

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko – fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Věra Effenberger

Využití internetu při výuce kuželoseček na střední škole

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

Studijní program: Matematika, Učitelství matematiky – deskriptivní geometrie
pro střední školy

2011

Ráda bych tímto poděkovala všem, kteří mě v mé práci podporovali a byli mi oporou. Největší dík ovšem patří paní RNDr. Janě Hromadové, Ph.D., jež byla vedoucí této diplomové práce. Děkuji jí za cenné rady, za zapůjčení literatury a za skvělou spolupráci. Dále mé díky patří i Mgr. Lubošovi Moravcovi, který se zasloužil svou pomocí při tvorbě webových stránek. V neposlední řadě bych chtěla poděkovat své rodině za dobré zázemí a psychickou podporu. Děkuji.

Prohlašuji, že jsem svou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Aši dne 29. 7. 2011

Bc. Věra Effenberger

Obsah

Abstrakt	4
Úvod	5
Ovládání stránek.....	6
1. Definice	7
1E.1 Definice elipsy	7
1E.2 Základní pojmy	8
1H.1 Definice hyperboly	10
1H.2 Základní pojmy.....	11
1P.1 Definice paraboly	14
1P.2 Základní pojmy	15
1S.1 Společná definice	16
2. Základní vlastnosti	19
2E.1 Základní vlastnosti elipsy	19
2H.1 Základní vlastnosti hyperboly	23
2P.1 Základní vlastnosti paraboly	27
3. Tečny a normály	31
3E.1 Vzájemná poloha přímky a elipsy	31
3E.2 Tečny a normály elipsy.....	32
3H.1 Vzájemná poloha přímky a hyperboly	34
3H.2 Tečny a normály hyperboly.....	35
3H.3 Sečny hyperboly	37
3P.1 Vzájemná poloha přímky a paraboly	39
3P.2 Tečny a normály paraboly.....	40
4. Ohniskové vlastnosti	43
4E.1 Ohniskové vlastnosti elipsy	43
4H.1 Ohniskové vlastnosti hyperboly	47
4P.1 Ohniskové vlastnosti paraboly	51
5. Quételetova - Dandelinova věta	57
5K.1 Řez rotačního kužele rovinou	58
5K.1.1 Eliptický řez rotační kuželové plochy	59
5K.1.2 Parabolický řez rotační kuželové plochy.....	62
5K.1.3 Hyperbolický řez rotační kuželové plochy.....	63
5V.1 Řez rotačního válce rovinou	66
6. Průměry kuželoseček	69
6E.1 Průměry elipsy	70
6E.2 Sdružené průměry elipsy	71
6H.1 Průměry hyperboly	73
6H.2 Sdružené průměry hyperboly	74
6P.1 Průměry paraboly	75
7. Konstrukce	77
7E.1 Konstrukce elipsy	78
7E.1.1 Bodová konstrukce I	78
7E.1.2 Bodová konstrukce II.....	79
7E.1.3 Zahradnická konstrukce	80
7E.1.4 Rozdílová proužková konstrukce.....	80
7E.1.5 Součtová proužková konstrukce	82
7E.1.6 Trojúhelníková konstrukce	83
7E.1.7 Příčková konstrukce.....	85

7E.1.8 Rytzova konstrukce.....	86
7E.1.9 Frézierova konstrukce.....	87
7E.1.10 Konstrukce elipsy ohýbáním papíru	89
7H.1 Konstrukce hyperboly	91
7H.1.1 Bodová konstrukce	91
7H.1.2 Konstrukce hyperboly, jsou-li dány její asymptoty a bod.....	92
7H.1.3 Konstrukce hyperboly ohýbáním papíru	93
7P.1 Konstrukce paraboly	95
7P.1.1 Bodová konstrukce.....	95
7P.1.2 Příčková konstrukce	96
7P.1.3 Konstrukce paraboly ohýbáním papíru	97
8. Oskulační kružnice	100
8E.1 Hyperoskulační kružnice elipsy.....	100
8E.2 Oskulační kružnice v obecném bodě elipsy.....	101
8H.1 Hyperoskulační kružnice hyperboly.....	104
8H.2 Oskulační kružnice v obecném bodě hyperboly.....	105
8P.1 Hyperoskulační kružnice paraboly.....	106
8P.2 Oskulační kružnice v obecném bodě paraboly.....	107
Závěr.....	108
Literatura	109
Česká literatura.....	109
Zahraniční literatura	110
Webové stránky a odkazy	110
Příklady	111
Elipsa.....	112
Hyperbola	123
Parabola.....	131

Abstrakt

Název práce: Využití internetu při výuce kuželoseček na střední škole

Autor: Bc. Věra Effenberger

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

e-mail vedoucího: Jana.Hromadova@mff.cuni.cz

Abstrakt

Tato diplomová práce zabývající se problematikou kuželoseček je určena zejména učitelům deskriptivní geometrie a studentům středních (popř. vysokých) škol. Může sloužit přímo jako pomůcka při výuce kuželoseček či při samostudiu, jelikož obsahuje mnoho názorných obrázků a dynamických apletů vytvořených v programu GeoGebra, které doplňují sepsaný teoretický text. V práci jsou vyjmenovány definice, vlastnosti a nejrůznější konstrukce jednotlivých kuželoseček. Dále je zde popsán jejich vznik jakožto rovinných řezů rotační kuželové, resp. válcové plochy, oskulační kružnice a sdružené průměry. Přílohu tvoří sbírka příkladů různé obtížnosti, která může sloužit jako kontrola získaných vědomostí.

Klíčová slova: elipsa, hyperbola, parabola, ohniska, tečny, normály, konstrukce kuželoseček

Title: Utilization of the internet by teaching conics at high school

Author: Bc. Věra Effenberger

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Jana.Hromadova@mff.cuni.cz

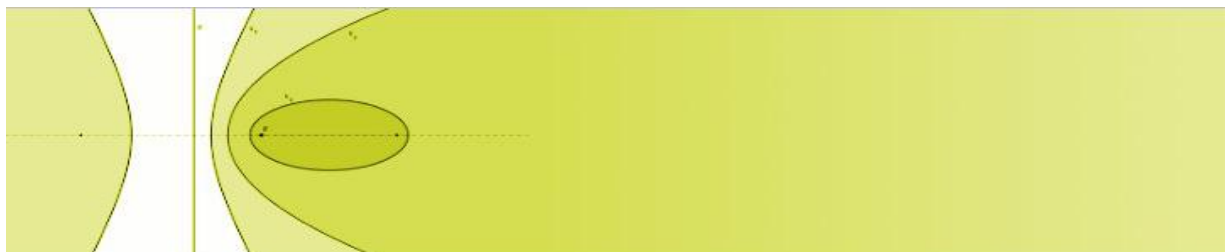
Abstract

This diploma thesis is dealing with conics' problems. It is mainly destined for high school (or university) teachers of descriptive geometry and for students too. It can be used in aid of education of conics or by self-study, because it includes many of illustrative pictures and dynamic applets made in the program GeoGebra, which support the written theoretical text. In the work are enumerated definitions, properties and various constructions of individual conics. Further there is their origin as an intersection of a right circular cone (as the case may be of a right circular cylinder) with a plane, their osculating circle and conjugate diameters. Compilation of examples constitutes an addition of this work. The examples have various difficulty and also can serve as a control over got knowledge.

Keywords: ellipse, hyperbola, parabola, foci, tangents, normals, construction of conics

KUŽELOSEČKY

VĚRA EFFENBERGER



Úvod

Tyto stránky vznikly jako diplomová práce na Katedře didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Diplomová práce si klade za hlavní cíl seznámit čtenáře s vlastnostmi a konstrukcemi regulárních kuželoseček (v Eukleidovské rovině E_2) a to i s pomocí dynamických apletů. Je určena nejen studentů a učitelům, ale také příznivcům geometrie, či široké veřejnosti, neboť nepředpokládá kromě znalostí středoškolské matematiky (geometrie) žádné speciální znalosti z oblasti deskriptivní geometrie. Se vším, co je třeba, se čtenář seznámí.

Práce je sestavena jako učební text prohlubující a scelující znalosti o elipse, hyperbole a parabole. Lze ji použít jako didaktickou pomůcku především v hodinách deskriptivní geometrie. Je rozdělena do osmi kapitol. První z nich definuje jednotlivé kuželosečky a zavádí nezákladnější pojmy.

Druhá, třetí a čtvrtá kapitola se vcelku podrobně věnuje vlastnostem kuželoseček a zavádí další pojmy, jakými jsou např. tečna, normála, evoluta, řídicí kružnice, atd. Také vyzdvihuje velice důležité ohniskové vlastnosti.

Kapitola pátá je celá věnovaná Quételetově - Dandelinově větě a jejímu důkazu. Nahlížíme zde na kuželosečky jako na řezy rotační kuželové, resp. válcové plochy a tím vysvětlujeme název "kuželosečka".

Následující kapitola prohlubuje a zobecňuje vědomosti o průměrech kuželoseček, které na střední škole skoro nejsou vyučovány. Je doplněním znalostí, které budou třeba v kapitole sedmé - Konstrukce. Kapitola Konstrukce obsahuje souhrn mnoha konstrukcí kuželoseček, které jsou založeny na různých principech.

Poslední kapitola uvádí aproximace kuželoseček a to pomocí oskulačních kružnic.

Všechny kapitoly jsou doplněny řadou přehledných obrázků a pohyblivých apletů, které byly vytvořeny ve volně dostupném programu GeoGebra (viz <http://www.geogebra.org/cms/>) .

Přílohou diplomové práce je sbírka úloh vztahující se k řešení problematiky kolem kuželoseček. Úlohy jsou různého stupně obtížnosti a slouží jako kontrola pochopení látky vysvětlené v této práci.

Ovládání stránek

Navigace na stránkách je v dvojstupňovém menu na levé straně.

Jak již bylo zmíněno, stránky obsahují také dynamické aplety. Aby správně fungovaly, je nutné mít povolený Javascript a Javu v prohlížeči. Aplety jsou na rozdíl od obrázků v černém rámečku. Vždy je u nich napsáno, jaká je jejich funkce. Pokud se v apletu má pohybovat bodem, je tento bod většinou vyznačen červeným kolečkem. Pohyb bodu určujete pomocí myši. Stačí kurzorem najet na daný bod, podržet levé tlačítko myši a bod bude kopírovat Vámi zvolený pohyb.

V některých apletech jsou konstrukce nahrány. Pro spuštění konstrukce stačí kliknout na tlačítko "Přehrát" v dolním rámu apletu. Snadno zjistíte, že konstrukci lze také odkrokovat pomocí šipek v dolním rámu. Pro obnovení apletu načtete stránku znovu.

Kód stránek je validní podle norem XHTML 1.0 Strict a použité styly odpovídají normě CSS 2.1. Ve většině moderních prohlížečů by nemělo být problematické jejich zobrazení. Potíže ovšem mohou činit matematické symboly, pokud je daný prohlížeč nepodporuje.

1. Definice

Elipsa, parabola a hyperbola jsou rovinné křivky, které souhrnně nazýváme **regulární kuželosečky** (dále budeme užívat jen **kuželosečky**). Mezi kuželosečky řadíme také kružnici. Kružnici, která je známá žákům již od základní školy, nebudeme věnovat tolik pozornosti. Za určitých podmínek ji lze považovat za speciální případ elipsy (více viz [Definice elipsy](#)). Zaměříme se proto především na elipsu, parabolu a hyperbolu.

Tato kapitola je věnována definicím kuželoseček. Definovány jsou jako množiny bodů daných vlastností v rovině. Ovšem kuželosečky můžeme nadefinovat i jiným způsobem a to, jakožto rovinné řezy rotačního kužele. Podrobnosti k tomuto způsobu vytvoření kuželoseček najdete v kapitole [Věta \(Quételet, Dandelin\)](#).

1E.1 Definice elipsy

Definice: Necht' jsou v rovině E_2 dány dva různé body F_1 a F_2 a konstanta $a > 0$, pro kterou platí $2a > |F_1F_2|$.

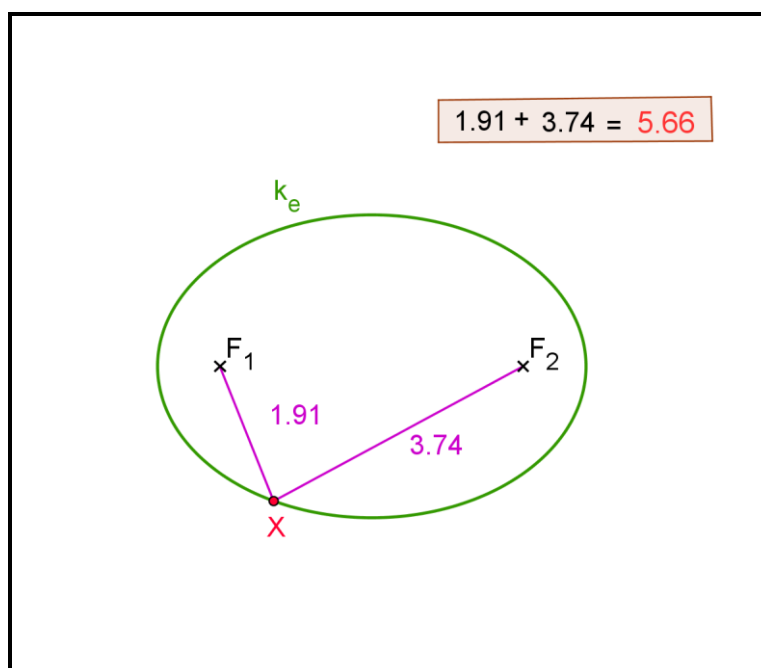
Elipsou k_e budeme rozumět množinu všech bodů v rovině E_2 , které mají konstantní součet vzdáleností od bodů F_1 a F_2 roven $2a$.

Pomocí množinových symbolů můžeme definici napsat následujícím způsobem:

$$k_e = \{ X \in E_2; |F_1X| + |XF_2| = 2a, kde\ 2a > |F_1F_2| \}$$

Pozn.: Kdyby v definici elipsy bylo místo "různých bodů" jen "bodů", pak bychom připustili, že ohniska mohou splynout v jeden dvojnásobný bod. Tím bychom mezi elipsy zařadili i **kružnici**. Kdyby nebylo řečeno " $2a > |F_1F_2|$ ", neboli že součet průvodičů (průvodič - viz níže) je větší než vzdálenost $|F_1F_2|$, pak bychom připustili, že součet může být menší nebo roven $|F_1F_2|$. V prvním případě by neexistoval žádný bod vyhovující daným podmínkám. V druhém případě bychom dostali úsečku s krajními body F_1 a F_2 .

Pokud budete v *apletu* E1.1 pohybovat bodem X po elipse, můžete se přesvědčit, že součet vzdáleností bodu X od pevně zvolených bodů F_1 a F_2 je opravdu konstantní. Součet těchto vzdáleností je počítán v tabulce vpravo nahoře. Také můžete posunout bod F_1 do bodu F_2 a přesvědčit se o tom, že takto dostanete kružnici.



1E.2 Základní pojmy

Nyní vymezíme několik důležitých pojmů vztahujících se k elipse. V dalším textu budou termíny používány.

Body F_1 a F_2 nazýváme **ohniska** elipsy (někdy také **fokusy** z latinského slova *focus*, což znamená ohnisko). Z definice tedy plyne, že každá elipsa má dvě ohniska, dva různé pevně dané body. Pokud by toto neplatilo a ohniska by mohla splynout v jeden bod, výslednou křivkou by byla nikoliv elipsa, ale **kružnice**. O tomto se můžete taktéž přesvědčit v apletu výše, pokud posunete jedno ohnisko do druhého. Také je při tom dobře vidět jak závisí tvar elipsy na vzdálenosti obou ohnisek. (O tvaru elipsy najdete v textu více později.)

Vzdálenosti, nebo také spojnice F_1X, F_2X libovolného bodu $X \in k_e$ a ohnisek se nazývají **průvodiče** bodu X . V apletu jsou značeny jako p_1 a p_2 . Ovšem někdy se značí také r_1, r_2 podle latinského názvu *radius* = průvodič.

Přímku F_1F_2 budeme značit o_1 . Jedná se o **hlavní osu** elipsy. Přímka kolmá na hlavní osu o_1 procházející bodem S , který je středem úsečky F_1F_2 , se nazývá **vedlejší osa** elipsy a značí se o_2 .

Bod S je zároveň **středem elipsy**.

Body A, B , které jsou průsečíky hlavní osy o_1 a elipsy, se nazývají **hlavní vrcholy**. Obdobně průsečíky vedlejší osy o_2 a elipsy, budeme značit C, D a nazývat **vedlejší vrcholy** elipsy.

Podle definice platí, že součet délek průvodičů libovolného bodu elipsy je roven konstantě $2a > 0$. Platí-li tento vztah pro každý bod ležící na elipse, musí tedy platit i pro hlavní vrcholy A, B . Tudiž platí následující rovnosti:

$$|AF_1| + |AF_2| = |BF_1| + |BF_2| = 2a$$

$$|AF_2| = |AF_1| + |F_1F_2| = |F_2B| + |F_1F_2| = |BF_1|$$

$$2a = |AF_1| + |AF_2| = |AF_1| + |F_1F_2| + |F_2B| = |AB|$$

Tedy:

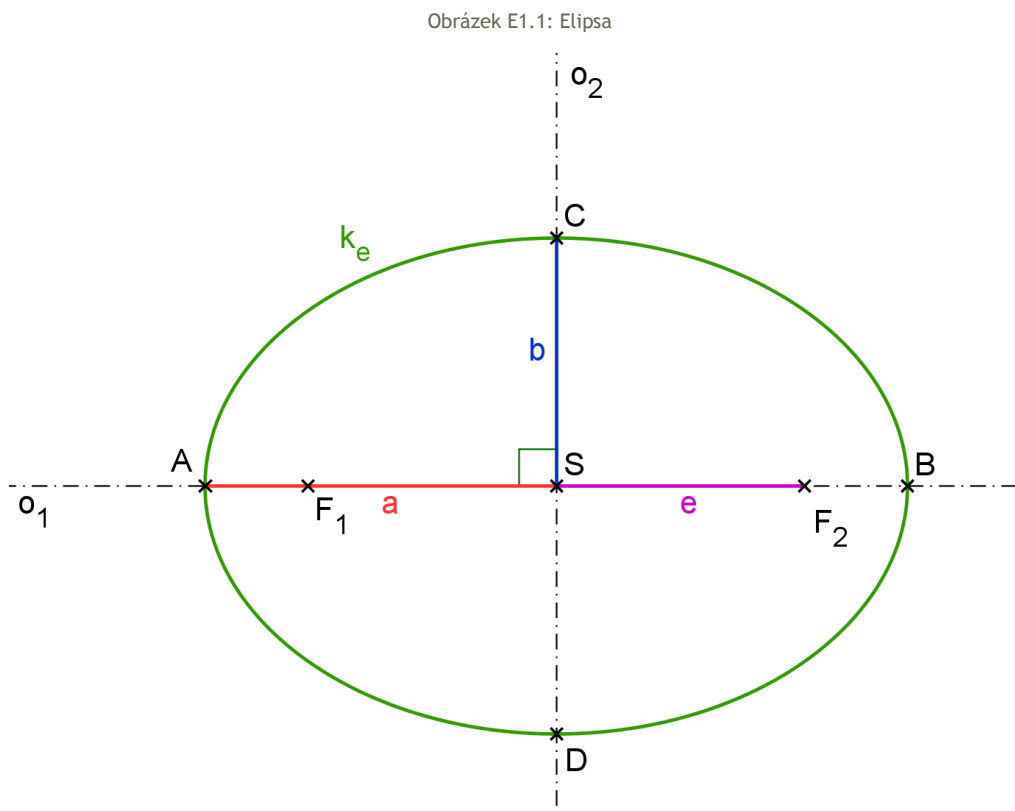
$$2a = |AB|$$

$$a = |AS| = |BS|.$$

Z předchozího vyplývá, že konstanta a představuje délku úsečky AS či SB . Konstantu a budeme nazývat **délka hlavní poloosy**. Zavedeme další konstantu b a budeme jí nazývat **délka vedlejší poloosy**. Stejně tak jako platí $a = |AS| = |SB|$, platí také $b = |CS| = |SD|$.

Další důležitou konstantou je tzv. **excentricita**, neboli **lineární výstřednost**. Značí se e a určuje vzdálenost ohniska od středu elipsy (název pochází z latiny, *ex* = mimo, *centrum* = střed). Vyjadřuje tedy délku úsečky F_1S či F_2S .

Všechny výše uvedené konstanty, body a přímky jsou vyznačené na *obrázku E1.1*.



Pro větší přehlednost a ucelenost termínů je zde tabulka, která shrnuje všechny pojmy:

označení	název	definice
k_e	elipsa	
F_1, F_2	ohniska (fokusy)	
A, B	hlavní vrcholy	průsečíky o_1 a k_e
C, D	vedlejší vrcholy	průsečíky o_2 a k_e
S	střed elipsy	střed úsečky F_1F_2
o_1	hlavní osa	přímka AB
o_2	vedlejší osa	přímka CD
a	délka hlavní poloosy	$ AS $ či $ SB $
b	délka vedlejší poloosy	$ CS $ či $ SD $
e	excentricita (výstřednost)	$ F_1S $ či $ SF_2 $

1H.1 Definice hyperboly

Definice: Necht' jsou v rovině E_2 dány dva různé body F_1 a F_2 a konstanta $a > 0$, pro kterou platí $2a < |F_1F_2|$.

Hyperbolou k_h budeme rozumět množinu všech bodů v rovině E_2 , které mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od bodů F_1 a F_2 rovnu $2a$.

Pomocí množinových symbolů můžeme definici napsat následujícím způsobem:

$$k_h = \{ X \in E_2; ||F_1X| - |XF_2|| = 2a, \text{ kde } 2a < |F_1F_2| \}$$

Pozn.: Kdyby v definici místo "... mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu..." bylo jen "... mají konstantní rozdíl...", pak bychom připustili i zápornou vzdálenost, což je prakticky nemožné.

Pokud bychom připustili i případ kdy $a = 0$, mezi hyperboly bychom řadili i osu souměrnosti úsečky F_1F_2 .

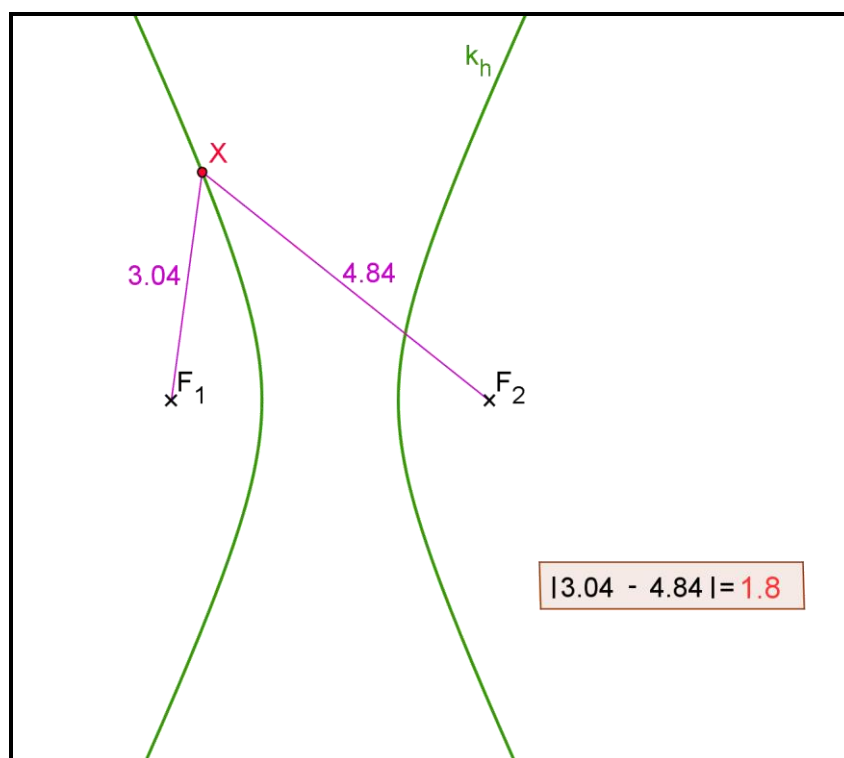
Kdybychom nezdůraznili, že body F_1 a F_2 jsou různé, připouštěli bychom i případ, kdy body splynou. V takovém případě by $2a$ mohlo být rovno pouze nule a definici by vyhovovaly všechny body roviny.

Kdyby v definici hyperboly nebylo řečeno " $2a < |F_1F_2|$ ", pak bychom připustili, že rozdíl by mohl být buď roven nebo větší než $|F_1F_2|$. V prvním případě bychom dostali přímku F_1F_2 , z níž jsou vyňaty vnitřní body úsečky F_1F_2 . V druhém případě by neexistoval žádný bod vyhovující daným podmínkám.

Pokud budete v *apletu H1.1* pohybovat bodem X po hyperbole, můžete se přesvědčit, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností bodu X od pevně zvolených bodů F_1 a F_2 je opravdu konstantní.

Absolutní hodnota rozdílu těchto vzdáleností je počítána v tabulce vlevo.

Aplet H1.1: Definice hyperboly - konstantní absolutní hodnota rozdílu průvodičů



1H.2 Základní pojmy

Nyní vymežíme několik důležitých pojmů vztahujících se k hyperbole. V dalším textu budou termíny používány.

Body F_1 a F_2 nazýváme **ohniska** hyperboly nebo někdy také **fokusy**. Z definice tedy plyne, že každá hyperbola stejně jako elipsa má dvě ohniska, dva různé pevně dané body. Vzdálenosti $|F_1X|$, $|XF_2|$, nebo také spojnice F_1X , XF_2 libovolného bodu $X \in k_h$ a ohnisek se nazývají **průvodiče** bodu X .

Přímku F_1F_2 budeme značit o_1 . Jedná se o **hlavní osu** hyperboly. Přímka kolmá na hlavní osu o_1 procházející bodem S , který je středem úsečky F_1F_2 , se nazývá **vedlejší osa** hyperboly a značí se o_2 . Bod S je zároveň **středem hyperboly**.

Body A, B , které jsou průsečíky hlavní osy o_1 a hyperboly, se nazývají **vrcholy hyperboly**.

Podle definice platí, že absolutní hodnota rozdílu průvodičů libovolného bodu hyperboly je rovna konstantě $2a > 0$. Tedy pro každý bod M hyperboly platí buď $|F_1M| - |F_2M| = 2a$ a to v případě, že je $|F_1M| > |F_2M|$. Nebo platí $|F_2M| - |F_1M| = 2a$ v případě, že je $|F_2M| > |F_1M|$. Znamená to, že hyperbola je složena ze dvou disjunktních částí (nemají žádný společný bod), jimž říkáme **větvě hyperboly**. Větvě hyperboly se neomezeně blíží ke dvěma přímkám u_1, u_2 , které procházejí středem hyperboly. Jsou to **asymptoty** hyperboly. Mají tu speciální vlastnost, že se směrem od středu S čím dál více blíží větvím hyperboly, ale nikdy se jich "nedotknou". V projektivním rozšíření eukleidovského prostoru bychom mohli říci, že to jsou tečny hyperboly v bodě, který je nekonečně vzdálený a přesto na hyperbole leží; tečny v tzv. nevlastním bodě.

Platí-li vztah z definice pro každý bod ležící na hyperbole, musí pak platit i pro vrcholy A, B . Tudíž platí následující rovnosti:

$$\|AF_1| - |AF_2|\| = \|BF_1| - |BF_2|\| = 2a$$

$$|AF_2| = |AB| + |BF_2| = |BA| + |AF_1| = |BF_1|$$

$$2a = \|AF_1| - |AF_2|\| = \|AF_1| - (|AB| + |BF_2|)\| = \|AF_1| - |AB| - |AF_2|\| = |AB|$$

Tedy:

$$2a = |AB|$$

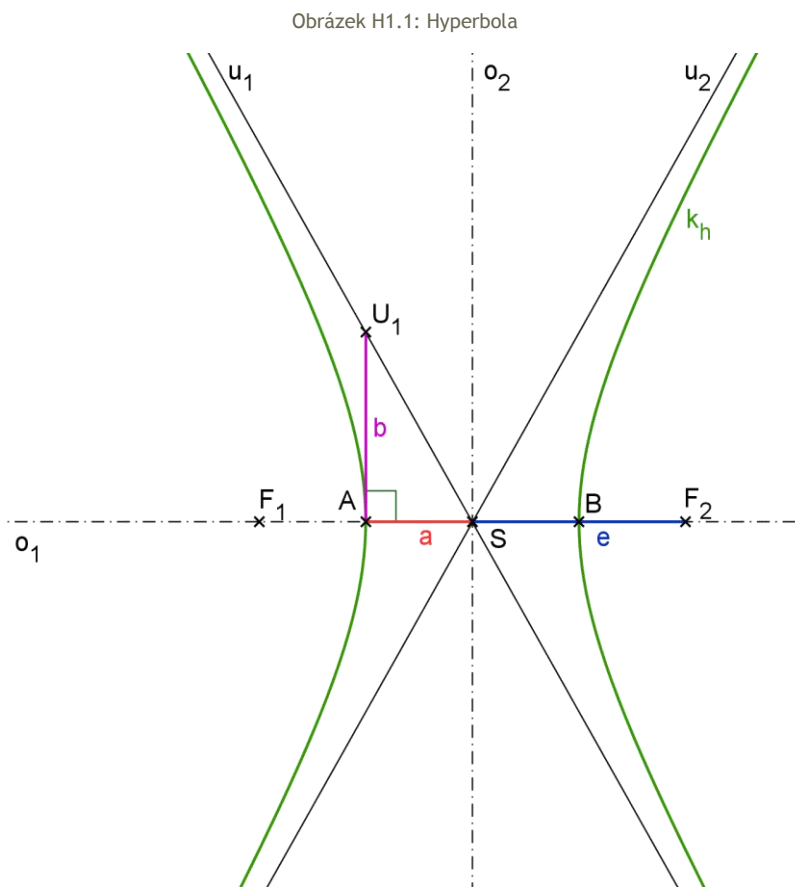
$$a = |AS| = |BS|.$$

Z předchozích rovnic vyplývá, že konstanta a představuje délku úsečky AS či SB . Konstantu a budeme nazývat **délka hlavní poloosy**.

Zřejmě, pokud existuje délka hlavní poloosy, očekáváme i konstantu, která bude vyjadřovat délku vedlejší poloosy stejně tak, jak tomu je u elipsy. Ovšem hyperbola nemá žádné vedlejší vrcholy (žádné body ležící na o_2), protože všechny body vedlejší osy o_2 mají rozdíl průvodičů roven nule. I přesto je zde zavedená konstanta b - **délka vedlejší poloosy**. Vyjadřuje délku úsečky AU_1 (resp. BU_2), kde bod U_1 (resp. U_2) je jeden z průsečíků asymptoty a přímky kolmé na hlavní osu o_1 procházejících vrcholem A (resp. B). Platí $b = |AU_1| = |BU_2|$.

Další důležitou konstantou je tzv. **excentricita**, neboli **výstřednost**. Značí se e a určuje vzdálenost ohniska od středu elipsy. Vyjadřuje tedy délku úsečky F_1S či SF_2 .

Všechny výše uvedené konstanty, body a přímky jsou vyznačeny na obrázku H1.1.



Pro větší přehlednost a ucelenost termínů je zde tabulka, která shrnuje všechny pojmy:

označení	název	definice
k_h	hyperbola	
F_1, F_2	ohniska (fokusy)	
A, B	vrcholy hyperboly	průsečíky o_1 a k_h
S	střed hyperboly	střed úsečky F_1F_2
o_1	hlavní osa	přímka AB
o_2	vedlejší osa	přímka kolmá na o_1 a procházející S
u_1, u_2	asymptoty	tečny hyperboly v nevlastním bodě

a	délka hlavní poloosy	$ AS $ či $ SB $
b	délka vedlejší poloosy	$ AU_1 $ či $ BU_2 $
e	excentricita (výstřednost)	$ F_1S $ či $ SF_2 $

1P.1 Definice paraboly

Definice: Necht' je v rovině E_2 dána přímka d a bod F , který na ní neleží.

Parabolou k_p budeme rozumět množinu všech bodů v rovině E_2 , jejichž vzdálenost od bodu F je rovna vzdálenosti od přímky d .

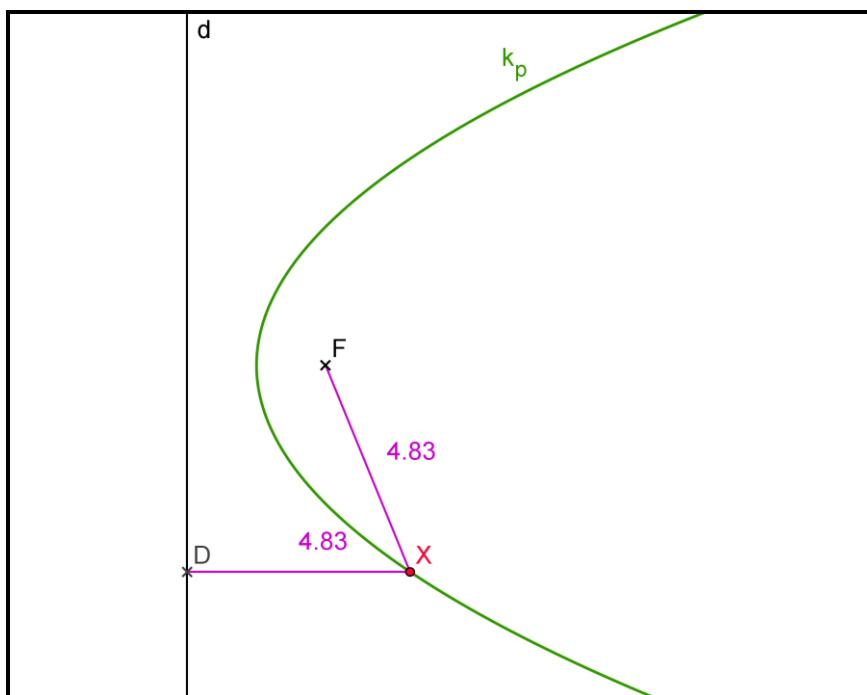
Pomocí množinových symbolů můžeme definici napsat následujícím způsobem:

$$k_p = \{ X \in E_2; |XF| = |Xd|, \text{ kde } F \notin d \}$$

Pokud budete v *apletu* P1.1 pohybovat bodem X po parabole, můžete se přesvědčit, že vzdálenost bodu X od pevně daného bodu F je stejná jako vzdálenost bodu X od přímky d .

Pozn.: Vzdálenost bodu od přímky je délka kolmice spuštěné z daného bodu na přímku.

Aplet P1.1: Definice paraboly - shodné délky průvodičů



1P.2 Základní pojmy

Nyní vymežíme několik důležitých pojmů vztahujících se k parabole. V dalším textu budou termíny používány.

Bod F se nazývá **ohnisko** paraboly (někdy také **fokus**) a přímka d se nazývá **řídící přímka (direktrix)**.

Pozn.: Důležité je si všimnout, že ohnisko a řídící přímka nejsou incidentní, tedy, že bod F na přímce d neleží. Kdyby tomu tak bylo, potom by "parabolu" představovala přímka kolmá na přímce d a procházející bodem F .

Vzdálenosti $|FX|$, $|DX|$ nebo také spojnice FX a DX libovolného bodu $X \in k_p$, kde bod D je průsečíkem řídící přímky a kolmice na ni procházející daným bodem X se nazývají **průvodiče** bodu X .

Přímku kolmou na řídící přímce d a procházející ohniskem F budeme značit o a nazveme ji **osa paraboly**. Osa protíná parabolu právě v jednom bodě. Tento bod se nazývá **vrchol** paraboly a značí se V .

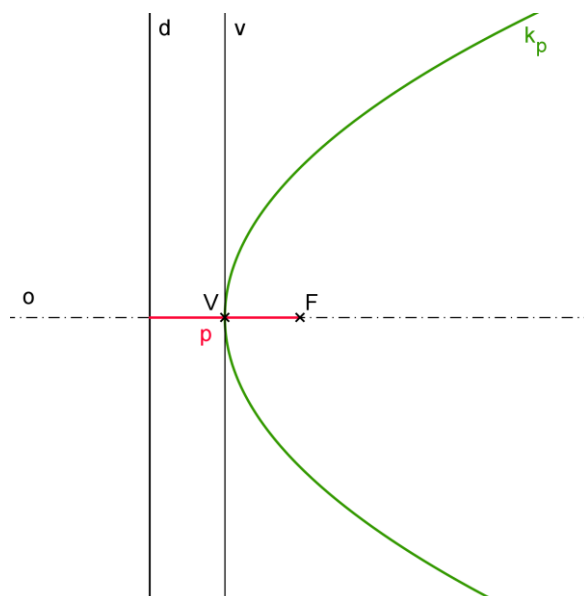
Vzdálenost ohniska od řídící přímky se nazývá **parametr**, značí se p . Tedy $p = |Fd|$. Je to důležitá konstanta, pomocí níž se parabola zadává. Dalo by se říci, že určuje tvar paraboly (více o tvaru paraboly říká kapitola [Základní vlastnosti paraboly](#)).

Vrátíme-li se k vrcholu V , platí podle definice následující: $|FV| = |Vd|$. Z toho plyne, že vzdálenost vrcholu od ohniska (resp. od řídící přímky) je rovna polovině parametru, tedy $|FV| = \frac{p}{2}$. Přímka kolmá na osu a procházející vrcholem paraboly, jež se značí v , se

nazývá **vrcholová tečna**. Opravdu, přímka v je tečnou paraboly v jejím vrcholu V (o tomto tématu více v kapitole [Tečny a normály paraboly](#)).

Parabola a všechny jmenované body, přímky a konstanty jsou na *obrázku P1.1*.

Obrázek P1.1: Parabola



Pro větší přehlednost a ucelenost termínů je zde tabulka, která shrnuje všechny pojmy:

označení	název	definice
k_p	parabola	
F	ohnisko (fokus)	
d	řídící přímka	
o	osa paraboly	přímka procházející F a kolmá na d
V	vrchol paraboly	průsečík o a k_p
v	vrcholová tečna	přímka procházející V a kolmá na o
p	parametr	$ Fd $

1S.1 Společná definice

V předchozích kapitolách jsme definovali jednotlivé kuželosečky: elipsu, hyperbolu a parabolu, každou zvlášť. Nyní předkládáme jednu společnou definici, pomocí níž dostaneme každou ze tří kuželoseček. Definice je založena na poměru vzdáleností, viz níže.

Definice: Necht' je v rovině E_2 dána přímka d a bod F , který na ní neleží. Dále necht' je zvolena konstanta $\varepsilon > 0$.

Kuželosečkou k budeme rozumět množinu všech bodů X v rovině E_2 , které mají konstantní poměr vzdáleností $|FX| : |Xd|$ roven ε .

Pomocí množinových symbolů můžeme definici napsat následujícím způsobem:

$$k = \left\{ X \in E_2; \frac{|FX|}{|Xd|} = \varepsilon, \text{ kde } \varepsilon > 0 \right\}.$$

Takto obecně je definována regulární kuželosečka. Nikdy však touto definicí nedostaneme kružnici. Přímka d se nazývá (stejně jako u paraboly) **řídící přímka** a zvolený bod F se nazývá **ohnisko**. Jestli se jedná o elipsu, hyperbolu či parabolu určuje právě konstanta ε , která se nazývá **číselná excentricita** (číselná výstřednost).

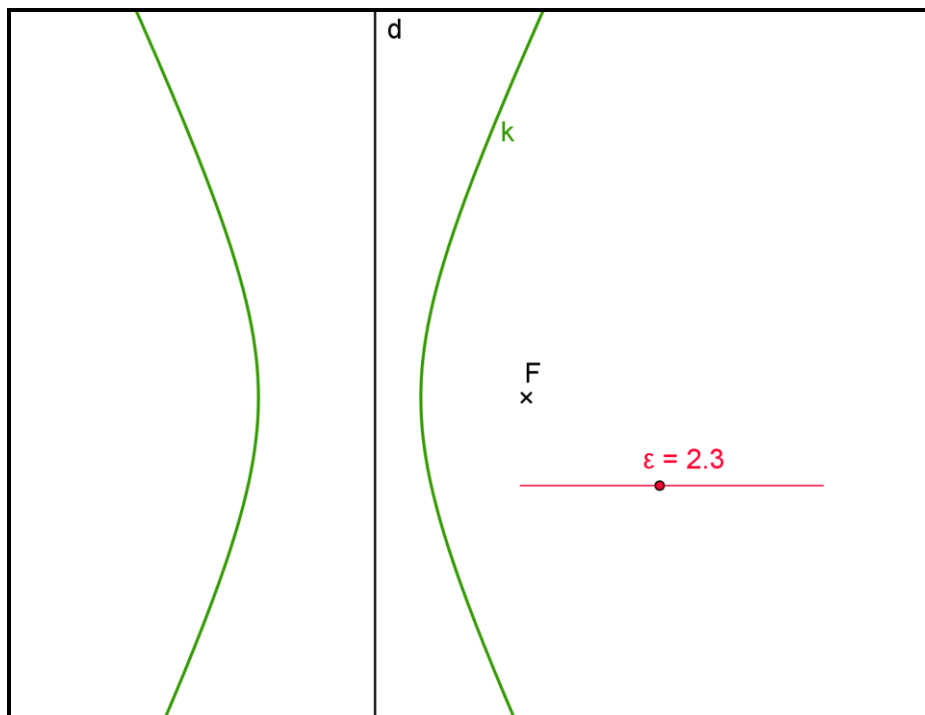
Pro $\varepsilon \in \mathbb{Q}; \overset{\sim}{1}$ je definice určena elipse.

Pro $\varepsilon = 1$ se jedná o **parabolu**.

Pro $\varepsilon \in (\infty; +\infty)$ náleží definice **hyperbole**.

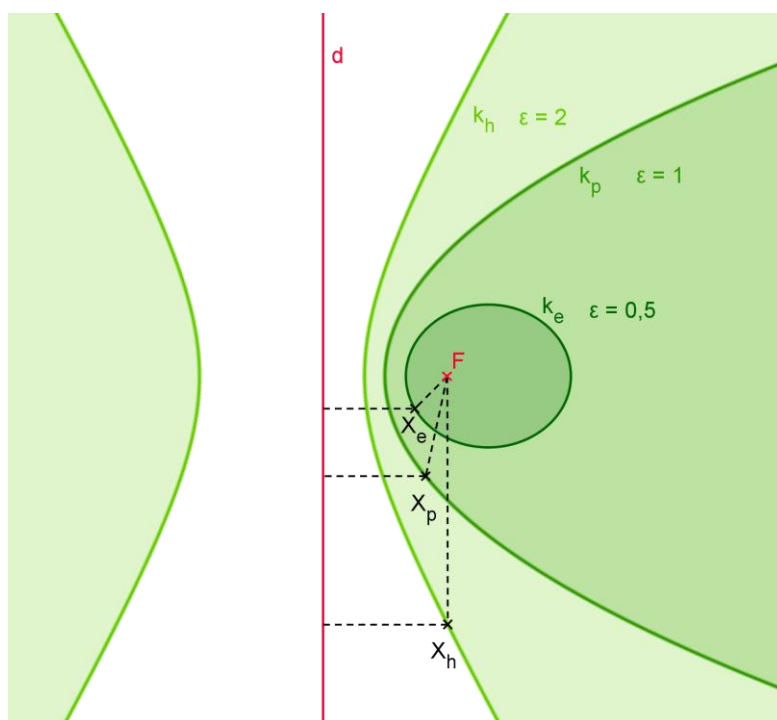
V *apletu S1.1* je definice vymodelována. Křivka je zde počítána právě podle definice. Pokud tedy budete měnit ε - poměr vzdáleností (pomocí posuvníku), bude se výsledná křivka náležitě měnit.

Aplet S1.1: Definice společná elipse, hyperbole a parabole



Na *obrázku S1.1* jsou všechny tři kuželosečky zobrazeny najednou. Všechny mají společnou řídicí přímku d a ohnisko F . Ovšem každá má jiný poměr $\frac{|FX|}{|Xd|} = \varepsilon$ vzdáleností bodů $X \in k$.

Obrázek S1.1: Společná definice kuželoseček



Názvy kuželoseček pocházejí od starých řeckých matematiků, ti se jejich studiem intenzivně zabývali. Jedním z velmi významných děl je *Kónika* - Pojednání o kuželosečkách od *Apollónia z Pergy* (3. - 2. stol. př. Kr.). Ten zde definuje kuželosečky jako rovinné řezy kruhového kužele a vyvozuje vztahy mezi souřadnicemi každého bodu kuželosečky. Pokud bychom chtěli tlumočit jeho poznatky, můžeme říci následující:

Pro parabolu platí, že poměr vzdáleností - číselná excentricita ε je rovna jedné. Z toho vyplynul název parabola, z řeckého *parabolé* = přirovnání.

Pro elipsu je ε menší než jedna. Název elipsa je z řeckého *elleipsis* = nedostatek.

U hyperboly je naopak ε větší než jedna. Název hyperbola je z řeckého názvu *hyperbolé*, což znamená přebytek.

2. Základní vlastnosti

V této kapitole odkryjeme pouze základní vlastnosti kuželoseček. Jedná se o vlastnosti, které by měly být známy i žákům středních škol, kteří nemají a neměli deskriptivní geometrii jakožto vyučovaný předmět. Rozšiřující informace o vlastnostech kuželoseček můžete nalézt v kapitole [Tečny a normály](#) a v kapitole [Ohniskové vlastnosti](#).

2E.1 Základní vlastnosti elipsy

V této kapitole odkryjeme několik základních vlastností, které elipsa má. Budeme se zabývat opravdu jen základními vlastnostmi. Rozšířením této kapitoly budou kapitoly [Tečny a normály elipsy](#) a [Ohniskové vlastnosti elipsy](#), jež bude navazovat na informace a látku probranou právě zde.

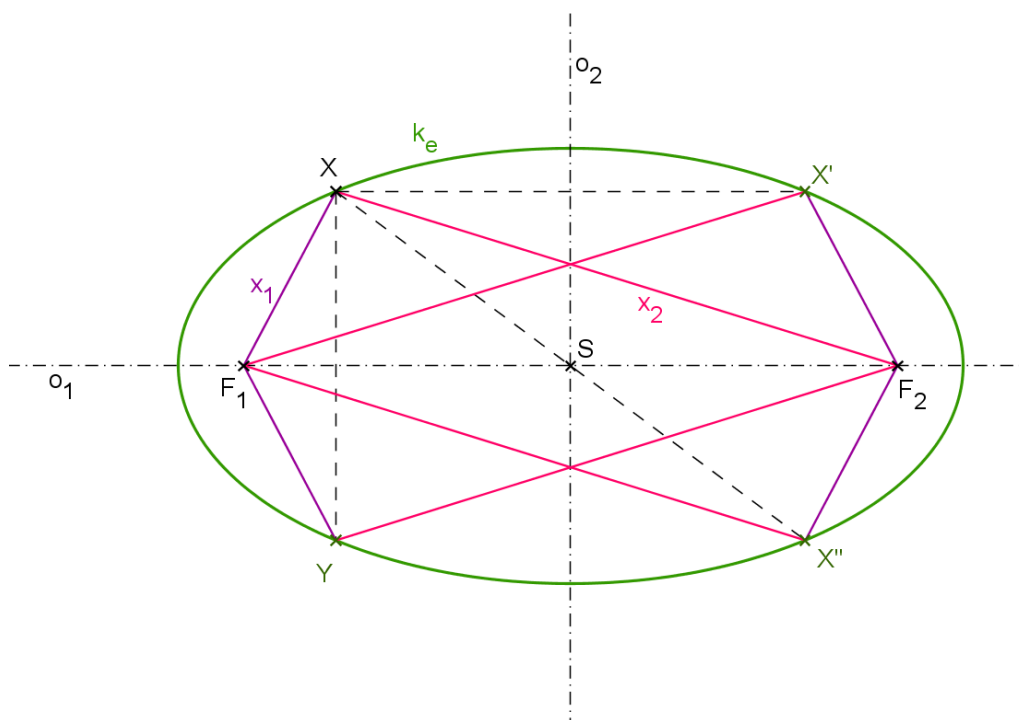
První důležitou vlastností je, že libovolný bod ležící na elipse má konstantní součet vzdáleností od ohnisek roven $2a > 0$. Na tom je samozřejmě postavena definice elipsy. Nicméně z toho vylýne několik dalších vlastností.

Zvolme nyní libovolně bod $X \in k_e$. Zvolme ho tak, aby ležel "nad" hlavní osou elipsy. Označíme-li x_1 vzdálenost bodu X od ohniska F_1 a x_2 vzdálenost bodu X od druhého ohniska F_2 , potom zajisté body X' a X'' , pro které platí: $|XF_1| = |X''F_1| = x_2$, $|XF_2| = |X'F_2| = x_1$, bod X' leží "nad" o_1 , bod X'' "pod" o_1 , budou také součástí elipsy. Navíc platí, že bod X' je s bodem X osově souměrný podle vedlejší osy o_2 . Protože bod X byl zvolen libovolně, mohli jsme si vybrat jakýkoliv bod elipsy, můžeme konstatovat, že elipsa je **osově souměrná podle vedlejší osy o_2** . Bod X'' je středově souměrný s bodem X podle středu S . Můžeme tedy opět říci, že elipsa je **středově souměrná podle středu S** .

