-80-7367-474-8.

KAČENGOVÁ, A. 2004. Riešenie slovných úloh v matematike základnej školy: dizertačná práca. Košice: Univerzita P.J. Šafárika, 2004.

KAJAMIES, A. – VAURAS, M. - KINNUNEN, R. 2010. Instructing Low-Achievers in Mathematical Word Problem Solving. *Scandinavian Journal Of Educational Research, 54*(4), 335-355. Dostupné na ERIC, EBSCO*host*, 2 April 2012.

KORŠŇÁKOVÁ, P. (ed.) 2004. PISA – matematika Úlohy 2003. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2004. 39 s. ISBN 80-85756-89-7. Dostupné 15.2.2012 na: http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/3_zbierky_uloh/%C3%9Alohy_-_matematika_2003.pdf.

KORŠŇÁKOVÁ, P. – KOVÁČOVÁ, J. 2007 Národná správa OECD PISA SK 2006. 1.vyd. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2007. 56 s. ISBN 978-80-89225-37-8. Dostupné 15.2.2012 na: http://www.iuventa.sk/files/documents/7_vyskummladeze/spravydavm016/pisa2006nsprava.pdf

KORŠŇÁKOVÁ, P. – KOVÁČOVÁ, J. – HELDOVÁ, D. 2010. Národná správa OECD PISA 2009. 1.vyd. Bratislava: Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania, 2010. 60 s. ISBN 978-80-970261-4-1. Dostupné na: http://www.iuventa.sk/files/documents/7_vyskummladeze/vyskum/davm_034/n%C3%A1rodn%C3%A1_spr%C3%A1va_pisa_2009.pdf

KOSÍKOVÁ, V. 2011 Psychologie ve vzdělávaní a její psychodidaktické aspekty. 1. vyd. Praha: Grada, 2011. 272 s. ISBN 978-80-247-2433-1.

KOŠČ, L. 1972. Psychológia matematických schopností. Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1972.

KOTSOPOULOS, D. – CORDY, M., 2009, Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics, Educational Studies In Mathematics, 70, 3, pp. 259-274. Dostupné na Academic Search Complete, EBSCOhost, 20 January 2012.

KUBÁČEK, Z. a kol. 2004. PISA SK 2003 Matematická gramotnosť Správa. Bratislava, Štátny pedagogický ústav, 2004. 84 s. ISBN 80-85756-88-9. Dostupné 15.2.2012 na: http://www.iuventa.sk/files/documents/7_vyskummladeze/spravy/davm016/pisa_mat_gram_sprava.pdf

KURAJ, J., - KURAJOVÁ STOPKOVÁ, J. 2006. Národná správa Trendy v medzinárodnom výskume matematiky a prírodovedných predmetov 2003. Bratislava, Štátny pedagogický ústav, 2006. 250 s. ISBN 80-89225-22-5. Dostupné 15.2.2012 na: http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/timss/publikacie/Kuraj-Stopkova_Narodna_sprava_TIMSS2003.pdf

Matematický KLOKAN 2006: Kategorie Benjamín. Dostupné 2.apríla2012 na www.masarykovazs.cz/download.aspx?dontparse=true&FileID=966.

Matematický KLOKAN 2006: Kategorie Kadet. Dostupné 2.apríla2012 na www.masarykovazs.cz/download.aspx?dontparse=true&FileID=967.

Matematický KLOKAN 2007. Olomouc, 2007. Dostupné 2.apríla2012 na www.masarykovazs.cz/download.aspx?dontparse=true&FileID=977

MIKLOVÁ, J. 1981. Intelektové schopnosti matematicky nadaných detí. In Psychológia a patopsychológia dieťaťa. 1983, roč. 18, č. 1, s. 57-72.

MOLNÁR, P. 2010. Problémy žiakov s porozumením zadania slovných úloh : dizertačná práca. Košice : Univerzita P.J. Šafárika, 2010. 172 s.

OROSOVÁ, O. a kol. 2005. Psychológia a pedagogická psychológia I.: Vybrané kapitoly zo všeobecnej, vývinovej sociálnej a pedagogickej psychológie pre učiteľov. Košice: Univerzita P.J. Šafárika, 2005. 236 s. ISBN 90-7097-593-8.