Vraťme se ještě ke zvolenému bodu X . Bod, jenž má vzdálenost x_1 od ohniska F_1 a vzdálenost x_2 od druhého ohniska F_2 existuje na elipse ještě jeden (leží "pod" hlavní osou elipsy). A zřejmě platí, že tento bod je osově souměrný s původním bodem X podle hlavní osy o_1 . Elipsa je tedy také **osově souměrná podle hlavní osy o_1** .

Vše popisované je znázorněno na *obrázku E2.1*.

Obrázek E2.1: Souměrnosti elipsy

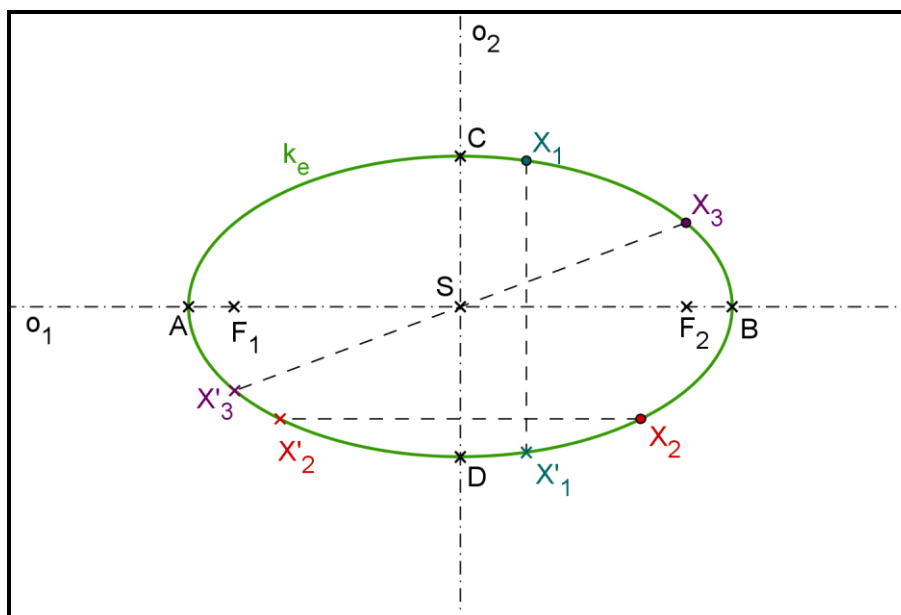


Pokud bychom vše měli shrnout, můžeme vyslovit tvrzení:

Věta E2.1: Elipsa je souměrná podle dvou na sebe kolmých os. Jedná se o hlavní a vedlejší osu elipsy. Je také souměrná podle jejich průsečíku, středu.

V *apletu E2.1* si můžete vyzkoušet, výše popsané vlastnosti. Budete-li hýbat body X_1, X_2, X_3 po elipse, budou se též body X'_1, X'_2, X'_3 souměrně sdužené pohybovat po elipse.

Aplet E2.1: Souměrnosti elipsy

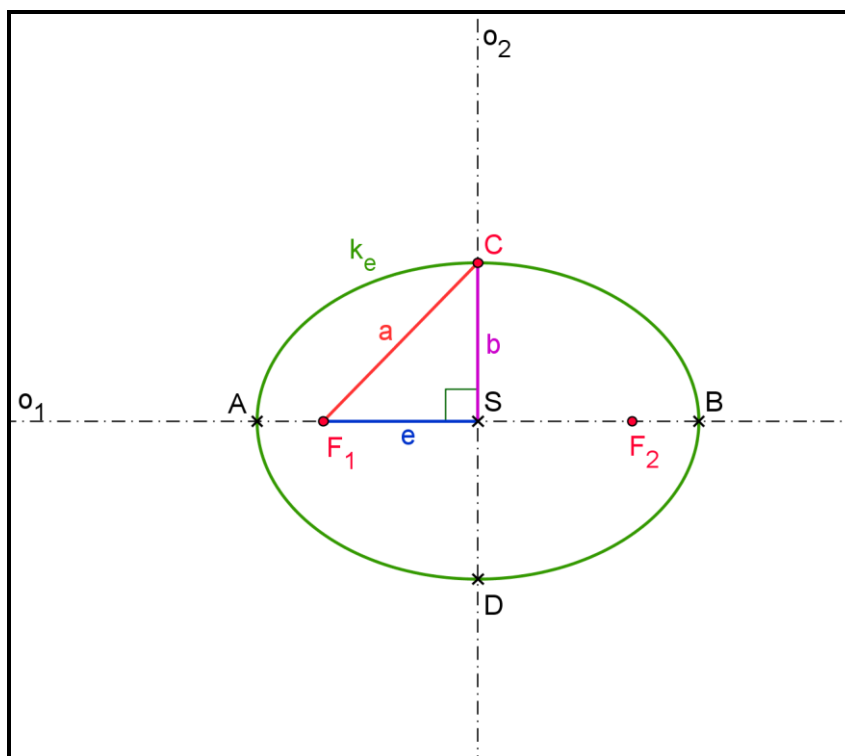


Vrátíme-li se opět k definici elipsy a za libovolný bod zvolíme jeden z vedlejších vrcholů, např. C , ze souměrnosti elipsy bude platit: $|F_1C| = |CF_2|$. Z $|F_1C| + |CF_2| = 2a$ vyplývá, že $|F_1C| = |CF_2| = a$. Jinými slovy, délku hlavní poloosy představuje taktéž úsečka F_1C nebo CF_2 . Vyznačíme-li v elipse délku vedlejší poloosy jako úsečku F_1C , objeví se v elipse pravoúhlý trojúhelník F_1SC s přeponou F_1C délky a , viz *aplet E2.2*. Odvěsna CS má délku b a F_1S délku e . Takovému trojúhelníku se často říká **charakteristický trojúhelník** elipsy. Je patrné, že excentricita e a délky poloos a , b jsou vázány vztahem: $a^2 = b^2 + e^2$ (využitím Pythagorovy věty). Odtud také plyne $a > b$, $a > e$.

Věta E2.2: Pro délku hlavní a vedlejší poloosy elipsy (a , b) a excentricitu e platí vztah (Pythagorova věta): $a^2 = b^2 + e^2$.

Délka hlavní a vedlejší poloosy a excentricita, dá se říci charakteristický trojúhelník udává v podstatě tvar elipsy. V *apletu E2.2* si můžete vyzkoušet, jak jednotlivé parametry mění výsledný tvar elipsy. Pohybuje ohnisky po ose o_1 , tím budete měnit e a také velikost a . Zkuste pohybovat i vedlejším vrcholem C po o_2 , čímž budete měnit velikost b a a .

Aplet E2.2: Charakteristický trojúhelník a tvar elipsy



Pro průvodiče MF_1 , MF_2 libovolného bodu M roviny E_2 platí buď

a) $|MF_1| + |MF_2| < 2a$,

b) $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ nebo

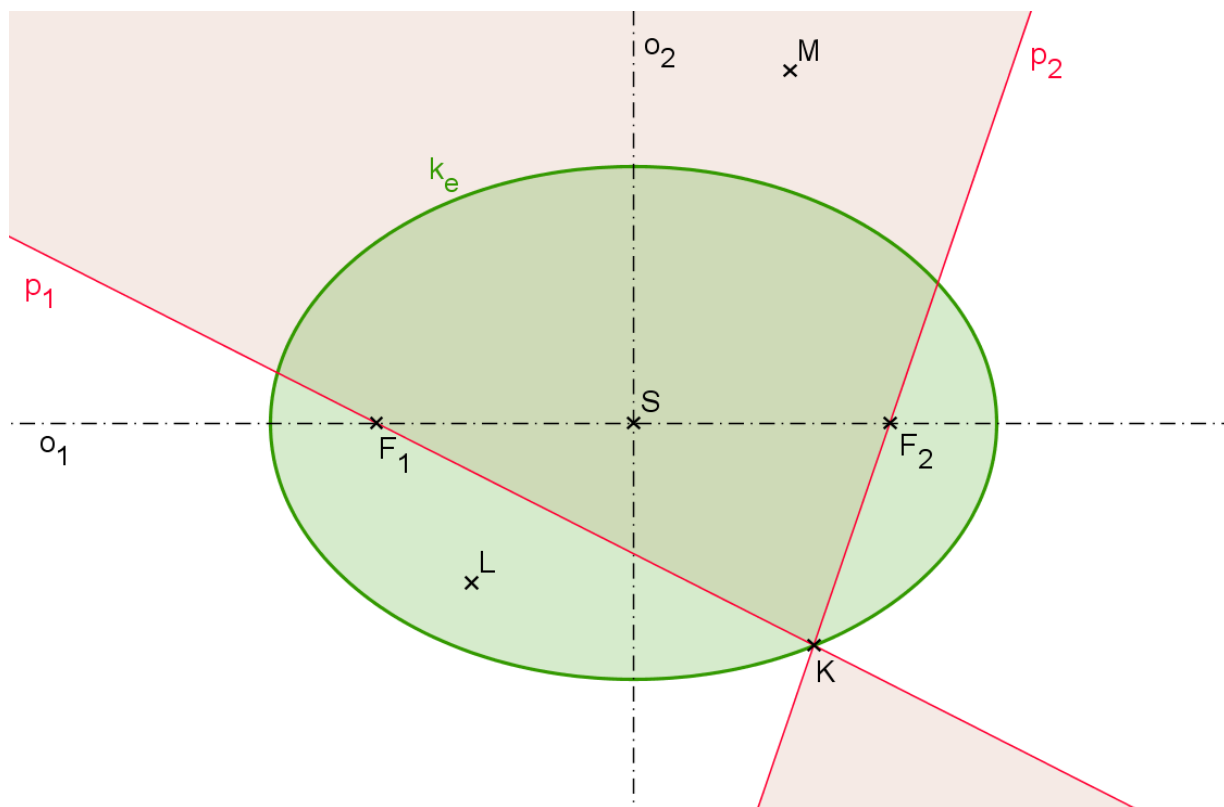
c) $|MF_1| + |MF_2| > 2a$,

přičemž podmínka b) platí právě pro body elipsy (určené ohnisky F_1 , F_2 a délkou hlavní poloosy a). Body roviny, které mají vlastnost a), nazýváme **vnitřní body** elipsy, body, pro které platí c), jsou **vnější body** elipsy. Dá se dokázat, že uvedené označení souhlasí s názornou představou rozdělení roviny elipsou na dvě disjunktní oblasti: vnitřní a vnější. Vnitřním (vnějším) bodem elipsy tedy rozumíme bod vnitřní (vnější) rovinné oblasti ohraničené danou elipsou. Ohnisko a střed jsou vnitřní body elipsy. (čerpáno z: Urban [13] str. 35)

Leží-li dva různé body M, N na elipse nebo ve vnitřní oblasti elipsy platí, že, potom i všechny body úsečky MN leží ve vnitřní oblasti či na elipse. Proto můžeme říci, že elipsa a její vnitřní body tvoří **konvexní útvar**.

Na obrázku E2.2 je vyznačena zeleně vnitřní oblast elipsy a elipsa. Vnitřními body jsou body: L, F_1, F_2, S ; M je vnějším bodem elipsy a bod K leží přímo na elipse. Na obrázku jsou ještě vyznačeny průvodiče bodu K . Ze čtyř úhlů, které tvoří průvodiče tohoto bodu, vždy jeden obsahuje S - střed elipsy. Úhel tvořený polopřímkami KF_1, KF_2 , který obsahuje střed, a příslušný vrcholový úhel se nazývají **vnitřní úhly průvodičů**. Na obrázku jsou tyto úhly vyznačeny barevně. Úhly vedlejší k vnitřním úhlům se nazývají **vnější úhly průvodičů** bodu elipsy.

Obrázek E2.2: Vnitřní oblast a průvodiče elipsy



2H.1 Základní vlastnosti hyperboly

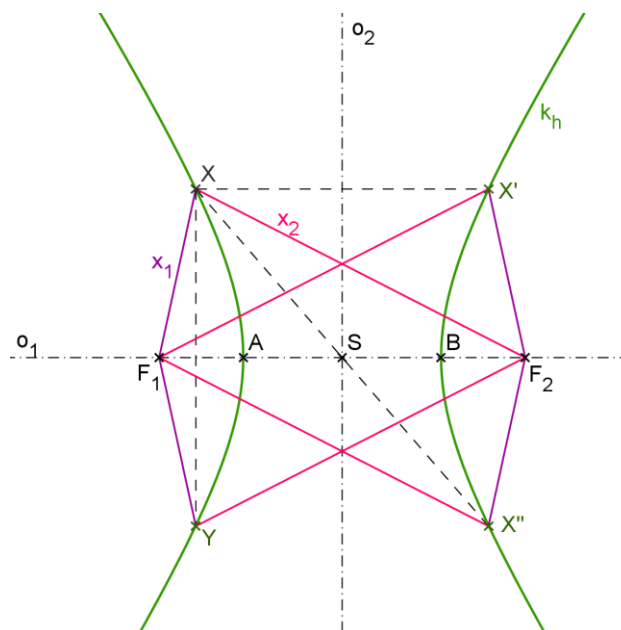
V této kapitole odkryjeme několik základních vlastností, které hyperbola má. Budeme se zabývat opravdu jen základními vlastnostmi. Rozšířením této kapitoly bude kapitola [Tečny a normály hyperboly](#) a [Ohniskové vlastnosti hyperboly](#), jež bude navazovat na informace a látku probranou právě zde.

Základní důležitou vlastností hyperboly je, že libovolný bod na ní ležící má konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od ohnisek rovnu $2a > 0$. Na tom je samozřejmě postavená definice hyperboly. Nicméně z této vlastnosti vyplývá několik dalších.

Zvolme nyní libovolně bod $X \in k_h$. Zvolme ho tak, aby ležel "nad" hlavní osou hyperboly. Označme x_1 vzdálenost bodu X od ohniska F_1 a x_2 vzdálenost bodu X od druhého ohniska F_2 . Potom zajisté body X' a X'' , pro které platí: $|XF_1| = |X''F_1| = x_2$, $|XF_2| = |X'F_2| = x_1$, budou také součástí hyperboly (bod X' leží "nad" o_1 , bod X'' "pod" o_1). Navíc platí, že bod X' je s bodem X osově souměrný podle vedlejší osy o_2 . Protože bod X byl zvolen libovolně, mohli jsme si vybrat jakýkoliv bod hyperboly, můžeme konstatovat, že hyperbola je **osově souměrná podle vedlejší osy o_2** . Bod X'' je středově souměrný s bodem X podle středu S . Můžeme tedy opět říci, že hyperbola je **středově souměrná podle středu S** .

Vraťme se ještě ke zvolenému bodu X . Bod, jenž má vzdálenost x_1 od ohniska F_1 a vzdálenost x_2 od druhého ohniska F_2 existuje na hyperbole ještě jeden (leží "pod" hlavní osou). A zřejmě platí, že tento bod je osově souměrný s původním bodem X podle hlavní osy o_1 . Hyperbola je tedy také **osově souměrná podle hlavní osy o_1** . Vše popisované je znázorněno na *obrázku H2.1*.

Obrázek H2.1: Souměrnosti hyperboly

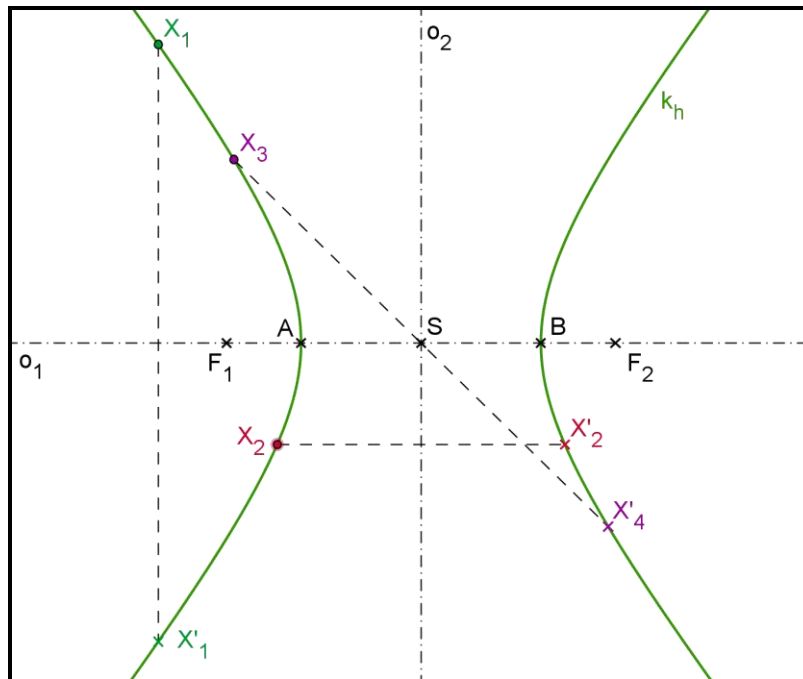


Pokud bychom vše měli shrnout, můžeme vyslovit tvrzení:

Věta H2.1: Hyperbola je souměrná podle dvou na sebe kolmých os. Jedná se o hlavní a vedlejší osu hyperboly. Je také souměrná podle jejich průsečíku, středu.

V *apletu H2.1* si můžete vyzkoušet, výše popsané vlastnosti. Budete-li pohybovat body X_1, X_2, X_3 po hyperbole, budou se též body X'_1, X'_2, X'_3 souměrně sdružené pohybovat po hyperbole.

Aplet H2.1: Souměrnosti hyperboly



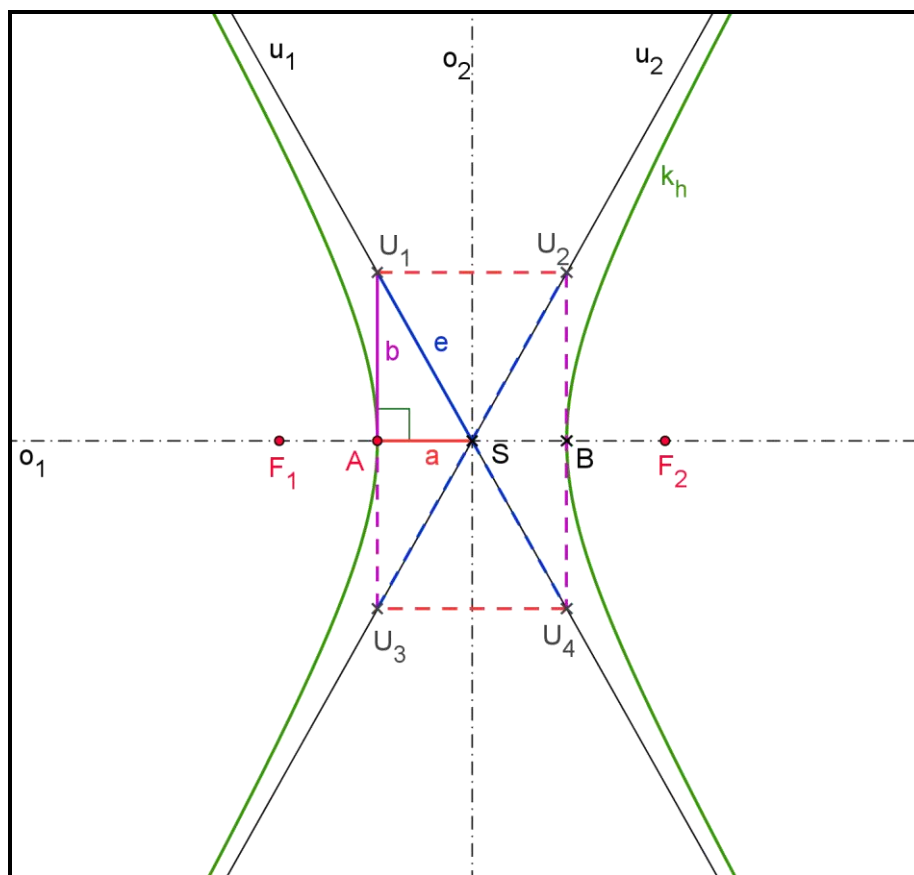
Už z předešlé kapitoly [Definice hyperboly](#) víme, že i přestože na hyperbole nenalezneme žádné vedlejší vrcholy, je zde definována délka vedlejší poloosy b . Je vyjádřena jako délka odvěsny AU_1 (resp. BU_2) v pravouhlém trojúhelníku SAU_1 (resp. SBU_2) s pravým úhlem při vrcholu A (resp. B), kde $U_1 \in u_1$ ($U_2 \in u_2$). Délka $|SA|=|SB|$ je délka hlavní poloosy a a délka $|SU_1|=|SU_2|$ představuje excentricitu hyperboly, tedy e . Z pravouhlého trojúhelníku SAU_1 , kterému se také říká **charakteristický trojúhelník hyperboly**, se stranami délek: $|SA|=a, |AU_1|=b, |U_1S|=e$ vyplývá vztah: $e^2 = a^2 + b^2$ (Pythagorova věta). Z předchozího vyplývá, že odchylka α asymptot u_1, u_2 od hlavní osy o_1 hyperboly taktéž závisí na velikosti hlavní a vedlejší poloosy. Z charakteristického trojúhelníku platí: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Věta H2.2: Pro délku hlavní a vedlejší poloosy hyperboly (a, b) a excentricitu e platí vztah (Pythagorova věta): $e^2 = a^2 + b^2$.

Asymptoty u_1, u_2 hyperboly mají odchylku α od hlavní osy o_1 , pro niž platí: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.

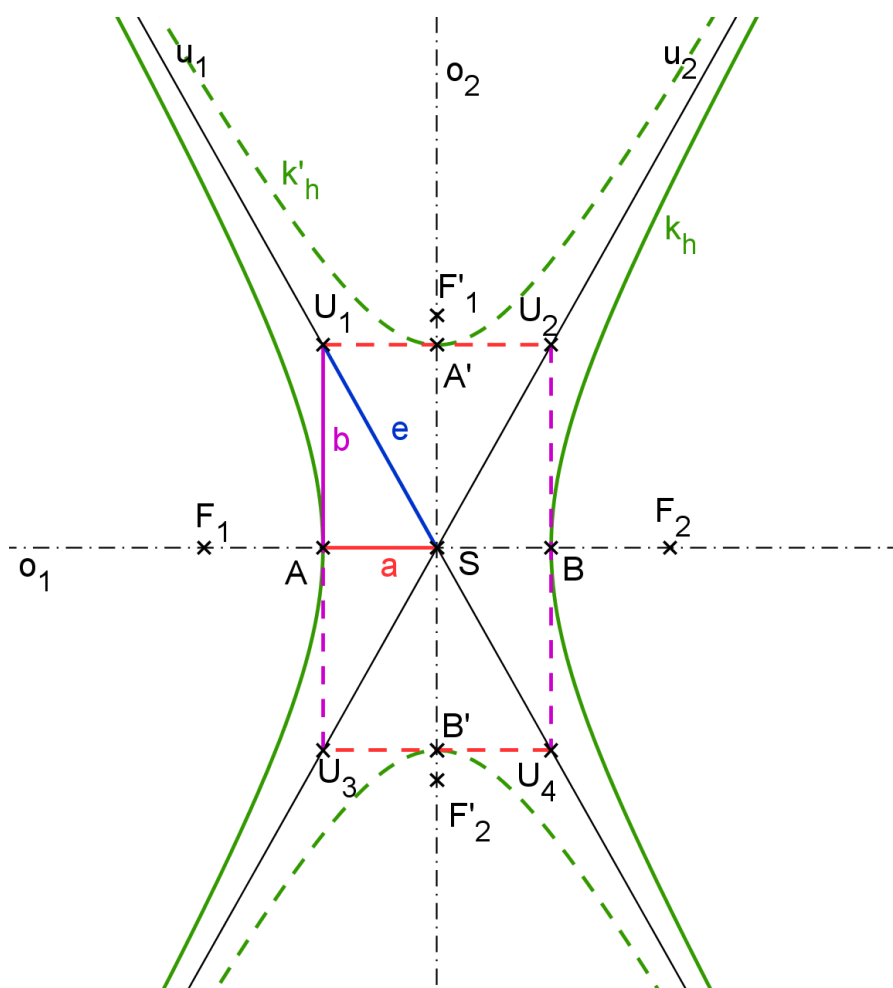
Charakteristický trojúhelník udává tvar hyperboly, což si můžete v *apletu H2.2* vyzkoušet. Zde je zobrazen charakteristický trojúhelník SAU_1 . Někdy se ovšem můžete setkat s pojmem **charakteristický obdélník hyperboly**. Jedná se o obdélník o stranách délek $2a$ a $2b$. Vrcholy tvoří body U_1, U_2, U_3, U_4 , které jsou průsečíky přímek kolmých k hlavní ose o_1 vedených z vrcholů A, B a asymptot u_1, u_2 hyperboly. Úhlopříčky takového charakteristického obdélníku mají délku $2e$ a protínají se ve středu S hyperboly (viz *aplet H2.2*). Měňte v *apletu* polohu vrcholu A nebo pohybujte jedním z ohnisek (F_1, F_2) po hlavní ose o_1 a pozorujte jak se mění tvar hyperboly.

Aplet H2.2: Charakteristický trojúhelník a tvar hyperboly



Ke každé hyperbole k_h existuje hyperbola k'_h (viz *obrázek H2.2*), která má tentýž charakteristický obdélník, nazývá se **doplňková hyperbola**. Doplnková hyperbola má tedy stejnou hodnotu excentricity e , délka její hlavní poloosy je rovna b a délka vedlejší poloosy rovna a . Asymptoty hyperboly k_h a její doplňkové hyperboly k'_h jsou ty samé přímky u_1, u_2 .

Obrázek H2.2: Doplněková hyperbola



Pro průvodiče MF_1 , MF_2 libovolného bodu M roviny E_2 může nastat jeden ze tří případů:

- $\|MF_1\| - \|MF_2\| < 2a$,
- $\|MF_1\| - \|MF_2\| = 2a$,
- $\|MF_1\| - \|MF_2\| > 2a$.

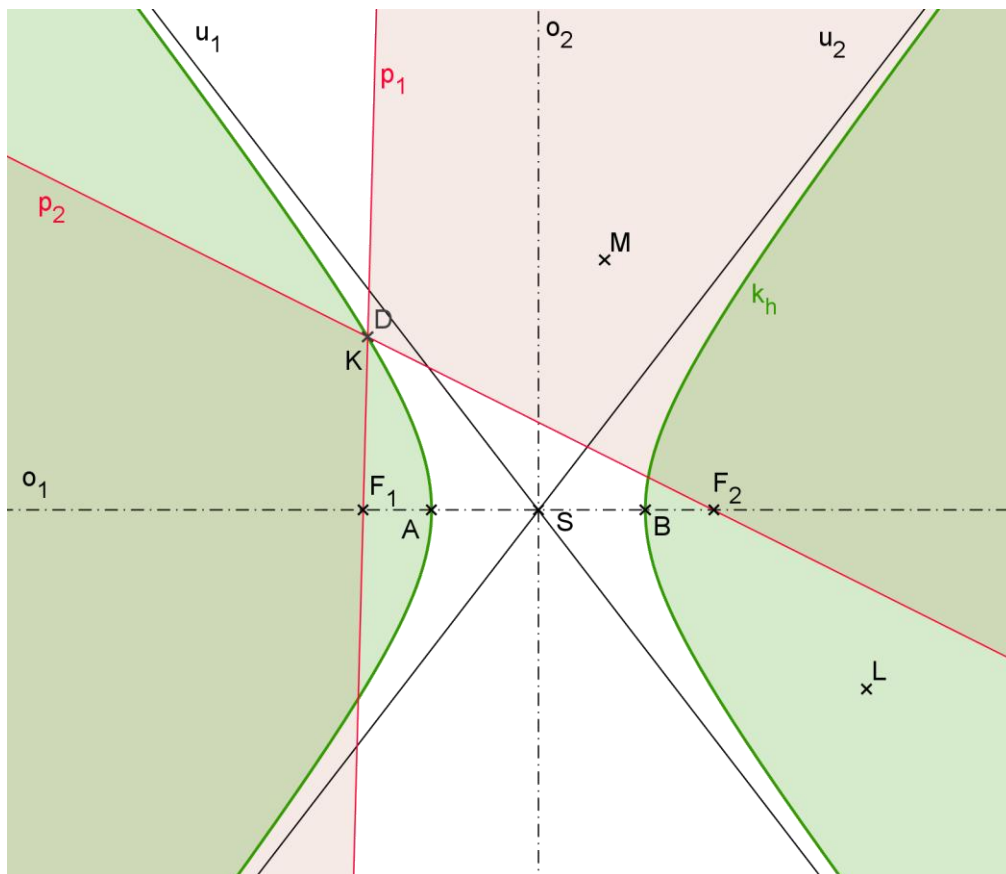
Body, pro které platí b) jsou jistě body hyperboly. V případě a) mluvíme o **vnějších bodech** hyperboly, v případě c) o **vnitřních bodech**. Větvě hyperboly rozdělují rovinu E_2 na tři disjunktní oblasti, přičemž vnitřní body hyperboly leží právě ve dvou z nich. Ohniska jsou vnitřní body, ale střed je vnějším bodem. Na *obrázku H2.3* jsou zeleně vybarveny vnitřní části hyperboly, vnější část je bílá. Bod M splňuje podmínku a), je tedy vnějším bodem. Bod K splňuje b) a je bodem hyperboly. Pro bod L platí c), je vnitřním bodem hyperboly.

Hyperbola a její vnitřní body tvoří **konkávní oblast**. Jinými slovy, je to oblast, ve které existují body, jejichž spojnice (úsečka) prochází i vnější oblastí. (Např. pokud zvolíme ohniska F_1, F_2 , obě sice leží ve vnitřní oblasti, ale jejich spojnice prochází i vnější oblastí.)

Na *obrázku H2.3* jsou ještě vyznačeny průvodiče bodu K . Ze čtyř úhlů, které tvoří průvodiče tohoto bodu, vždy jeden obsahuje S - střed hyperboly. Úhel tvořený polopřímkami KF_1, KF_2 , který

obsahuje střed, a příslušný vrcholový úhel se nazývají **vnější úhly průvodičů**. Úhly vedlejší k vnějším úhlům se nazývají **vnitřní úhly průvodičů** bodu hyperboly. Na obrázku jsou vnitřní úhly vyznačeny barevně.

Obrázek H2.3: Vnitřní oblast a průvodiče hyperboly



2P.1 Základní vlastnosti paraboly

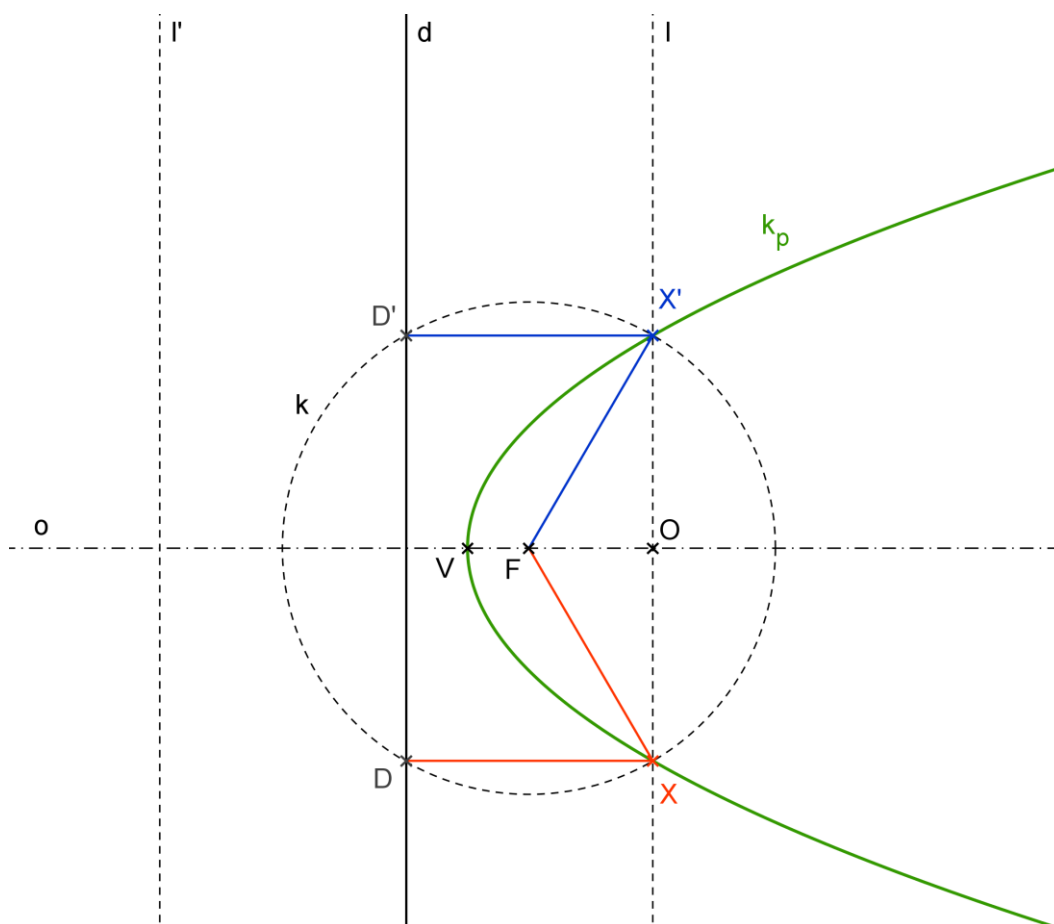
V této kapitole odkryjeme několik základních vlastností, které parabola má. Budeme se zabývat opravdu jen základními vlastnostmi. Rozšířením této kapitoly bude kapitola [Tečny a normály paraboly](#) a [Ohniskové vlastnosti paraboly](#), jež bude navazovat na informace a látku probranou právě zde.

Základní důležitou vlastností paraboly je, že každý bod na ní ležící má stejnou vzdálenost od ohniska jako od řídicí přímky. Neboli, že průvodiče daného bodu jsou shodné (mají stejnou délku). Přesně toto říká definice. Ovšem, pokud budeme na parabole hledat bod, jehož průvodič má délku x ($x > \frac{p}{2}$), zjistíme, že takové body jsou právě dva. Navíc tyto body, označme je X , X' , budou osově souměrné podle osy paraboly o .

Body X , X' bychom sestrojili následovně (viz obrázek P2.1): množinou všech bodů vzdálených x od řídicí přímky d tvoří dvě přímky l , l' s d rovnoběžné a vzdálené o x (všechno jsou to přímky kolmé na o); množinou všech bodů vzdálených x od ohniska F je kružnice k se středem v ohnisku a poloměrem x . Průnikem těchto dvou množin jsou dva body X , X' - body paraboly. Leží na jedné z rovnoběžek s d (na l), přičemž oba leží v opačných polovinách určených osou o . Body X i X' mají shodnou vzdálenost od ohniska F . Označme O průsečík přímky l a osy o . Stačí už jen dokázat, že $|XO| = |OX'|$. Protože $F \in o$ a přímka l je kolmá na osu o , můžeme říci, že trojúhelníky FOX a FOX' jsou shodné. Tím pádem i vzdálenosti $|XO|$ a $|X'O|$ se rovnají.

Připomínáme, že jsme volili průvodiče délky $x > \frac{p}{2}$. Při volbě $x = \frac{p}{2}$, bychom dostali pouze jeden bod paraboly, a to vrchol V . Zároveň se jedná o samodružný bod osové souměrnosti (bodů paraboly) s osou o . Při volbě $x < \frac{p}{2}$ žádné body nezískáme.

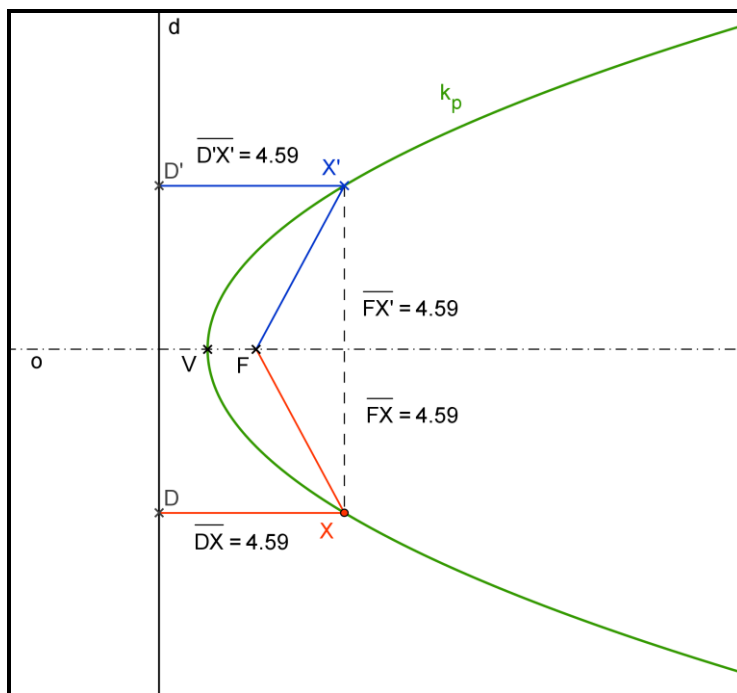
Obrázek P2.1: Osová souměrnost paraboly



Věta P2.1: Parabola je souměrná podle jedné osy. Jedná se o osu paraboly.

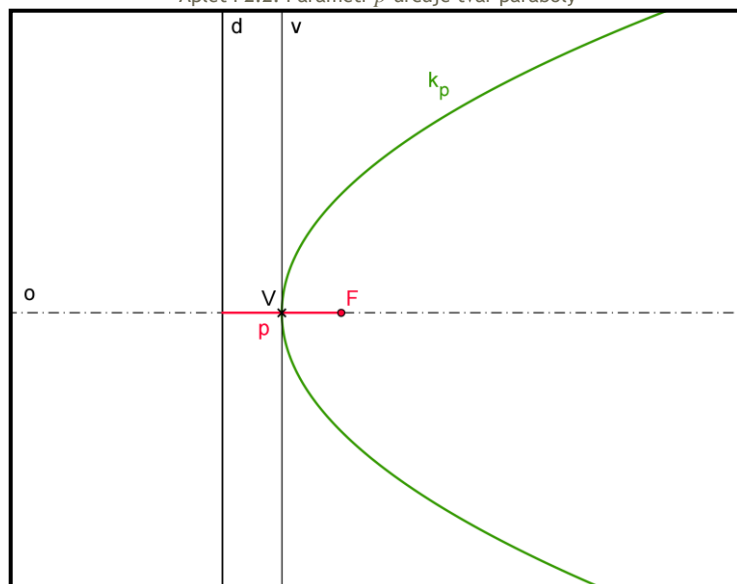
V *apletu P2.1* je předvedena osová souměrnost bodů ležících na parabole. Budete-li měnit polohu červeného bodu X (posouvat ho po parabole), bude se náležitě (podle osové souměrnosti s osou o) měnit obraz tohoto bodu, modrý bod X' . V *apletu* jsou navíc zobrazeny průvodiče bodů X , X' a jejich aktuální délky. Při pohybu se můžete přesvědčit, že jsou shodné.

Aplet P2.1: Osová souměrnost paraboly



Tvar paraboly závisí jen na jedné konstantě, na parametru p ($p = |Fd|$). Čím větší parametr, tím je parabola rozevřenější, širší. Naopak, pokud je parametr menší, je parabola užší. V *apletu P2.2* máte možnost měnit parametr p posouváním ohniska F (po ose o) blíže nebo dále od řídicí přímky d . Sledujte při tom, jak se tvar paraboly mění.

Aplet P2.2: Parametr p určuje tvar paraboly



Pro libovolný bod M roviny E_2 a jeho průvodiče platí jedna ze tří variant:

- a) $|MF| < |Md|$,
- b) $|MF| = |Md|$ nebo
- c) $|MF| > |Md|$,

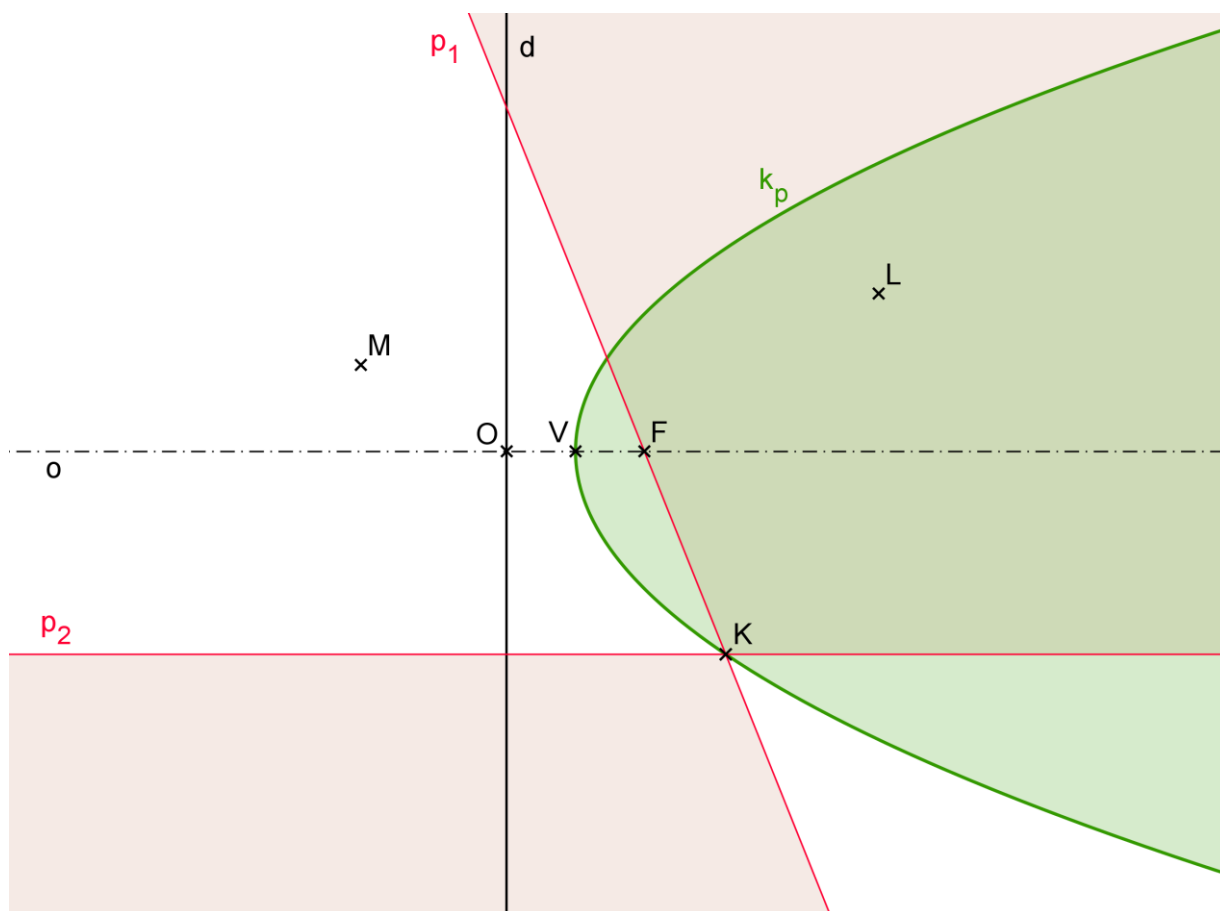
Body splňující a) (resp. c)) se nazývají **vnitřní body** (resp. **vnější body**) paraboly. Body, pro které platí b) jsou podle definice body paraboly.

Parabola rozděluje rovinu na dvě disjunktní oblasti: vnitřní a vnější. Vnitřním (vnějším) bodem paraboly tedy rozumíme bod vnitřní (vnější) rovinné oblasti ohraničené danou parabolou. Ohnisko je vnitřním bodem paraboly, body řídící přímky d jsou vnějšími body. Na obrázku P2.1 je vnitřní oblast paraboly vybarvená zeleně.

Parabola a její vnitřní body tvoří **konvexní útvar**. (Konvexní útvar viz [Základní vlastnosti elipsy](#).)

Vnější úhlem průvodičů bodu K paraboly rozumíme ten z úhlů průvodičů, v němž leží průsečík řídící přímky d a osy o paraboly. Na obrázku P2.2 je průsečík pojmenován O . Vnější úhlem je také příslušný vrcholový úhel. Úhly vedlejší k vnějším úhlům jsou **vnitřní úhly průvodičů** (na obrázku P2.2 jsou vyznačeny barevně).

Obrázek P2.2: Vnitřní oblast a průvodiče paraboly



3. Tečny a normály

V této kapitole se budeme zabývat vzájemnou polohou přímky a kuželosečky. Nejvíce se zaměříme na dva případy, a to, kdy přímka je tečnou či normálou kuželosečky. Vlastnosti tečen se dají řadit též do ohniskových vlastností kuželoseček (kapitola [Ohniskové vlastnosti](#)). Pro rozsáhlost a důležitost tohoto tématu zde byla vytvořena samostatná kapitola.

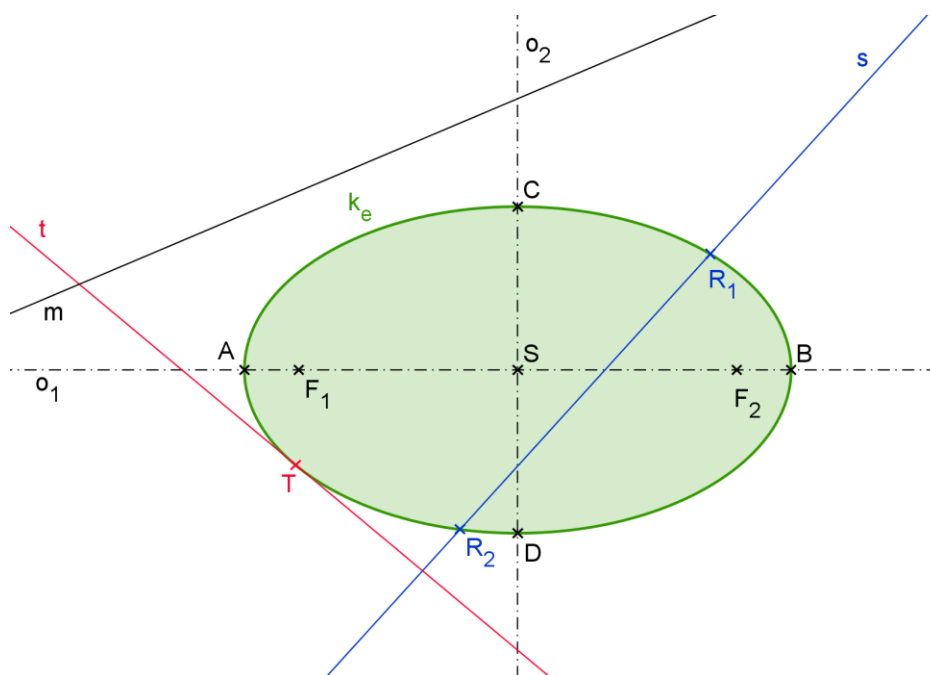
3E.1 Vzájemná poloha přímky a elipsy

Nechť je dána v rovině E_2 elipsa k_e . Budeme se nyní zabývat, jaké druhy přímek ve vztahu k elipse mohou v rovině existovat.

Z kapitoly [Základní vlastnosti elipsy](#) víme, že elipsa rozděluje rovinu E_2 na dvě disjunktní oblasti: vnitřní a vnější oblast. Je patrné, že přímka buď nemá s elipsou žádný společný bod (a všechny její body jsou vnějšími body elipsy), nebo má s ní společný právě jeden bod (a všechny ostatní jsou vnější), nebo právě dva různé body. (čerpáno z: Urban [13] str.36)

V prvním případě hovoříme o tzv. **vnější přímce elipsy** (někdy také **nesečna elipsy**). Na *obrázku E3.1* je přímka m vnější přímkou. Červeně zobrazená přímka t má s elipsou k_e společný jediný bod, bod T . Nazýváme ji **tečna elipsy**, společnému bodu se říká **bod dotyku**. Posledním případem je přímka, která prochází vnitřní částí elipsy a má s elipsou společně právě dva různé body. Na *obrázku E3.1* je to přímka s , má modrou barvu a obecně se nazývá **sečna elipsy**. (Speciálními sečnami jsou tzv. **průměry elipsy**. Více o nich je v kapitole [Průměry elipsy](#))

Obrázek E3.1: Vzájemná poloha přímek a elipsy (m - vnější přímka; t - tečna; s - sečna)



3E.2 Tečny a normály elipsy

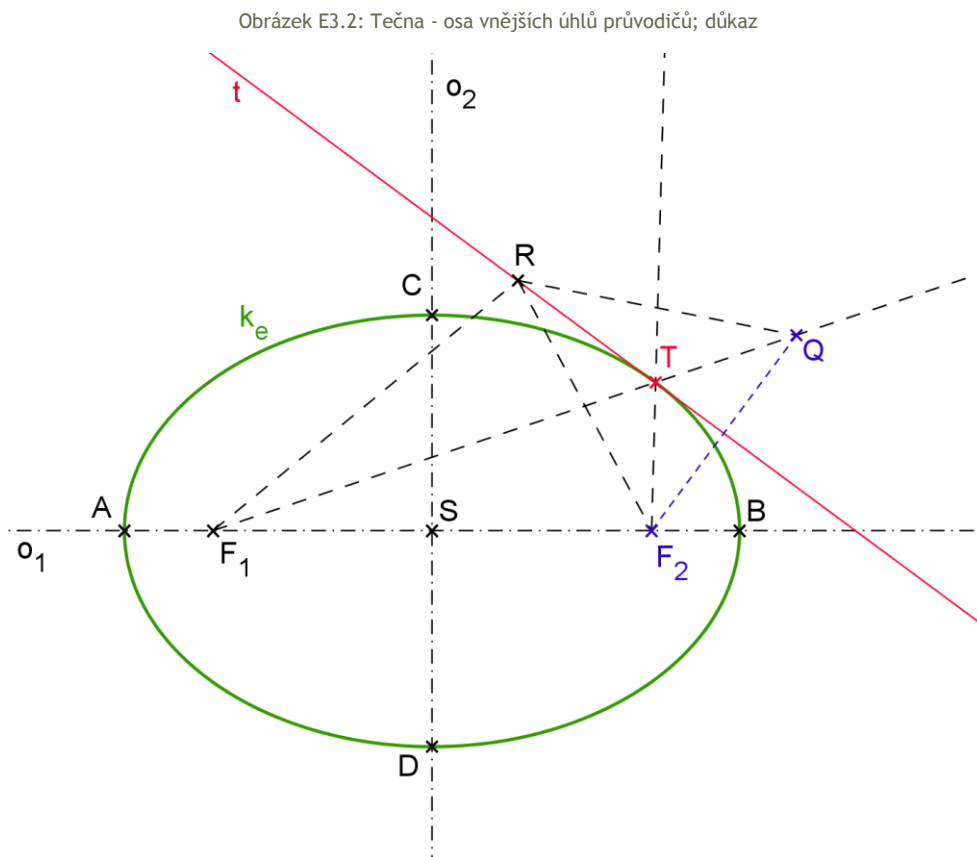
Budeme se nyní podrobněji zabývat tečnami elipsy. Víme, že tečna má pouze jeden společný bod s elipsou. Opak, že pro každý bod elipsy existuje pouze jedna tečna, říká následující věta.

Věta E3.1: V každém bodě elipsy existuje právě jedna tečna.

Nebudeme ji dokazovat, ale dokážeme následující:

Věta E3.2: Tečna t elipsy k_e v bodě T je osou vnějších úhlů jeho průvodičů.

Důkaz: (obrázek E3.2) Zvolme libovolně bod $T \in k_e$. Sestrojme osu t vnějších úhlů průvodičů TF_1, TF_2 . K jednomu z ohnisek, např. k F_2 , najdeme souměrně sružený bod Q podle přímky t . Bod Q je bodem polopřímky opačné k polopřímce TF_2 . Ze souměrnosti platí: $|TQ| = |TF_2|$, tedy $|F_1Q| = |F_1T| + |TQ| = |F_1T| + |F_2T| = 2a$. Zvolme na t libovolný bod R různý od T . Body R, F_1, Q určují vždy trojúhelník, platí tedy nerovnost: $|RF_1| + |RQ| > |F_1Q| = 2a$. Protože však $|RQ| = |RF_2|$ (z osové souměrnosti), předchozí nerovnost dává $|RF_1| + |RF_2| > 2a$. To znamená, že všechny body přímky t kromě bodu T jsou vnějšími body elipsy, přímka t nemá s elipsou žádný jiný společný bod než právě T . Podle definice je tak přímka t tečnou elipsy a bod T je bodem dotyku. (čerpáno z: Urban [13] str.36)



Zvláštními a významnými sečnami elipsy jsou ty, které jsou kolmé na tečny elipsy v příslušných bodech dotyku. Nazývají se **normály elipsy**. Význam normál spočívá např. v některých konstrukcích elipsy, kde se pomocí nich dohledávají jednotlivé body elipsy.

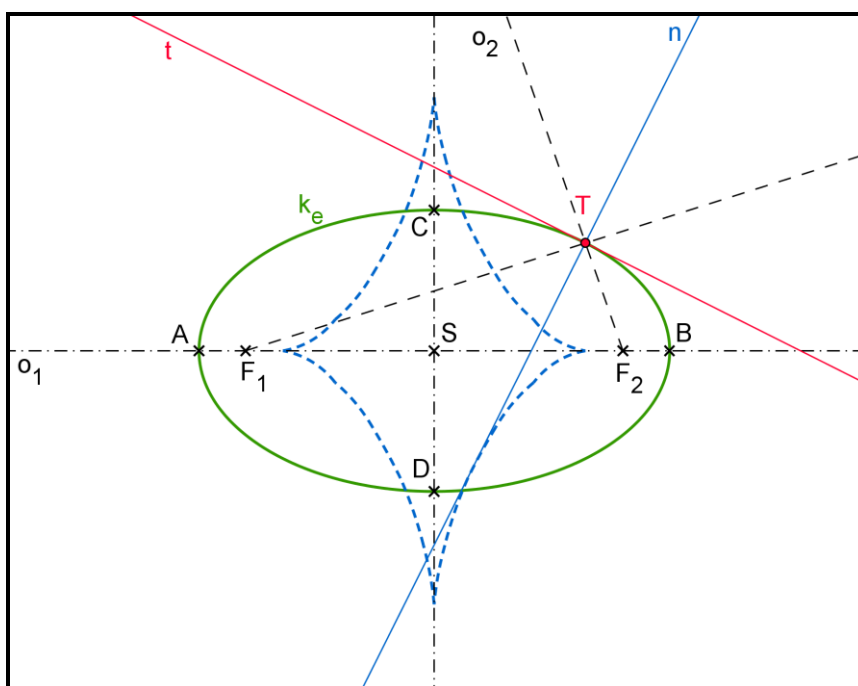
Pro normálu platí, jako snadný důsledek předchozí věty, následující:

Věta E3.3: Normála elipsy pólí vnitřní úhly průvodičů bodu, v němž byla sestrojena.

Z pohledu kinematické geometrie tečny elipsy obalují elipsu. Elipsa je tedy obalovou křivkou svých tečen. Obalová křivka normál elipsy se nazývá **evoluta elipsy**. Je to množina všech středů křivosti dané elipsy. Vrcholy evoluty jsou středy křivosti oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy (více viz kapitola [Oskulační kružnice elipsy](#)). Evoluta elipsy je rovinná křivka, která se nazývá **asteroida**. Pomocí trojúhelníkové konstrukce lze přesně dohledat nejen normálu, ale i střed křivosti v bodě - bod evoluty (trojúhelníková konstrukce viz kapitola [Konstrukce elipsy](#)).

V *apletu E3.1* pohybujte dotykovým bodem T po elipse k_e . Sledujte přitom pohyb tečny t po elipse a pohyb normály n po evolutě elipsy (ta je vyznačena čárkovaně modrou barvou).

Aplet E3.1: Evoluta elipsy - obalová křivka normál elipsy

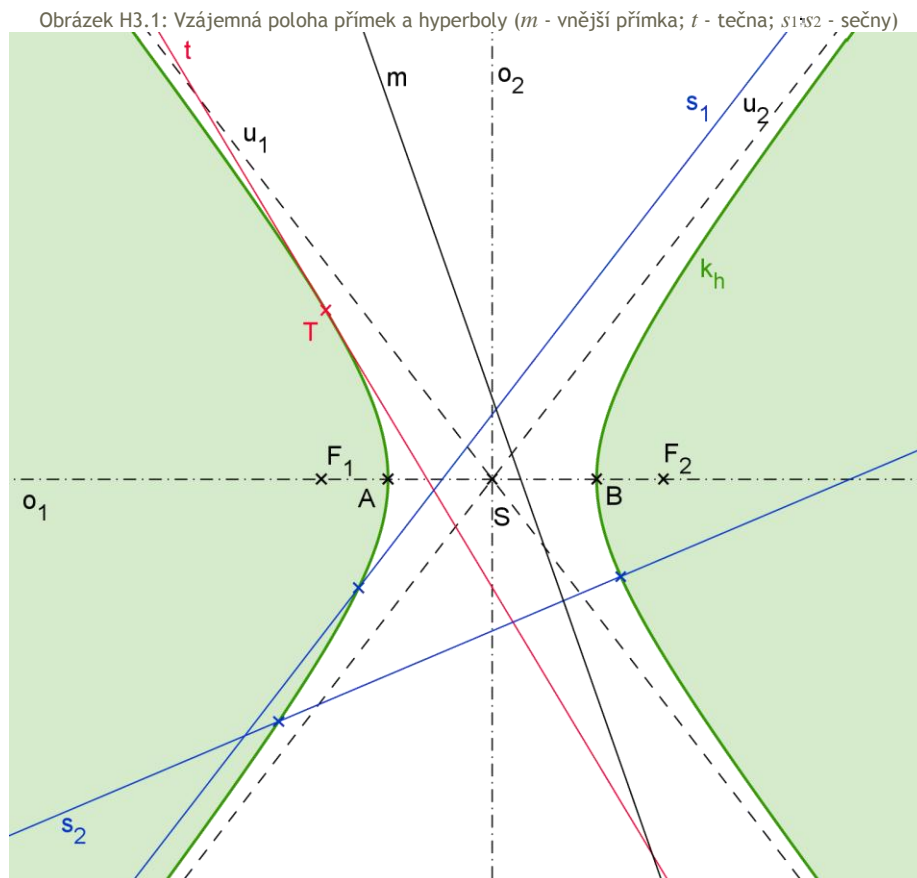


3H.1 Vzájemná poloha přímky a hyperboly

V této kapitole se budeme zabývat vzájemnou polohou hyperboly a přímky. Rozlišíme tři základní situace, které mohou nastat.

Nechť je v rovině E_2 dána hyperbola k_h . Její větve rozdělují rovinu E_2 na tři disjunktní oblasti: dvě vnitřní oblasti hyperboly oddělené oblastí vnější (viz [Základní vlastnosti hyperboly](#)). Přímku nazýváme **vnější přímka hyperboly**, jestliže všechny její body leží ve vnější oblasti, tudíž přímka nemá žádný společný bod s hyperbolou. Přímka, která má s hyperbolou společný právě jeden bod a jejíž všechny ostatní body jsou body vnější oblasti, se nazývá **tečna hyperboly** a společný bod se nazývá **bod dotyku**. Posledním možností je, že přímka prochází jak vnitřní tak zároveň vnější oblastí hyperboly. V tomto případě hovoříme o **sečně hyperboly**.

Na *obrázku H3.1* představují vnější přímky hyperboly její vedlejší osa o_2 a přímka m . Tečna t v dotykovém bodě T je vyznačena červeně. Modrou barvu zde mají sečny hyperboly, přímky s_1 , s_2 (hlavní osa o_1 je také sečna). Zde si všimněte, že, i když přímka s_1 má s hyperbolou k_h společný právě jeden bod, není její tečnou. A to, protože zbývající body leží jak ve vnitřní, tak ve vnější oblasti hyperboly.



3H.2 Tečny a normály hyperboly

Nyní se budeme podrobněji zabývat tečnami hyperboly. Víme, že tečna má pouze jeden společný bod s hyperbolou a že všechny body mimo bod dotyku jsou vnějšími body hyperboly. To, že pro každý bod hyperboly existuje pouze jedna tečna, říká následující věta.

Věta H3.1: V každém bodě hyperboly existuje právě jedna tečna.

Nebudeme ji dokazovat, ale dokážeme následující:

Věta H3.2: Tečna t hyperboly k_h v bodě T je osou vnějších úhlů jeho průvodičů.

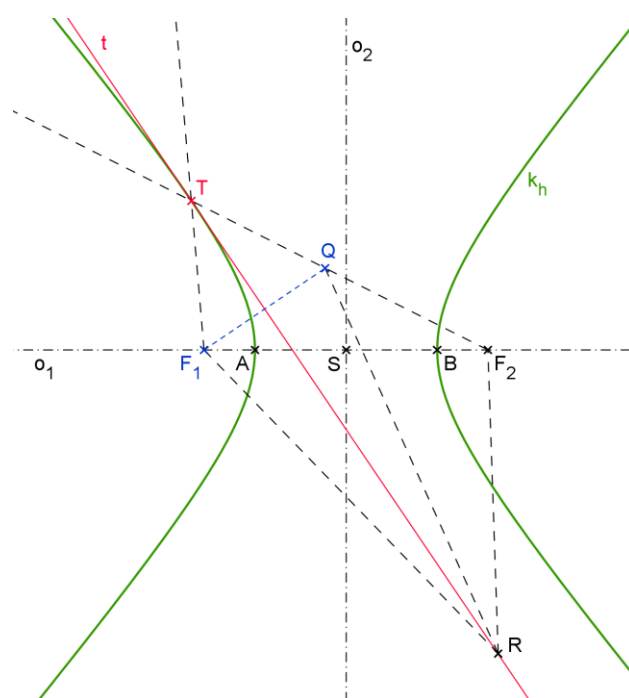
Důkaz: (obrázek H3.2) Zvolme libovolně bod $T \in k_h$. Sestrojíme osu t vnějších úhlů průvodičů TF_1, TF_2 . K jednomu z ohnisek, např. k F_1 , najdeme souměrně sdružený bod Q podle přímky t . Bod Q je bodem úsečky TF_2 . Ze souměrnosti platí: $|TQ| = |TF_1|$, tedy $2a = |TF_1| - |TF_2| = |TQ| - |TF_2| = |QF_2|$. Zvolme na t libovolný bod R různý od T . Body R, F_2, Q určují vždy trojúhelník, platí tedy nerovnosti:

$$|RF_2| + |QF_2| > |RQ|, \text{ tedy } 2a = |QF_2| > |RQ| - |RF_2|,$$

$$|QF_2| + |RQ| > |RF_2|, \text{ tedy } 2a = |QF_2| > |RF_2| - |RQ|.$$

Z obou nerovností pak plyne: $2a > ||RQ| - |RF_2||$. Protože však $|RQ| = |RF_1|$ (z osové souměrnosti), předchozí nerovnost dává $2a > ||RF_1| - |RF_2||$. To znamená, že se jedná o vnější bod hyperboly. Protože bod R byl volen libovolně, tak všechny body kromě bodu T jsou vnějšími body hyperboly. Přímka t nemá s hyperbolou žádný jiný společný bod než právě T . Podle definice je tak přímka t tečnou hyperboly a bod T je bodem dotyku.

Obrázek H3.2: Tečna - osa vnějších úhlů průvodičů; důkaz



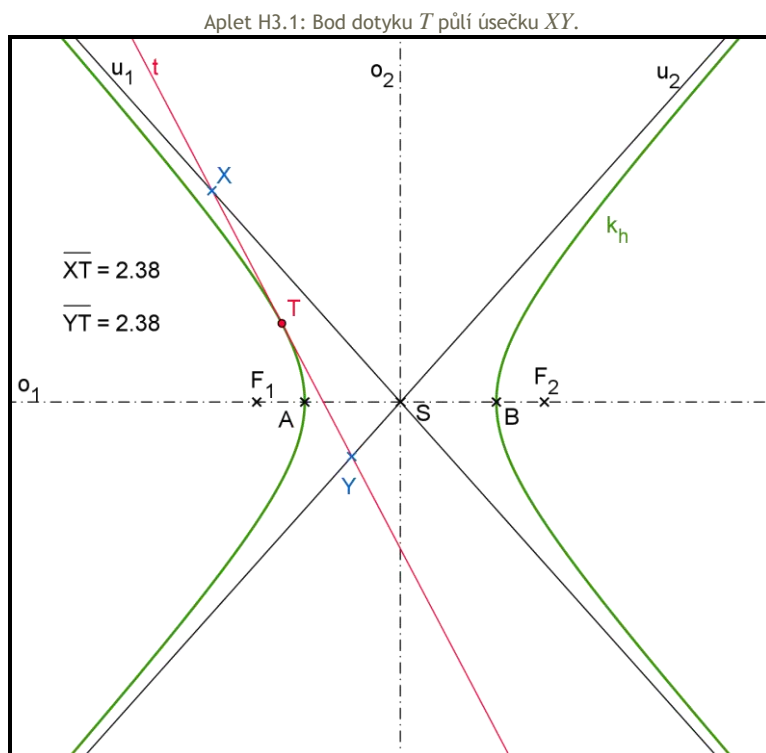
Obratme se nyní k další vlastnosti tečny hyperboly: (citace z: Havlíček [2] str.177)

Věta H3.3: Bod dotyku půlí úsečku vyřatou na příslušné tečně hyperboly jejími asymptotami.

Věta jinými slovy říká, že bod dotyku T je středem úsečky XY , kde body X , Y jsou průsečíky tečny t s asymptotami u_1, u_2 hyperboly. (Pozn.: tato věta vychází z vlastností hyperboly v projektivní geometrii. Není v kompetenci této práce zasvětit čtenáře do projektivních vlastností kuželoseček, ale pro významnost je věta uvedena.)

Důkaz: Zobecněním věty H3.3 je věta H3.5, která je uvedena níže v podkapitole **Sečny hyperboly**. Důkaz tedy bude obdobný důkazu věty H3.5.

Pro názornost je zde k dispozici *aplet H3.1*. Pohybem bodu dotyku T po hyperbole budete moci měnit tečnu t hyperboly. Ovšem všimněte si, že je vzdálenost bodu T od výše zmíněných bodů X , Y stejná, tedy: $|XT| = |YT|$.



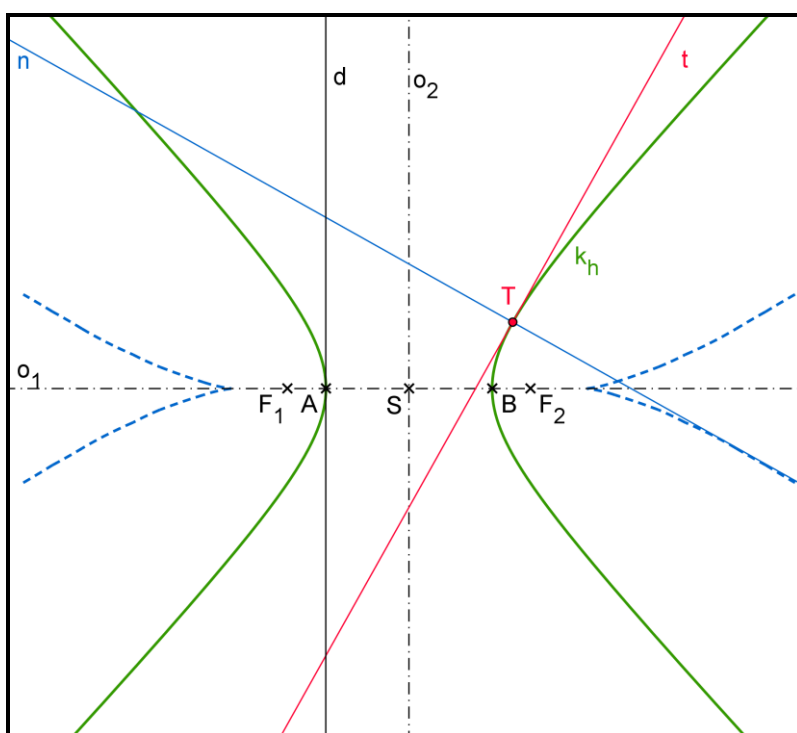
Zvláštními a významnými sečnami hyperboly jsou ty, které jsou kolmé na tečny hyperboly v příslušných bodech dotyku. Nazývají se **normály hyperboly**.

Pro normálu platí, jako snadný důsledek věty H3.2, následující:

Věta H3.4: Normála hyperboly půlí vnitřní úhly průvodičů bodu, v němž byla sestrojena.

Z pohledu kinematické geometrie tečny hyperboly obalují hyperbolu. Hyperbola je tedy obalovou křivkou svých tečen. Obalová křivka normál hyperboly se nazývá **evoluta hyperboly**. Je to množina všech středů křivosti dané hyperboly. Vrcholy evoluty jsou středy křivosti oskulačních kružnic ve vrcholech hyperboly (více viz kapitola [Oskulační kružnice hyperboly](#)). Na rozdíl od evoluty elipsy má evoluta hyperboly dvě větve, o čemž se můžete přesvědčit v *apletu H3.2*, kde je část evoluty hyperboly zobrazena. Pohybuje zde dotykovým bodem T po větvích hyperboly k_h . Sledujte přitom pohyb tečny t po hyperbole a pohyb normály n po větvích evoluty hyperboly (ta je vyznačena čárkovaně modrou barvou).

Aplet H3.2: Evoluta hyperboly - obalová křivka normál hyperboly



3H.3 Sečny hyperboly

Budeme-li se bavit o obecné sečně hyperboly, vznikají zde úseky vytáté hyperbolou a jejími asymptotami, které jsou shodné. Sečna s má následující vlastnost: (citace z: *Drábek, Harant, Setzer* [1] str. 62)

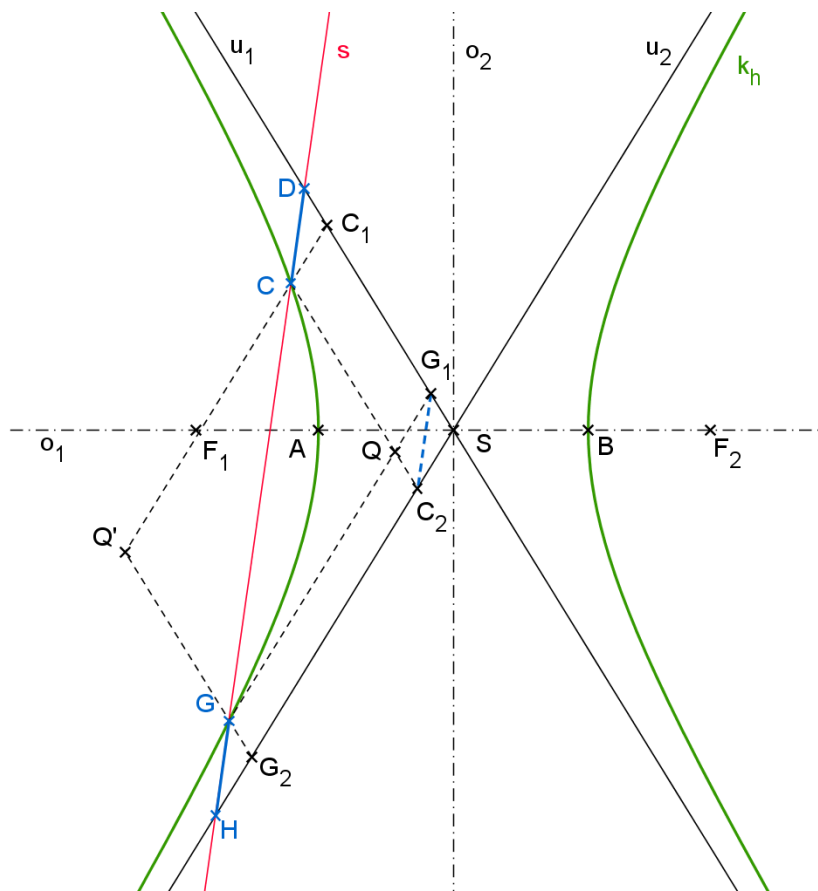
Věta H3.5: Úseky na sečně s hyperboly k_h měřené od bodu hyperboly k jedné asymptotě u_1 a od druhého bodu hyperboly k druhé asymptotě u_2 jsou stejně velké.

Zobecnění této věty již zaznělo výše - věta H3.3. Opět je to věta, která vychází z projektivních vlastností hyperboly. Ovšem pro její důležitost a výhodné využití při konstrukcích hyperboly, je zde uvedena.

Důkaz: (obrázek H3.3) Zvolme libovolně sečnu s hyperboly k_h . Průsečíky sečny s hyperbolou označme C, G , průsečíky s asymptotami u_1, u_2 označme D, H . Každým z bodů C, G vedme dvě rovnoběžky, a to s asymptotami u_1, u_2 . Průsečíky rovnoběžek s asymptotami označme C_1, C_2, G_1, G_2 a Q, Q' průsečíky rovnoběžek samotných (viz obrázek H3.4).

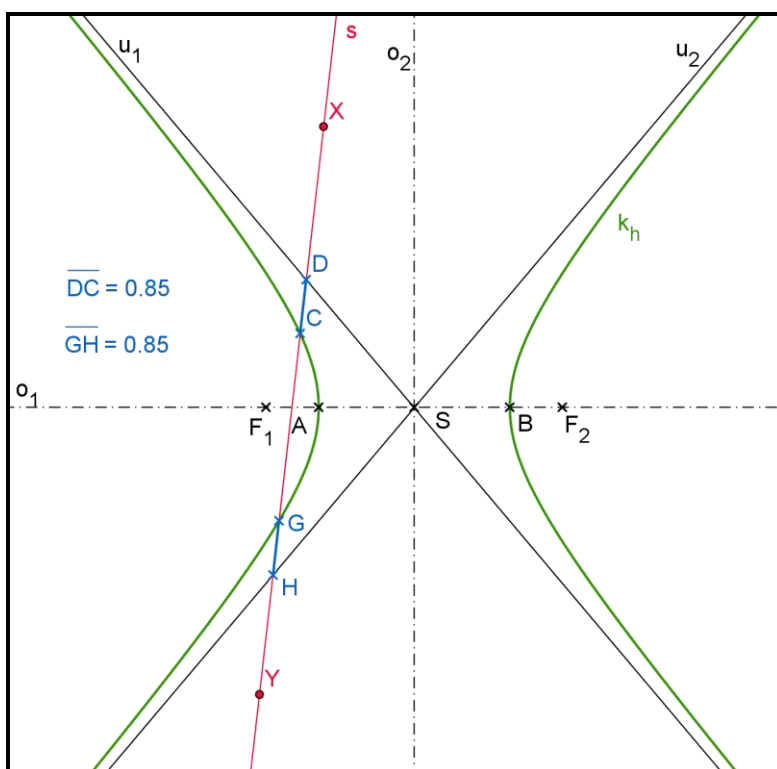
Důkaz plyne ze stejnolehlosti rovnoběžníků $QCQ'G$ a QC_2SG_1 pro střed stejnolehlosti Q . Z toho vyplývá, že $CG \parallel C_2G_1$. Tedy sečna s je rovnoběžná s C_2G_1 . Pak zde vznikají shodné trojúhelníky: SG_1C_2, C_1DC, G_2GH . Z tohoto faktu plyne: $|DC| = |GH|$.

Obrázek H3.3: Úseky na sečně hyperboly



V *apletu* H3.3 měňte polohu sečny s pomocí červených bodů X, Y . Na levé straně *apletu* přitom sledujte délky zmiňovaných úseků, jsou shodné.

Aplet H3.3: Shodné úseky na sečně hyperboly

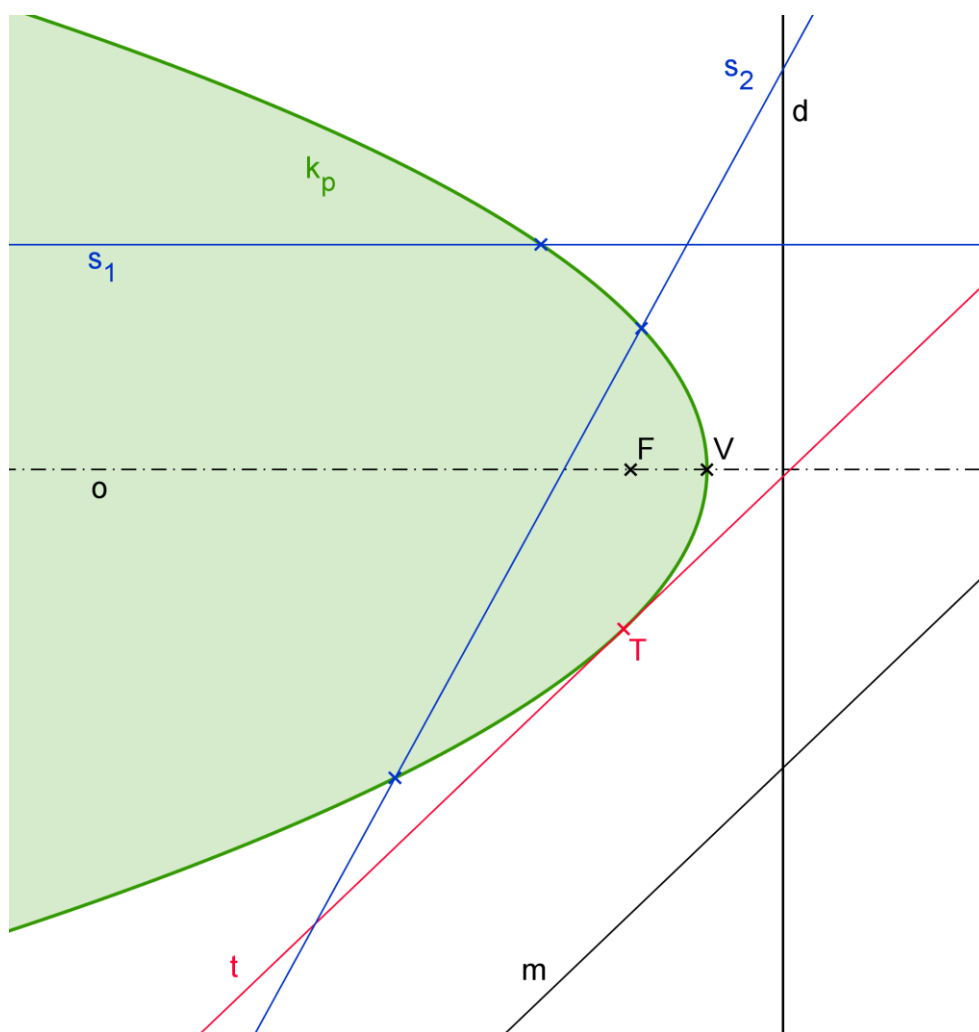


3P.1 Vzájemná poloha přímky a paraboly

V této kapitole se budeme zabývat vzájemnou polohou paraboly a přímky. Stejně, jak tomu je u elipsy a hyperboly, tak i u paraboly rozlišíme tři základní situace, které mohou nastat.

Nechť je v rovině E_2 dána parabola k_p . Ta rozděluje rovinu E_2 na dvě disjunktní oblasti: vnitřní a vnější (viz [Základní vlastnosti paraboly](#)). O vzájemné poloze přímky a paraboly k_p můžeme zaprvé říci, že přímka nemá s parabolou žádný společný bod. Leží tedy celá ve vnější oblasti paraboly a nazývá se **vnější přímka paraboly**. Na *obrázku P3.1* představuje takovou přímku přímka m nebo také řídicí přímka d . Další možností je, že přímka má s parabolou společný právě jeden bod T a zároveň její všechny ostatní body (mimo bod T) leží ve vnější oblasti. Jedná se o **tečnu paraboly**. Nejčastěji ji značíme t (stejně, jak je tomu na *obrázku P3.1*) a bod T nazýváme **bod dotyku**. Posledním případem je přímka, která prochází vnitřní částí paraboly. Na *obrázku P3.1* jsou to přímky s_1, s_2 , mají modrou barvu a obecně se nazývají **sečny paraboly**. Sečny mohou mít jeden nebo dva společné body s parabolou, jak je z obrázku zřejmé.

Obrázek P3.1: Vzájemná poloha přímek a paraboly (m - vnější přímka; t - tečna; s_1, s_2 - sečny)



3P.2 Tečny a normály paraboly

Budeme se nyní podrobněji zabývat tečnami paraboly. Pokud zrekapitulujeme definici tečny z předchozí podkapitoly, tak tečna paraboly je přímka, která má pouze jeden společný bod s parabolou a všechny body mino bod dotyku jsou vnějšími body paraboly. Další vlastnost dává následující věta.

Věta P3.1: V každém bodě paraboly existuje právě jedna tečna.

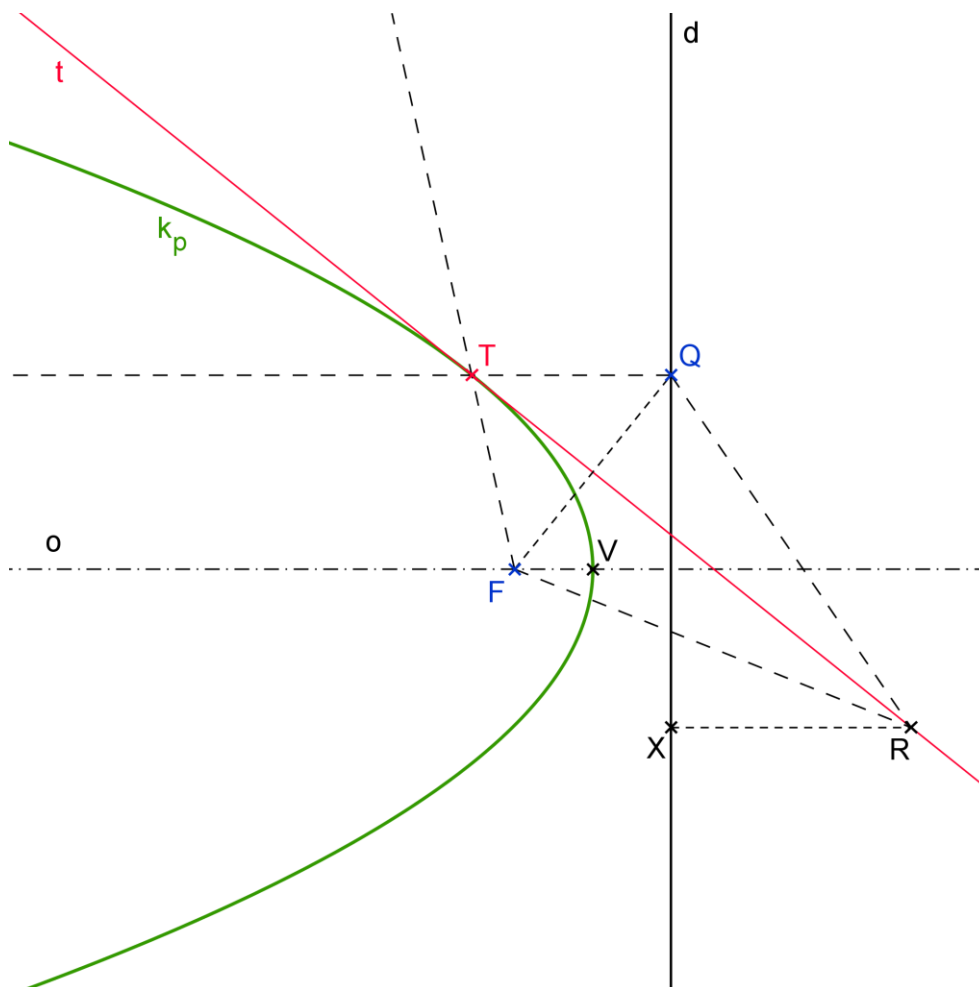
Nebudeme ji dokazovat, ale dokážeme následující:

Věta P3.2: Tečna t paraboly k_p v bodě T je osou vnějších úhlů jeho průvodičů.

Důkaz: (obrázek P3.2) Zvolme libovolně bod $T \in k_p$. Sestrojme osu t vnějších úhlů průvodičů bodu T . Necht' Q je pata kolmice z T na d . Podle definice paraboly platí: $|TF| = |TQ|$. A

protože t je osa úhlu FTQ , je bod Q souměrně sdružený s ohniskem F podle přímky t . Tedy pro libovolný bod $R \in t$ je $|RF| = |RQ|$. Zvolme bod R mimo bod dotyku T a sestrojme patu X kolmice z R na řídicí přímku d . Protože body X a Q jsou různé, je $|RQ| > |RX|$ a tedy $|RF| > |RX|$. Z toho plyne, že každý takový bod (mimo bod T) je vnějším bodem paraboly. Přímka t je podle definice tečnou paraboly.

Obrázek P3.2: Tečna - osa vnějších úhlů průvodičů; důkaz



Důležitými sečnami paraboly jsou ty, které jsou kolmé na tečny paraboly v příslušných bodech dotyku. Nazývají se **normály paraboly**. (Na normálách leží středy příslušných oskulačních kružnic.)

Pro normálu platí, jako snadný důsledek předchozí věty, následující:

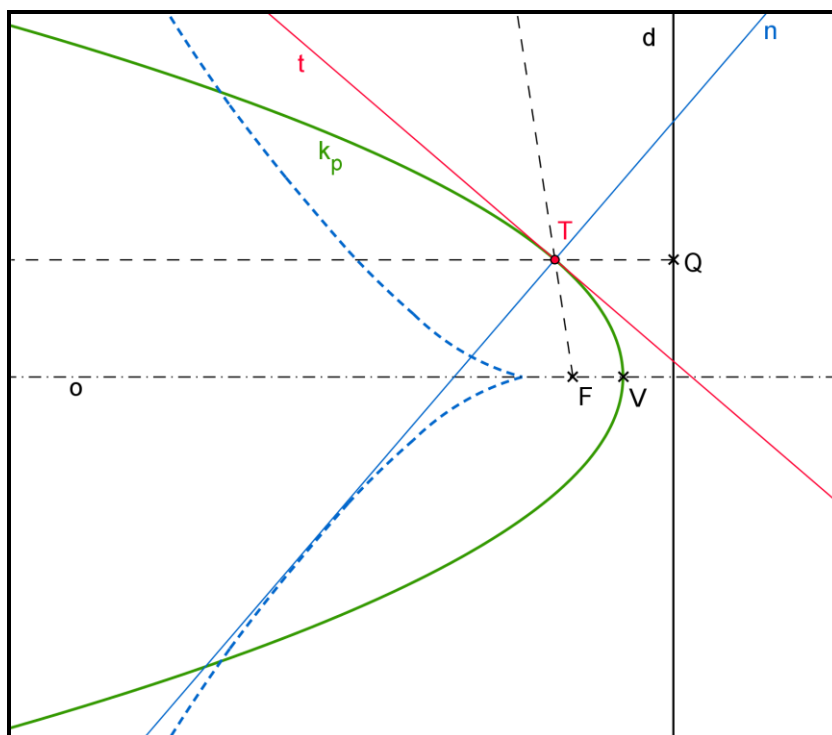
Věta P3.3: Normála paraboly pólí vnitřní úhly průvodičů bodu, v němž byla sestrojena.

Pokud se na parabolu budeme dívat z pohledu kinematické geometrie, můžeme konstatovat, že tečny paraboly parabolu v podstatě obalují. Parabola je tedy obalovou křivkou svých tečen. Obdobně existuje i obalová křivka normál paraboly. Nazývá se **evoluta paraboly**. Je to rovinná

křivka, množina všech středů křivosti dané paraboly. Vrchol evoluty je střed křivosti osculační kružnice ve vrcholu paraboly (více viz kapitola [Oskulační kružnice paraboly](#)).

V *apletu P3.1* pohybujte dotykovým bodem T po parabole k_p . Sledujte přitom pohyb tečny t po parabole a pohyb normály n po evolutě paraboly (ta je vyznačena čárkovaně modrou barvou).

Aplet P3.1: Evoluta paraboly - obalová křivka normál paraboly



4. Ohniskové vlastnosti

Tato kapitola nás zavede do tajů vlastností kuželoseček a zejména jejich ohnisek. Ohniska jsou velice zajímavé body, leží v podstatě uvnitř kuželosečky, ale přesto ji určují a definují. Mají také jiné vlastnosti, ale o tom více v následujících kapitolách.

4E.1 Ohniskové vlastnosti elipsy

Navážeme nyní na předchozí kapitolu [Tečny a normály elipsy](#) a rozšíříme informace o vlastnostech ohnisek a tečen elipsy.

Pro body souměrně sdružené s jedním z ohnisek podle tečen elipsy platí věta:

Věta E4.1: Všechny body Q_1 (resp. Q_2) souměrně sdružené podle tečen elipsy s ohniskem F_1 (resp. F_2) leží na **řídící kružnici** d_2 (resp. d_1), která je opsaná z druhého ohniska F_2 (resp. F_1) a má poloměr $2a$.
Tedy: $Q_1 \in d_2 \text{ } \left(F_2; 2a \right)$, resp. $Q_2 \in d_1 \text{ } \left(F_1; 2a \right)$.

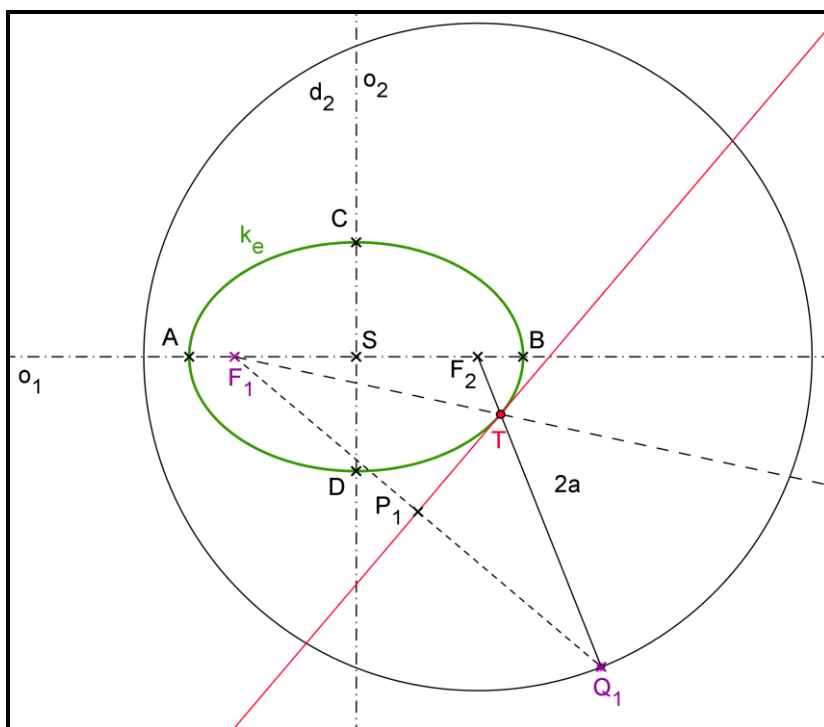
Důkaz: (*aplet E4.1*) V důkazu se budeme odvolávat na již dokázané, především na větu E3.2.

Zvolme libovolně bod $T \in k_e$. Sestrojme tečnu t v bodě T . K jednomu z ohnisek, např. k F_1 , najdeme souměrně sdružený bod Q_1 podle tečny t . Z definice elipsy platí: $|F_1T| + |F_2T| = 2a$. Ze souměrnosti podle tečny platí: $|F_1T| = |Q_1T|$ (viz věta E3.2). Tedy: $|Q_1T| + |F_2T| = 2a$, a protože body Q_1, T, F_2 jsou kolinéární (viz věta E3.2), platí rovnost $|Q_1F_2| = 2a$. Bod T jsme volili tak, aby ležel kdekoli na elipse. Pokud bychom tedy bodem T "posouvali" po elipse k_e , ohnisko F_2 by samozřejmě zůstávalo na místě, ale bod Q_1 by se pohyboval po kružnici se středem F_2 o poloměru $2a$, což jsme právě dokázali.

Analogicky $|Q_2F_1| = 2a$.

Budete-li v *apletu E4.1* posouvat červeně vyznačeným bodem T po elipse k_e , bude se měnit červeně vyznačená tečna elipsy t a také bod Q_1 - souměrně sdružený s ohniskem F_1 . Sledujte, že opravdu při tomto pohybu opisuje bod Q_1 řídící kružnici $d_2 \text{ } \left(F_2; 2a \right)$.

Aplet E4.1: Řídící kružnice elipsy



Při konstrukcích může nastat situace, kdy známe tečnu elipsy t známe i její ohniska F_1, F_2 , přesto nevíme, kde přesně je bod dotyku T tečny a elipsy. Zde využijeme výše zmiňovanou kolinearitu bodů F_2, T, Q_1 (resp. F_1, T, Q_2). Dotykový bod T leží na spojnici bodu Q_1 (resp. Q_2) souměrně položeného dle tečny k ohnisku F_1 (resp. F_2) s druhým ohniskem F_2 (resp. F_1). Tedy: $T \in t \cap Q_1 F_2$ nebo $T \in t \cap Q_2 F_1$.

Dalšími důležitými body jsou paty kolmic vedených z ohnisek elipsy k jejím tečnám. Pro takové body platí věta:

Věta E4.2: Paty P_1, P_2 všech kolmic sestrojených z ohnisek elipsy F_1, F_2 na tečny této kuželosečky leží na **vrcholové kružnici** v , která má střed ve středu elipsy S a má poloměr délky hlavní poloosy a .
Tedy: $P_1 \in v \text{ } \mathbb{S}; a \text{ } \bar{}$, resp. $P_2 \in v \text{ } \mathbb{S}; a \text{ } \bar{}$.

Důkaz: (aplet E4.2) V důkazu budeme využívat předchozí větu E4.1 a větu E3.2.

Zvolme libovolně bod $T \in k_e$, ovšem mimo hlavní vrcholy A, B elipsy k_e . Sestrojme tečnu t v bodě T . K jednomu z ohnisek, např. k F_1 , najdeme souměrně sdružený bod Q_1 podle tečny t a také patu P_1 kolmice sestrojené z tohoto ohniska na tečnu. Nepochybně platí $P_1 \in t \cap Q_1 F_1$. Všimněme si trojúhelníku $Q_1 F_1 F_2$. Bod S je středem strany $F_1 F_2$ a bod P_1 je středem $F_1 Q_1$.

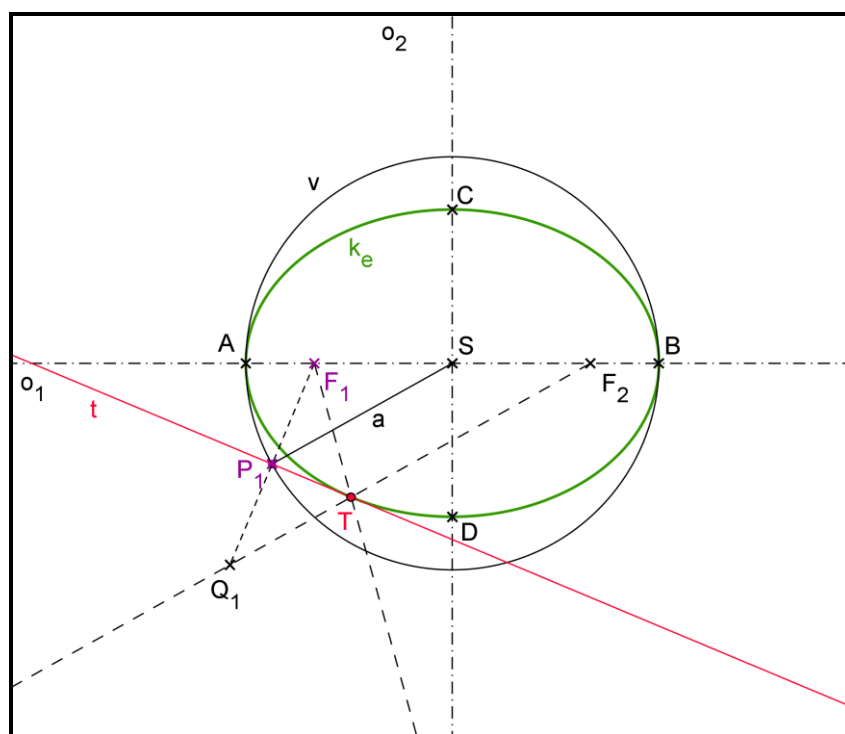
Tudíž spojnice SP_1 je střední příčkou v tomto trojúhelníku, platí tedy: $|SP_1| = \frac{|Q_1F_2|}{2} = a$. Tato

rovnost platí pro všechny body elipsy mimo hlavní vrcholy. V případě, že bod dotyku T zvolíme v jednom z hlavních vrcholů A či B , potom pata kolmice P_1 s nimi taktéž splývá. Tedy $A = T = P_1$ či $B = T = P_1$. Vzdálenost $|P_1S|$ je proto rovna vzdálenosti $|AS| = a$ či $|BS| = a$. Tudíž pro paty kolmic ke všem tečnám elipsy k_e platí: $|SP_1| = a$. Jinými slovy můžeme říci, že paty kolmic P_1 leží na kružnici $v(S; a)$.

Analogicky pro P_2 .