POKORNÁ, V. 2001. Teorie a náprava vývojových poruch učení a chování. 3. rozš. vyd. Praha: Portál, 2001. 336 s. ISBN 80-7178-570-9.

ROAM, D. 2009. Nápady na ubrousku: Řešte problémy a prezentujte myšlenky pomocí obrázků. Brno: Jan Melvil Publishing, 2009. 287 s. ISBN 978-80-903912-9-1.

RUPPELDTOVÁ, J. 2005. Fenomény náročnosti slovných úloh. In: Induktívne a deduktívne prístupy v matematike. Trnava: Trnavská univerzita, 2005. s.223-231 Dostupné 12.3.2012 na: http://pdfweb.truni.sk/zbornik/smolenice/ruppeldtova.pdf

SEKERÁK, J. 2008. Diagnostikovanie a rozvíjanie kľúčových kompetencií v matematickom vzdelávaní : dizertačná práca. Košice: Univerzita P.J. Šafárika, 2008. 89 s.

SOKOLOVÁ, L. 2010. Didaktika psychológie. Bratislava: Univerzita Komenského, 2010. 161 s. ISBN 987-80-223-2806-7.

SOLLÁROVÁ, E. 2008. Socializace. In Sociální psychologie. Praha: Grada publishing, 2008. ISBN 978-80-247-1428-8, s. 49-65.

STEHLÍKOVÁ, N. 2007. Náměty na podnětné vyučování v matematice. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007. 320 s. ISBN 978-80-7290-342-9.

STERNBERG, R. J. 1996. "What should we ask about intelligence?." American Scholar 65, no. 2: s.205-217. EBSCOhost (accessed October 7, 2011).

STERNBERG, R.J. 2002. Kognitivní psychologie. 1. vyd. Praha: Portál, 2002. 632 s. ISBN 80-7178-376-5.

ŠTURMA, J. 2006. Specifické poruchy učení a chování. In Dětská klinická psychologie. 4. prep. a dopl. vyd.. Praha: Grada, 2006. ISBN 80-247-1049-8, s. 155-180.

TUREK, I. 2008. Didaktika. 1. vyd. Bratislava: Iura Edition, 2008. 595 s. ISBN 978-80-8078-198-9.

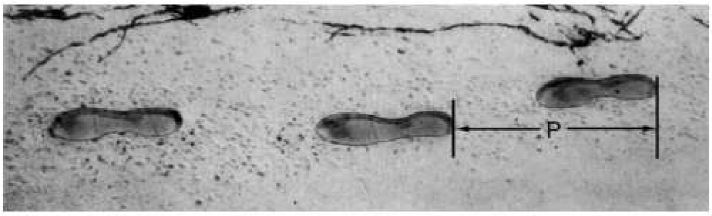
ZAHNER, D. - CORTER, J. 2010, The Process of Probability Problem Solving: Use of External Visual Representation', *Mathematical Thinking And Learning: An International Journal*, 12, 2, pp. 177-204, Dostupné na ERIC, EBSCO*host*, 2 April 2012.

Prílohy

Príloha A CD médium – Práca Schopnosti potrebné k riešeniu slovných úloh Veronika Hubeňáková

Príloha B Príklady úloh zo štúdie PISA 2003

CHÔDZA



Na obrázku sú stopy kráčajúceho muža. Dĺžka kroku P je vzdialenosť medzi koncami dvoch po sebe nasledujúcich stôp.

Vzorec $\frac{n}{P} = 140$ udáva približný vzťah medzi n a P, kde

n = je počet krokov za minútu a
P = je dĺžka kroku v metroch.

Otázka č.1: CHÔDZA

M124Q01- 0 1 2 9

Použite horný vzorec a vypočítajte, aký dlhý krok bude mať Marek, ktorý urobí 70 krokov za minútu. Zapíšte postup výpočtu.

Otázka č.3: CHÔDZA

M124Q03- 00 11 21 22 23 24 31 99

Michal vie, že dĺžka jeho kroku je 0,80 metra. Použite vzorec a vypočítajte rýchlosť Michalovej chôdze v metroch za minútu a v kilometroch za hodinu.