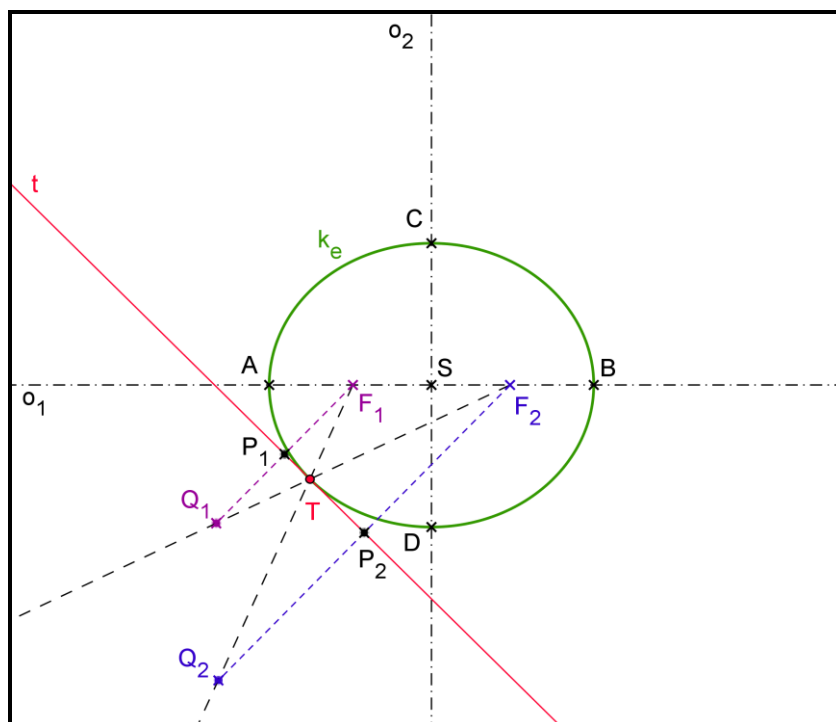
Budete-li v *apletu E4.2* posouvat červeně vyznačeným bodem T po elipse k_e , bude se měnit červeně vyznačená tečna elipsy t a také bod P_1 - pata kolmice sestrojené z ohniska F_1 . Sledujte, pohyb bodu P_1 , ten bude opisovat vrcholovou kružnici $v(S; a)$.

Aplet E4.2: Vrcholová kružnice elipsy



Pro lepší představivost o popsanych ohniskových vlastnostech elipsy je zde *aplet E4.3*. V něm jsou obě výše uvedené věty předvedeny v praxi. Vyznačeny jsou oba body Q_1, Q_2 souměrně sružené s ohnisky F_1, F_2 podle tečny t . Stejně tak jsou zde i paty kolmic P_1, P_2 . Pohybuje dotýkovým bodem T po elipse k_e , sledujte trajektorie bodů Q_1, Q_2, P_1, P_2 .

Aplet E4.3: Vrcholová a řídicí kružnice elipsy

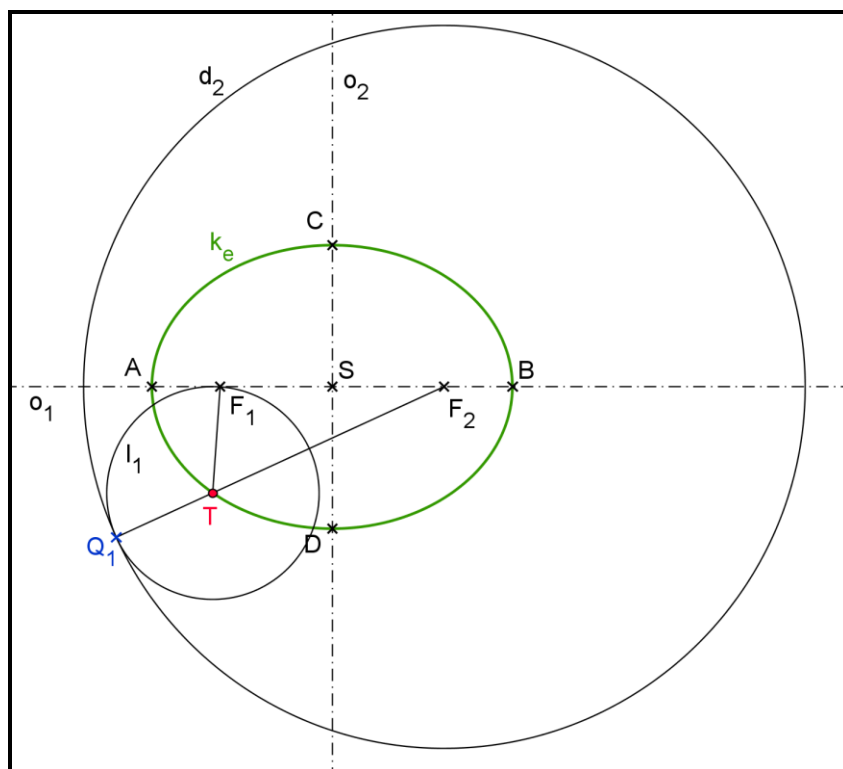


V případě, že je dána elipsa pomocí F_1, F_2, a a bod T , o kterém a nevíme, zda-li náleží elipse, použijeme větu E4.3. (čerpána z Kopřivová [8] str.30)

Věta E4.3: Bod T leží na elipse právě tehdy, pokud kružnice $l_1 \llcorner; |TF_1| \lrcorner$ (resp. $l_2 \llcorner; |TF_2| \lrcorner$), se dotýká řídicí kružnice $d_2 \llcorner; 2a \lrcorner$ (resp. $d_1 \llcorner; 2a \lrcorner$).

Věta E4.3 je vlastně jinou definicí kuželosečky. Důkaz je snadný. Je jen potřeba si uvědomit, že bod dotyku kružnic je bod Q_1 či Q_2 (bod souměrně sdružený s jedním z ohnisek podle tečny v bodě T), tudíž $|Q_1T| = |F_1T|$. Po té se dostaneme k definici elipsy.

Popsanou vlastnost si vyzkoušejte v *apletu E4.4*. Pohybem dotykového bodu T po elipse k_e se mění kružnice l_1 . Řídicí kružnice d_2 se nemění, a přesto obě kružnice l_1 a d_2 mají jen jeden společný bod, bod Q_1 .



4H.1 Ohniskové vlastnosti hyperboly

Navážeme nyní na předchozí kapitolu [Tečny a normály hyperboly](#) a rozšíříme informace o vlastnostech ohnisek a tečen hyperboly. Předem bychom ale chtěli upozornit na problematiku, která se týká **asymptot**. V kapitole [Definice hyperboly](#) a [Základní vlastnosti hyperboly](#) jsme uvedli, že se jedná v podstatě o limitní tečny hyperboly v jejích nevlastních bodech (bodech nekonečně vzdálených, přesto ležících na hyperbole). Budeme-li zde hovořit o tečnách máme tedy také na mysli asymptoty hyperboly.

Pro body souměrně sdružené s jedním z ohnisek podle tečen hyperboly platí věta:

Věta H4.1: Všechny body Q_1 (resp. Q_2) souměrně sdružené podle tečen hyperboly s ohniskem F_1 (resp. F_2) leží na **řídící kružnici** d_2 (resp. d_1), která je opsaná z druhého ohniska F_2 (resp. F_1) a má poloměr $2a$.

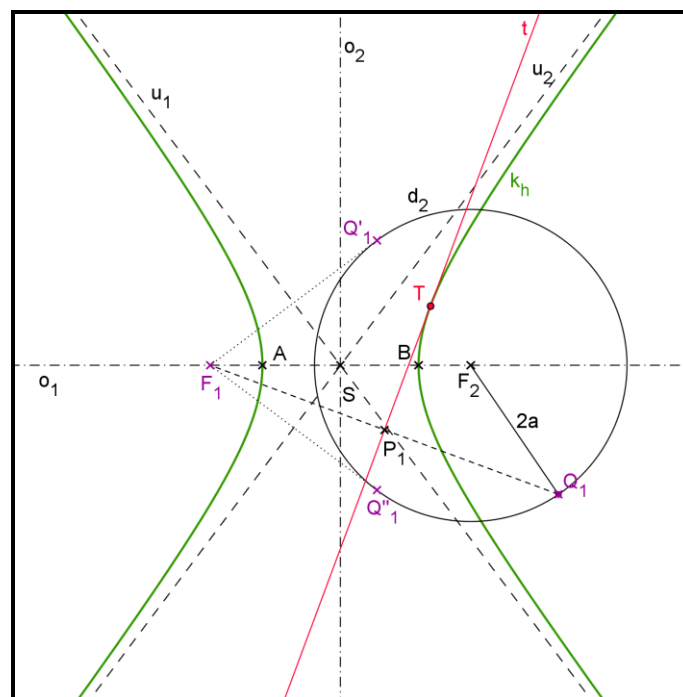
Tedy: $Q_1 \in d_2 \setminus \langle F_2; 2a \rangle$, resp. $Q_2 \in d_1 \setminus \langle F_1; 2a \rangle$.

Důkaz: (aplet H4.1) V důkazu se budeme odvolávat na již dokázané, především na větu H3.2. Zvolme libovolně bod $T \in k_h$, sestrojme tečnu t v bodě T . K jednomu z ohnisek, např. k F_1 , najděme souměrně sdružený bod Q_1 podle tečny t . Z definice hyperboly platí: $\|F_2T\| - \|F_1T\| = 2a$. Ze souměrnosti podle tečny platí: $\|F_1T\| = \|Q_1T\|$ (viz věta H3.2). Tedy: $\|F_2T\| - \|Q_1T\| = 2a$, a protože body Q_1, T, F_2 jsou kolineární (viz věta H3.2), platí rovnost $\|Q_1F_2\| = 2a$. Bod T jsme volili tak, aby ležel kdekoli na hyperbole. Pokud bychom tedy bodem T "posouvali" po hyperbole k_h , ohnisko F_2 by samozřejmě zůstávalo na místě, ale bod Q_1 by se pohyboval po kružnici se středem F_2 o poloměru $2a$, což jsme právě dokázali. Analogicky $\|Q_2F_1\| = 2a$.

Budete-li v apletu H4.1 posouvat červeně vyznačeným bodem T po hyperbole k_h , bude se měnit červeně vyznačená tečna hyperboly t a také bod Q_1 - souměrně sdružený s ohniskem F_1 . Sledujte, že opravdu při tomto pohybu opisuje bod Q_1 řídicí kružnici d_2 ($F_2; 2a$).

Jak už bylo na začátku kapitoly uvedeno, bereme v potaz i limitní tečny - asymptoty, tudíž i limitní body, označené v apletu jako body Q'_1, Q''_1 , souměrně sdružené podle asymptot u_1, u_2 . Kdybychom tak neučinili, potom by množinou všech bodů Q_1 (resp. Q_2) byla kružnice d_2 (resp. d_1) bez dvou bodů. Je zajímavé, že právě tyto body Q'_1, Q''_1 , jsou body dotyku tečen sestrojených z ohniska F_1 na řídicí kružnici d_2 . Obdobné platí pro body Q'_2, Q''_2 souměrně sdružené s druhým ohniskem F_2 , které zde vyznačené nejsou.

Aplet H4.1: Řídicí kružnice hyperboly



Při konstrukcích může nastat situace, kdy známe tečnu t hyperboly, známe i její ohniska F_1, F_2 , přesto nevíme, kde přesně je bod dotyku T tečny a hyperboly. Zde využijeme výše zmiňovanou kolinearitu bodů F_2, T, Q_1 (resp. F_1, T, Q_2). Stejně jako je tomu u elipsy, dotykový bod T leží na spojnici bodu Q_1 (resp. Q_2) souměrně položeného dle tečny k ohnisku F_1 (resp. F_2) s druhým ohniskem F_2 (resp. F_1). Tedy: $T \in t \cap Q_1 F_2$ nebo $T \in t \cap Q_2 F_1$.

Dalšími důležitými body jsou paty kolmic vedených z ohnisek hyperboly k jejím tečnám. Pro takové body platí věta:

Věta H4.2: Paty P_1, P_2 všech kolmic sestrojenných z ohnisek hyperboly F_1, F_2 na tečny této kuželosečky leží na **vrcholové kružnici** v , která má střed ve středu hyperboly S a má poloměr délky hlavní poloosy a .

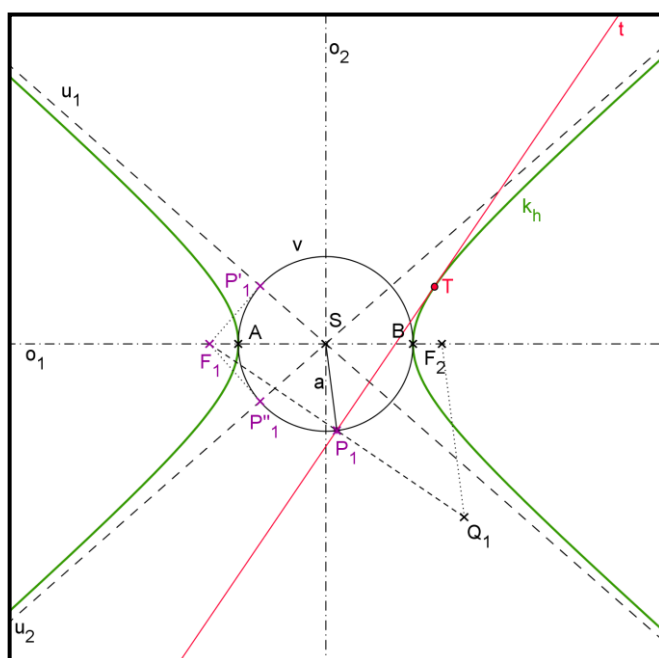
Tedy: $P_1 \in v \text{ (S; } a \text{)}$, resp. $P_2 \in v \text{ (S; } a \text{)}$.

Důkaz: (aplet H4.2) Důkaz je analogický důkazu věty E4.2 pro elipsu. Nebudeme ho tedy zde znovu popisovat.

Budete-li v *apletu H4.2* posouvat červeně vyznačeným bodem T po hyperbole k_h , bude se měnit červeně vyznačená tečna hyperboly t a také bod P_1 - pata kolmice sestrojenné z ohniska F_1 . Sledujte pohyb bodu P_1 , ten bude opisovat vrcholovou kružnici $v \text{ (S; } a \text{)}$.

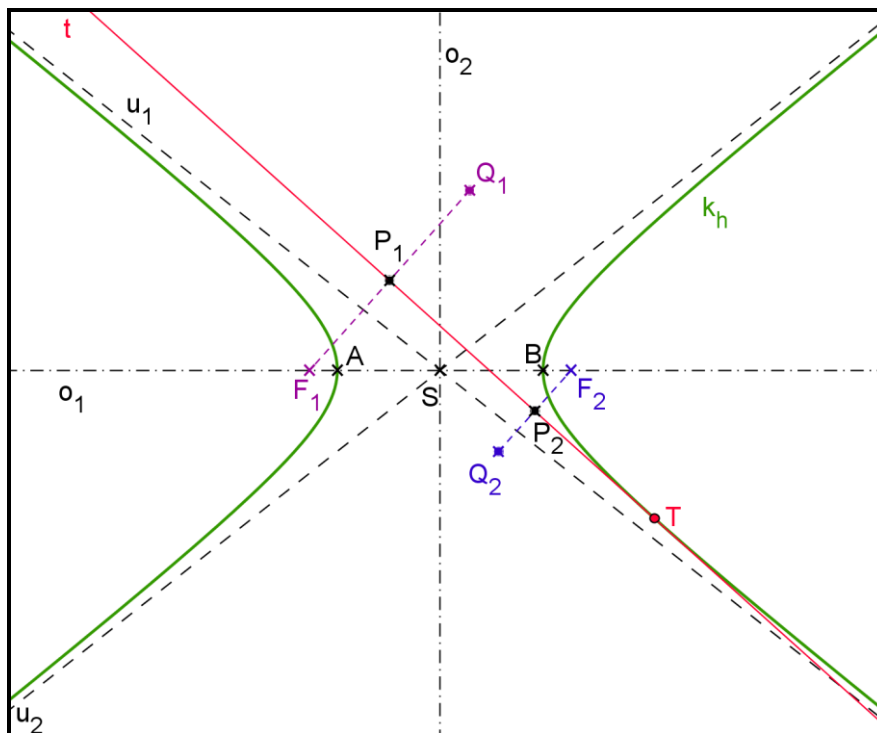
Body v *apletu H4.2* označené jako P'_1, P''_1 , jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F_1 na asymptoty u_1, u_2 hyperboly. Ty taktéž na vrcholové kružnici v leží. Jedná se o stejný problém jako byl s řídicí kružnicí d_1 (resp. d_2). Body P'_1, P''_1 jsou opět body dotyku tečen sestrojenných z ohniska F_1 na řídicí kružnici v . Obdobné platí pro body P'_2, P''_2 paty kolmic sestrojenných z druhého ohniska F_2 , které zde vyznačené nejsou.

Aplet H4.2: Vrcholová kružnice hyperboly



Pro lepší představu o popsáných ohniskových vlastnostech hyperboly je zde *aplet H4.3*. V něm jsou obě výše uvedené věty předvedeny v praxi. Vyznačeny jsou oba body Q_1, Q_2 souměrně sdružené s ohnisky F_1, F_2 podle tečny t . Stejně tak jsou zde i paty kolmic P_1, P_2 . Pohybuje dotykovým bodem T po hyperbole k_h , sledujte trajektorie bodů Q_1, Q_2, P_1, P_2 .

Aplet H4.3: Vrcholová a řídicí kružnice elipsy

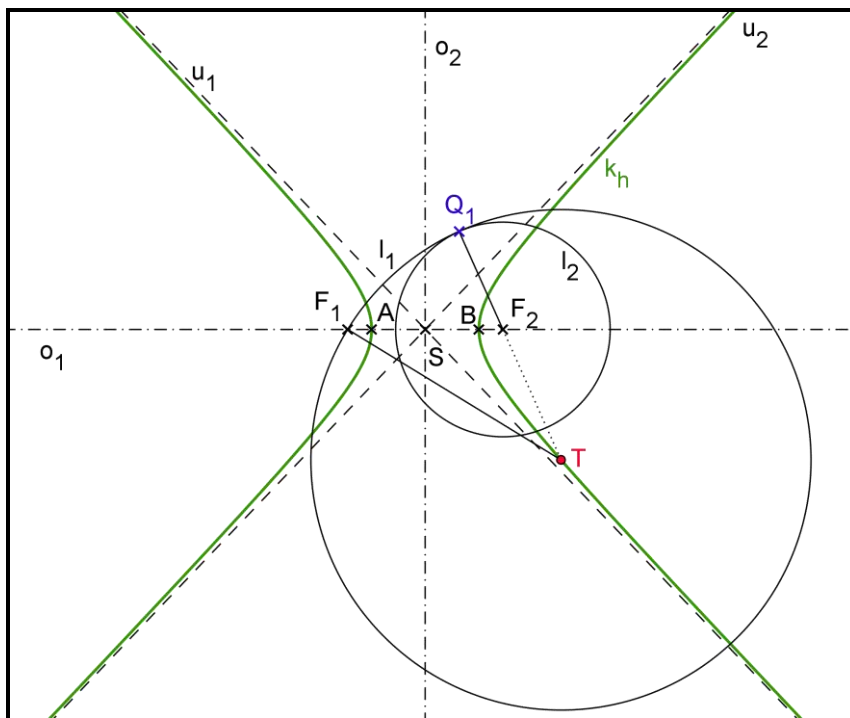


Pokud je dána hyperbola pomocí ohnisek F_1, F_2 a velikostí hlavní poloosy a , můžeme o bodu T s jistotou říci, zda-li náleží či nenáleží hyperbole, například pomocí věty H4.3. (čerpána z Kopřivová [8] str.30)

Věta H4.3: Bod T leží na hyperbole právě tehdy, pokud se kružnice $l_1 \left(C; |TF_1| \right)$ (resp. $l_2 \left(C; |TF_2| \right)$) dotýká řídicí kružnice $d_2 \left(F_2; 2a \right)$ (resp. $d_1 \left(F_1; 2a \right)$).

Věta H4.3 je vlastně jinou definicí kuželosečky. Důkaz je snadný. Je jen potřeba si uvědomit, že bod dotyku kružnic je bod Q_1 či Q_2 (bod souměrně sdružený s jedním z ohnisek podle tečny v bodě T), tudíž $|Q_1T| = |F_1T|$. Po té se můžeme odvolat na definici hyperboly.

Popsanou vlastnost si vyzkoušejte v *apletu H4.4*. Pohybem dotykového bodu T po hyperbole k_h se mění kružnice l_1 . Řídicí kružnice d_2 se nemění, a přesto obě kružnice l_1 a d_2 mají jen jeden společný bod, bod Q_1 .



4P.1 Ohniskové vlastnosti paraboly

Touto kapitolou rozšíříme informace z kapitoly [Tečny a normály paraboly](#). Zaměříme se především na vlastnosti ohniska a tečen paraboly.

Pro body souměrně sdružené s ohniskem paraboly platí věta:

Věta P4.1: Všechny body Q souměrně sdružené podle tečen paraboly s ohniskem F leží na řídicí přímce d .

Důkaz: (aplet P4.1) V důkazu se budeme odvolávat na již dokázané, především na větu P3.2.

Zvolme libovolně bod $T \in k_p$. Sestrojme tečnu t v bodě T . Necht' QT je průvodič bodu T (druhým průvodičem je TF). Polopřímka QT je tím pádem rovnoběžná s osou o (kolmá na d) a bod $Q \in d$.

Nyní musíme dokázat, že bod Q , který je incidentní s řídicí přímkou, je zároveň souměrně sdružený s ohniskem F podle tečny t .

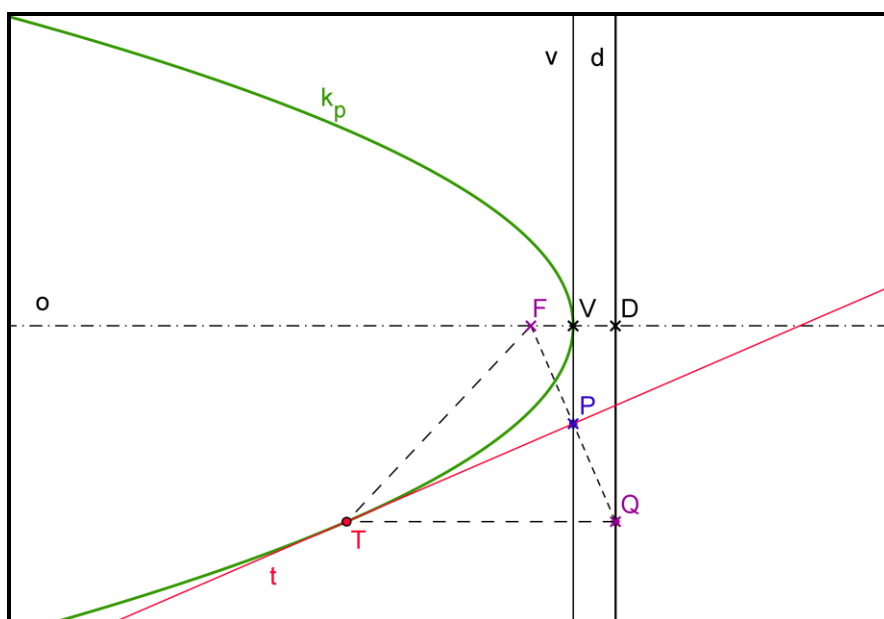
Nejprve označme P průsečík úsečky FQ s tečnou t . Z definice paraboly se délky průvodičů rovnají, $|QT|=|TF|$. Podle věty P3.2 jsou úhly PTQ a PTF stejně veliké. Z toho plyne, že trojúhelníky PTF a PTQ jsou shodné podle věty sus. Pokud jsou tedy shodné, potom i délky stran - úseček PQ , PF se rovnají. Z $|QT|=|TF|$, $|\angle PTQ|=|\angle PTF|$ plyne, že úsečka FQ je kolmá na tečnu t . Bod $Q \in d$ je tedy souměrně sdružený s ohniskem F podle tečny t .

Vlastnost si můžete vyzkoušet v *apletu P4.1*. Pohybuje tečným bodem T po parabole k_p a sledujte trajektorii bodu Q , který je souměrně sdružený s ohniskem F podle tečny t .

Při konstrukcích může nastat situace, kdy známe tečnu paraboly t , známe i její ohnisko F a řídicí přímku d , přesto nevíme, kde přesně je bod dotyku T tečny a paraboly. Zde využijeme výše zmiňovanou větu P4.1 a najdeme bod $Q \in d$. Dotykový bod T leží na tečně t a na rovnoběžce s osou o vedené bodem Q .

Tedy: $T \in t \cap r$, kde $r \parallel o$ a $Q \in r$.

Aplet P4.1: Řídicí přímka paraboly a její vrcholová tečna



V *apletu P4.1* je také znázorněna vlastnost bodu P , paty kolmice vedené z ohniska F na tečnu t . Při pohybu tečného bodu T po parabole pozorujte trajektorii tohoto bodu. Více napoví následující věta.

Věta P4.2: Paty P všech kolmic sestrojených z ohniska F paraboly na tečny této kuželosečky leží na **vrcholové tečně** v , která prochází vrcholem V paraboly a je kolmá na její osu o .

Důkaz: (aplet P4.1) Zvolme libovolně bod $T \in k_p$, ovšem mimo vrchol V paraboly k_p . Označme bod D jakožto průsečík osy o a řídicí přímky d .

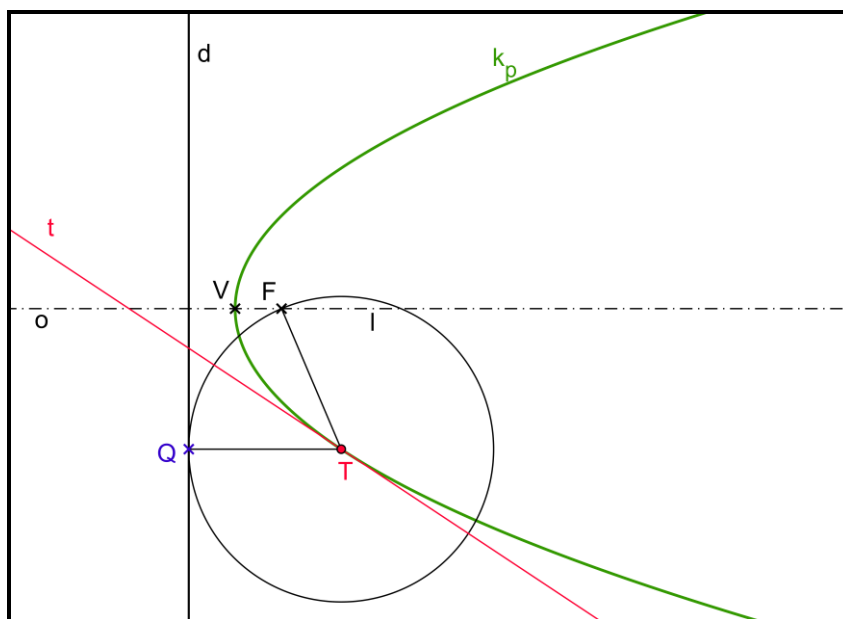
Sestrojme tečnu t v bodě T . K ohnisku F najdeme souměrně sdružený bod Q podle tečny t a také patu P kolmice sestrojené z tohoto ohniska na tečnu. Nepochybně platí $P \in t \cap QF$. Všimněme si pravoúhlého trojúhelníku QDF . Vrchol V je vždy středem strany DF a bod P je středem FQ (věta P4.1). Tudiž spojnice VP je střední příčkou v tomto trojúhelníku. Proto platí $VP \parallel QD$. Tedy bod P leží na přímce, která je rovnoběžná s d a prochází vrcholem V . Leží na vrcholové tečně. Pokud bychom dotykový bod T zvolili ve vrcholu V , splynul by s ním i bod P . I pro tento případ by věta P4.1 platila.

V případě, že je dána parabola pomocí F , d , p a bod T , o kterém ale nevíme, zda-li náleží parabole, použijeme větu P4.3. (čerpána z Kopřivová [8] str.30)

Věta P4.3: Bod T leží na parabole právě tehdy, pokud se kružnice $l \llcorner; |TF|$ dotýká řídicí přímky d .

Věta P4.3 v podstatě popisuje definici kuželosečky. Důkaz je snadný. Je jen potřeba si uvědomit, že bod dotyku kružnice a řídicí přímky je bod Q (bod souměrně sdružený s ohniskem podle tečny v bodě T), tudíž $|QT| = |TF|$. To nás dovede k definici paraboly.

Popsanou vlastnost si vyzkoušejte v *apletu* P4.2. Pohybem dotykového bodu T po parabole k_p se mění kružnice l , jež má s řídicí přímkou d jen jeden společný bod, bod Q .



Pro konstrukci paraboly jsou užitečné ještě některé další speciální věty, které si postupně ukážeme.

Věta P4.4: Spojnice průsečíku R dvou různých tečen t_1, t_2 paraboly a půlicího bodu M tětivy T_1T_2 jejich bodů dotyku je rovnoběžná se směrem osy o .

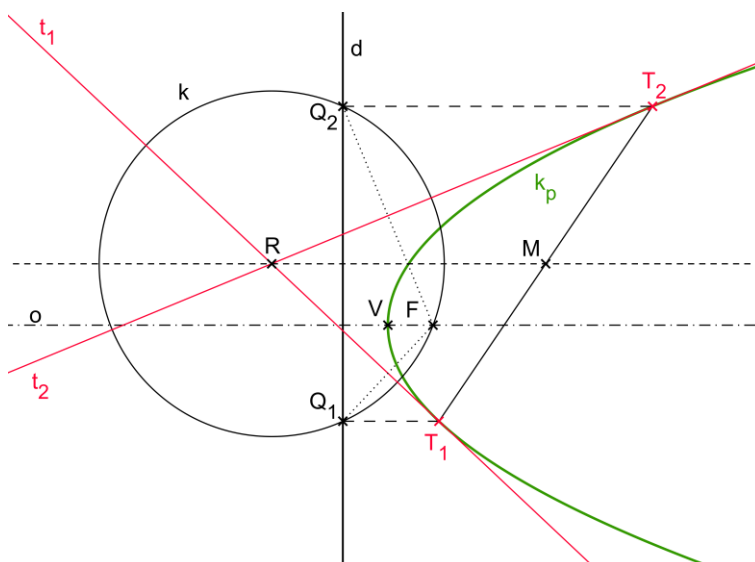
Důkaz: (obrázek P4.1; čerpán z Urban [13] str.52)

Nechť je dána parabola k_p . Zvolme na ní dva různé body T_1, T_2 a sestrojme v nich tečny t_1, t_2 .

Jejich průsečík označme R .

Kolmice z bodu R na řídicí přímku d pólí tětivu Q_1Q_2 kružnice k , jež má střed v bodě R a poloměr $|RF|$. Protože však tato kolmice je rovnoběžná s Q_1T_1 a Q_2T_2 (průvodiče), je tedy rovnoběžná i s osou o a zároveň prochází středem M úsečky T_1T_2 . Čímž je věta dokázána.

Obrázek P4.1: Důkaz věty P4.4



Pro další tři věty budeme potřebovat znát některé nové termíny, které se zde doposud neobjevily.

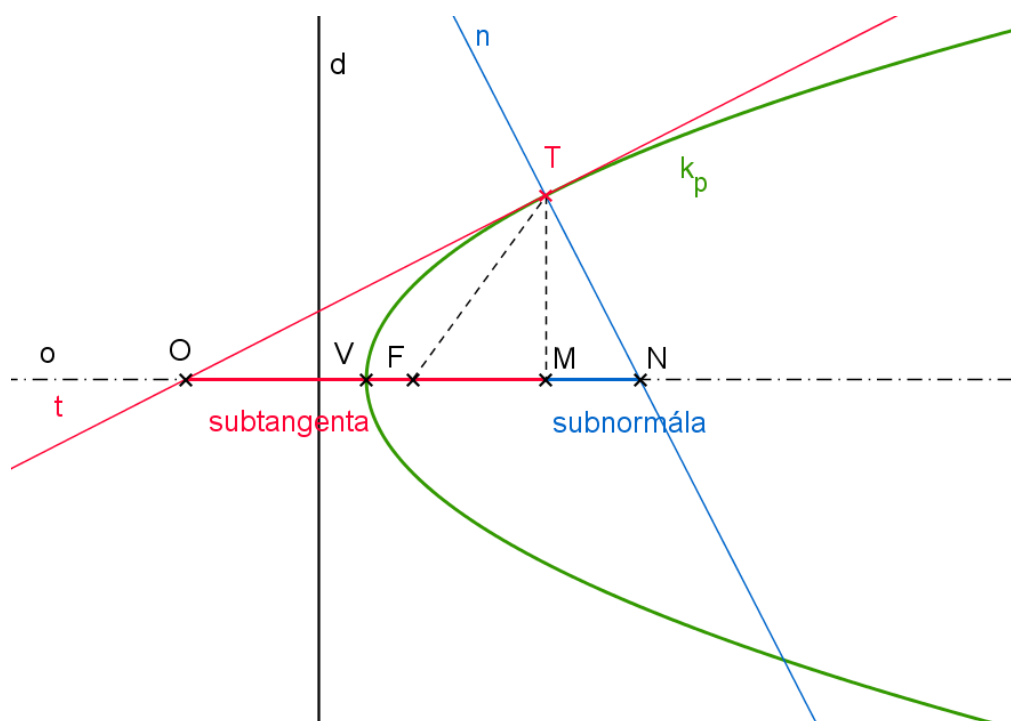
Jde o pojmy **subnormála** a **subtangenta**.

První z nich, **subnormálou** budeme rozumět úsečku MN , kde bod M představuje pravouhlý průmět dotykového bodu T tečny t paraboly na osu o . Bod N je průsečíkem osy o paraboly a normály n v bodě T (viz obrázek P4.2).

Označíme-li O průsečík tečny t a osy o paraboly, potom **subtangentou** rozumíme úsečku OM (viz obrázek P4.2).

Oba případy jsou pro tečny, které nejsou vrcholové. Je potřeba si uvědomit, že normála vrcholové tečny je osa o paraboly. A v tomto případě by pojmy subnormála a subtangenta pozbývaly smyslu.

Obrázek P4.2: Subnormála a subtangenta paraboly pro tečnu t



Věta P4.5: Subnormála má konstantní délku rovnou parametru p .

Věta P4.6: Subtangenta je půlena vrcholem V paraboly.

Věta P4.7: Součet subtangenty a subnormály je půlen ohniskem F paraboly.

Důkaz: (obrázek P4.3) Důkaz předchozích tří vět uvedeme najednou.

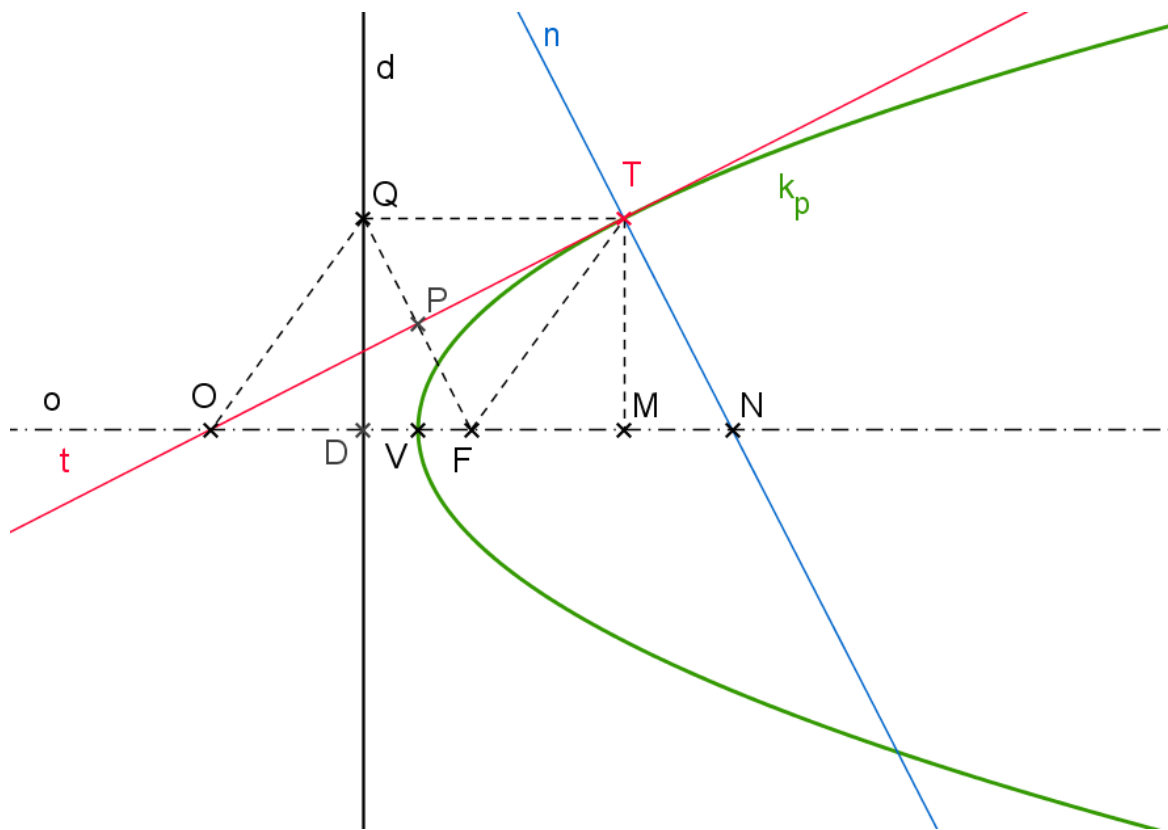
Necht' je dána parabola k_p a libovolná tečna t s bodem dotyku T , jež není vrcholová. Zachovejme pojmenování výše uvedených bodů, popř. přímek. Dále označme D , jakožto průsečík d a o , $Q \in d$ bod souměrně sdružený s ohniskem podle tečny t a $P \in t$ patu kolmice z ohniska na tečnu.

Věta P4.5: Podle konstrukce je čtyřúhelník $FNTQ$ rovnoběžník, tedy platí $|QF| = |TN|$. Pravoúhlé trojúhelníky FDQ a NTM jsou shodné. Odtud již plyne $|MN| = |DF| = p$.

Věta P4.6: Ve čtyřúhelníku $OFTQ$ jsou úhlopříčky OT a QF k sobě kolmé. Úhlopříčka OT půlí úhlopříčku QF a strany QT, QF jsou rovnoběžné. Z toho plyne, že tento čtyřúhelník je buď kosočtverec, nebo čtverec. Odtud platí: $|OP| = |PT|$. A protože $PV \parallel TM$, je $|OV| = |VM|$, jak jsme měli dokázat.

Z obou předchozích vět snadno odvodíme větu P4.7.

Obrázek P4.3: Důkaz vět P4.5, P4.6, P4.7



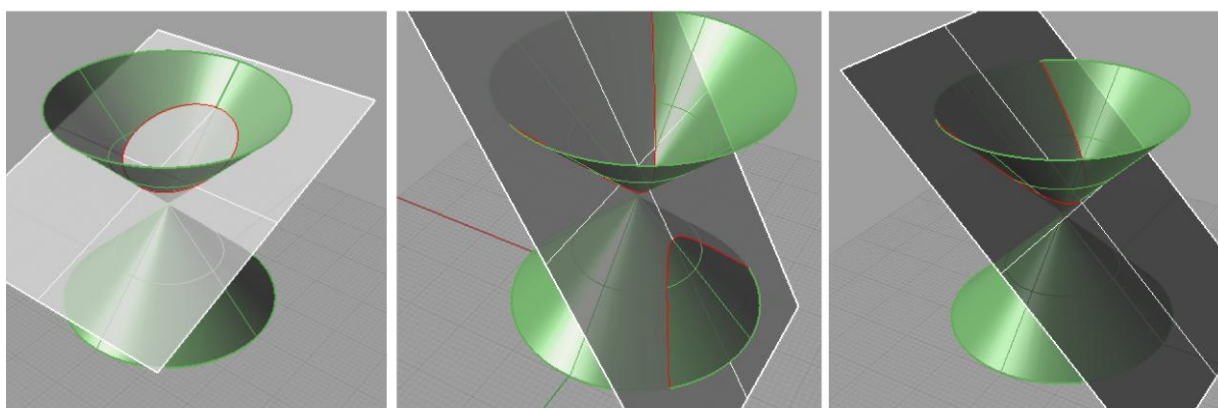
5. Quételetova - Dandelinova věta

Název kuželosečka zřejmě vznikl ze slova kužel a seknout. Je tím tedy míněna křivka, která vznikne řezem (sekem) kužele (myšleno rotačního kužele). Co jsou to kuželosečky, již z kapitoly [Definice](#) víme, ale jestli opravdu řezem rotačního kužele (resp. válce) jsou právě zmíněné křivky, je zatím nezodpovězená otázka.

Již staří Řekové tušili, že řezy rotačního kužele jsou kuželosečky. Elegantní důkaz byl však objeven až o několik set let později.

Rovinnými řezy na kuželové a válcové ploše se nezávisle na sobě zabývali Belgičan **Lambert Adolphe Jacques Quételet** (12. 4. 1794 - 15. 2. 1847) a **Germinal Pierre Dandelin** (22. 2. 1796 - 17. 2. 1874) francouzsko - belgického původu. Věta, která hovoří o vztahu kuželoseček a rovinném řezu rotační kuželové (resp. válcové) plochy, se nazývá **Quételetova - Dandelinova věta**. Věta je však v jiných zemích známa pod pojmem např.: *Dandelin spheres* (z angličtiny, viz [\[W1\]](#) a [\[W7\]](#)), *Dandelinsche Kugel* (z němčiny), *Esferas de Dandelin* (ze španělštiny), ... **Dandelinovy sféry** (v překladu). A zřejmě proto, že její důkaz byl proveden pomocí sfér vepsaných do kuželové (resp. válcové) plochy a dotýkající se roviny řezu, a to roku 1822 panem Dandelinem (ačkoliv Quételet měl stejný důkazový aparát).

Obrázek 5.1: Klasifikace rovinných řezů rotačního kužele: (zleva) eliptický řez, hyperbolický řez, parabolický řez



Pozn.: V následující podkapitolách ([Řez rotační kuželové plochy](#), [Řez rotační válcové plochy](#)) budou pro jednoduchost obrázky rotačních ploch zobrazovány v pravoúhlém promítání na jednu průmětnu - nárysnu. Průmětnu (nárysnu) budeme volit tak, aby obsahovala osu rotační kuželové, resp. válcové plochy.

5K.1 Řez rotačního kužele rovinou

V této kapitole si ukážeme, že řezem rotační kuželové plochy rovinou může být elipsa, parabola či hyperbola nebo také další (ovšem singulární) kuželosečky.

Nás budou především zajímat řezy rovinami, které neprochází vrcholem rotačního kužele. (Roviny procházející vrcholem se nazývají **vrcholové**.) Konkrétně o těchto řezech hovoří tzv. **Quételetova - Dandelinova věta**. (citace z: *Pomykalová [11] str. 272*)

Věta K5.1 (Quételet, Dandelin): Řezy rotační kuželové plochy rovinami, které nejsou vrcholové, jsou kuželosečky s ohnisky v dotykových bodech kulových ploch vepsaných kuželové ploše a dotýkajících se roviny řezu.

Quételetova - Dandelinova věta říká dvě důležité věci. První, že řezem rotační kuželové plochy jsou "opravdu" kuželosečky a druhou, kde leží ohniska těchto kuželoseček.

Nejprve budeme klasifikovat jednotlivé řezy pomocí věty K5.2, která je jakýmsi dovětkem věty K5.1. Potom si vše dokážeme. (čerpáno z [\[W3\]](#) str. 21)

Věta K5.2: Jestliže rovina protíná všechny povrchové přímky rotační kuželové plochy, je řezem **elipsa**. Je-li rovina řezu rovnoběžná právě s jednou površkou plochy, pak je řezem **parabola**. Pokud je rovina řezu rovnoběžná se dvěma površkami plochy, je řezem **hyperbola** a ony povrchové přímky udávají směry asymptot.

Označme rovinu řezu ρ . Dále označme α odchylku roviny řezu ρ od roviny libovolné povrchové kružnice kuželové plochy a β označíme odchylku povrchových přímek plochy od roviny povrchové kružnice.

Má-li se jednat o tzv. **eliptický řez** kuželové plochy, rovina má podle věty K5.2 protnout všechny její površky. To nastane právě tehdy, když $\alpha < \beta$, viz *obrázek K5.1 a*), kde je nárys dané situace. Je-li navíc rovina ρ kolmá k ose této plochy ($\alpha = 0$), pak je řezem kružnice jakožto speciální případ elipsy.

V případě tzv. **parabolického řezu** musí, po obdobné úvaze, nastat rovnost odchylek: $\alpha = \beta$.

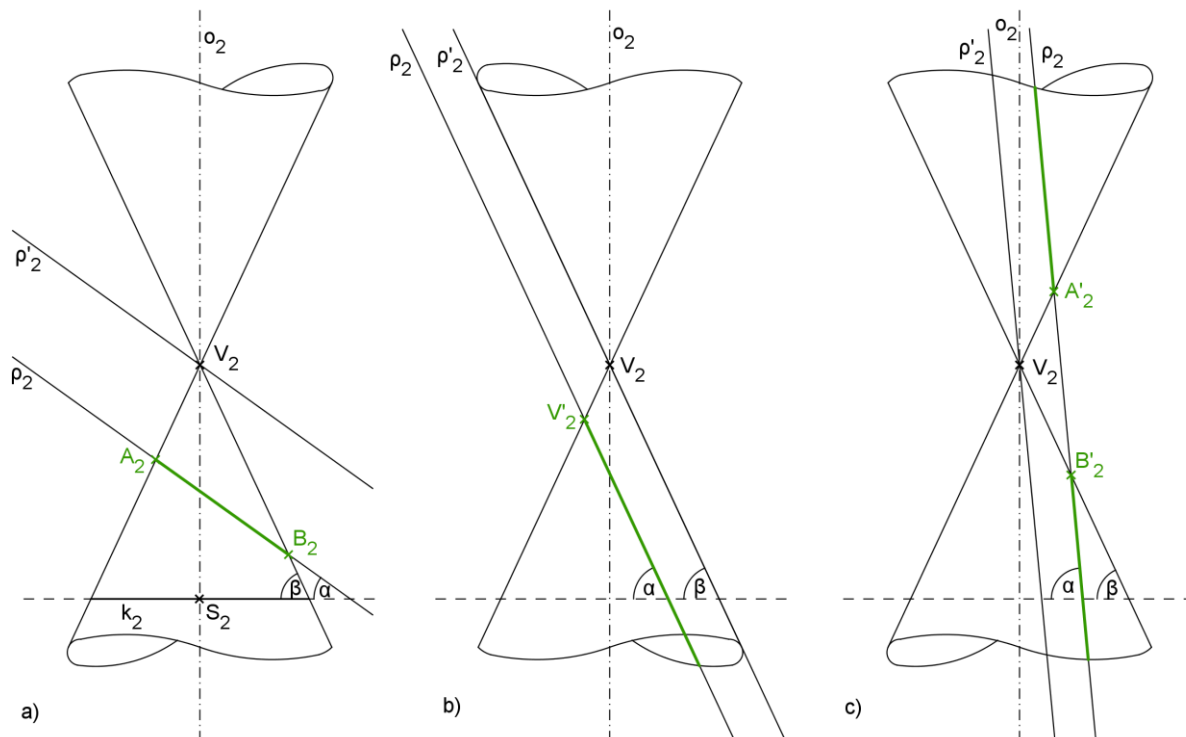
Situace je znázorněna na *obrázku K5.1 b*).

Poslední možností je tzv. **hyperbolický řez** a to, když $\alpha > \beta$ (*obrázek K5.1 c*)).

Pozn. k *obrázku K5.1*: Průmětnu volíme tak, že obsahuje osy o daných kuželových ploch. Rovina řezu ρ je k průmětně kolmá, zobrazuje se jako přímka. Průměty řezů jsou částmi této přímky. Libovolná povrchová kružnice kuželové plochy se zobrazuje jako úsečka kolmá k její ose. Tento

způsob zobrazení bude použit i v ostatních obrázcích této kapitoly, ovšem objekty budou pro jednoduchost popisovány bez 2 v dolním indexu (což značí, že se jedná o nárys).

Obrázek K5.1: Klasifikace rovinných řezů rotační kuželové plochy: a) eliptický řez, b) parabolický řez, c) hyperbolický řez



Na obrázku K5.1 jsou u každého řezu navíc znázorněny řezy vrcholovými rovinami ρ' , které jsou rovnoběžné s rovinami ρ . Výsledkem jsou také kuželosečky ovšem singulární. Jsou to postupně:

- a) bod - vrchol kuželové plochy;
- b) přímka procházející vrcholem kuželové plochy - jedna její površka;
- c) dvě různoběžné přímky se společným bodem - vrcholem kuželové plochy.

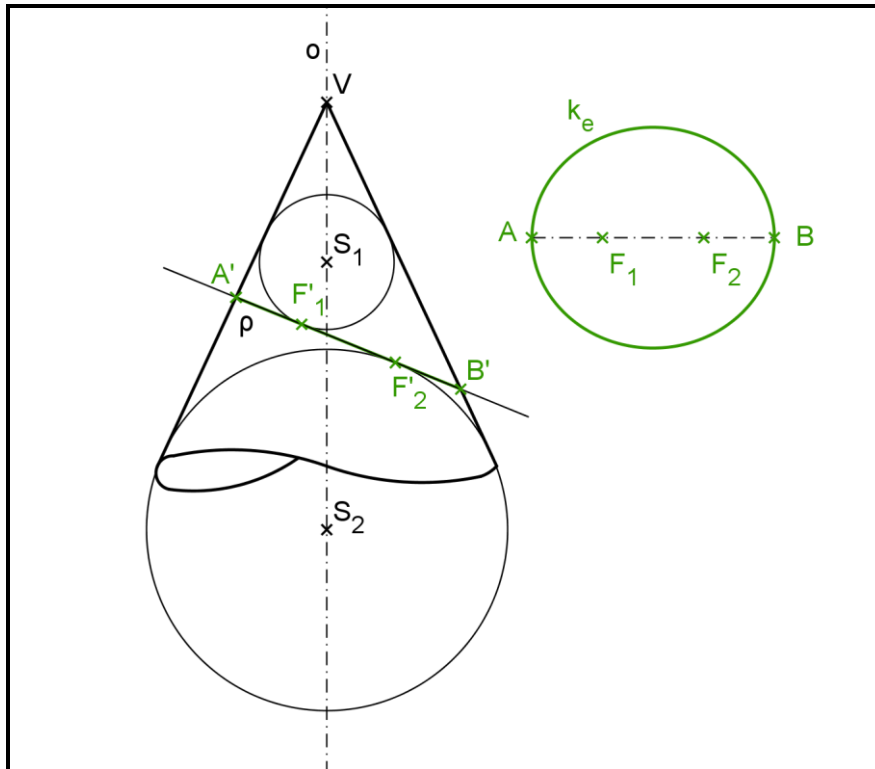
Zaměříme se na každý z výše uvedených řezů zvlášť a dokážeme, že pro ně platí Věta K5.1 (Quételet, Dandelin).

5K.1.1 Eliptický řez rotační kuželové plochy

Jestliže rovina ρ není rovnoběžná se žádnou povrchovou přímkou rotační kuželové plochy, pak kuželosečkou řezu je elipsa (resp. kružnice, je-li rovina ρ kolmá k ose plochy). Podle Quételetovy - Dandelinovy věty (Věty K5.1) jsou její ohniska dotykové body vepsaných sfér do kuželové plochy, které se taktéž dotýkají roviny ρ .

V Apletu K5.1 je nárys části kuželové plochy. Je zde zobrazena rovina ρ , jejíž polohu můžete měnit pomocí bodů A', B' . Změnou polohy roviny ρ se budou měnit vepsané sféry a tedy i dotykové body - ohniska elipsy řezu. Vpravo je potom skutečná velikost řezu - elipsy.

Aplet K5.1: Eliptický řez rotační kuželové plochy; skutečný obraz řezu.



Důkaz Věty K5.1 (Quételet, Dandelin pro elipsu): (obrázek K5.2)

Necht' je dána kuželová plocha K a rovina ρ je rovinou řezu, jež protíná všechny površky K . Chceme-li dokázat, že průniková křivka je elipsa, musíme dokázat, že její body mají konstantní součet vzdáleností od dvou pevných bodů - ohnisek.

Budeme následovat větu a do kuželové plochy vepíšeme dvě sféry κ_1, κ_2 (dotýkající se plochy K podél kružnic k_1, k_2) tak, aby rovina ρ byla jejich společná tečná rovina, body dotyku nazveme F_1, F_2 . Zvolme nyní libovolně bod $M = K \cap \rho$ (chceme dokázat, že leží na elipse). Necht' p je površka jím procházející, přičemž $X = p \cap k_1, Y = p \cap k_2$.

Platí: $|MF_1| = |MX|$, protože MF_1 i MX jsou tečny sféry κ_1 , body F_1 a X jí náležejí, tudíž jsou stejně vzdálené od bodu M . Obdobně platí: $|MF_2| = |MY|$. Odtud $|MF_1| + |MF_2| = |MX| + |MY| = |XY|$. Pokud navíc površku p otočíme do polohy p_o (viz. obrázek K5.2), uvidíme ji nezkrácenou. Tedy v tomto otočení můžeme určit

skutečnou velikost úsečky XY , $|X_oY_o|$. Tímto jsme dokázali, že libovolný bod řezu má od bodů F_1, F_2 konstantní vzdálenost $|X_oY_o|$.

Zbývá dokázat, že $|X_oY_o| = |AB| = 2a$ (body A, B viz obrázek K5.2).

Platí: $|Y_oB| = |BF_2|$ a $|X_oB| = |BF_1|$, jelikož Y_oB, BF_2 jsou tečny sféry κ_1 z bodu B .
Obdobně X_oB a BF_1 jsou tečny sféry κ_1 .

Dále platí: $|AF_1| + |AF_2| = |BF_1| + |BF_2|$

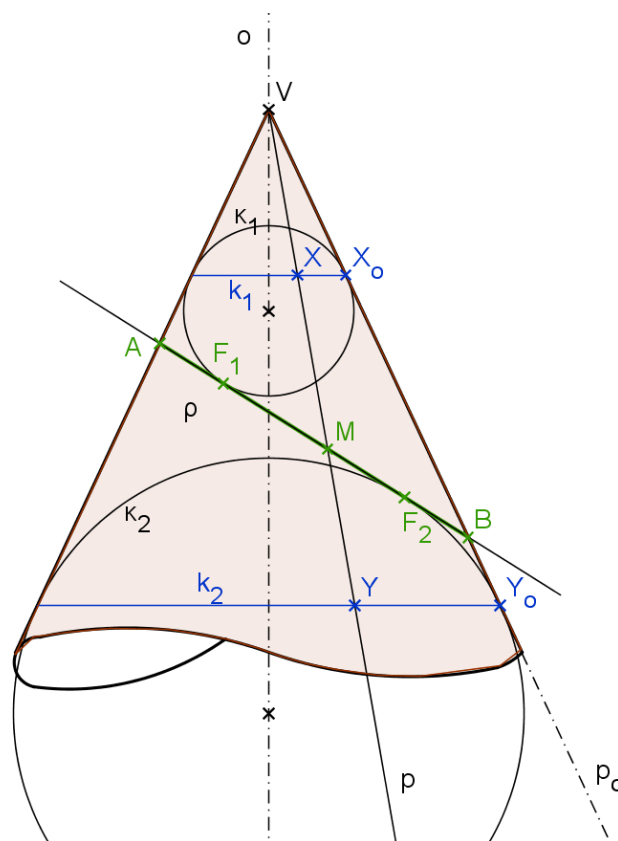
$$2|AF_1| + |F_1F_2| = 2|BF_2| + |F_1F_2| \Rightarrow |AF_1| = |BF_2|$$

Odtud plyne následující: $|X_oY_o| = |X_oB| + |BY_o| = |BF_1| + |F_2B| = |BF_1| + |F_1A| = |AB| = 2a$.

To znamená, že každý bod řezu je bodem elipsy, jejíž ohniska jsou body F_1, F_2 a hlavní poloosa je $a = \frac{|AB|}{2}$.

Snadno zjistíme, že obráceně každý bod elipsy je také bodem řezu a tím je věta dokázána.

Obrázek K5.2: Důkaz eliptického řezu

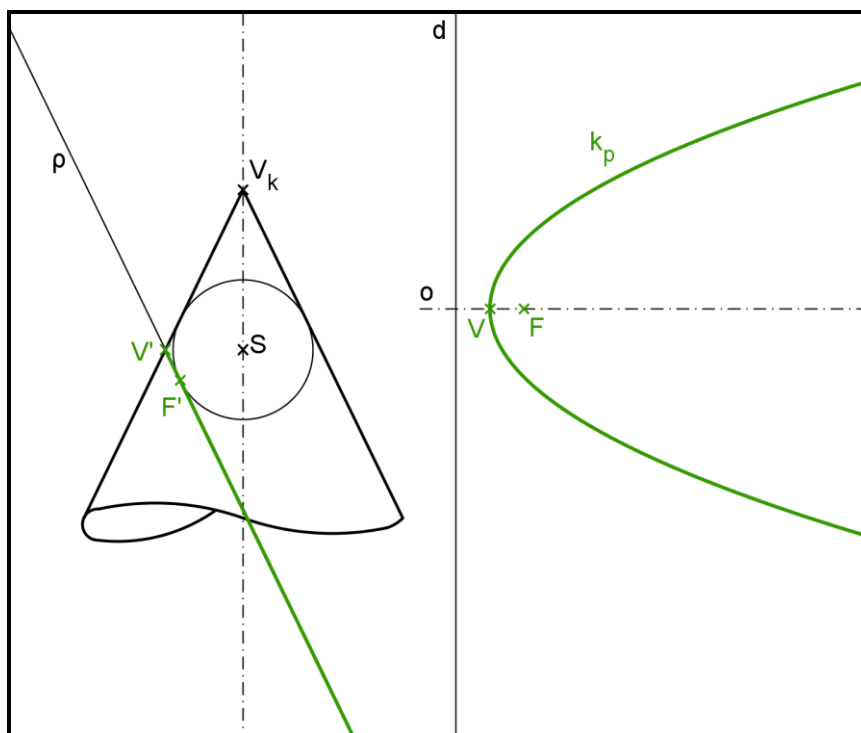


5K.1.2 Parabolický řez rotační kuželové plochy

Jestliže rovina ρ je rovnoběžná právě s jednou povrchovou přímkou rotační kuželové plochy, pak je řezem parabola. Její ohnisko je dotykovým bodem sféry vepsané do kuželové plochy (podle Věty K5.1).

V Apletu K5.2 je nárys části kuželové plochy. Je zde zobrazena rovina ρ , jejíž polohu můžete měnit pomocí bodu V' . Změnou polohy roviny ρ se bude měnit vepsaná sféra a tedy i dotykový bod - ohnisko paraboly řezu. Vpravo je potom skutečná velikost řezu - paraboly.

Aplet K5.2: Parabolický řez rotační kuželové plochy; skutečný obraz řezu.



Důkaz Věty K5.1 (Quételet, Dandelin pro parabolu):

(obrázek K5.3; důkaz čerpán z Pomykalová [11] str. 273, 274)

Nechť je dána kuželová plocha K a rovina ρ je rovinou řezu. ρ není vrcholová rovina a je rovnoběžná s jedinou povrchovou plochy K .

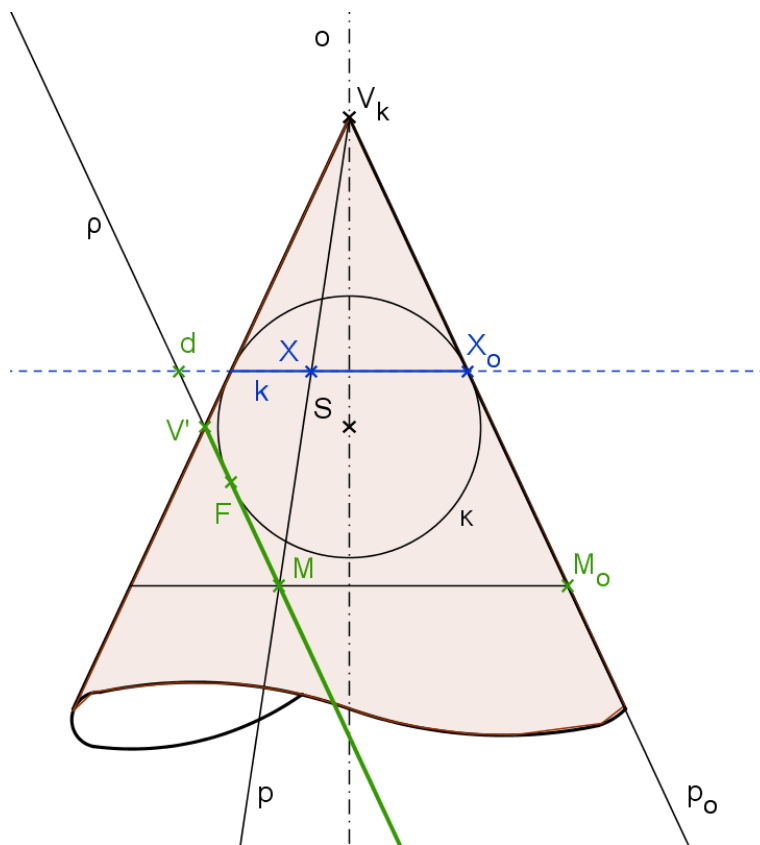
Vepíšme do kuželové plochy K kulovou plochu κ (dotýkající se plochy K podél kružnice k) tak, aby rovina ρ byla zároveň její tečná rovina. Bod dotyku označme F . Rovina kružnice k protíná rovinu ρ v přímce d (nárysem přímky je bod).

Libovolným bodem M řezu vedeme povrchovou přímkou p kuželové plochy K . Přímka p je tečnou kulové plochy κ a dotýká se jí v bodě $X \in k$. Další tečnou kulové plochy procházející bodem M je přímka MF . Délky tečen z bodu ke kulové ploše jsou stejné, proto je $|MF| = |MX|$. Délku úsečky MX určíme otočením úsečky kolem osy o do nárysu (viz obrázek

K5.3). Čtyřúhelník X_oM_oMd je rovnoběžník, proto $|M_oX_o| = |Md|$. A tedy libovolně zvolený bod M je bodem paraboly s ohniskem F a řídicí přímkou d .

Snadno zjistíme, že obráceně každý bod paraboly je také bodem řezu a tím je věta dokázána.

Obrázek K5.3: Důkaz parabolického řezu

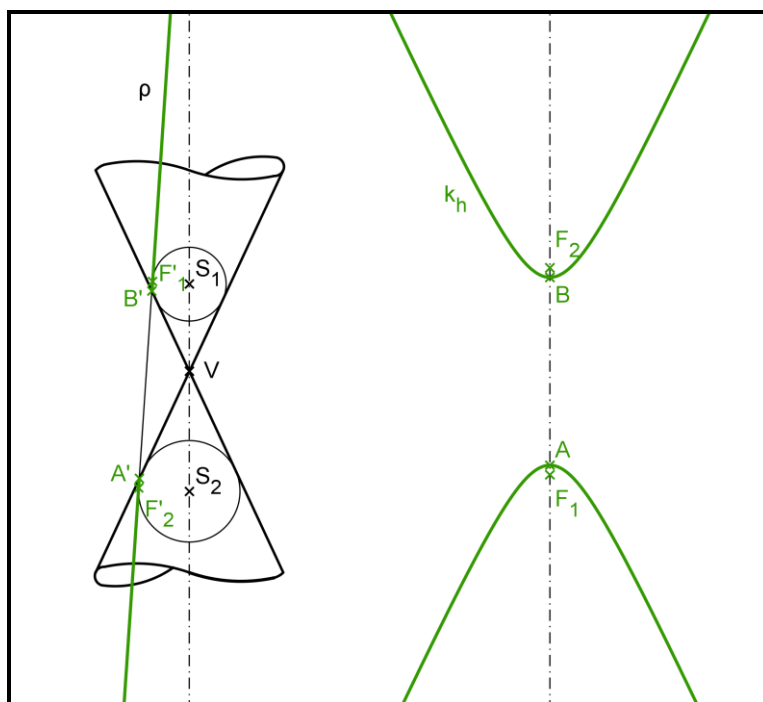


5K.1.3 Hyperbolický řez rotační kuželové plochy

Pokud je rovina ρ rovnoběžná se dvěma povrchovými přímkami rotační kuželové plochy, je řezem hyperbola. Její ohniska jsou dotykové body sfér vepsaných do kuželové plochy a dotýkajících se ρ (podle Věty K5.1).

V *Apletu* K5.3 je nárys části kuželové plochy. Je zde zobrazena rovina ρ , jejíž polohu můžete měnit pomocí bodů A', B' . Změnou polohy roviny ρ se budou měnit vepsané sféry a tedy i dotykové body - ohniska hyperboly řezu. Vpravo je potom skutečná velikost řezu - hyperboly.

Aplet K5.3: Hyperbolický řez rotační kuželové plochy; skutečný obraz řezu.



Důkaz Věty K5.1 (Quételet, Dandelin pro hyperbolu):

(obrázek K5.4)

Důkaz pro hyperbolický řez je obdobný důkazu pro eliptický řez.

Nechť je dána kuželová plocha K a rovina ρ je rovinou řezu. ρ není vrcholová rovina a je rovnoběžná se dvěma površkami plochy K .

Vepišme do kuželové plochy K kulové plochy κ_1, κ_2 (dotýkající se plochy K podél kružnic k_1, k_2) tak, aby rovina ρ byla zároveň jejich tečná rovina. Body dotyku označme F_1, F_2 . Chceme-li dokázat, že průniková křivka je hyperbola, musíme dokázat, že všechny body průniku mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od bodů F_1, F_2 .

Zvolme nyní libovolně bod $M = K \cap \rho$ (chceme dokázat, že leží na hyperbole). Nechť p je površka jím procházející, přičemž $X = p \cap k_1, Y = p \cap k_2$.

Platí: $|MF_1| = |MX|$, protože MF_1 i MX jsou tečny sféry κ_1 , body F_1 a X jí náležejí, tudíž jsou stejně vzdálené od bodu M . Obdobně platí: $|MF_2| = |MY|$. Odtud $\| |MF_1| - |MF_2| \| = \| |MX| - |MY| \| = |XY|$. Pokud navíc površku p otočíme do polohy p_o rovnoběžné s nárysnou (viz. obrázek K5.4), uvidíme ji v nezkrácené podobě. Můžeme tedy určit skutečnou velikost úsečky $XY, |X_oY_o|$. Tímto jsme dokázali, že libovolný bod řezu má

od bodů F_1, F_2 konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovnou $|X_o Y_o|$.
 Dokážeme ještě, že $|X_o Y_o| = |AB| = 2a$ (body A, B viz obrázek K5.4).

Platí: $|Y_o A| = |AF_2|$ a $|AX_o| = |AF_1|$, jelikož AY_o, AF_2 jsou tečny sféry κ_2 z bodu A .

Obdobně AX_o a AF_1 jsou tečny sféry κ_1 .

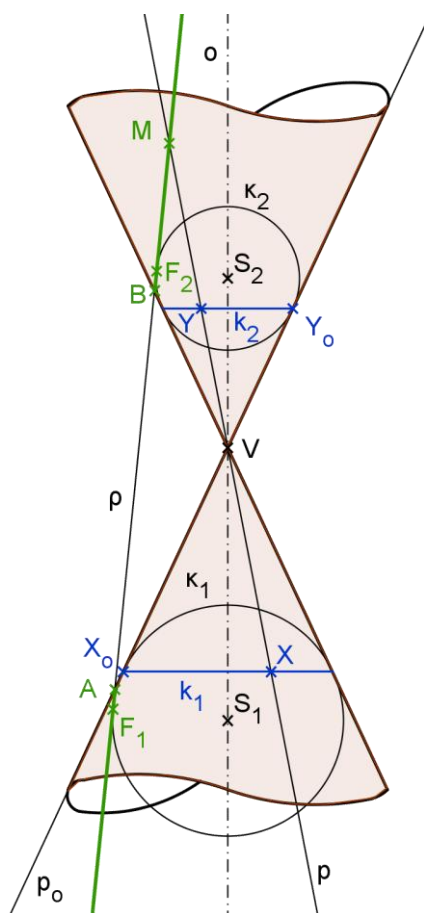
Dále platí: $|F_1 F_2| - 2|AF_1| = |F_1 F_2| - 2|BF_2| \Rightarrow |AF_1| = |BF_2|$

Odtud plyne následující: $|X_o Y_o| = |AY_o| - |AX_o| = |AF_2| - |AF_1| = |AF_2| - |BF_2| = |AB| := 2a$

To znamená, že každý bod řezu je bodem hyperboly, jejíž ohniska jsou body F_1, F_2 a hlavní poloosa má délku $a = \frac{|AB|}{2}$.

A naopak snadno zjistíme, že každý bod hyperboly je též bodem řezu a tím je věta dokázána.

Obrázek K5.4: Důkaz hyperbolického řezu

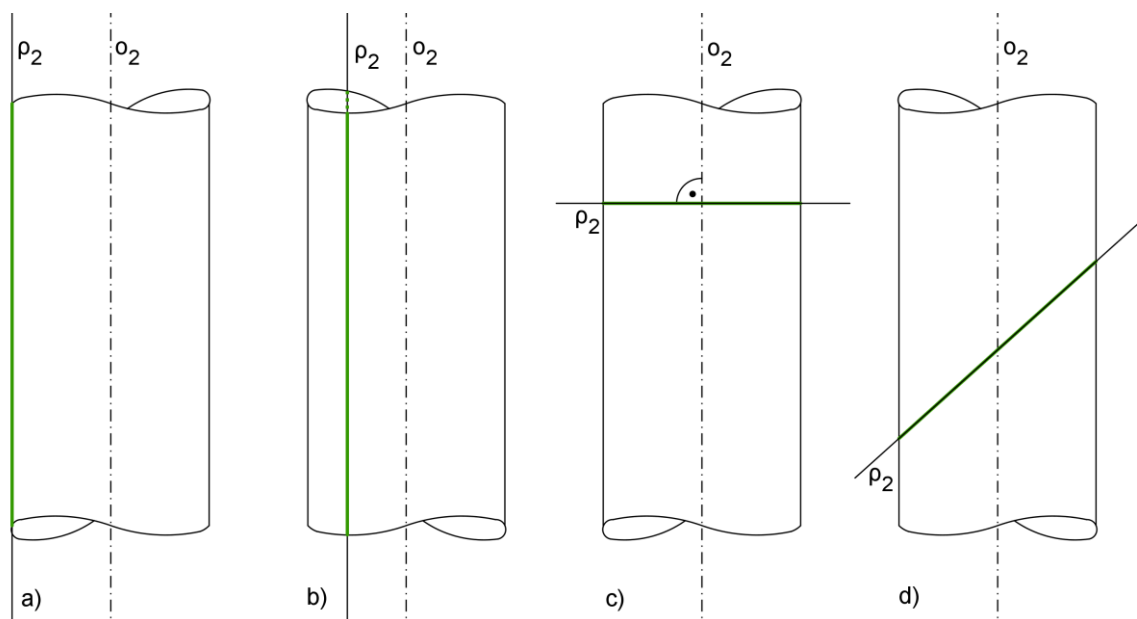


5V.1 Řez rotačního válce rovinou

Tato kapitola je doplněním předchozí kapitoly. Budeme se tentokrát zabývat řezy rotační válcové plochy rovinou.

Stejně jako tomu bylo u řezů rotační kuželové plochy, i v případě rotační válcové plochy dostáváme kuželosečky. Označme válcovou plochu V , její osu o a rovinu řezu ρ . Pokud je ρ tzv. **směrová rovina**- rovnoběžná se směrem površek plochy V , řezem budou singulární kuželosečky, a to: přímka nebo dvě navzájem rovnoběžné přímky (v obou případech se jedná o povrchové přímky válcové plochy V , viz *obrázek V5.1 a), b)*). Přímku dostáváme v případě, když rovina ρ je tečnou rovinou plochy V .

Obrázek V5.1: Klasifikace rovinných řezů rotační válcové plochy. Řezem je: a) jedna povrchová přímka, b) dvě rovnoběžky (povrchové přímky), c) kružnice, d) elipsa



Pozn. k obrázku V5.1: Dané válcové plochy volíme tak, že mají osy o v průmětně (nárysň), rovina řezu ρ je k průmětně kolmá, zobrazuje se jako přímka. Řezy jsou částmi této přímky. Libovolná povrchová kružnice válcové plochy se zobrazuje jako úsečka kolmá k její ose. Tento způsob zobrazení bude použit i v ostatních obrázcích této kapitoly, ovšem objekty budou pro jednoduchost popisovány bez 2 v dolním indexu (což značí, že se jedná o nárys).

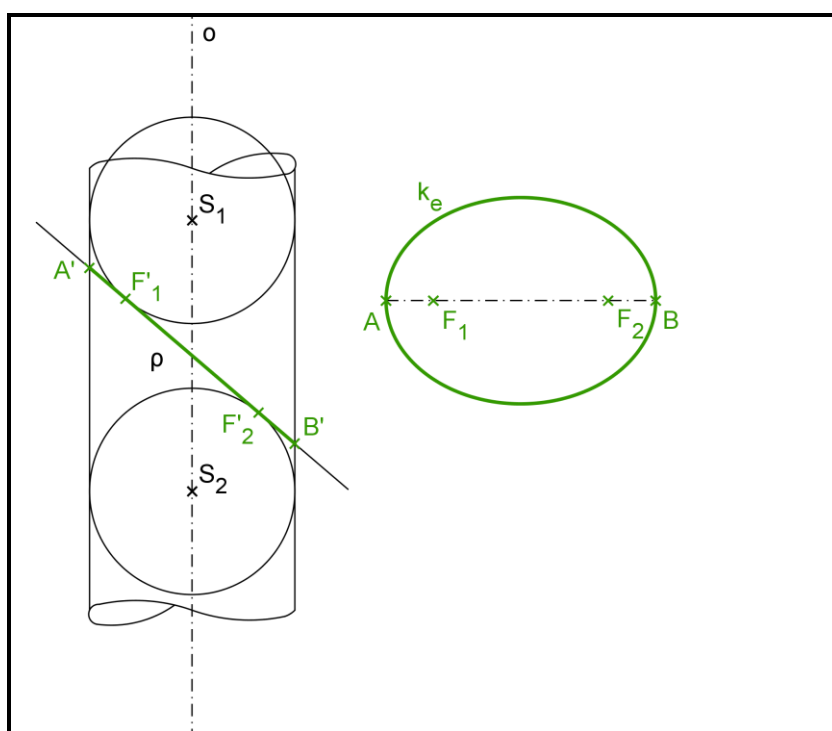
Pokud rovina řezu ρ není směřová, potom je řezem regulární kuželosečka a to buď kružnice nebo elipsa, viz *obrázek V5.1 c), d)*. Vlastnosti elipsy, která je řezem rotační válcové plochy popisuje **Quételetova - Dandelinova věta**. (citace z: *Pomykalová [11] str. 264*)

Věta V5.1 (Quételet, Dandelin): Řezem rotační válcové plochy rovinou, která je kosá k ose plochy, je elipsa. Jejími ohnisky jsou dotykové body kulových ploch vepsaných válcové ploše tak, že se dotýkají roviny řezu. Střed elipsy leží na ose válcové plochy, délka její vedlejší poloosy je rovna poloměru válcové plochy.

Věta V5.1 hovoří o rovině, která je kosá k ose plochy. Poznamenejme jen, že pokud by rovina řezu ρ byla kolmá k ose plochy, potom by řezem byla kružnice. Kružnici můžeme brát jako speciální případ elipsy. Vepsané sféry by se v tomto případě dotýkaly roviny ρ ve stejném bodě - středu kružnice.

V *Apletu V5.1* níže je nárys části rotační válcové plochy. Je zde zobrazena rovina ρ , jejíž polohu můžete měnit pomocí bodů A' , B' . Změnou polohy roviny ρ se budou měnit vepsané sféry a tedy i dotykové body - ohniska elipsy řezu. Vpravo je potom skutečná velikost řezu - elipsy. Všimněte si, že "výška" = vedlejší poloosa elipsy je i přes změnu polohy roviny stejná. To proto, že je rovna poloměru válcové plochy, jak říká věta V5.1.

Aplet V5.1: Eliptický řez rotační válcové plochy; skutečný obraz řezu.



Důkaz Věty V5.1 (Quételet, Dandelin): (obrázek V5.2)

Důkaz budeme provádět obdobně jako důkaz pro eliptický řez rotační kuželové plochy. Necht' je dána rotační válcová plocha V a rovina ρ je rovinou řezu. ρ není směřová rovina a je kosá k ose plochy o . Vepíšme (podle věty V5.1) do válcové plochy V sféry κ_1, κ_2 tak, aby se dotýkaly i roviny ρ . Středy S_1, S_2 těchto sfér leží na ose válcové plochy a dotýkají se plochy V podél kružnic k_1, k_2 . Dále označme F_1, F_2 body dotyku kulových ploch κ_1, κ_2 s rovinou ρ .

Naším úkolem je nyní dokázat, že řezem je elipsa s ohnisky F_1, F_2 . Zvolme tedy libovolně bod řezu M a ved'me jím povrchovou přímku p válcové plochy V ($M \in p \parallel o$). Přímka p se dotýká sféry κ_1 v bodě X ($X \in k_1$) a druhé sféry κ_2 v bodě Y ($Y \in k_2$).

Platí: $|MF_1| = |MX|$, protože MF_1 i MX jsou tečny sféry κ_1 , body F_1 a X jí náleží, tudíž jsou stejně vzdálené od bodu M . Stejně tak: $|MF_2| = |MY|$.

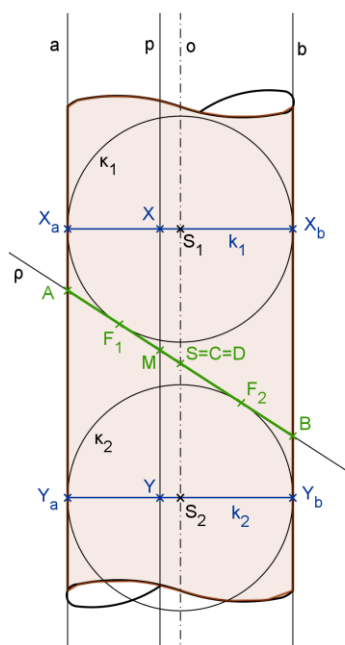
Z toho plyne: $|MF_1| + |MF_2| = |MX| + |MY| = |XY| = |S_1S_2|$.

Též body A, B jsou body řezu, a proto: $|AF_1| + |AF_2| = |AX_a| + |AY_a| = |X_aY_a| = |S_1S_2|$, resp. $|BF_1| + |BF_2| = |BX_b| + |BY_b| = |X_bY_b| = |S_1S_2|$. A protože $|AF_1| = |BF_2|$, dostáváme $|S_1S_2| = |BF_2| + |AF_2| = |AB|$.

Tímto jsme dokázali, že libovolný bod řezu má od bodů F_1, F_2 konstantní vzdálenost $|AB| > |F_1F_2|$, tudíž průnikovou křivkou je elipsa. Body A, B jsou hlavními vrcholy elipsy, střed S úsečky AB je jejím středem ($S \in o$). Vedlejší vrcholy C, D elipsy jsou průsečíky válcové plochy V a kolmice k úsečce AB procházející středem S a ležící v rovině ρ . Délka vedlejší poloosy je tedy rovna poloměru válcové plochy V .

Snadno zjistíme, že obráceně každý bod elipsy je také bodem řezu a tím je věta dokázána.

Obrázek V5.2: Důkaz eliptického řezu



6. Průměry kuželoseček

V následujících kapitolách budeme často využívat pojmu **průměr kuželosečky**. Proto si tento termín nadefinujeme a seznámíme se s ním.

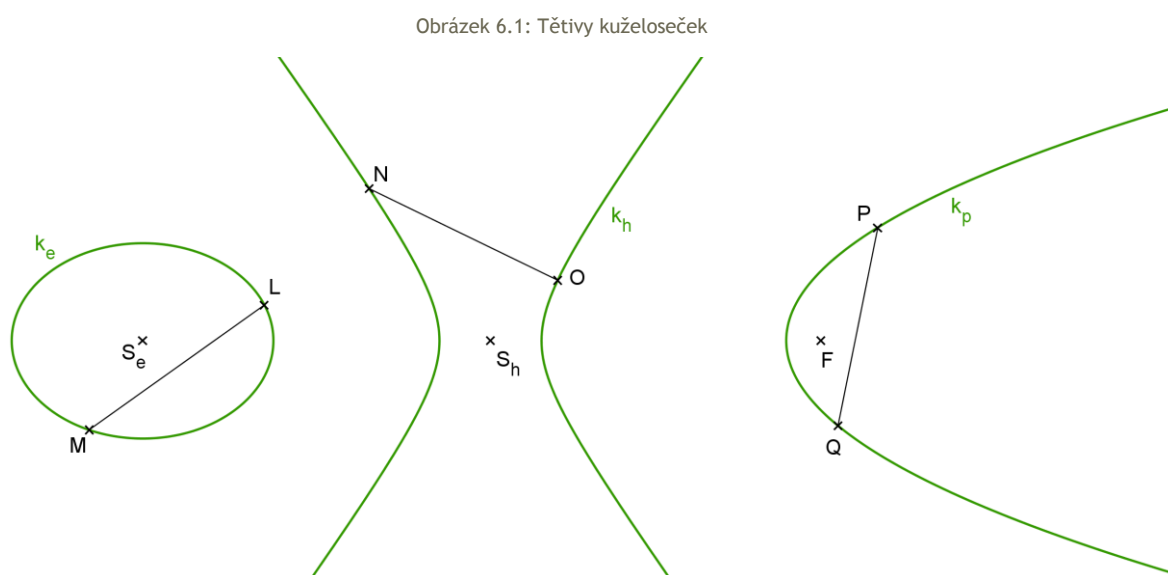
Jistě všichni známe pojem průměr kružnice. Jedná se o úsečku procházející jejím středem, jejíž krajní body jsou právě body kružnice. Mohli bychom tedy intuitivně (i bez definice) tušit, o co v obecnějším podání (v případě kuželoseček) půjde. Ovšem tak jednoduché to přeci jen nebude. Pomyslíme-li ku příkladu na to, že parabola žádný střed nemá, nebo že existuje přímka procházející středem hyperboly, která není (jejími větvemi) omezená.

Společnou definici **průměru** vymezuje *projektivní geometrie*, která je nad rámec této práce. (Ta průměr kuželosečky zavádí jako vlastní přímku, jejíž pól vzhledem k dané kuželosečce je nevlastní bod.)

Dalším používaným termínem je **tětiva kuželosečky**. Její definice není náročná, proto je uvedena již zde.

Definice: Tětiva kuželosečky je úsečka, jejíž krajní body jsou body této kuželosečky.

Pro lepší představivost jsou na *obrázku 6.1* znázorněny příklady tětiv.



6E.1 Průměry elipsy

Na střední škole se průměr elipsy definuje jako tětiva, která prochází středem elipsy (viz. Pomykalová [11] str. 50). Průměry ostatních kuželoseček se na střední škole vůbec nedefinují. Chceme-li vytvořit komplexnější nadhled nad průměry kuželoseček, budeme používat (pro elipsu) následující definici.

Definice: Průměrem elipsy budeme rozumět každou přímku procházející jejím středem S .

Průměr elipsy tedy není chápán jako úsečka, jak je tomu u kružnice, ale jedná se o celou přímku. Někdy se též hovoří o **průměrové přímce**. Občas ovšem potřebujeme hovořit o krajních, resp. koncových bodech průměru elipsy, pak budeme průměr chápat ve smyslu středoškolské definice. Rovněž, mluví-li se o délce průměru, myslí se tím samozřejmě délka příslušné tětivy elipsy. Chceme-li toto zdůraznit, nazýváme jej **omezeným průměrem**.

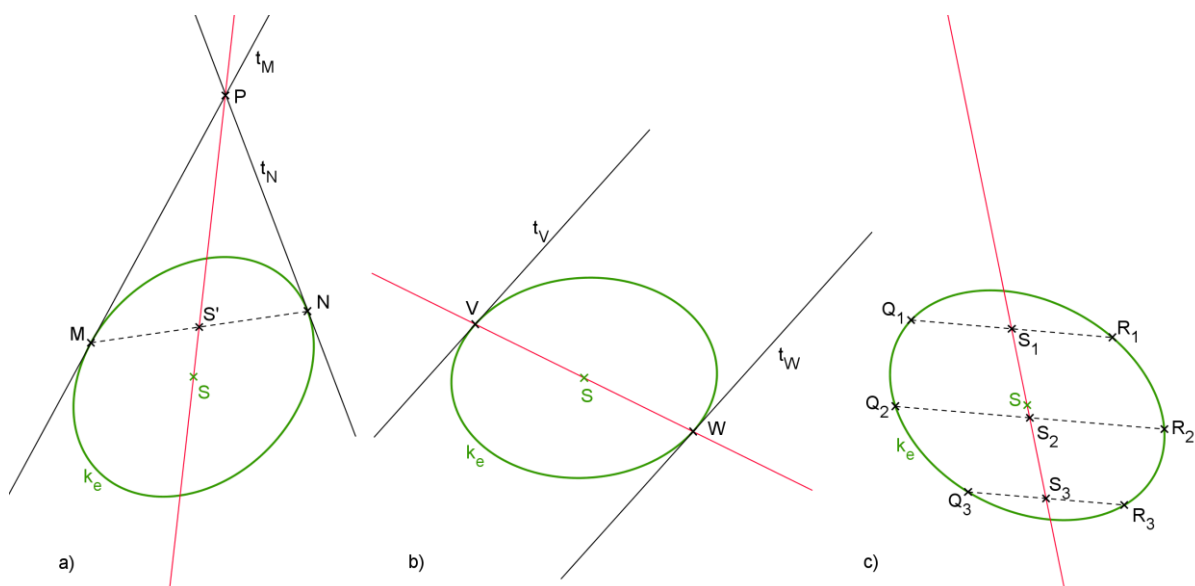
Pro průměry elipsy platí následující tvrzení, která doplňuje obrázek E6.1 :

Tvrzení E6.1: Spojnice průsečíku dvou tečen elipsy se středem tětivy, jejíž krajní body jsou body dotyku těchto tečen s danou elipsou, je průměr elipsy.

Tvrzení E6.2: Spojnice bodů dotyku dvou rovnoběžných tečen elipsy je jejím průměrem.

Tvrzení E6.3: Spojnice středů rovnoběžných tětiv elipsy je jejím průměrem.

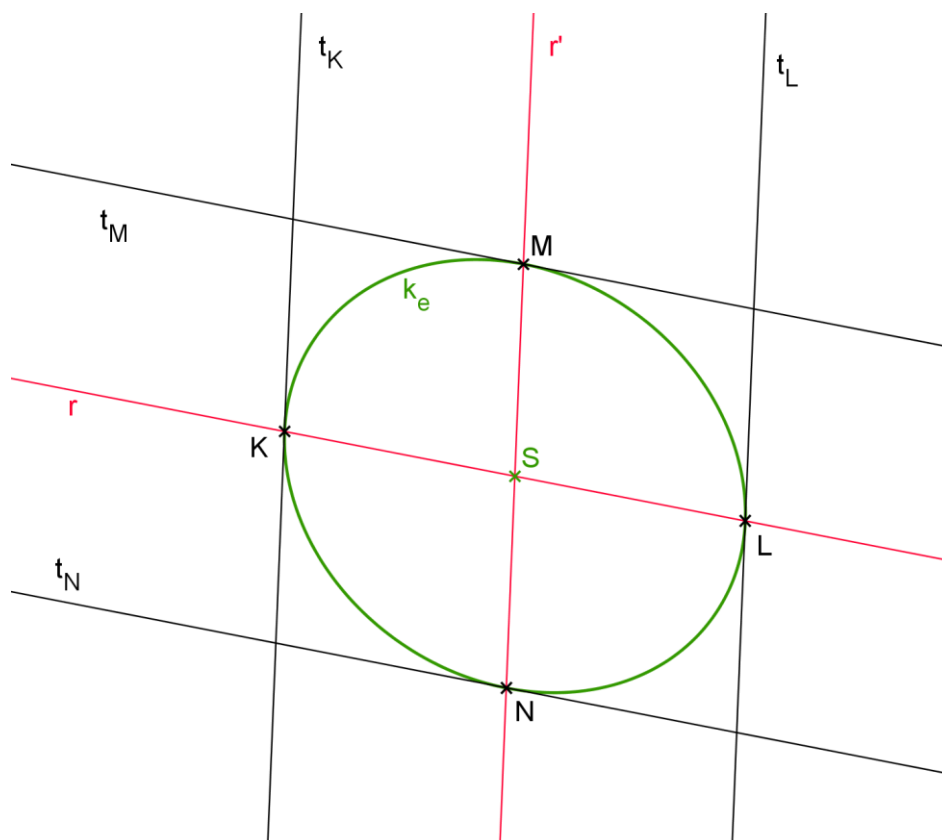
Obrázek E6.1: Průměry elipsy: a) Tvrzení E6.1, b) Tvrzení E6.2, c) Tvrzení E6.3



6E.2 Sdružené průměry elipsy

Definice: Dva průměry elipsy se nazývají **sdružené**, jsou-li tečny v krajních bodech jednoho průměru rovnoběžné s druhým průměrem a naopak.

Obrázek E6.2: Sdružené průměry elipsy - definice



Ke každému průměru elipsy tedy můžeme dohledat jeho sdružený průměr, je to jakási speciální dvojice. U kružnice jsou každé dva sdružené průměry navzájem kolmé. Zato u elipsy, která není kružnicí, existuje právě jedna dvojice sdružených a současně kolmých průměrů - hlavní a vedlejší osa.

Pro sdružené průměry platí tvrzení, která doplňují *obrázky E6.3 a E6.4*:

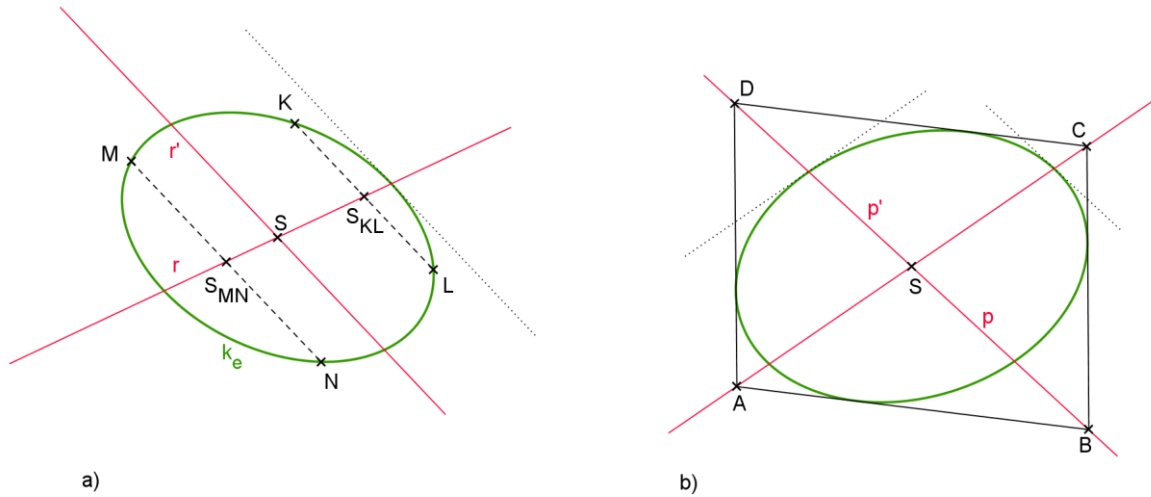
Tvrzení E6.4: Každý ze dvou sdružených průměrů elipsy pólí její tětivy rovnoběžné s druhým průměrem.

Tvrzení E6.5: Úhlopříčky rovnoběžníka elipse opsaného jsou její sdružené průměry.

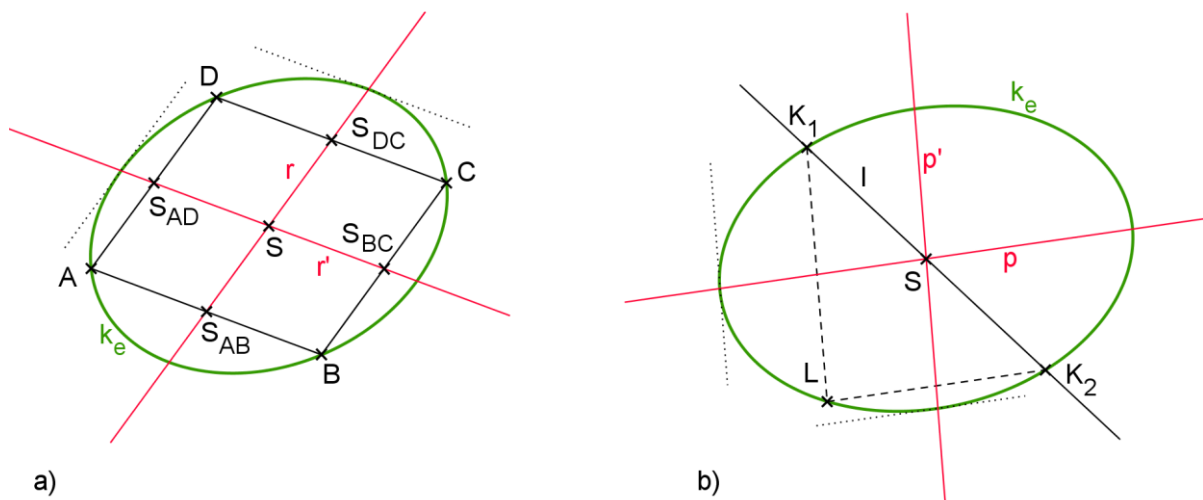
Tvrzení E6.6: Střední příčky rovnoběžníka elipse vepsaného jsou její sdružené průměry.

Tvrzení E6.7: Spojnice libovolného bodu elipsy s krajními body libovolného průměru jsou rovnoběžné se sdruženými průměry této elipsy.

Obrázek E6.3: Sdružené průměry elipsy: a) Tvrzení E6.4, b) Tvrzení E6.5



Obrázek E6.4: Sdružené průměry elipsy: a) Tvrzení E6.6, b) Tvrzení E6.7



Pozn.: Tvrzení byla čerpána z *webových str.* [W8].

Tvrzení by byla dokazována pomocí prostředků projektivní geometrie, proto zde důkazy uvedeny nejsou.

6H.1 Průměry hyperboly

Definice: Průměrem hyperboly budeme rozumět každou přímku procházející jejím středem S .

Průměr hyperboly tedy není chápán jako úsečka, jedná se o přímku. Někdy se též hovoří o **průměrové přímce**. Úsečky, které na nich vytíná hyperbola, označujeme jako **délky průměrů** nebo **omezené průměry**. Ovšem u hyperboly existují i průměry "neomezené". Takovými mezními "neomezenými" průměry jsou asymptoty.

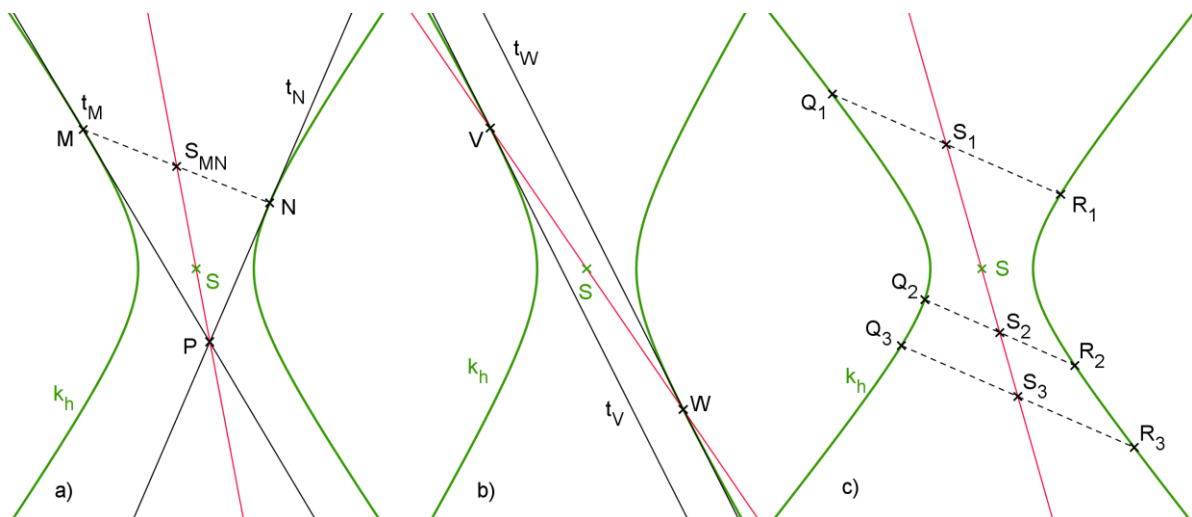
Pro průměry hyperboly platí následující tvrzení, která doplňují *obrázek H6.1*:

Tvrzení H6.1: Spojnice průsečíku dvou tečen hyperboly se středem tětivy, jejíž krajní body jsou body dotyku těchto tečen s danou hyperbolou, je průměr hyperboly.

Tvrzení H6.2: Spojnice bodů dotyku dvou rovnoběžných tečen hyperboly je jejím průměrem.

Tvrzení H6.3: Spojnice středů rovnoběžných tětív hyperboly je jejím průměrem.