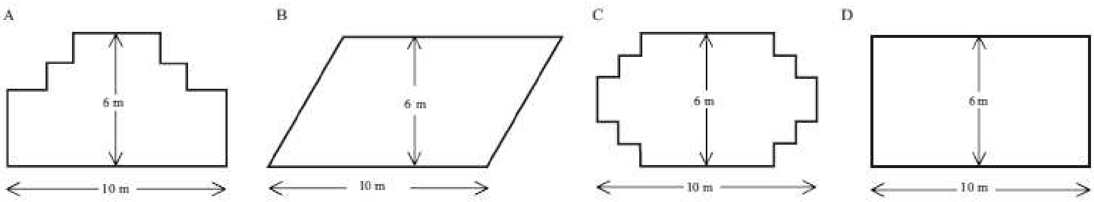
Zapíšte postup výpočtu.

TESÁR

Otázka č.1: TESÁR

M266Q01

Tesár má 32 metrov dreva na ohradenie záhonu v záhrade. Uvažuje o nasledujúcich tvaroch záhonu.



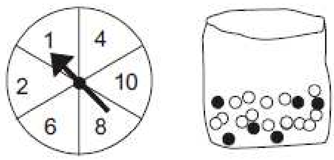
Zakrúžkujte buď „ÁNO“ alebo „NIE“ pri každom tvare záhona podľa toho, či môže, alebo nemôže byť vytvorený z 32 metrov dreva.

Tvar záhona	Môže byť tvar záhona vytvorený z 32 metrov dreva?
A	Áno / Nie
B	Áno / Nie
C	Áno / Nie
D	Áno / Nie

JARMOK

Otázka č.1: JARMOK *M468Q01*

Jeden stánok na jarmoku ponúka hru, v ktorej je potrebné najskôr roztočiť šípku. Potom, **ak** sa šípka zastaví na párnom čísle, hráč môže ťahať jednu guľku z vrecúška. Ruleta aj vrecko s guľkami sú znázornené na nasledujúcom obrázku.



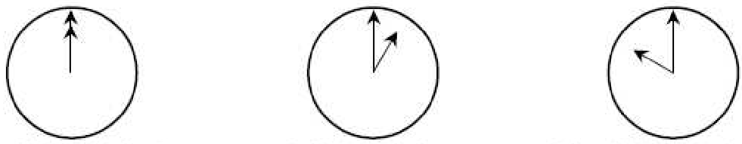
Ceny získavajú hráči, ktorí vytiahnu čiernu guľku. Zuzka si túto hru zahrá jedenkrát. Aká je pravdepodobnosť, že Zuzka vyhrá nejakú cenu?

A Je to nemožné.
B Je to málo pravdepodobné.
C Má šancu okolo 50%.
D Je to veľmi pravdepodobné.
E Je to isté.

ČATOVANIE CEZ INTERNET

Mark (zo Sydney v Austrálii) a Hans (z Berlína v Nemecku) spolu často komunikujú prostredníctvom "čatovania" na internete. Musia byť pripojení na internet obaja naraz, aby mohli čatovať.

Aby Mark našiel vyhovujúci čas na čatovanie, naštudoval si tabuľku s časovými pásmami a zistil nasledovné:



Greenwich 24 hod. (polnoc) | Berlin 1:00 hod. ráno | Sydney 10:00 hod. dopoludnia

Otázka č.1: ČATOVANIE CEZ INTERNET *M402Q01- 0 1 9*

Koľko hodín je v Berlíne, ak je v Sydney práve 19:00 hod?

Odpoveď ....

Otázka č.2: ČATOVANIE CEZ INTERNET *M402Q02- 0 1 9*

Mark a Hans nemôžu čatovať medzi 9:00 hod. a 16:30 hod. ich miestneho času, pretože musia byť v škole. Nebudú môcť čatovať ani medzi 23:00 hod. a 7:00hod., pretože budú práve spať.

Ktorá hodina Markovi a Hansovi vyhovovuje na čatovanie? Zapíšte do tabuľky hodiny (miestny čas).

Miesto	Čas
Sydney	
Berlín	

Zdroj: Koršňáková, 2004 (PISA,2003)