Obrázek H6.1: Průměry hyperboly: a) Tvrzení H6.1, b) Tvrzení H6.2, c) Tvrzení H6.3

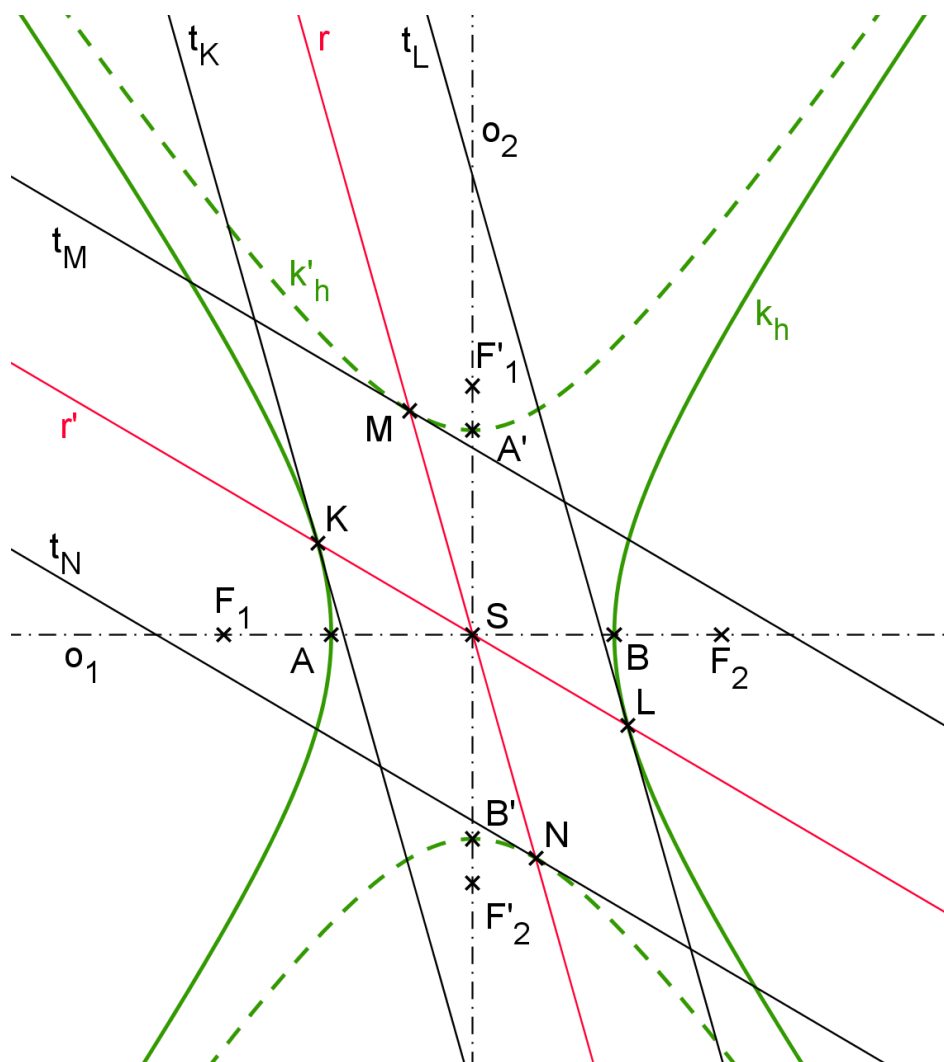


6H.2 Sdružené průměry hyperboly

Definice: Dva průměry hyperboly a k ní doplňkové hyperboly se nazývají **sdružené**, jsou-li tečny v krajních bodech jednoho průměru rovnoběžné s druhým průměrem a naopak.

Ke každému průměru hyperboly tedy můžeme dohledat jeho sdružený průměr. K tomu je za potřebí znát i doplňkovou hyperbolu k té původní (viz kapitola [Základní vlastnosti hyperboly](#)). Průměry jsou sdružené pro obě hyperboly a mohou svírat libovolný úhel. Jediná dvojice sdružených průměrů, která je navzájem kolmá, je dvojice os hyperboly (a hyperboly doplňkové).

Obrázek H6.2: Sdružené průměry hyperboly

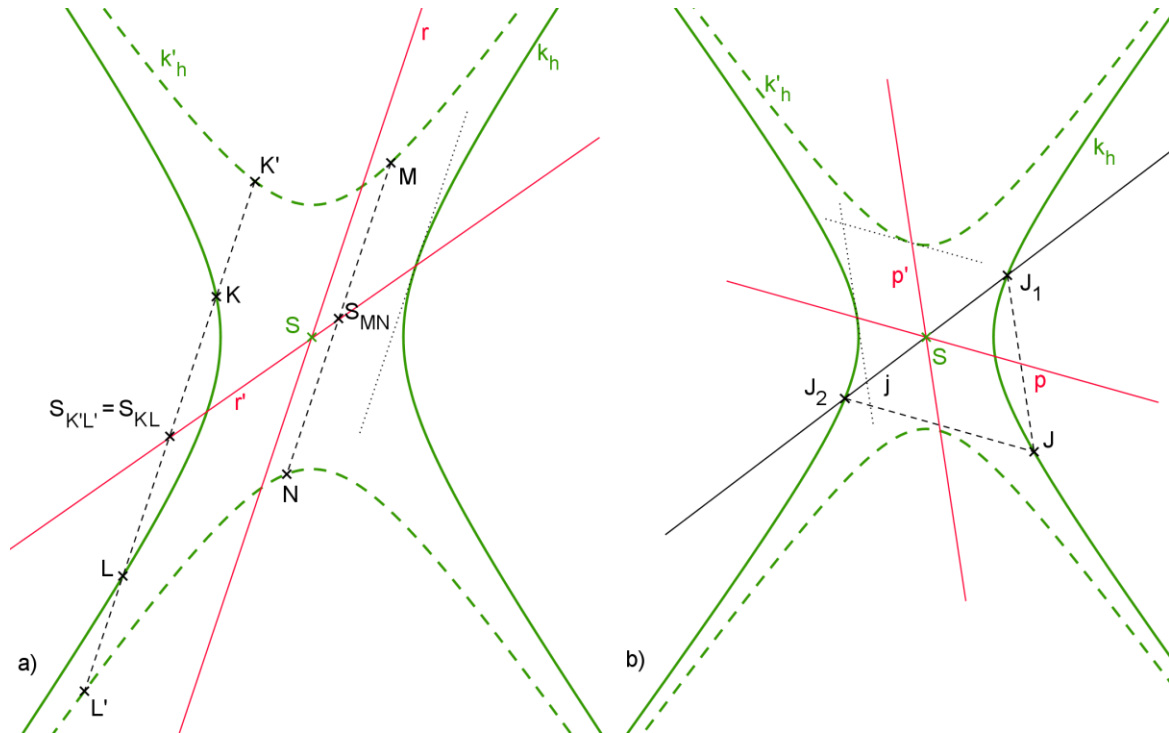


Pro sdružené průměry platí tvrzení, které doplňuje *obrázek H6.3*:

Tvrzení H6.4: Každý ze dvou sdružených průměrů hyperboly pólí její třetivy rovnoběžné s druhým průměrem.

Tvrzení H6.5: Spojnice libovolného bodu hyperboly s krajními body libovolného průměru jsou rovnoběžné se sdruženými průměry této hyperboly.

Obrázek H6.3: Sdružené průměry hyperboly: a) Tvrzení H6.4, b) Tvrzení H6.5



Pozn.: Tvrzení byla čerpána z *webových str.* [W8].

Tvrzení by byla dokazována pomocí prostředků projektivní geometrie, proto zde důkazy uvedeny nejsou.

6P.1 Průměry paraboly

Definice: Průměrem paraboly budeme rozumět každou přímku rovnoběžnou s její osou o .

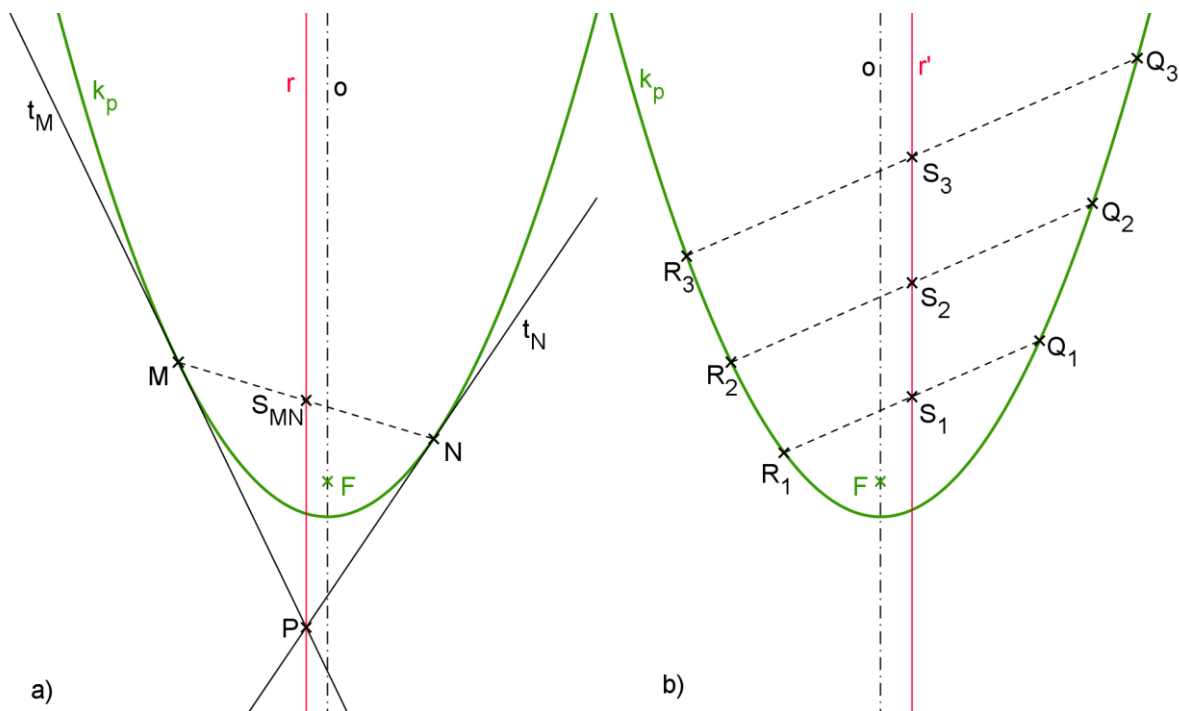
Průměr paraboly je chápán jako přímka. Někdy se též hovoří o **průměrové přímce**. Žádný omezený průměr u paraboly neexistuje, proto pojem délka průměru v tomto případě pozbývá smyslu. Průměr, který zároveň prochází ohniskem paraboly, je osou.

Pro průměry paraboly platí následující tvrzení, která doplňuje *obrázek P6.1*:

Tvrzení P6.1: Spojnice průsečíku dvou tečen paraboly se středem tětivy, jejíž krajní body jsou body dotyku těchto tečen s danou parabolou, je průměr paraboly.

Tvrzení P6.2: Spojnice středů rovnoběžných tětiv paraboly je jejím průměrem.

Obrázek P6.1: Průměry paraboly: a) Tvrzení P6.1, b) Tvrzení P6.2



K předešlému tvrzení P6.1 a obrázku P6.1 a) nutno podotknout, že průměr r je tzv. **sdužený** s tětivou MN a každou další s ní rovnoběžnou. Stejně tak v tvrzení P6.2 a obrázku P6.1 b) průměr r' je **sdužený** s osnou rovnoběžných tětiv (na obrázku P6.1 b) jsou to tětivy R_1Q_1, R_2Q_2, R_3Q_3).

Pozn.: Tvrzení byla čerpána z *webových str.* [W8].

Tvrzení by byla dokazována pomocí prostředků projektivní geometrie, proto zde důkazy uvedeny nejsou.

7. Konstrukce

Kapitola je souhrnem několika konstrukcí kuželoseček. Konstrukce jsou založeny na různých principech. Některé plynou přímo z definice, jiné z ohniskových vlastností či z dalších vlastností kuželoseček. Vzhledem k tomu, že elipsa je nejčastěji používaná (rýsovaná) křivka v deskriptivní geometrii, je zde uveden větší počet jejích konstrukcí.

V kapitole [Konstrukce elipsy](#) naleznete následující konstrukce:

Bodová konstrukce I

Bodová konstrukce II

Zahradnická konstrukce

Rozdílová proužková konstrukce

Součtová proužková konstrukce

Trojúhelníková konstrukce

Příčková konstrukce

Rytzova konstrukce

Frézierova konstrukce

Konstrukce elipsy ohýbáním papíru

V kapitole [Konstrukce hyperboly](#) naleznete následující konstrukce:

Bodová konstrukce

Konstrukce hyperboly, jsou-li dány její asymptoty a bod

Konstrukce hyperboly ohýbáním papíru

V kapitole [Konstrukce paraboly](#) naleznete následující konstrukce:

Bodová konstrukce

Příčková konstrukce

Konstrukce paraboly ohýbáním papíru

7E.1 Konstrukce elipsy

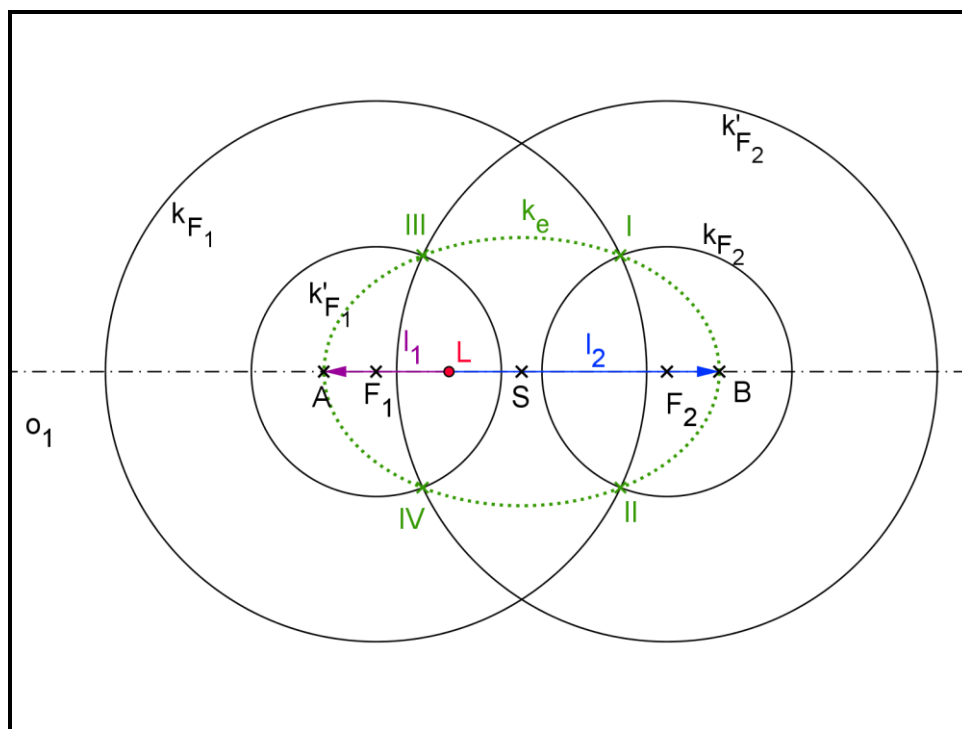
7E.1.1 Bodová konstrukce I

Bezprostředně z definice elipsy vyplývá tzv. **bodová konstrukce I**, která je nahrána v *apletu E7.1*.

Nechť jsou dány dva různé body - ohniska F_1, F_2 a délka hlavní poloosy a . Budeme hledat body, které mají konstantní součet vzdáleností rovný $2a$ od ohnisek F_1, F_2 . Za tímto účelem si na přímce F_1F_2 sestrojíme hlavní vrcholy A, B elipsy, přičemž $|AS| = |SB| = a$, kde S je středem úsečky F_1F_2 (středem hledané elipsy). Dále budeme volit libovolně bod $L \in F_1F_2$, jenž úsečku AB rozdělí na dvě části o délkách $l_1 = |AL|$, $l_2 = |LB|$, $(l_1 + l_2 = 2a)$. Sestrojíme kružnice $k_{F_1}(F_1; l_2)$, $k_{F_2}(F_2; l_1)$ a $k'_{F_1}(F_1; l_1)$, $k'_{F_2}(F_2; l_2)$. Je zřejmé, že kružnice k_{F_1} , k_{F_2} (resp. k'_{F_1} , k'_{F_2}) se protínají v bodech elipsy ($k_{F_1} \cap k_{F_2} = \{I, II\}$, $k'_{F_1} \cap k'_{F_2} = \{III, IV\}$). Různou volbou bodu L získáme různé poloměry kružnic a tím i různé body elipsy.

V *apletu E7.1* je konstrukce nahrána. Po přehrání můžete měnit polohu bodu L - pohybovat s ním po úsečce AB , tím získáte další body elipsy.

Aplet E7.1: Bodová konstrukce elipsy I



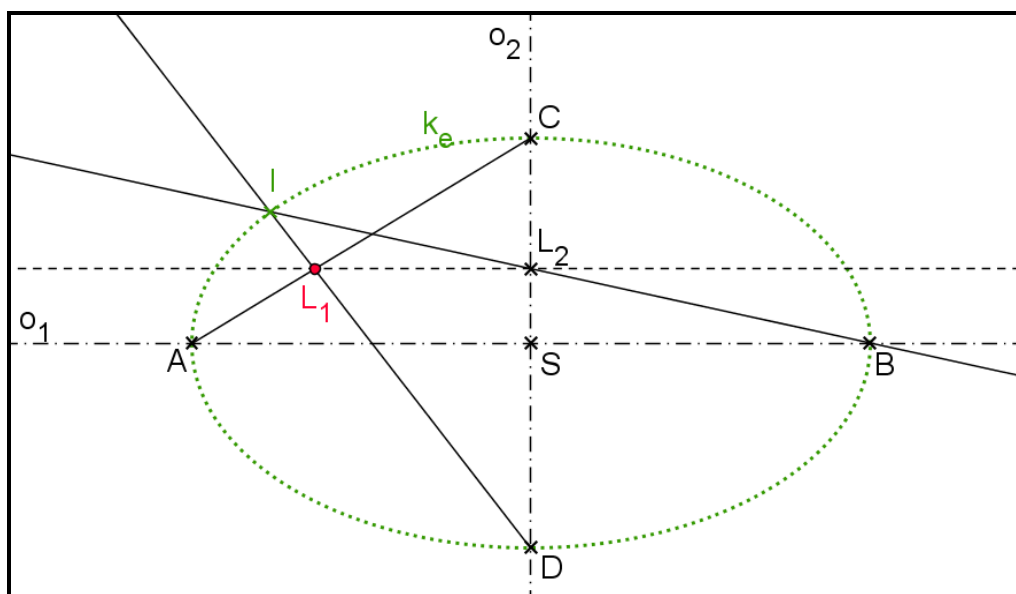
Pozn.: Pokud bude elipsa zadána délkou hlavní a vedlejší poloosy, pak samozřejmě není problém ohniska dohledat (pomocí charakteristického trojúhelníka) a provést bodovou konstrukci.

7E.1.2 Bodová konstrukce II

Další způsob jak sestrojít jednotlivé body elipsy, pokud jsou dány délky hlavní a vedlejší poloosy, je tzv. **bodová konstrukce II**. Její největší výhodou je fakt, že na konstrukci bodů nepotřebujeme kružítko.

Postup je nahaný v *apletu E7.2*. Dány jsou velikosti hlavní a vedlejší poloosy. Sestrojíme vrcholy A, B, C, D hledané elipsy. Pro dohledání dalších bodů budeme potřebovat spojnice hlavních a vedlejších vrcholů. Hledejme např. body elipsy, které leží v kvadrantu určeném hlavní a vedlejší osou, jenž je incidentní se spojnicí AC . Nejprve zvolíme na úsečce AC libovolný bod L_1 , jím vedeme polopřímku DL_1 (spojnici s druhým vedlejším vrcholem) a také rovnoběžku s hlavní osou o_1 . Průnik této rovnoběžky a vedlejší osy o_2 označíme L_2 . Bodem L_2 a druhým hlavním vrcholem B proložíme přímku L_2B . Průnik přímek L_1D a L_2B je hledaný bod I elipsy. (čerpáno z: Brejmann [14] str. 157 a 158)

Aplet E7.2: Bodová konstrukce elipsy II



Tato konstrukce však nevychází z definice elipsy, ale z afinního vztahu mezi kružnicí a elipsou. Pokud bychom měli alespoň naznačit důkaz, využívala by se v něm kružnice (afinní obraz elipsy) nad průměrem AB . Příslušná afinita by byla dána osou $o = o_1 = AB$ a směrem kolmým k této ose. Snadno lze dokázat, že **bodová konstrukce II** platí pro danou kružnici a díky afinnímu vztahu tedy i pro elipsu.

Pozn.: **Osová afinita** v rovině je zobrazení, které zachovává poměry délek. Je nejčastěji zadána osou o a dvojicí odpovídajících si bodů A, A' , která určuje směr afinity s . Je-li směr kolmý k ose o , nazývá se taková afinita **pravoúhlá**. Jestliže $s \parallel o$, jedná se o **afinní elaci**. Odpovídající si

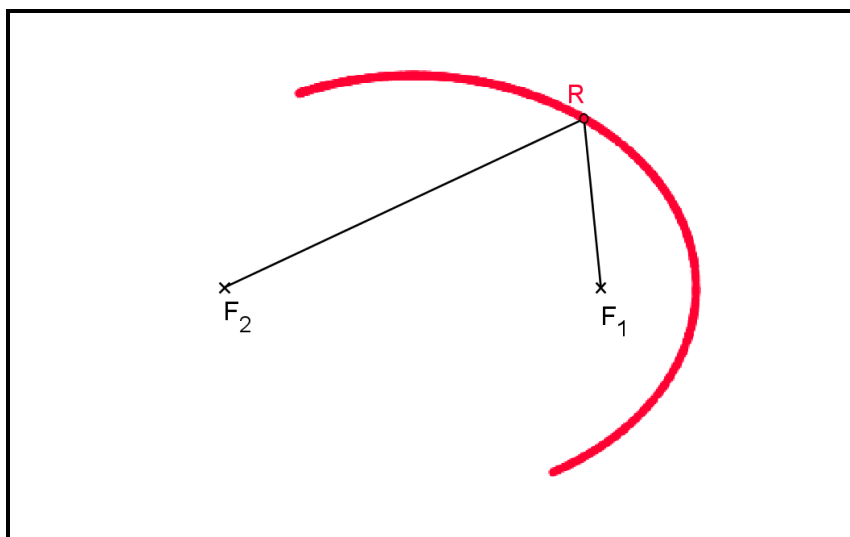
body leží na přímce rovnoběžné se směrem afinity s , odpovídající si přímky se protínají na ose afinity o v tzv. samodružných bodech.

7E.1.3 Zahradnická konstrukce

Zahradnická konstrukce vychází z vlastnosti konstantního součtu vzdáleností bodů od obou ohnisek elipsy stejně jako bodová konstrukce I. Má ovšem mnohem praktičtější využití v běžném životě. Např. jestliže si na zahrádce chceme udělat záhon tvaru elipsy, potřebujeme pouze jeden provázek délky $2a$, dva pevné body F_1, F_2 (ohniska) - zapíchnuté kolíky a potom nějaké rydlo R , resp. křídu, propisku atd. Oba konce provázku přivážeme na kolíky F_1, F_2 . Rydlem pak pohybujeme po napnutém provázku a vykreslíme křivku.

V *apletu E7.3* si simulaci zahradnické konstrukce můžete vyzkoušet. Pohybuje "rydlem" R . Součet délek úseček F_1R, F_2R je konstantní, proto získáte elipsu.

Aplet E7.3: Zahradnická konstrukce elipsy



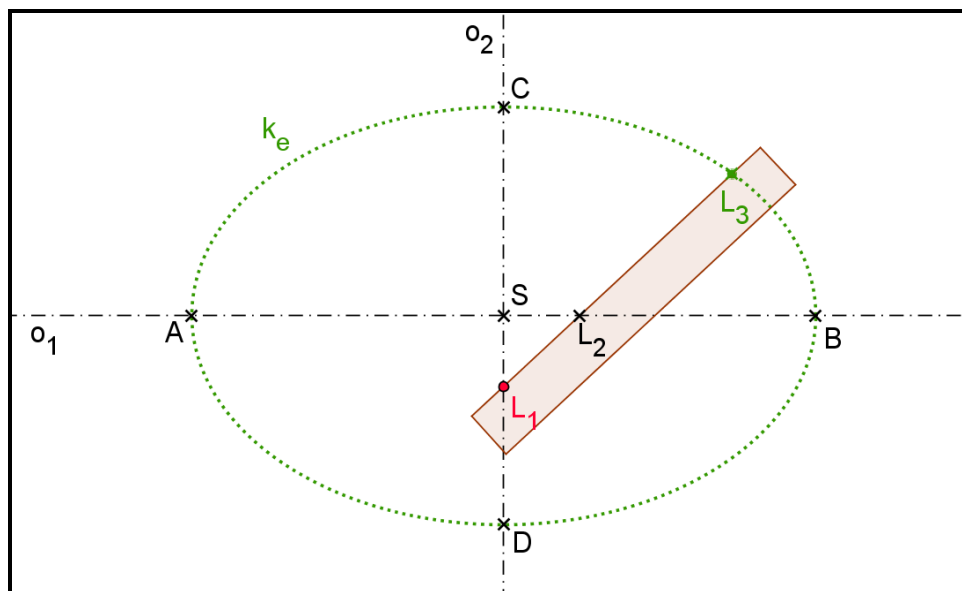
Konstrukce je do jisté míry amatérská a ne zcela přesná. Její výhodou je ovšem jednoduchost a praktičnost použití.

7E.1.4 Rozdílová proužková konstrukce

Známe-li délku hlavní a vedlejší poloosy a , b můžeme pomocí proužku papíru najít body elipsy. Na okraj proužku papíru vyznačíme body L_1, L_2, L_3 (v tomto pořadí!, body leží v přímce) tak, že $|L_1L_3| = a$ a $|L_2L_3| = b$. Narýsujeme osy o_1, o_2 elipsy. Proužkem papíru pohybujeme tak, aby bod L_1 zůstal na vedlejší ose o_2 , bod L_2 na hlavní ose o_1 . Bod L_3 určuje jednotlivé body křivky. Tedy, pohybujeme-li správně proužkem, bod L_3 vykreslí elipsu.

Model rozdílové proužkové konstrukce je v *apletu E7.4*. Pohybuje bodem L_1 po vedlejší ose o_2 . Body L_1, L_2, L_3 jsou nastaveny tak, jak si konstrukce žádá. Bod L_3 vykresluje část elipsy k_e .

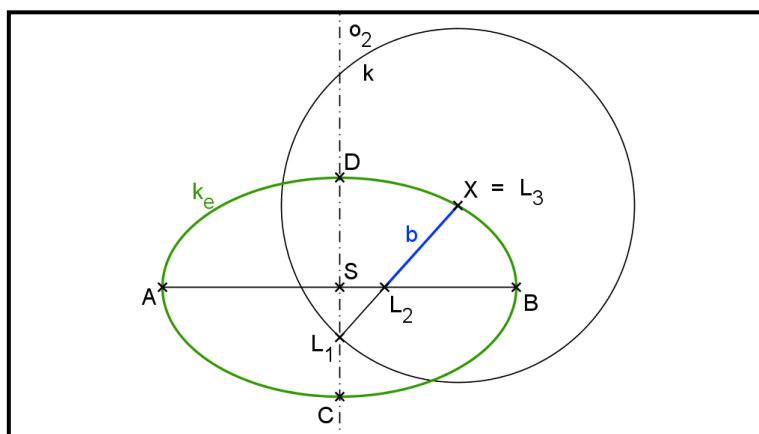
Aplet E7.4: Rozdílová proužková konstrukce elipsy



Máme-li sestavit elipsu, která je zadána pouze hlavními vrcholy A, B a jedním bodem X , lze lehce dohledat délku vedlejší poloosy pomocí **rozdílové proužkové konstrukce** (a to i bez použití papírku). Konstrukce je nahrána v *apletu E7.5*.

Najdeme střed S elipsy (= střed AB) a vedlejší osu o_2 (kolmice vztyčená v bodě S na úsečku AB). Vedlejší vrcholy, které hledáme, budou s osou o_2 incidentní. Bod X představuje bod L_3 z rozdílové proužkové konstrukce. Sestrojíme kružnici k (S, a) a najdeme její průsečík L_1 s vedlejší osou o_2 tak, aby úsečka L_1L_3 protínala úsečku AB . Bod L_2 je průsečíkem L_1L_3 a AB . Díky nalezenému bodu L_2 můžeme dourčit délku vedlejší poloosy $b = |L_2L_3|$.

Aplet E7.5: Rozdílová proužková konstrukce elipsy II

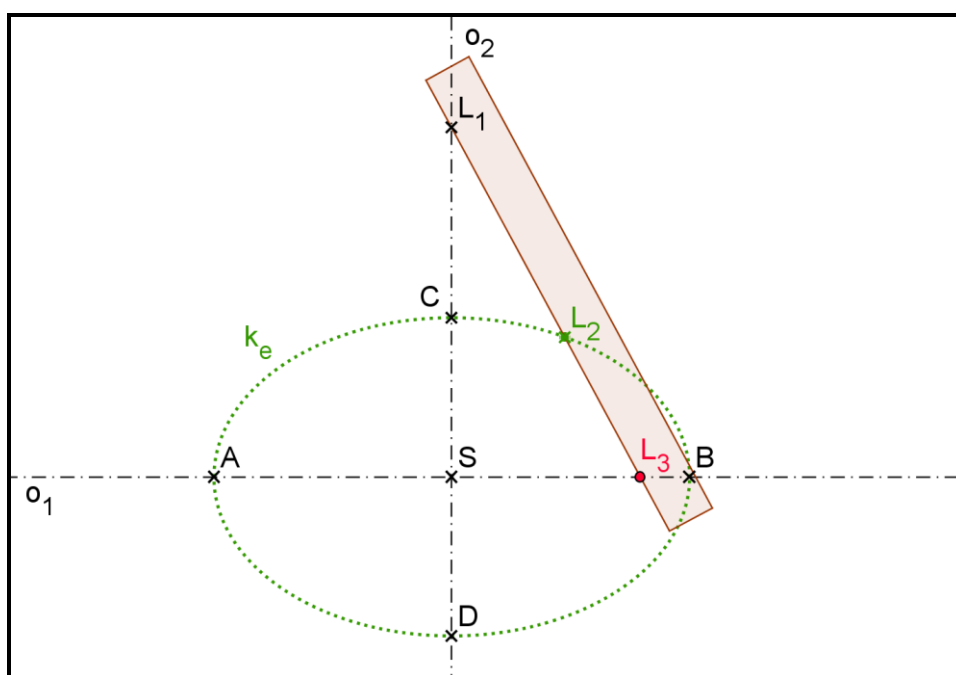


7E.1.5 Součtová proužková konstrukce

Proužkovou konstrukci lze provést ještě jedním způsobem (viz *aplet E7.6*). Opět si na proužek papíru přeneseme délku hlavní a vedlejší poloosy a , b pomocí kolineárních bodů L_1, L_2, L_3 . Tentokrát ale $|L_1L_2| = a$ a $|L_2L_3| = b$. Proužkem pohybujeme tak, aby bod L_1 zůstával na vedlejší ose o_2 , bod L_3 na hlavní ose o_1 . Bod L_2 určuje jednotlivé body křivky. Tedy, pohybujeme-li správně proužkem papíru, bod L_2 vykreslí elipsu.

Model součtové proužkové konstrukce je v *apletu E7.6*. Pohybuje bodem L_3 po hlavní ose o_1 . Body L_1, L_2, L_3 jsou nastaveny tak, jak si konstrukce žádá. Bod L_2 vykresluje část elipsy k_e .

Aplet E7.6: Součtová proužková konstrukce elipsy

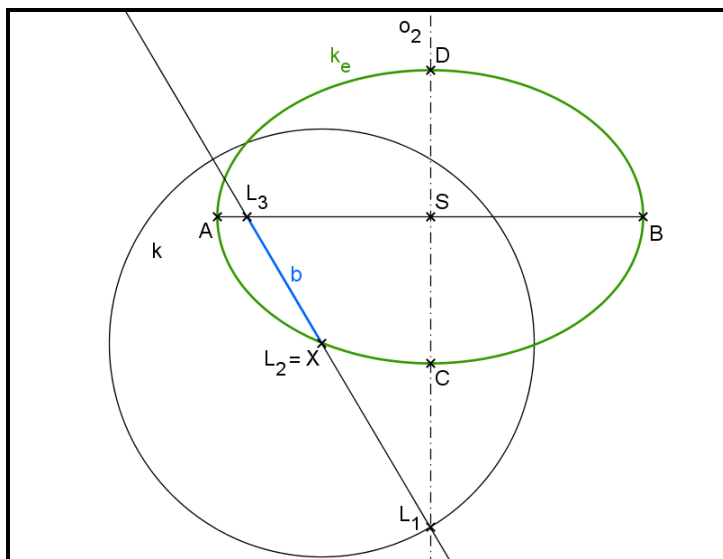


Naskýtá se znovu otázka, jak sestrojít elipsu, která je zadána pouze hlavními vrcholy A, B a jedním bodem X . Vedlejší vrcholy nyní dohledáme pomocí **součtové proužkové konstrukce**.

Najdeme střed S elipsy a vedlejší osu o_2 . Vedlejší vrcholy, které hledáme, budou ležet na ose o_2 . Bod X představuje bod L_2 ze součtové proužkové konstrukce. Pokud bychom situaci řešili pomocí papírku, přenesli bychom na něj velikost $a = |L_1L_2|$. Pak bychom bod L_2 na papírku přiložili přesně na bod X a bod L_1 nastavili tak, že bude ležet na o_2 , přičemž bod L_3 by byl průnikem přímek L_1L_2 a AB . Délka $|L_2L_3|$ by byla velikostí vedlejší poloosy b .

Přesnější je ovšem postup bez použití proužku papíru, který je nahrán v *apletu E7.7*. Sestrojíme kružnici k ($K = L_2, a$) a najdeme její průsečík L_1 s vedlejší osou o_2 tak, aby úsečka L_1L_2 neprotla úsečku AB . Bod L_3 je průsečíkem přímek L_1L_2 a AB . Tím jsme zjistili velikost vedlejší poloosy $b = |L_2L_3|$ a elipsu dourčili.

Aplet E7.7: Součtová proužková konstrukce elipsy II



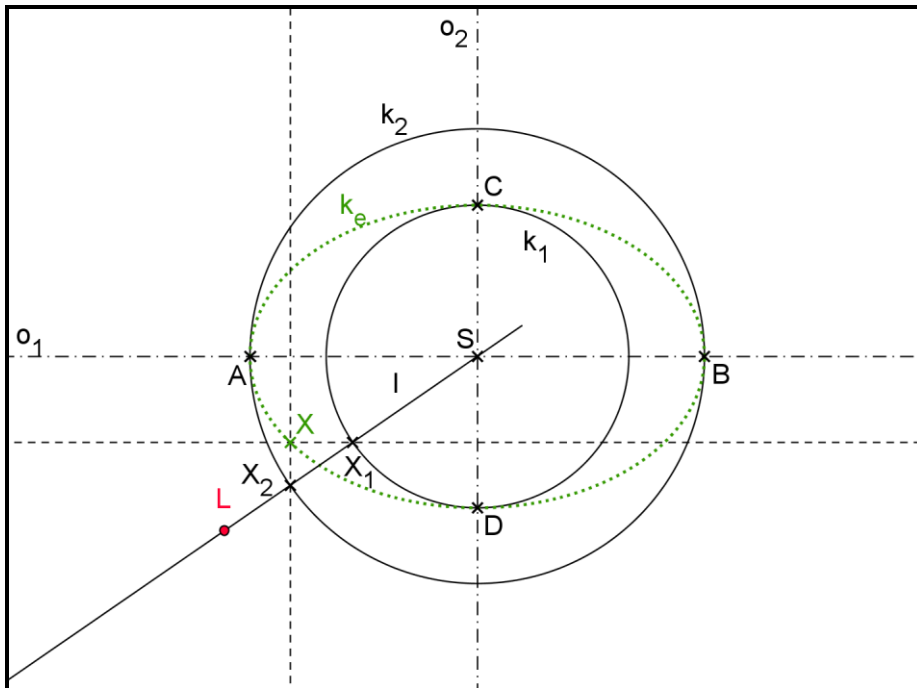
7E.1.6 Trojúhelníková konstrukce

Trojúhelníková konstrukce je jedna z nejpřesnějších konstrukcí bodů elipsy. Využívá se zde složení dvou pravoúhlých osových afinit. (Pozn.: První afinita je mezi kružnicí $k_1 \mathcal{S}; b$, kde S je střed elipsy, a hledanou elipsou k_e , její osa je vedlejší osa elipsy. Druhá afinita je mezi kružnicí $k_2 \mathcal{S}; a$ a k_e , její osa je hlavní osa elipsy.)

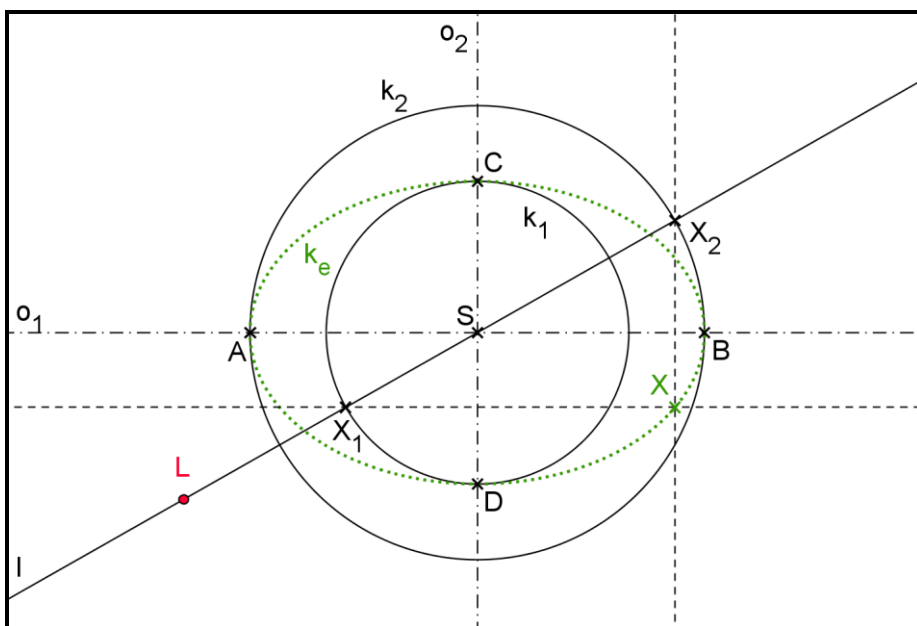
Nechť je elipsa k_e zadána svými hlavními a vedlejšími vrcholy A, B, C, D . Známe tím také $|a = AS| = |BS|$, $b = |CS| = |DS|$, kde S je střed elipsy k_e . Sestrojíme kružnice $k_1 \mathcal{S}; b$, $k_2 \mathcal{S}; a$. Narýsujeme libovolnou přímku l procházející středem S . Ta protne každou z kružnic k_1, k_2 ve dvou bodech. Zvolíme jednu dvojici bodů $l \cap k_1 = X_1$, $l \cap k_2 = X_2$ takovou, že X_1, X_2 leží ve stejném kvadrantu určeném osami elipsy (viz aplet E7.8), resp. takovou dvojici bodů X_1, X_2 , že každý z nich leží v jiném kvadrantu (viz aplet E7.9). Nyní si uvědomme, že kružnice k_1 se při pravoúhlé osové afinitě s osou o_2 (směr je kolmý k ose o_2) zobrazí na elipsu k_e . Kružnice k_2 se zobrazí na tutéž elipsu k_e při pravoúhlé osové afinitě určené osou o_1 (směr je kolmý k ose o_1). Tedy bod X elipsy k_e - obraz bodu X_1 budeme hledat na přímce rovnoběžné s hlavní osou o_1 . Zároveň bod X bude obraz bodu X_2 , tudíž bude ležet na rovnoběžce s vedlejší osou o_2 . Různou volbou přímky l získáváme různé body elipsy.

V apletu E7.8 a E7.9 jsou konstrukce nahrány. Po přehrání konstrukcí můžete měnit polohu přímky l pomocí bodu L a tím získat další body elipsy.

Aplet E7.8: Trojúhelníková konstrukce elipsy I



Aplet E7.9: Trojúhelníková konstrukce elipsy II



Pozn.: Konstrukce se nazývá trojúhelníková z prostého důvodu, jelikož při získávání bodů elipsy v rýsu vznikají trojúhelníky, zde např. trojúhelník XX_1X_2 .

7E.1.7 Příčková konstrukce

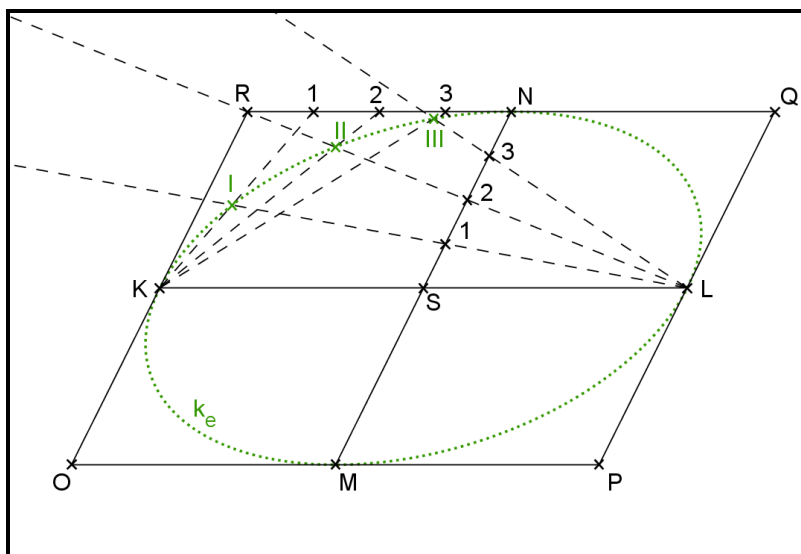
Příčková konstrukce elipsy se využívá v rysech, kde je elipsa zadána omezenými sruženými průměry a v nichž chceme elipsu dourčit bodově, sestrojiti ji, ale nezajímají nás její hlavní ani vedlejší poloosy nebo jiné další prvky. Hojně se používá pro konstrukci kružnice ve středovém promítání - nejčastěji pro kružnici ve svislé rovině.

Nechť jsou dány omezené sružené průměry KL, MN elipsy k_e . Označme S jejich průsečík - střed elipsy. Sestrojíme rovnoběžník $OPQR$ tak, že KL, MN představují jeho střední příčky. Jedná se o rovnoběžník, který bude elipse k_e opsaný.

Pro jednoduchost se zaměříme jen na jeden kvadrant určený sruženými průměry KL, MN , necht' je to kvadrant určený body K, S, N, R . Nyní rozdělíme úsečku SN na libovolný počet shodných dílů (v *apletu E7.10* jsou to čtyři shodné díly) a dělicí body očíslováme ve směru od bodu S k bodu N . Na tentýž počet shodných dílů rozdělíme i úsečku RN a dělicí body očíslováme postupně od bodu R k bodu N . Dělicími body na úsečce SN jsou vedeny přímky procházející bodem L a dělicí body na úsečce RN jsou spojeny s bodem K . Příčky, které vycházejí z bodů s odpovídajícími si čísly, se protínají v bodech elipsy k_e . Obdobně bychom provedli konstrukci i ve zbývajících kvadrantech.

V *apletu E7.10* je konstrukce nahrána, stačí ji spustit tlačítkem "Přehrát".

Aplet E7.10: Příčková konstrukce elipsy



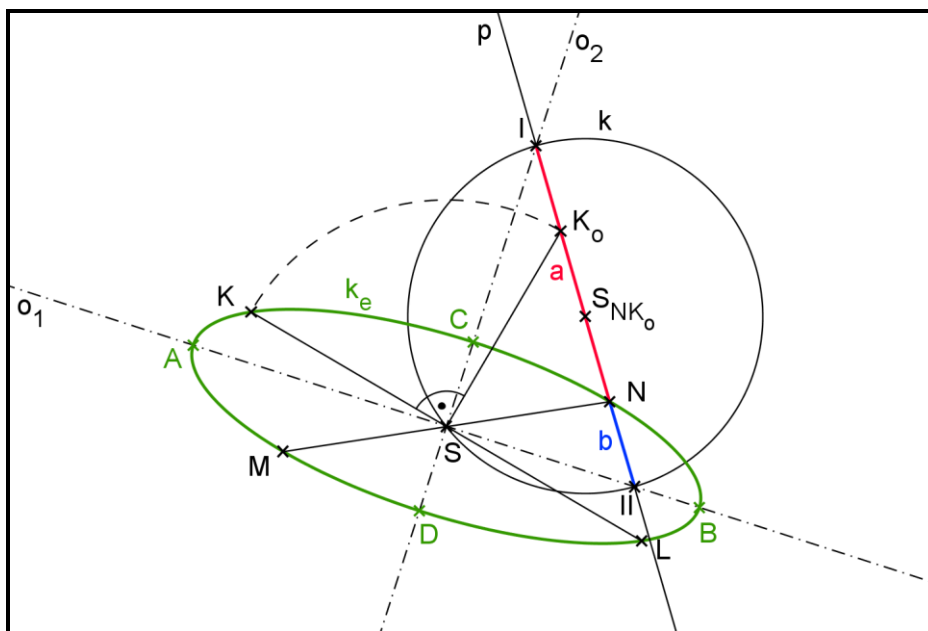
7E.1.8 Rytzova konstrukce

Rytzova konstrukce se používá v případech, kdy známe dvojici sdružených omezených průměrů elipsy a potřebujeme dohledat hlavní a vedlejší poloosy (viz *aplet E7.11*).

Je to velice často používaná, "standardní" konstrukce, proto pro zájemce je uveden i její důkaz. Sám autor, švýcarský matematik a učitel **D. Rytz** (1801 - 1868), sice konstrukci vymyslel, ale důkaz k ní již nedoložil. Konstrukce byla dokázána později, a to **L. Mossbrugere**m Rytzovým kolegou. Konstrukce je z roku 1845.

Nechť jsou dány omezené sdružené průměry KL, MN . Jejich průsečík S je středem hledané elipsy k_e . Zvolíme jeden z koncových bodů průměru, necht' je to K , a otočíme ho kolem středu S o 90° . Otočeným bodem K_o vedeme přímkou p , která též prochází bodem N - bodem průměru sdruženého. Dále najdeme střed S_{NK_o} úsečky NK_o a sestrojíme kružnici k_{NK_o} s $|SS_{NK_o}|$, která protne přímkou p ve dvou bodech I a II . Jsou to body, jimiž prochází osy elipsy. Velikost hlavní a vedlejší poloosy nalezneme na přímce p , platí: $|NI| = a$, $|NII| = b$. Stačí už jen vynést délky a , b ve správném pořadí na osy o_1, o_2 .

Aplet E7.11: Rytzova konstrukce elipsy



Pro zájemce konstrukci ozřejmí následující důkaz:

Důkaz: (*obrázek E7.1*)

Nechť je dána elipsa k_e svými hlavními a vedlejšími vrcholy A, B, C, D . Sestrojme +kružnice $k_1(S; \overline{a})$ a $k_2(S; \overline{b})$, kde S je střed elipsy k_e . Jak již bylo řečeno, daná elipsa je afinním

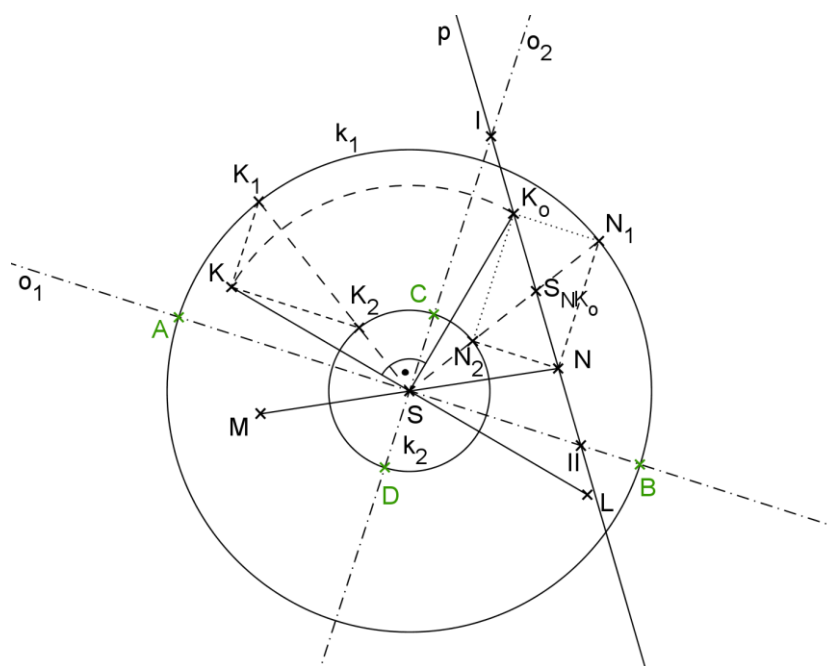
obrazem kružnice k_1 a také k_2 (jde o speciální případ pravoúhlých osových afinít s osami totožnými s osami elipsy k_e).

Zvolme dva navzájem kolmé poloměry SK_1, SN_1 kružnice k_1 . V pravoúhlé afinitě s osou o_1 jim odpovídají sdružené poloměry SK, SN . Označíme-li K_2, N_2 průsečíky obou kolmých průměrů s kružnicí k_2 , pak jsou trojúhelníky N_2NN_1, K_1KK_2 shodné, neboť $|N_2N_1| = |K_2K_1|$, $N_2N_1 \perp K_2K_1$, $NN_1 \perp K_2K$. Otočíme-li trojúhelník K_1KK_2 okolo středu S o 90° , bod K_2 splyne s bodem N_2 , bod K_1 s bodem N_1 a bod K se otočí do bodu K_o . Bod K_o je zároveň čtvrtým vrcholem obdélníka $N_1NN_2K_o$. Označme I a II průsečíky jeho úhlopříčky NK_o s vedlejší a hlavní osou. Z rovnoběžnosti $N_1N \parallel K_oN_2 \parallel CS$, $N_2N \parallel K_oN_1 \parallel SB$ vyplývá rovnost úseček:

$$|SN_1| = |NI| = |K_oII| = a,$$

$$|SN_2| = |NII| = |K_oI| = b.$$

Obrázek E7.1: Rytzova konstrukce - důkaz



7E.1.9 Frézierova konstrukce

A. D. Frézier (1682 -1773) byl bez pochyby nejpozoruhodnější vědec 18. století. Působil ve francouzském městě Savoie, ale původem pocházel ze Skotska, jeho originální jméno bylo Frazer. Mnozí ho považují za zakladatele deskriptivní geometrie.

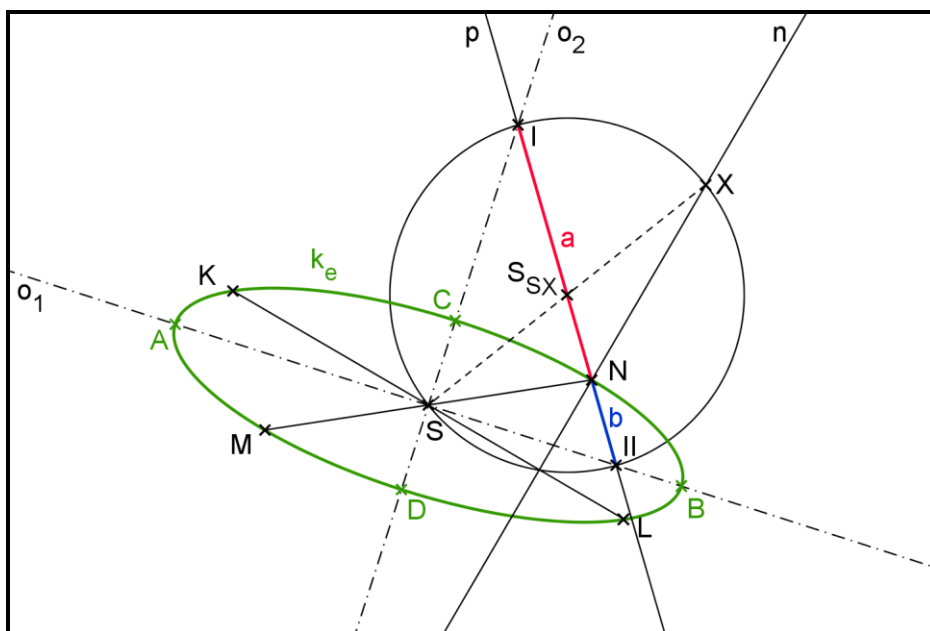
(čerpáno z [W5])

Frézierova konstrukce (viz *aplet E7.12*) je o více než sto let starší než Rytzova konstrukce, pochází z roku 1737. Z našeho pohledu ovšem bude jen jakýmsi zvláštním provedením konstrukce Rytzovy.

Necht' jsou dány omezené sdružené průměry KL, MN . Jejich průsečík označme S , je to střed hledané elipsy k_e . Z koncového bodu N kratšího průměru spustíme kolmici n na úsečku SL . Na kolmici n najdeme bod X , pro který platí: $|NX| = |SL| = |SK|$ tak, že bod N leží mezi patou kolmice n a bodem X . Sestrojíme střed S_{SX} úsečky SX . Tím získáme bod, jenž je totožný se středem S_{NK_o} z Rytzovy konstrukce. Dále tedy budeme postupovat úplně stejně jako u Rytzovy konstrukce. Sestrojíme kružnici $k(S_{SX}, |SS_X|)$ a přímku $p = NS_{SX}$, jejich průnikovými body I, II procházejí osy o_1, o_2 elipsy k_e . Délku hlavní a vedlejší poloosy odečteme na přímce p : $|NI| = a, |NII| = b$.

Frézierova konstrukce elipsy je nahrána v *apletu E7.12*, kde se můžete podívat na odkrokový postup.

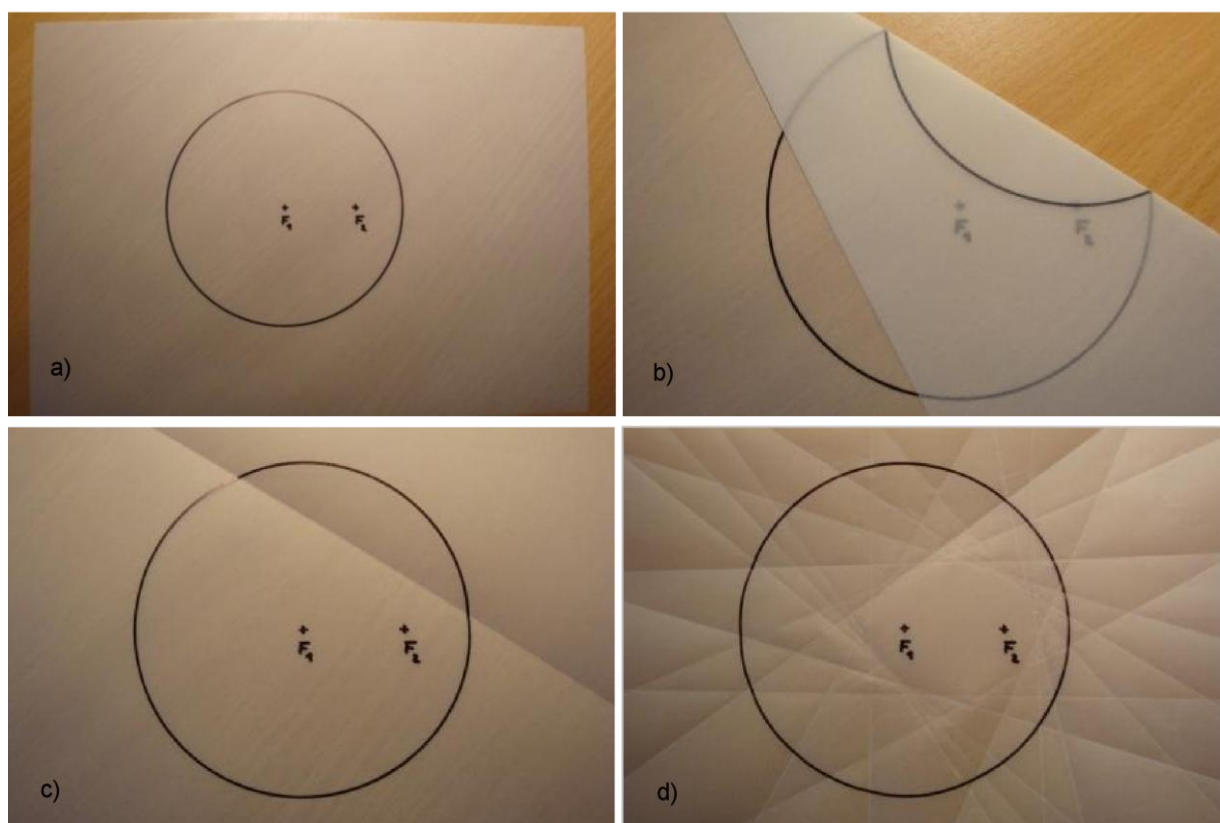
Aplet E7.12: Frézierova konstrukce elipsy



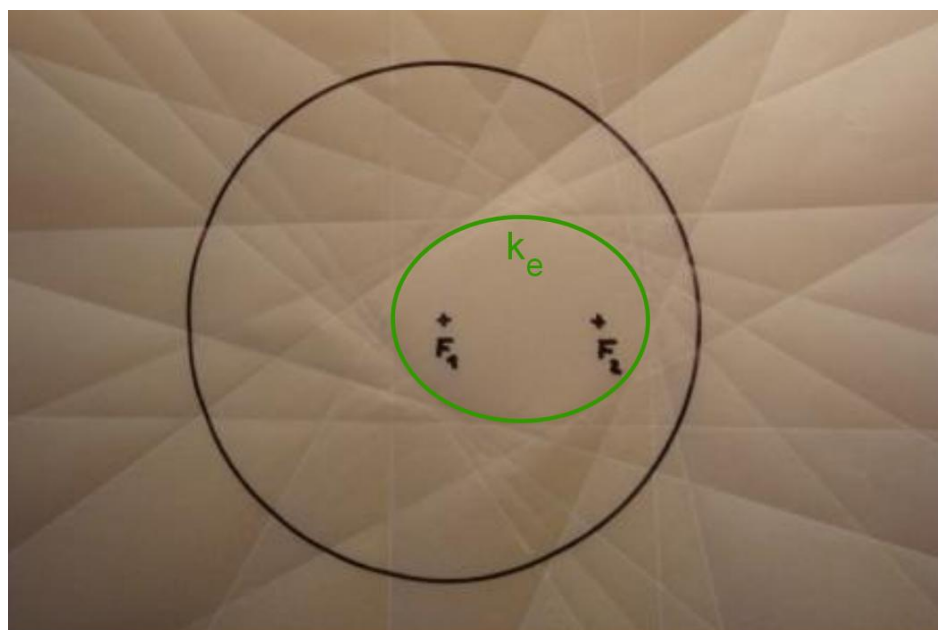
Pozn.: Již na začátku bylo řečeno, že tato konstrukce je ve své podstatě zvláštním případem Rytzovy konstrukce. Přesvědčíme se o pravdivosti tohoto tvrzení.

Stačí dokázat, že střed S_{SX} z Frézierovy konstrukce je totožný se středem S_{NK_o} z konstrukce Rytzovy. Pokud obě konstrukce narýsujeme dohromady, vznikne rys, jenž je na *obrázku E7.2*. V rysu vznikl čtyřúhelník $SNXK_o$. Dokážeme-li, že se jedná o rovnoběžník, dokážeme tím totožnost středů S_{SX} a S_{NK_o} .

Obrázek E7.3: Konstrukce elipsy ohýbáním papíru



Obrázek E7.4: Výsledná elipsa



Pozn.: Pro sestavení elipsy si jistě tuto konstrukci volit nebudeme. Má ovšem jiný účel, demonstruje funkci ohniskových vlastností elipsy. Konkrétně se jedná o větu E3.2 a větu E4.1 (kapitoly [Tečny a normály elipsy](#)) a [Ohniskové vlastnosti elipsy](#)). Kružnice k představuje řídicí kružnici opsanou z ohniska F_1 . Je tedy množinou všech bodů souměrně sdružených s druhým ohniskem F_2 podle tečen elipsy - ohybů papíru.

7H.1 Konstrukce hyperboly

7H.1.1 Bodová konstrukce

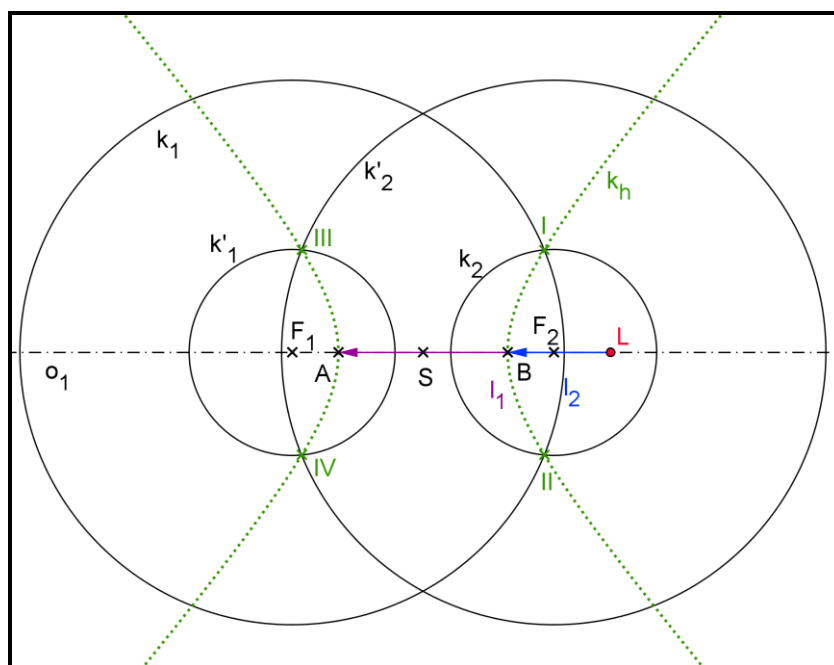
Vyjdeme-li z definice hyperboly, můžeme ji sestavit bodově (obdobně jako elipsu). Postup je nahrán v *apletu H7.1*.

Nechť jsou dány dva různé body - ohniska F_1, F_2 a délka hlavní poloosy $a < \frac{|F_1F_2|}{2}$.

Střed S úsečky F_1F_2 je středem hyperboly. Na přímce F_1F_2 nanese od bodu S na obě strany vzdálenost a , tím dostaneme vrcholy A, B hledané hyperboly k_h . Na přímce F_1F_2 zvolíme libovolný bod L tak, aby ležel vně úsečky F_1F_2 . Nyní sestojíme kružnice $k_1 \mathcal{C}_{F_1, |LA|}$, $k_2 \mathcal{C}_{F_2, |LB|}$ a kružnice $k'_1 \mathcal{C}_{F_1, |LB|}$, $k'_2 \mathcal{C}_{F_2, |LA|}$. Body I, II , ve kterých se obě kružnice k_1, k_2 protínají a body $III, IV \in k'_1 \cap k'_2$ jsou body hyperboly k_h . Platí totiž: $||LA| - |LB|| = 2a$. Zvolíme-li bod $L = F_1$ nebo $L = F_2$, dostáváme stejným postupem vrcholy A, B .

V *apletu H7.1* je konstrukce nahrána. Po přehrání můžete měnit polohu bodu L - pohybovat s ním po ose o_1 mimo úsečku F_1F_2 , tím získáte další body hyperboly.

Aplet H7.1: Bodová konstrukce hyperboly



Pozn.: Pokud bude hyperbola zadána délkou hlavní a vedlejší poloosy, pak samozřejmě není problém ohniska dohledat (pomocí charakteristického obdélníka) a provést bodovou konstrukci.

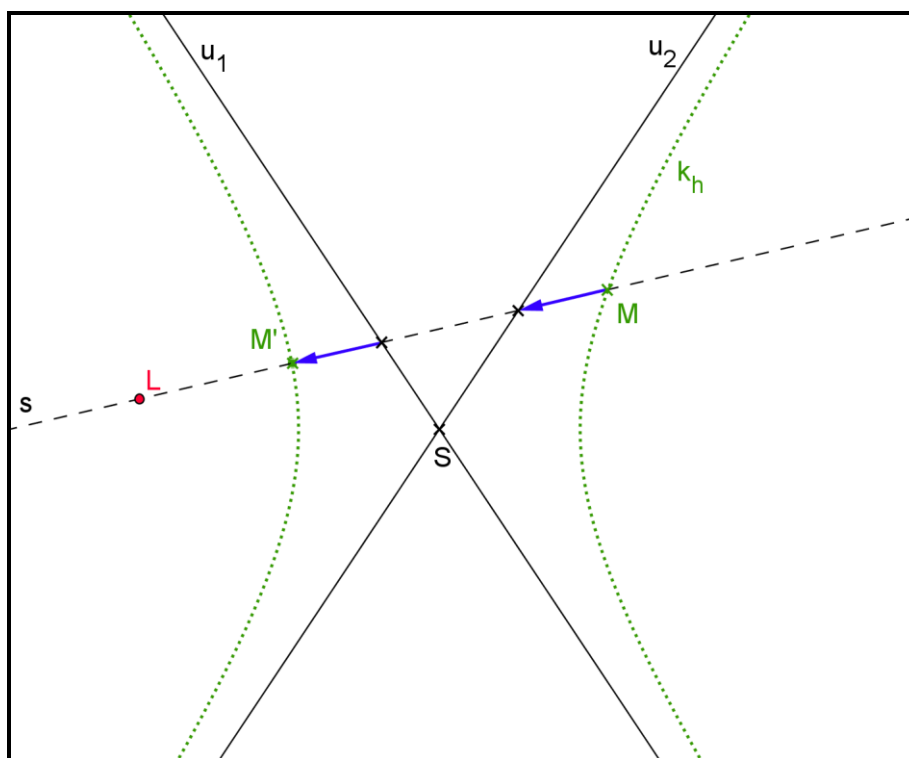
7H.1.2 Konstrukce hyperboly, jsou-li dány její asymptoty a bod

Občas může nastat situace, kdy známe obě asymptoty u_1, u_2 hyperboly k_h a jeden její bod M . Proto zde uvádíme konstrukci, která dohledá další body, osy a délky a, b (viz *aplet H7.2* a *aplet H7.3*).

Dohledání dalších bodů hyperboly není složité, využijeme-li větu H3.5 z kapitoly [Tečny a normály hyperboly](#). Vedme tedy bodem M libovolnou sečnu s . Podle věty H3.5 stačí úsek vymezený na ní bodem M a jednou asymptotou přenést od druhé asymptoty tak, aby byly oba úseky souměrné podle středu úsečky vymezené na sečně asymptotami (viz *aplet H7.2*). Koncový bod přeneseného úseku je bod hyperboly. Různou volbou sečny s získáváme různé body hyperboly. (čerpáno z Piska, Medek [10] str. 142 a 143)

V *apletu H7.2* je princip konstrukce zobrazen. Změnou polohy sečny s pomocí bodu L získáte další body hyperboly k_h .

Aplet H7.2: Konstrukce bodů hyperboly (věta H3.5)



Osy hledané hyperboly k_h jsou symetrálami úhlů, které svírají obě asymptoty u_1, u_2 . Chceme-li její osy omezit a získat tak hodnoty a, b , vedme bodem M rovnoběžky l_1, l_2 s osami o_1, o_2

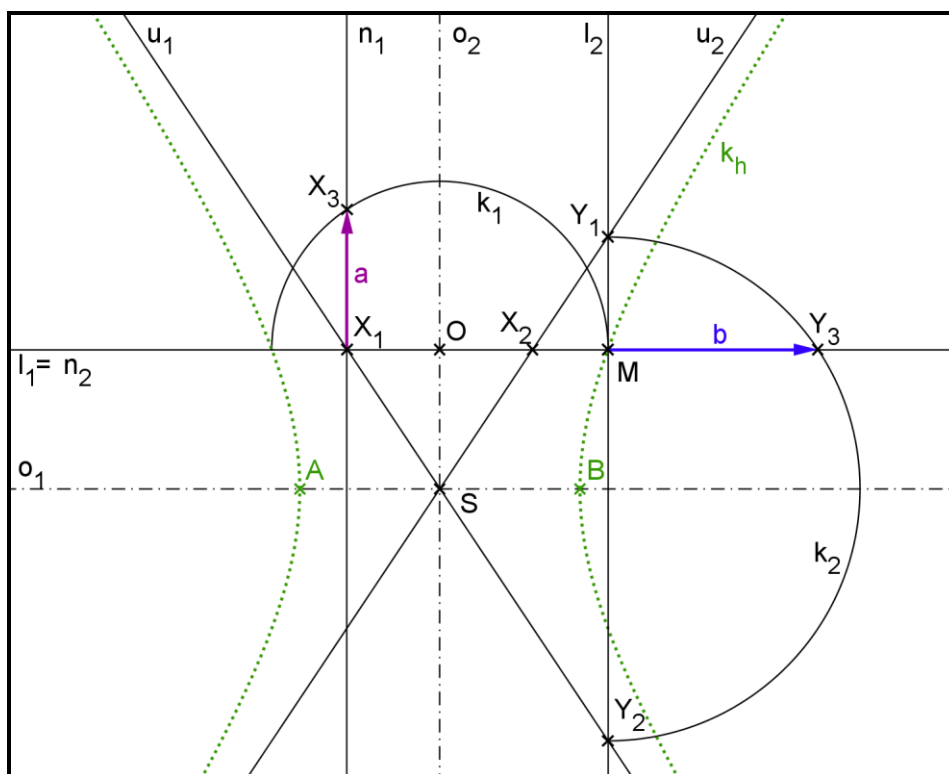
$(l_1 \parallel o_1, l_2 \parallel o_2)$. Přímka l_1 protíná asymptoty u_1, u_2 postupně v bodech X_1, X_2 , přímka l_2 v bodech Y_1, Y_2 .

Označme O střed úsečky X_1X_2 . Sestrojme půlkružnici k_1 se středem v bodě O a poloměrem $|OM|$. Dále vztýčme kolmici n_1 v bodě X_1 na přímku l_1 . Délku hlavní poloosy a představuje vzdálenost bodů X_1 a $X_3 = n_1 \cap k_1$, tedy $a = |X_1X_3|$.

Pro získání hodnoty velikosti vedlejší poloosy b opišeme půlkružnici k_2 nad úsečkou Y_1Y_2 . V bodě M vztýčme kolmici n_2 na úsečku Y_1Y_2 . Délku vedlejší poloosy b představuje vzdálenost bodů M a $Y_3 = n_2 \cap k_2$, tedy $b = |MY_3|$.

Dohledání délky hlavní a vedlejší osy je nahrané v *apletu H7.3*, stačí si jej přehrát pomocí tlačítka "Přehrát".

Aplet H7.3: Dohledání velikosti poloos hyperboly



Pozn.: Důkaz platnosti konstrukce, při které se dohledají velikosti poloos, je založen na hyperbolickém řezu rotační kuželové plochy o ose o_1 .

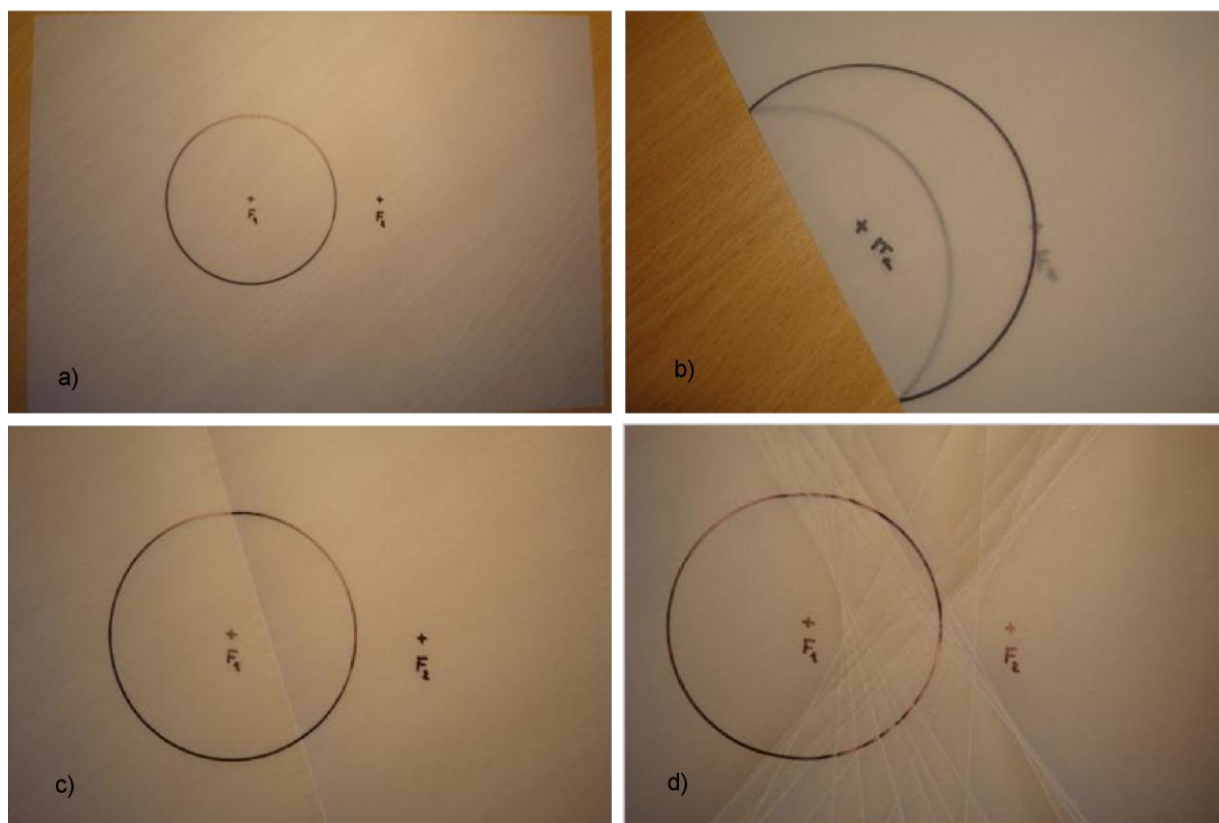
7H.1.3 Konstrukce hyperboly ohýbáním papíru

Další konstrukcí je získání hyperboly jakožto obalové křivky tečen a to pomocí ohýbání papíru. Pokud známe délku excentricity e a hlavní poloosy a , můžeme ji použít.

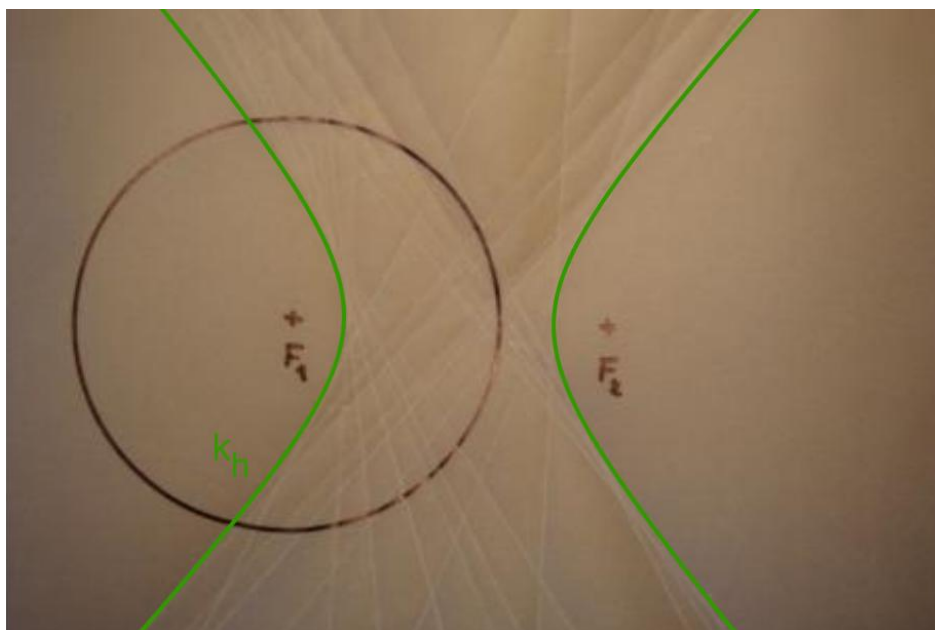
Nejlépe na průhledný papír (tzv. "pauzák") narýsujeme kružnici k se středem v libovolně zvoleném bodě F_1 a poloměrem $2a$. Druhý bod F_2 zvolíme tak, že platí: $|F_1F_2| = 2e$ (viz. obrázek H7.1 a)). Všimněte si, že bod F_2 leží vně kružnice k , pokud by ležel uvnitř získali bychom elipsu. Nyní budeme ohýbat papír tak, aby ohnutá část kružnice k procházela bodem F_2 . Přesně podle obrázku H7.1 b).

Každý ohyb je v podstatě tečnou hyperboly. Dostáváme tedy množinu tečen (viz obrázek H7.1 c), d)), které žádanou hyperbolu obalují. Výsledek je na obrázku H7.2.

Obrázek H7.1: Konstrukce hyperboly ohýbáním papíru



Obrázek H7.2: Výsledná hyperbola



Pozn.: Tato konstrukce má především sloužit jako ověření ohniskových vlastností hyperboly. Konkrétně vychází z věty H3.2 (kapitola [Tečny a normály hyperboly](#)) a z věty H4.1 (kapitola [Ohniskové vlastnosti hyperboly](#)). Kružnice k představuje řídicí kružnici opsanou z ohniska F_1 . Je tedy množinou všech bodů souměrně sdužených s druhým ohniskem F_2 podle tečen hyperboly - ohybů papíru.

7P.1 Konstrukce paraboly

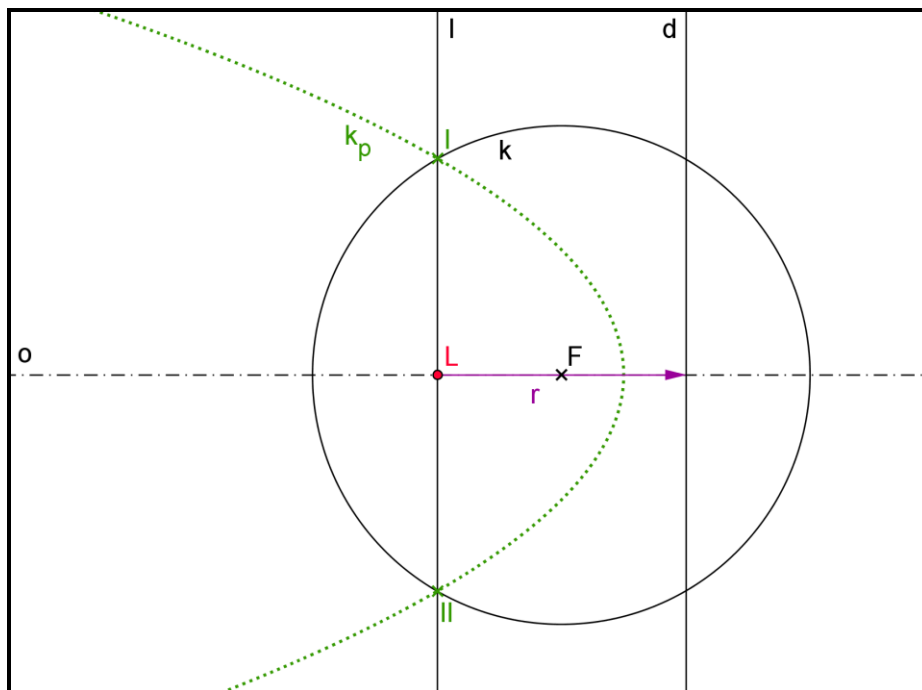
7P.1.1 Bodová konstrukce

Je-li dána řídicí přímka d a ohnisko F , můžeme podle definice sestrojiti body paraboly a to pomocí tzv. bodové konstrukce (viz [aplet P7.1](#)).

Osa o hledané paraboly je kolmice sestrojená z ohniska F na přímku d . Body paraboly jsou body, jejichž vzdálenost od ohniska F je stejná jako od přímky d . Pro sestrojení obecného bodu paraboly k_p vedeme libovolnou přímku $l \parallel d$ ve vzdálenosti větší než $\frac{p}{2}$ od přímky d (připomínáme, že $p = |Fd|$) a to tak, aby ležela v polorovině určené přímkou d a ohniskem F . Z ohniska F opišeme kružnici k o poloměru rovném vzdálenosti přímek d , l . Společné body I , II kružnice k a zvolené přímky l jsou body paraboly k_p .

V *apletu P7.1* je konstrukce nahraná. Po přehrání můžete měnit polohu bodu L - pohybovat s ním po ose o , tím získáte další body paraboly.

Aplet P7.1: Bodová konstrukce paraboly



Pozn.: Pokud bude parabola zadána ohniskem F a vrcholem V , pak samozřejmě není problém dohledat řídicí přímku d (viz kapitola [Definice paraboly](#)) a provést bodovou konstrukci.

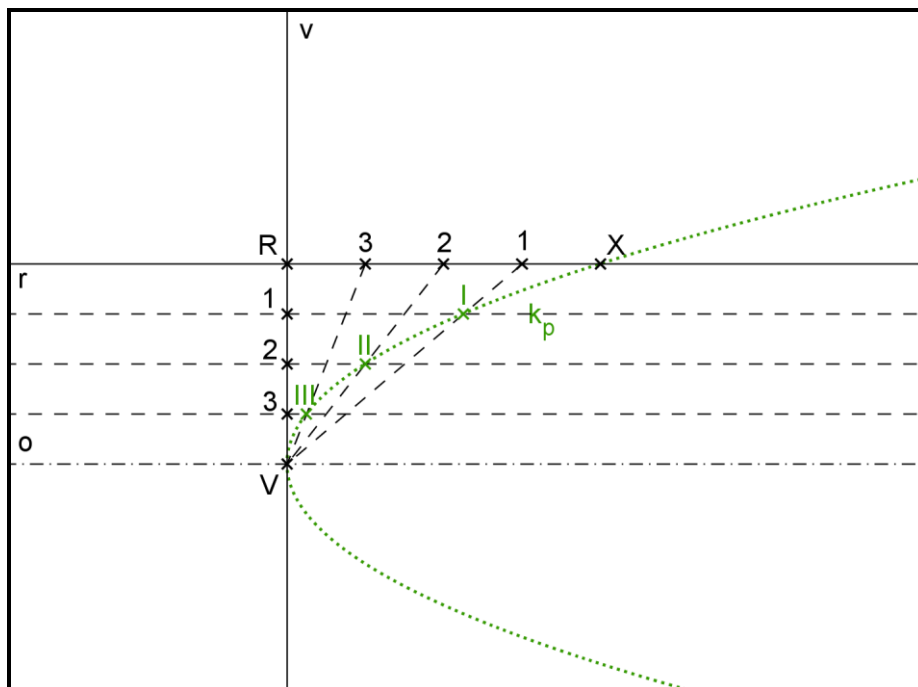
7P.1.2 Příčková konstrukce

V praxi často nastává situace, kdy máme zkonstruovat body paraboly, která je zadána pouze vrcholem V , osou o a jedním svým bodem X . V takovém případě bývá vhodnou možností jak úlohu vyřešit tzv. **příčková konstrukce paraboly** (viz *aplet P7.2*).

Postup je následující (viz *aplet P7.2*). V bodě V vztyčíme kolmici na osu o , čímž získáme vrcholovou tečnu v paraboly. Dále sestrojíme průměrovou přímku r v bodě X ($r \parallel o$). Průsečík vrcholové tečny v a průměrové přímky r označme R . Nyní rozdělíme úsečku XR na libovolný počet shodných dílů (v *apletu P7.2* jsou to čtyři shodné díly) a dělicí body očíslováme ve směru od bodu X k bodu R . Na tentýž počet shodných dílů rozdělíme i úsečku RV a dělicí body očíslováme postupně od bodu R k vrcholu V . Dělicími body na vrcholové tečně jsou vedeny rovnoběžky s

osou o a dělicí body na průměrové přímce XR jsou spojeny s vrcholem V . Příčky, které vycházejí z bodů s odpovídajícími si čísly, se protínají v dalších bodech paraboly k_p .

Aplet P7.2: Příčková konstrukce paraboly



Pozn.: Konstrukce byla čerpána z [W4] a z Urban [13] str. 55.

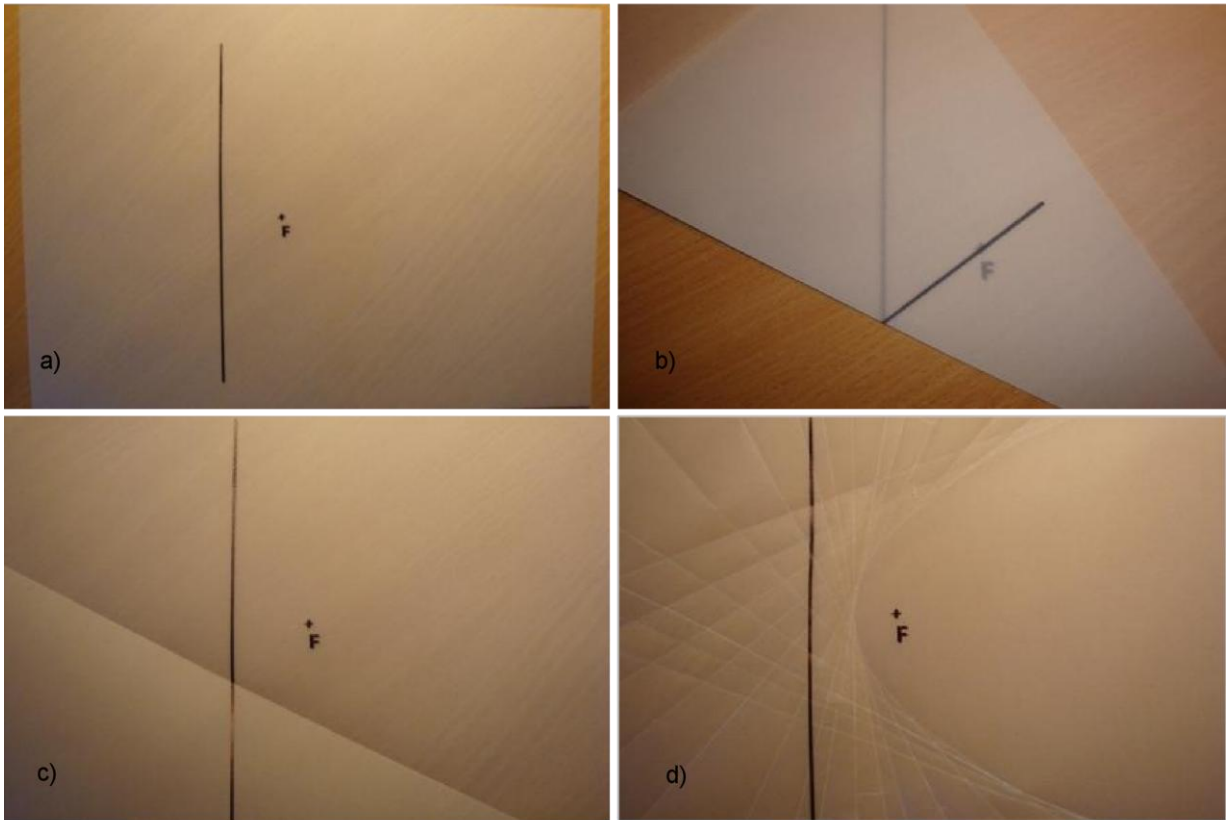
7P.1.3 Konstrukce paraboly ohýbáním papíru

Následující konstrukce určitě okouzlí, vytvoříme parabolu ohýbáním papíru. Pokud známe hodnotu parametru p , můžeme ji použít.

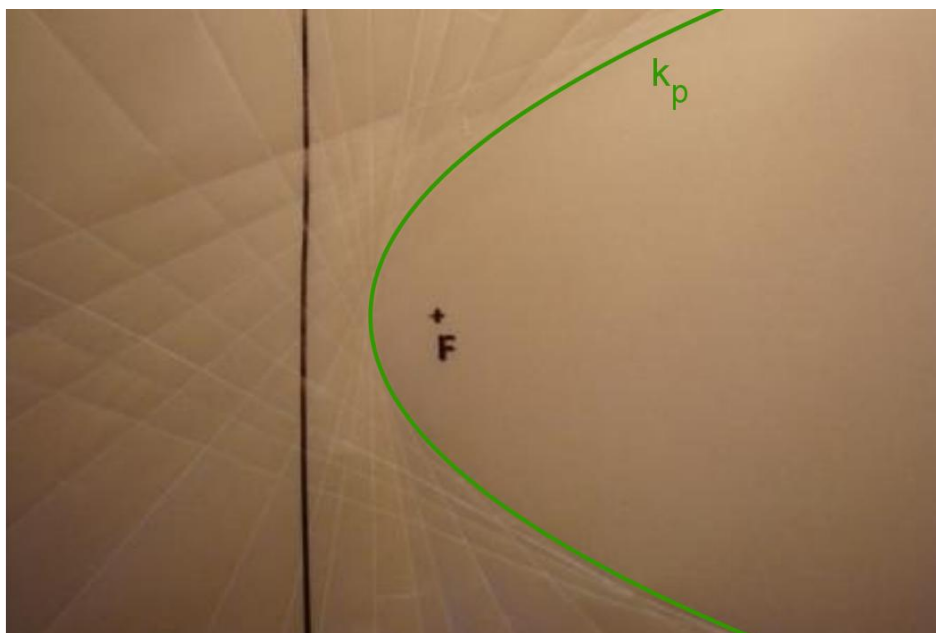
Nejlépe na průhledný papír (tzv. "pauzák") narýsujeme řídicí přímku d a ohnisko F ve vzdálenosti p od přímky d (viz obrázek P7.1 a)). Nyní budeme ohýbat papír tak, aby ohnutá část přímky d procházela bodem F . Přesně podle obrázku P7.1 b).

Každý ohyb je v podstatě tečnou paraboly. Dostáváme tedy množinu tečen (viz obrázek P7.1 c), d)), které žádanou parabolu obalují. Výsledek je na obrázku P7.2.

Obrázek P7.1: Konstrukce paraboly ohýbáním papíru



Obrázek P7.2: Výsledná parabola



Pozn.: Konstrukce paraboly ohýbáním papíru zřejmě není přesná, ale představuje určitou didaktickou pomůcku k vyučování ohniskových vlastností paraboly. Konkrétně vychází z věty P3.2 (kapitola [Tečny a normály paraboly](#)) a z věty P4.1 (kapitola [Ohniskové vlastnosti paraboly](#)). Řídící přímka d je tedy množinou všech bodů souměrně sdružených s ohniskem F podle tečen paraboly - ohybů papíru.

8. Oskulační kružnice

Při rýsování kuželoseček nejčastěji využíváme dostupná křivítka nebo je črtáme jen tak "od ruky". Ovšem výsledky se občas na první pohled nedají považovat za hladké křivky, kterými (regulární) kuželosečky jsou. Proto je zde kapitola, která mnohé usnadní. Naučíme se, jak lze elipsu, hyperbolu a parabolu aproximovat kruhovými oblouky v jejich vrcholech a dalších bodech. To je zejména možné v případě, jedná-li se o oblouky částí tzv. **oskulačních kružnic**. Ty se ke kuželosečkám v daných bodech úzce přimykají.

Definice: Kružnici, která prochází daným bodem regulární kuželosečky a má s touto křivkou styk nejméně druhého řádu, budeme nazývat **oskulační kružnice** (někdy také **kružnice křivosti**). Poloměr oskulační kružnice se nazývá **poloměr křivosti**. Střed oskulační kružnice, tzv. **střed křivosti**, leží na normále kuželosečky v daném bodě.

Pozn.: Styk kuželosečky a oskulační kružnice druhého řádu znamená, že rovnice křivek mají v bodě dotyku shodnou první a druhou derivaci. Jednodušeji řečeno, oskulační kružnice v okolí bodu dotyku danou kuželosečku dobře nahrazuje.

Ve vrcholech kuželoseček mají oskulační kružnice s křivkami styk vyššího řádu než dva. Takové oskulační kružnice se pak označují jako **hyperoskulační** nebo **superoskulační kružnice** kuželosečky v daném bodě.

8E.1 Hyperoskulační kružnice elipsy

Konstrukce oskulačních kružnic elipsy v jejich vrcholech není složitá. Odkrokový postup najdete v *apletu E8.1*, kde si ho můžete přehrát pomocí tlačítka "Přehrát".

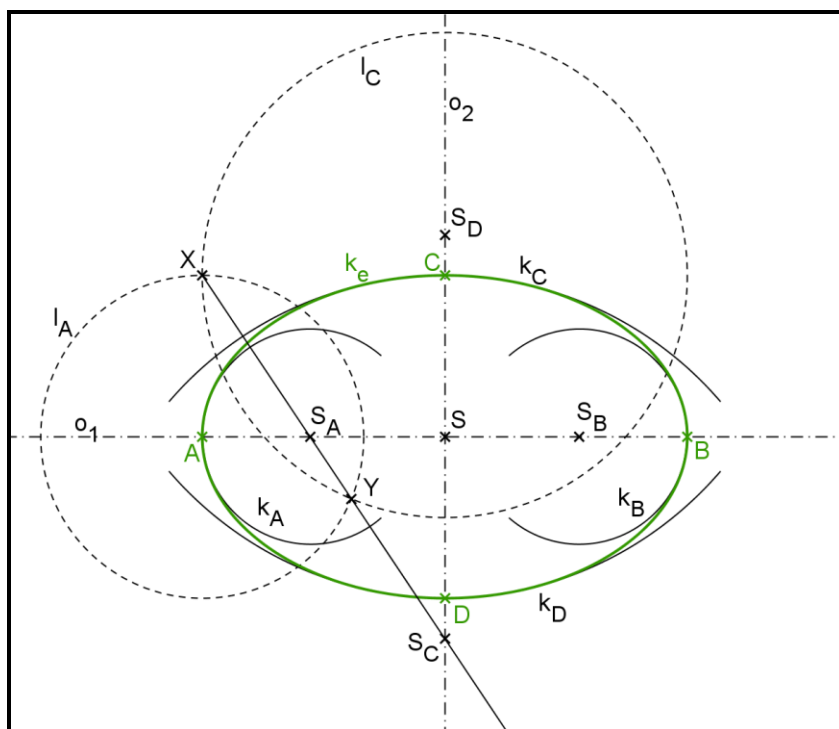
Známe-li hlavní a vedlejší vrcholy A, B, C, D elipsy k_e , kterou chceme vyrýsovat, najdeme její střed S a také hlavní a vedlejší osu o_1, o_2 . Středů S_A, S_B, S_C, S_D hyperoskulačních kružnic k_A, k_B, k_C, k_D nalezneme následujícím způsobem:

Sestrojíme kružnici l_A se středem ve vrcholu A a poloměrem $b = |SC|$ a kružnici l_C se středem ve vrcholu C a poloměrem $a = |AS|$. Průsečíky X, Y kružnic l_A, l_C vedeme polopřímku XY . Ta protne hlavní osu o_1 v bodě S_A a vedlejší osu o_2 v bodě S_C , což jsou středy hyperoskulačních kružnic ve vrcholech A, C . Díky souměrnosti elipsy podle jejích os dohledáme středy oskulačních kružnic ve

zbylých vrcholech. Hyperoskulační kružnice k_A, k_B, k_C, k_D mají středy postupně v bodech S_A, S_B, S_C, S_D a (příslušné) poloměry $|S_A A|, |S_B B|, |S_C C|, |S_D D|$.

Je patrné, že při takové situaci na sebe jednotlivé oblouky hyperoskulačních kružnic nenasazují. Při konstrukci elipsy ji poblíž vrcholů nahrazujeme vhodně dlouhými oblouky hyperoskulačních kružnic a k přechodu můžeme sestrojiti další její body nebo vhodně křivku dokreslit křivítkem.

Aplet E8.1: Konstrukce hyperoskulačních kružnic elipsy



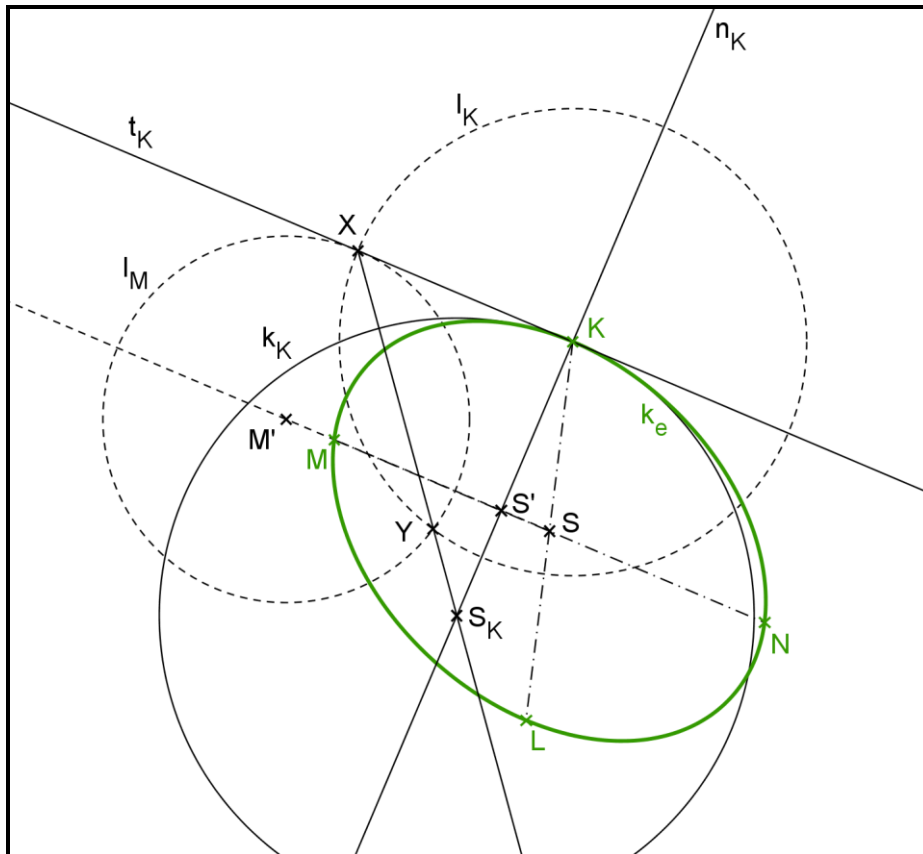
8E.2 Oskulační kružnice v obecném bodě elipsy

Ve výše zmíněné kapitole jsme osvětlili konstrukci tzv. hyperoskulačních kružnic, tj. oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy. Nyní si ukážeme konstrukci oskulační kružnice v koncovém bodě jednoho z obou sdružených průměrů elipsy (tedy v obecném bodě). Postup této konstrukce si můžete přehrát v *apletu E8.2*.

Známe-li KL, MN dvojici sdružených průměrů elipsy k_e (S je středem elipsy) a budeme-li chtít sestrojiti oskulační kružnici v bodě K , budeme postupovat následovně (viz *aplet E8.2*). Sestrojíme tečnu t_K elipsy k_e v bodě K (je to přímka rovnoběžná s průměrem MN procházející bodem K).

Dále sestrojíme normálu n_K v bodě K . Průsečík n_K a průměru MN nazveme S' . A dále postupujeme stejně, jako bychom sestrojovali hyperoskulační kružnici ve vrcholu K nějaké elipsy k_e , jejímž středem je bod S' , hlavním vrcholem je bod K a vedlejší vrchol je bod M' . Přičemž $|M'S'| = |MS|$. Tedy nalezená hyperoskulační kružnice k_K elipsy k_e v jejím vrcholu K je zároveň "obyčejná" oskulační kružnice elipsy k_e v obecném bodě K .

Aplet E8.2: Konstrukce oskulační kružnice elipsy v obecném bodě



Pozn.: Konstrukce je provedena na základě obecně platné věty (citace z Piska, Medek [10] str. 162):

Věta 8.1: Všechny kuželosečky dotýkající se v pevném bodě, které lze nevlastní elací ve směru společné tečny navzájem v sebe transformovat, mají touž oskulační kružnici (oskulují se).

Na základě trojúhelníkové konstrukce (viz [Konstrukce elipsy](#)) lze dohledat normály a středy oskulačních kružnic v nalezených bodech (postup je nahaný v *apletu E8.3*).

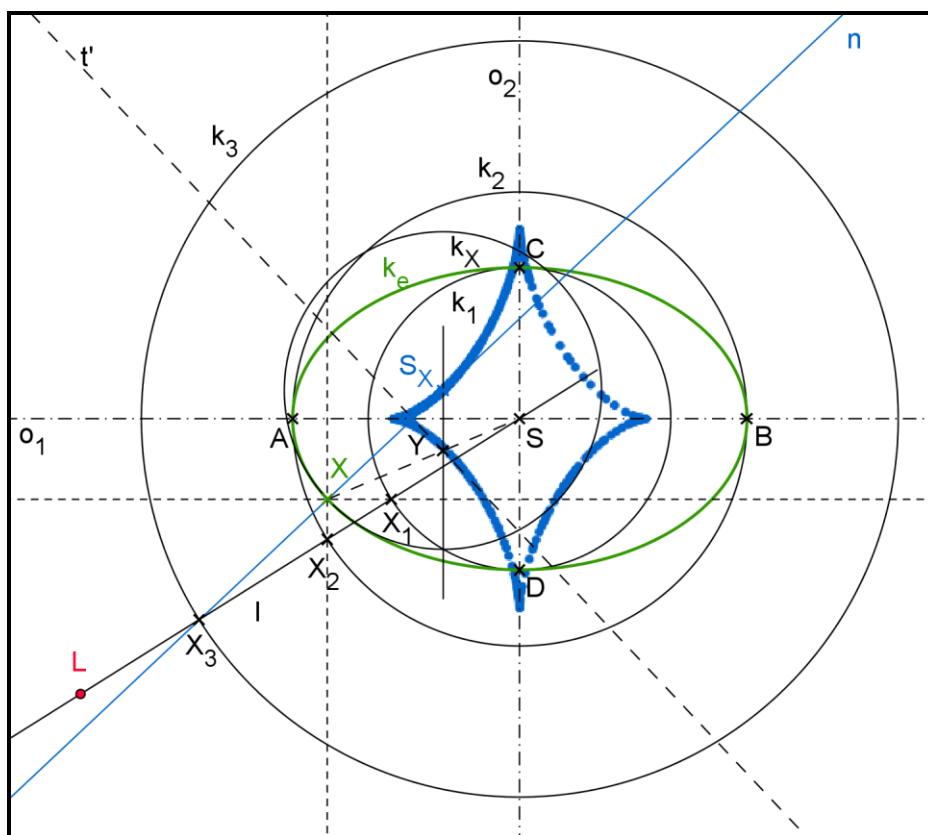
Necht' jsme dohledali pomocí trojúhelníkové konstrukce I bod X elipsy k_e , tzn. máme již kružnice k_1, k_2 a přímku l . Sestrojíme kružnici k_3 se středem v bodě S a poloměrem rovným součtu délek

hlavní a vedlejší poloosy ($r = a + b$). Označme X_3 bod, který je průnikem přímky l a kružnice k_3 a který leží ve stejném kvadrantu určeném osami o_1, o_2 jako bod X . Spojnice XX_3 představuje normálu n v bodě X elipsy k_e . (Pozn.: Známe-li normálu n v bodě X , potom pro tečnu t k elipse k_e v tomto bodě platí: $X \in t, t \perp n$.)

Za účelem nalezení středu S_X osculační kružnice k_X v bodě X a zároveň bodu evoluty elipsy k_e (viz kapitola [Tečny a normály elipsy](#)) zkonstruujeme přímku t' kolmou na normálu n . Přímka t' prochází průnikem normály a hlavní osy o_1 . Necht' bod Y je průsečík přímky t' a úsečky SX . Střed S_X osculační kružnice k_X je průnikem normály n a přímky rovnoběžné s vedlejší osou o_2 procházející bodem Y . Poloměr kružnice k_X je vzdálenost $|SX|$.

V *apletu E8.3* je konstrukce nahrána. Začíná ve chvíli, kdy jsme pomocí trojúhelníkové konstrukce našli bod X elipsy k_e . Po přehrání konstrukce můžete měnit polohu přímky l pomocí bodu L . Střed osculační kružnice zanechává stopu, vykresluje tedy evolutu elipsy k_e .

Aplet E8.3: Konstrukce osculační kružnice elipsy v obecném bodě pomocí trojúhelníkové konstrukce



Pozn.: Důkaz ke konstrukci normál a středů osculačních kružnic je předveden v *Kadeřávek, Klíma, Kounovský* [5] str. 50.

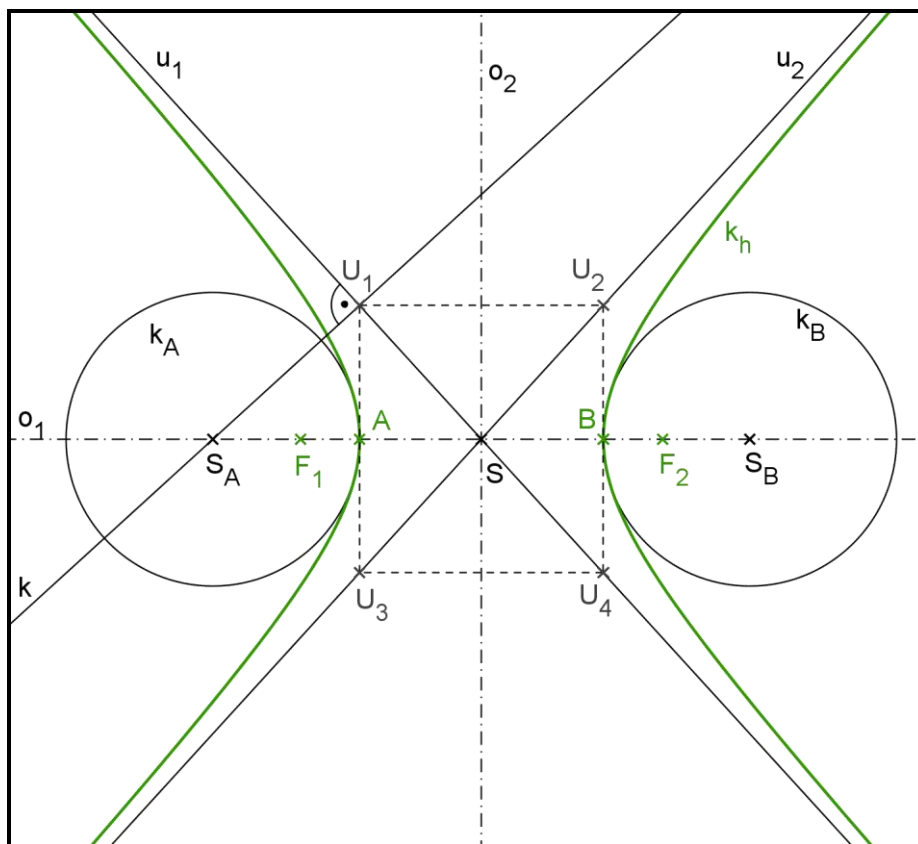
8H.1 Hyperoskulační kružnice hyperboly

Nejprve se naučíme sestřít hyperoskulační kružnice hyperboly, tedy oskulační kružnice v jejích vrcholech. Pro podporu je zde *aplet H8.1*, ve kterém si můžete celý postup konstrukce přehrát.

Známe-li vrcholy A, B a ohniska F_1, F_2 hyperboly k_h , dohledáme bez problémů charakteristický obdélník $U_1U_2U_3U_4$ a příslušné asymptoty u_1, u_2 . Kolmice vztyčená ve vrcholu U_1 charakteristického obdélníka k asymptotě u_1 protíná hlavní osu o_1 hyperboly v hledaném středu S_A jedné z hyperoskulačních kružnic. Střed S_B hyperoskulační kružnice v druhém vrcholu B dohledáme pomocí souměrnosti podle středu S . Tedy hyperoskulační kružnice jsou kružnice: $k_A \mathcal{C}_{S_A, |S_A A|}$ a $k_B \mathcal{C}_{S_B, |S_B B|}$.

Při konstrukci hyperboly ji poblíž vrcholů nahrazujeme vhodně dlouhými oblouky hyperoskulačních kružnic. V dalších bodech můžeme sestřít oskulační kružnice (viz kapitola níže) nebo vhodně křivku dokreslit křívítkem.

Aplet H8.1: Konstrukce hyperoskulačních kružnic hyperboly

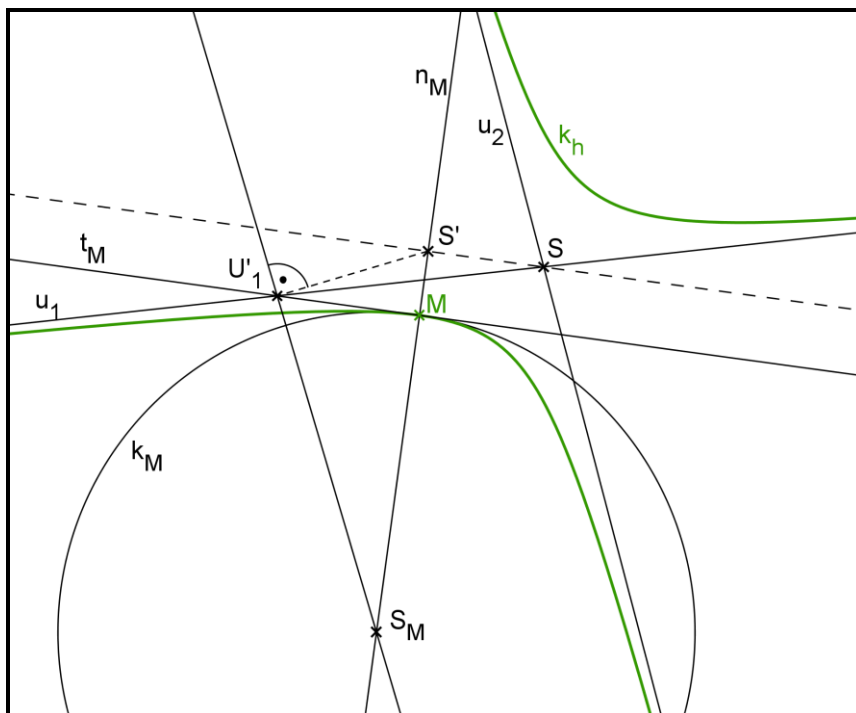


8H.2 Oskulační kružnice v obecném bodě hyperboly

Ve výše zmíněné kapitole jsme osvětlili konstrukci tzv. hyperoskulačních kružnic, tj. oskulačních kružnic ve vrcholech hyperboly. Nyní si ukážeme konstrukci oskulační kružnice v obecném bodě hyperboly. Postup této konstrukce si můžete přehrát v *apletu H8.2*.

Pro konstrukci oskulační kružnice v libovolném bodě M hyperboly k_h budeme potřebovat znát asymptoty u_1, u_2 hyperboly a tečnu t_M ve zvoleném bodě M . Střed oskulační kružnice k_M v bodě M zkonstruujeme následujícím způsobem. V bodě M sestrojíme normálu n_M . Středem S vedeme přímkou rovnoběžnou s tečnou t_M , ta protne normálu n_M v bodě S' . Průsečík t_M a u_1 označme U'_1 . Střed S_M oskulační kružnice nalezneme jako průsečík normály n_M a kolmice vztyčené z bodu U'_1 na úsečku $S'U'_1$. Oskulační kružnice k_M hyperboly v bodě M je kružnice $k_M \odot_{S_M, |S_M M|}$.

Aplet H8.2: Konstrukce oskulační kružnice v obecném bodě hyperboly



Pozn.: Konstrukce je provedena opět na základě obecně platné věty - Věty 8.1, která byla zmíněna v kapitole [Oskulační kružnice elipsy](#). Cílem konstrukce je pomocí nevlastní elace o ose t_M převést danou hyperbolu k_h na hyperbolu s vrcholem v M , která má v tomto bodě stejnou oskulační kružnici.

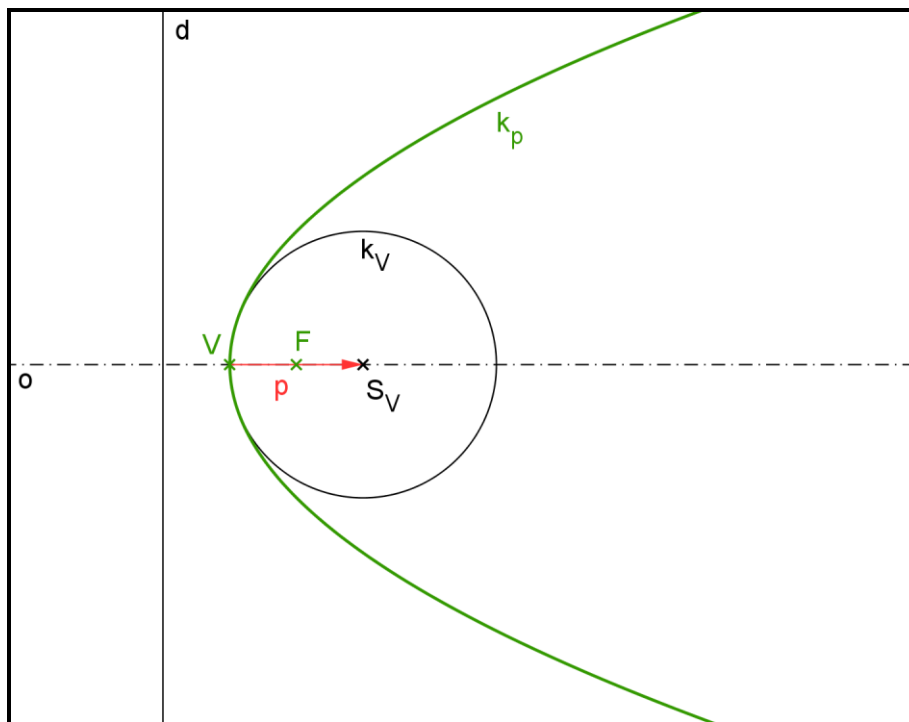
8P.1 Hyperoskulační kružnice paraboly

Konstrukce hyperoskulační kružnice ve vrcholu V paraboly k_p je velice jednoduchá. Platí totiž, že poloměr této kružnice je roven velikosti parametru p .

Známe-li ohnisko F a řídicí přímku d paraboly, jednoduše dohledáme její vrchol V . Pak na polopřímce VF ve vzdálenosti p od vrcholu V leží hledaný střed S_V oskulační kružnice. Hyperoskulační kružnice k_V má tedy střed v bodě S_V a poloměr p .

Celý postup konstrukce je nahrán v *apletu P8.1*, stačí kliknout na tlačítko "Přehrát".

Aplet P8.1: Konstrukce hyperoskulační kružnice paraboly



Při konstrukci paraboly ji poblíž vrcholu nahrazujeme vhodně dlouhým obloukem hyperoskulační kružnice a dále ji dokreslíme křivítkem nebo můžeme také využít oblouků oskulačních kružnic v dalších jejích bodech různých od vrcholu (viz následující kapitola).

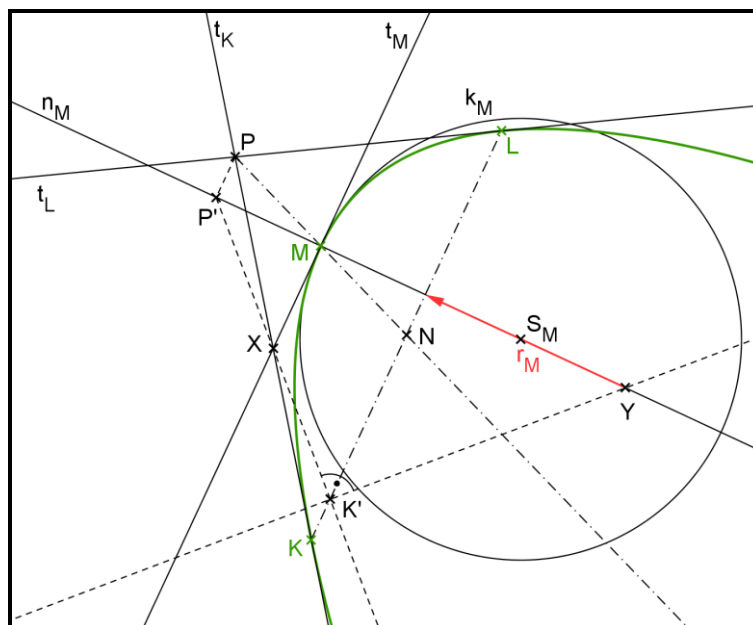
8P.2 Oskulační kružnice v obecném bodě paraboly

paraboly

V předchozí kapitole jsme provedli konstrukci tzv. hyperoskulační kružnice, tj. oskulační kružnice ve vrcholu paraboly. Nyní si ukážeme konstrukci oskulační kružnice v obecném bodě paraboly (čerpáno z Piska, Medek [10] str. 163). Postup této konstrukce si můžete přehrát v *apletu P8.2*.

Nechť je parabola určena dvěma tečnami t_K, t_L s body dotyku K, L . K těživě KL sestrojíme sdružený průměr paraboly (= přímka procházející průsečíkem P tečen t_K, t_L a středem N těživy KL). Koncový bod sdruženého průměru označme M (je to střed úsečky PN - vycházíme z projektivních vlastností paraboly, více informací můžete najít v *Havlíček*). Dále zkonstruujeme normálu n_M v bodě M a bod P' , který je průsečíkem normály n_M a přímky rovnoběžné s tečnou t_M procházející bodem P . Označme X průsečík t_M a t_K a označme K' průsečík těživy KL a polopřímky $P'X$. V bodě K' vztýčíme kolmici na polopřímku $P'X$. Průsečík Y této kolmice a normály n_M je bod, jehož vzdálenost od KL je rovna poloměru oskulační kružnice v bodě M . Stačí již jen dohledat střed S_M oskulační kružnice k_M , který leží na normále n_M , poloměr známe.

Aplet P8.2: Konstrukce oskulační kružnice v obecném bodě paraboly



Pozn.: Konstrukce je provedena na základě Věty 8.1, která byla zmíněna v kapitole [Oskulační kružnice elipsy](#). Cílem konstrukce je pomocí nevlastní elace ve směru t_M převést danou parabolu k_p na parabolu s vrcholem v M , která má v tomto bodě stejnou oskulační kružnici.

Závěr

Regulární kuželosečky, jakými jsou elipsa, hyperbola a parabola, patří k nejznámějším křivkám druhého stupně. Studenti se s nimi blíže seznamují na středních školách, a to nejčastěji jen v analytické geometrii nebo trochu v hodinách fyziky. Žáci, jenž absolvují hodiny deskriptivní geometrie, se o kuželosečkách občas dozví více, i když to rozhodně závisí na učiteli a také na počtu vyučovaných hodin. Ne vždy je čas na probrání detailů.

Myslím si, že vlastnosti kuželoseček jsou jistým způsobem pozoruhodné až magické. Proto jsem se pokusila zkompletovat a prohloubit tyto informace, které jsou navíc podpořené dynamickými aptely a obrázky. Doufám, že čtenář, ať je to učitel či žák, ocení tuto snahu.

Literatura

Zde najdete seznamy použité literatury a také odkazy na webové stránky s tematikou kuželoseček.

Česká literatura

[1] Drábek, K. - Harant, F. - Setzer, O.: *Deskriptivní geometrie I*; STNL - Nakladatelství technické literatury, Alfa, vydavatelství technické a ekonomické literatury, Praha 1978

[2] Havlíček, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*; Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1956

[3] Horák, S.: *Elipsa*; Nakladatelství československé akademie věd, Praha 1953

[4] Horák, S.: *Sbírka řešených úloh z deskriptivní geometrie II. díl*; Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1966

[5] Kadeřávek, F. - Klíma, J. - Kounovský, J.: *Deskriptivní geometrie díl I.*; Nakladatelství československé akademie věd, Praha 1954

[6] Kalal, J.: *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie*; nákladem Jednoty československých matematiků a fyziků, Praha 1912

[7] Klíma, J. - Ingrid, V.: *Deskriptivní geometrie pro VI. a VII. třídu reálků*; Druhé, přehlednuté vydání; nákladem Jednoty československých matematiků a fyziků, tiskem knihtiskárny "Prometheus", Praha 1947

[8] Kopřivová, H.: *Deskriptivní geometrie I*; Vydavatelství ČVUT, Praha 1995

[9] Menšík, M.: *Deskriptivní geometrie, I. díl*, 22. svazek Polytechnické knihovny, II. řad; Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1962

[10] Piska, R. - Medek, V.: *Deskriptivní geometrie I, 2.*, rozšířené a přepracované vydání; STNL - Nakladatelství technické literatury, Alfa, vydavatelství technické a ekonomické literatury, Praha 1972

[11] Pomykalová, E.: *Deskriptivní geometrie pro střední školy*; Prometheus, Praha 2010

[12] Sobotka, J.: *Deskriptivní geometrie promítání paralelního*; nákladem Jednoty českých matematiků a české matice technické, Praha 1906

[13] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I, 3.*, nezměněné vydání; STNL - Nakladatelství technické literatury, Alfa, vydavatelství technické a ekonomické literatury, Praha 1982

Zahraniční literatura

[14] Breymann, G. A.: *Allgemeine Baukonstruktionslehre mit besonderer Beziehung auf das Hochbauwesen*; J. M. Gerhard's Verlag, Leipzig 1903

Webové stránky a odkazy

[W1]

http://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres

[W2]

<http://kmd.fp.tul.cz/lide/zackova/GE1/Kuzelosecky.pdf>

[W3]

<http://mat.fsv.cvut.cz/BAKALARI/kog/kzs/files/KuzeloseckyLavicka.pdf>

[W4]

<http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Geometrie/Krivky/Kuzelosecky/Kuzelosecky.html>

[W5]

http://www.electricscotland.com/canada/fraser/french_connections.htm

[W6]

http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/vera_setmanukova_bp/BP-Setmanukova.pdf

[W7]

http://www.liceomendrisio.ch/~marsan/matematica/materiale_vario/coniche/Dandelin/JDandelinEn.htm

[W8]

http://www.math.muni.cz/~xhalfaro/diplomka/kap_a3/kap_a3.html

Příklady

Přílohou k této práci je sbírka úloh týkajících se problematiky kuželoseček. Může sloužit jako kontrolní pomůcka pro čtenáře a studenty. Naleznete v ní příklady různé obtížnosti s různou tematikou. Je vypracovaná na základě zde nabytých znalostí.

Ve sbírce úloh bylo použito stejné označení jednotlivých prvků jako ve výše uvedených kapitolách.

Pro případ, že si jednotlivé sbírky příkladů budete chtít vytisknout a použít je, jsou na této stránce odkazy na sbírky v PDF formátu.

[Příklady Elipsa v PDF](#)

[Příklady Hyperbola v PDF](#)

[Příklady Parabola v PDF](#)

Elipsa

Příklad 1: Sestrojte elipsu, jsou-li dána její ohniska F_1, F_2 , $e = 2$. Dále znáte součet průvodičů jejích bodů $|F_1X| + |F_2X| = 7$.

Příklad 2: Sestrojte elipsu, jež je dána jedním hlavním vrcholem A , jedním vedlejším vrcholem C a délkou hlavní poloosy $a = 3$. $|AC| = 4$

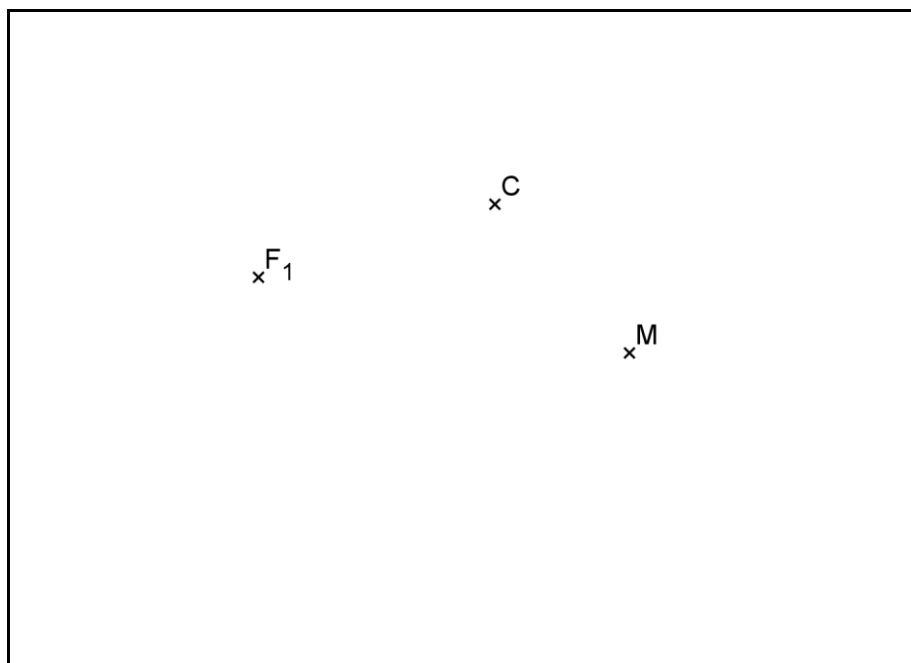
Příklad 3: Narýsujte elipsu, znáte-li délku její hlavní poloosy $a = 7$ a excentricitu $e = 4$.

Příklad 4: Narýsujte elipsu, jejíž ohniska F_1, F_2 jsou od sebe vzdálena o 8 jednotek a pro kterou platí $b = 2,5$.

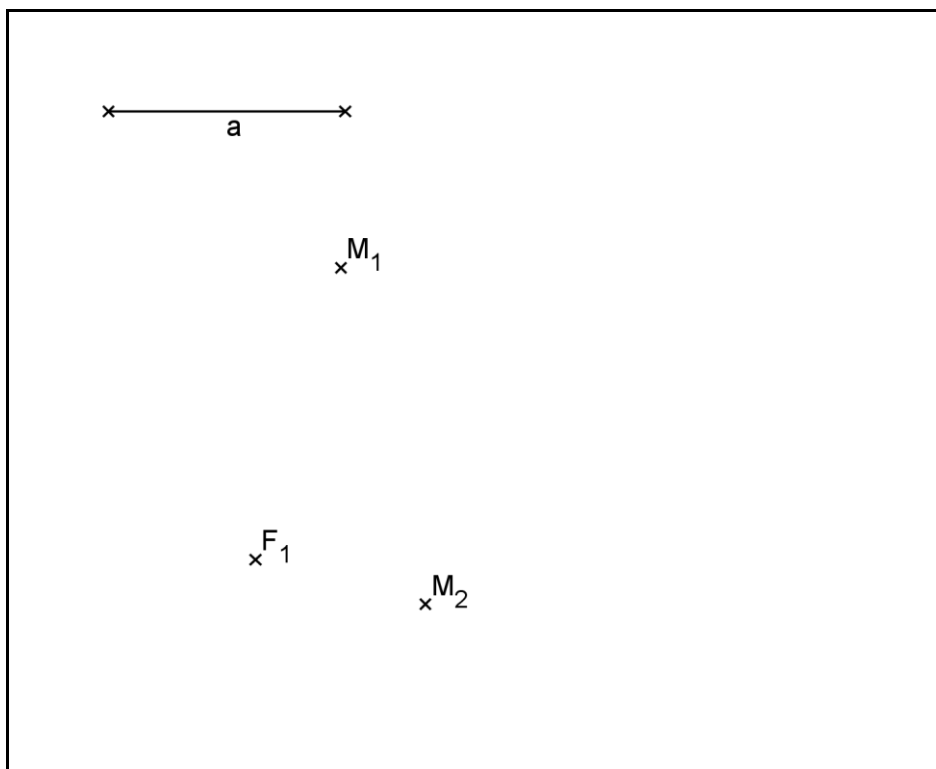
Příklad 5: Existuje-li elipsa o následujících parametrech, potom ji narýsujte. $a = 9$, $b = 6$, $e = 8$.

Příklad 6: Existuje-li elipsa o následujících parametrech, narýsujte ji. $a = 5$, $b = 3$, $e = 4$.

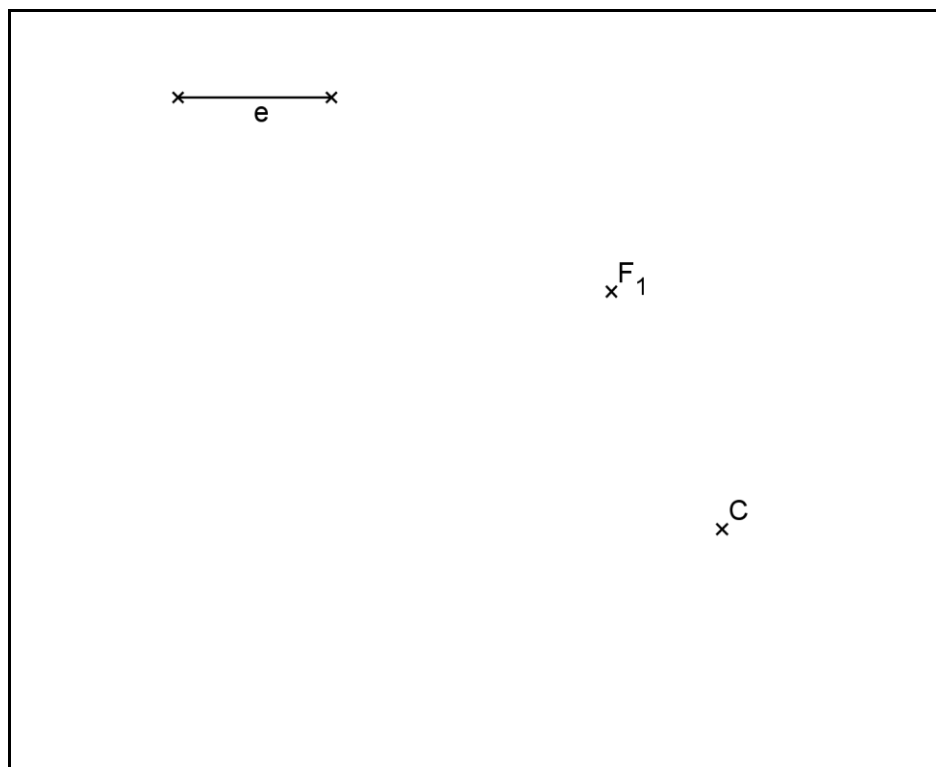
Příklad 7: Sestrojte elipsu, znáte-li její ohnisko F_1 , vedlejší vrchol C a jeden další její bod M .



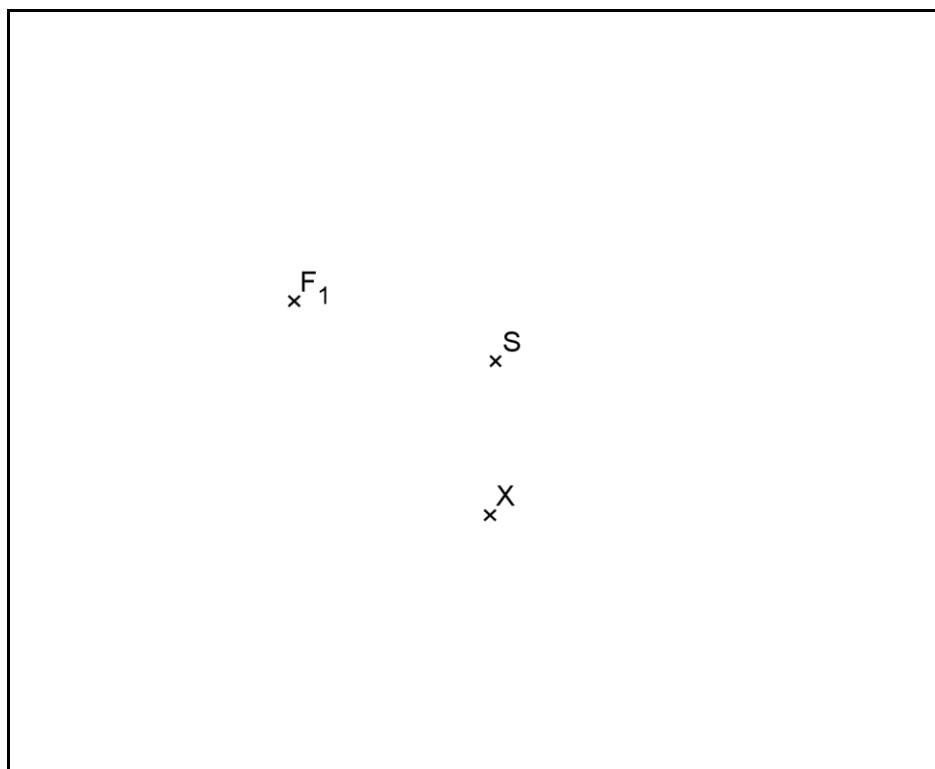
Příklad 8: Sestrojte elipsu, znáte-li její ohnisko F_1 , velikost hlavní poloosy a a další dva její body M_1, M_2 .



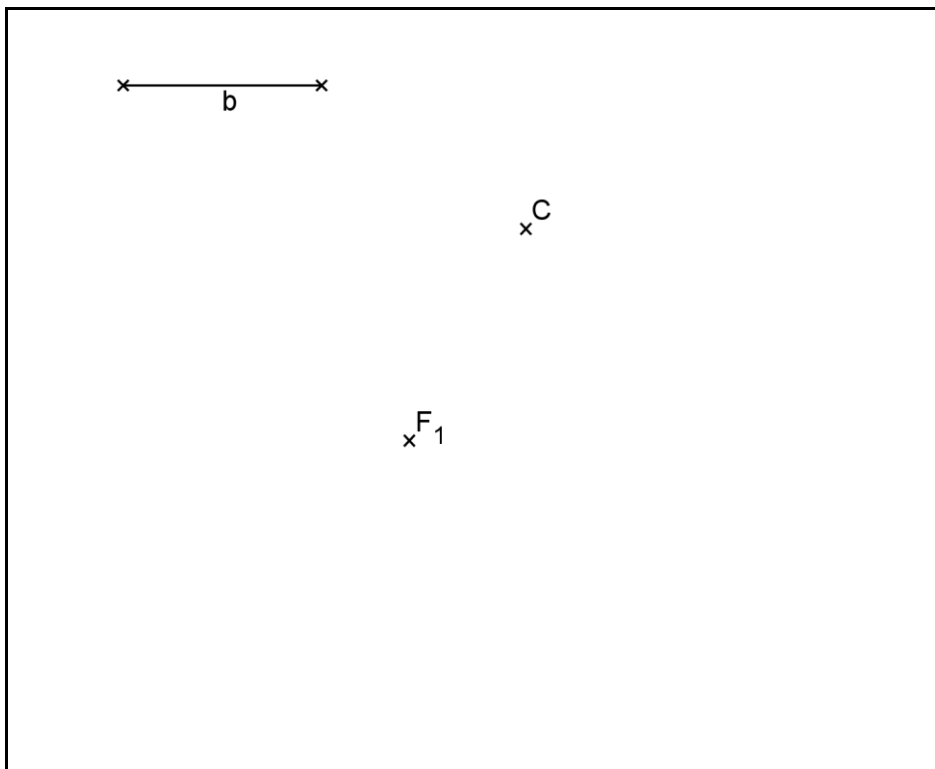
Příklad 9: Sestrojte elipsu, znáte-li její ohnisko F_1 , vedlejší vrchol C a excentricitu e .



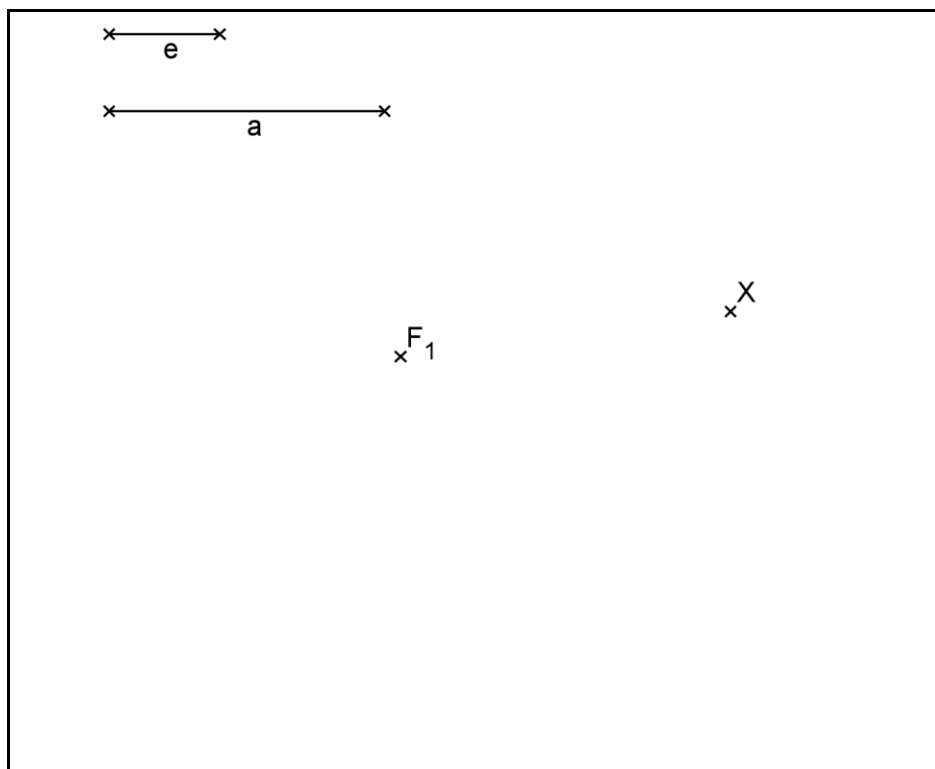
Příklad 10: Sestrojte elipsu, je-li dáno její ohnisko F_1 , střed S a jeden její bod X .



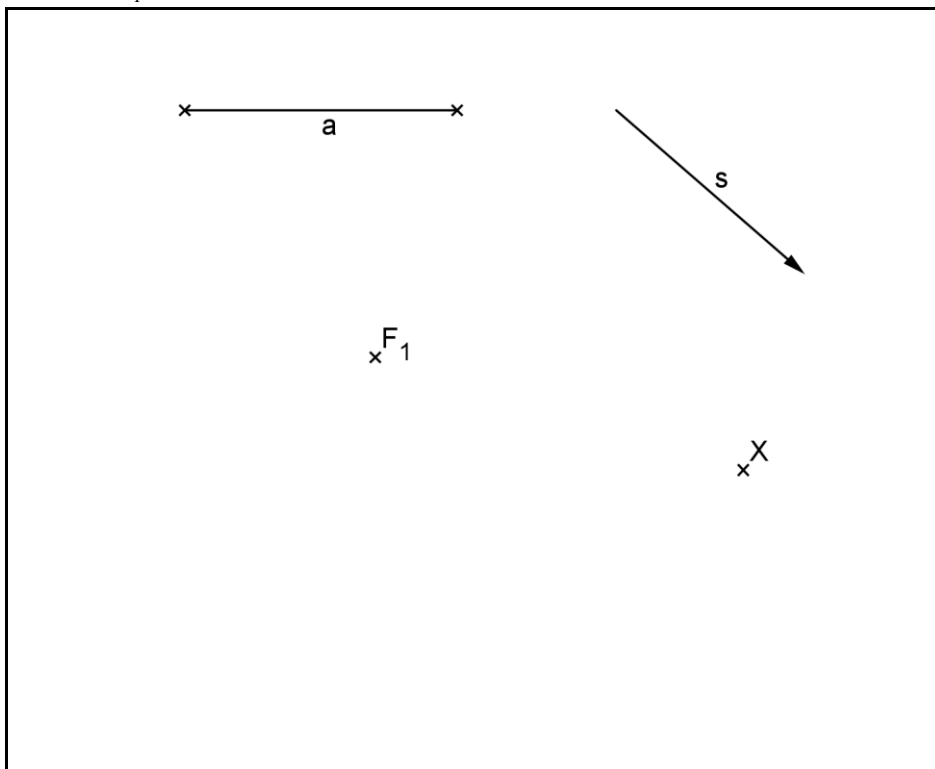
Příklad 11: Jestliže znáte velikost vedlejší poloosy b , ohnisko F_1 a vedlejší vrchol C , narýsujte elipsu.



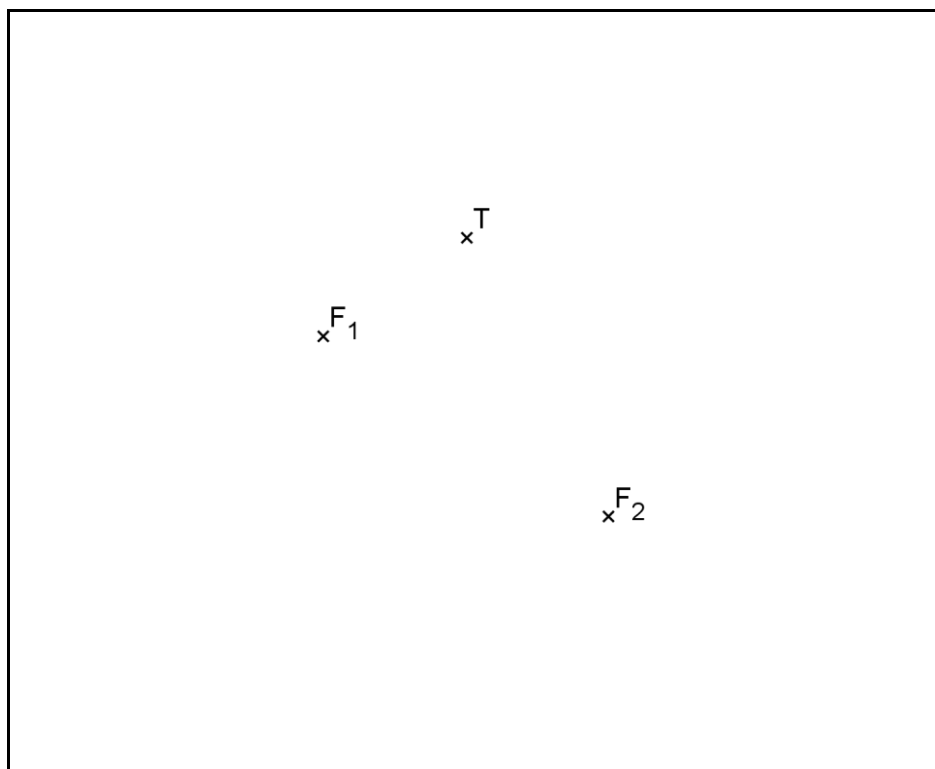
Příklad 12: Znáte-li ohnisko elipsy F_1 , její excentricitu e , hodnotu hlavní poloosy a a jeden její bod X , sestrojte a omezte její osy.



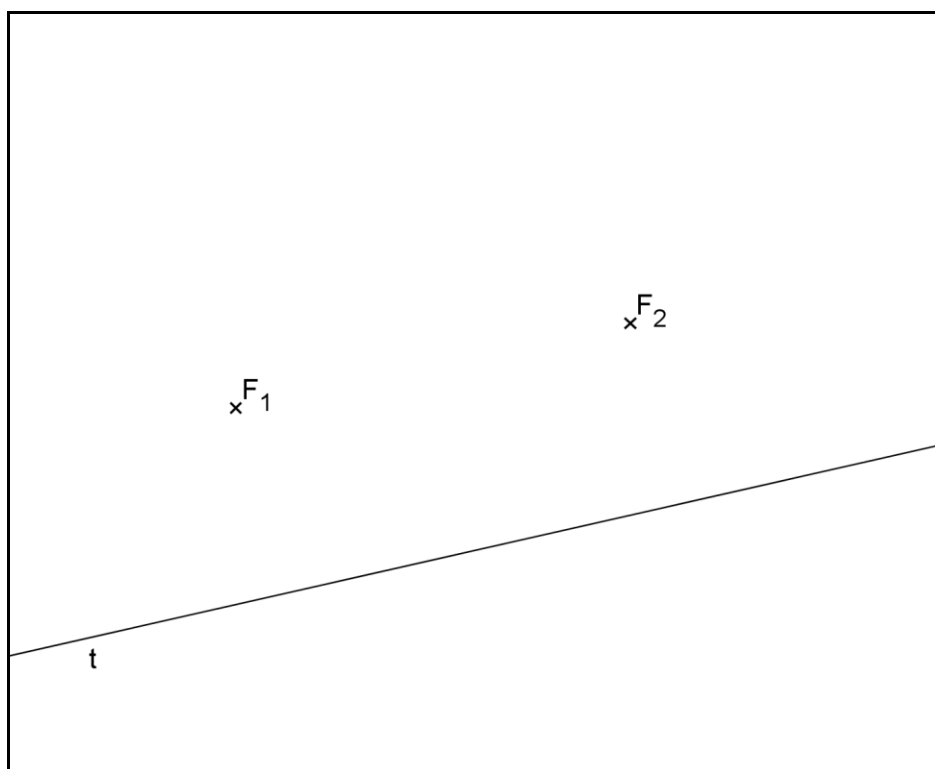
Příklad 13: Pokuste se sestrojít elipsu, pokud znáte směr s její hlavní osy, velikost hlavní poloosy a , ohnisko F_1 a další její bod X .



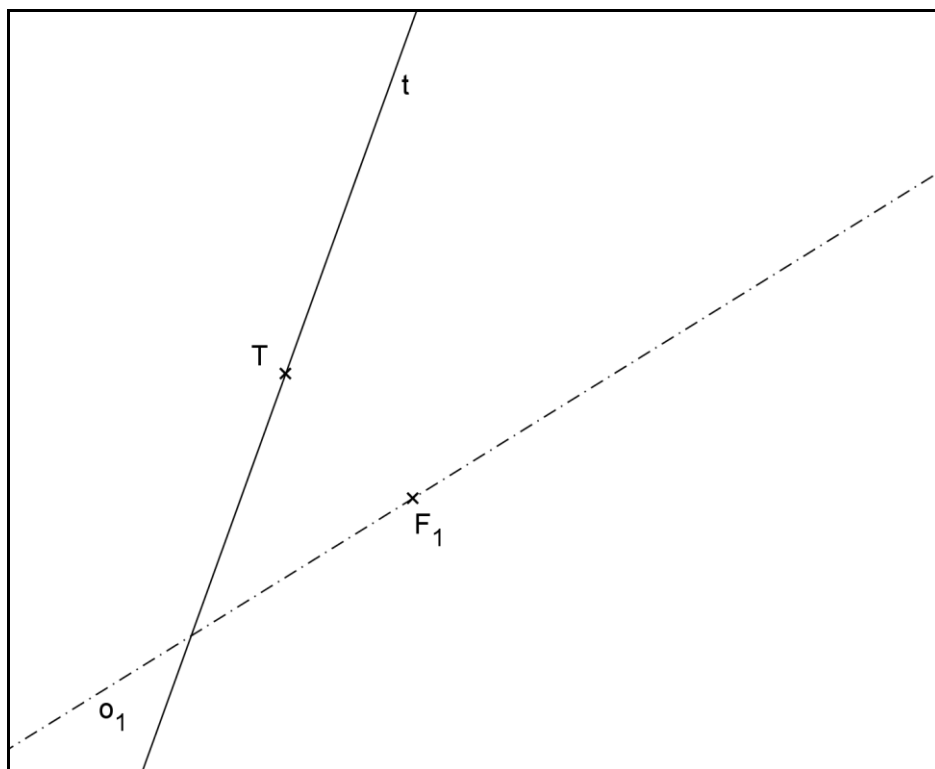
Příklad 14: V bodě T elipsy, u které znáte obě její ohniska F_1, F_2 sestrojte tečnu t .



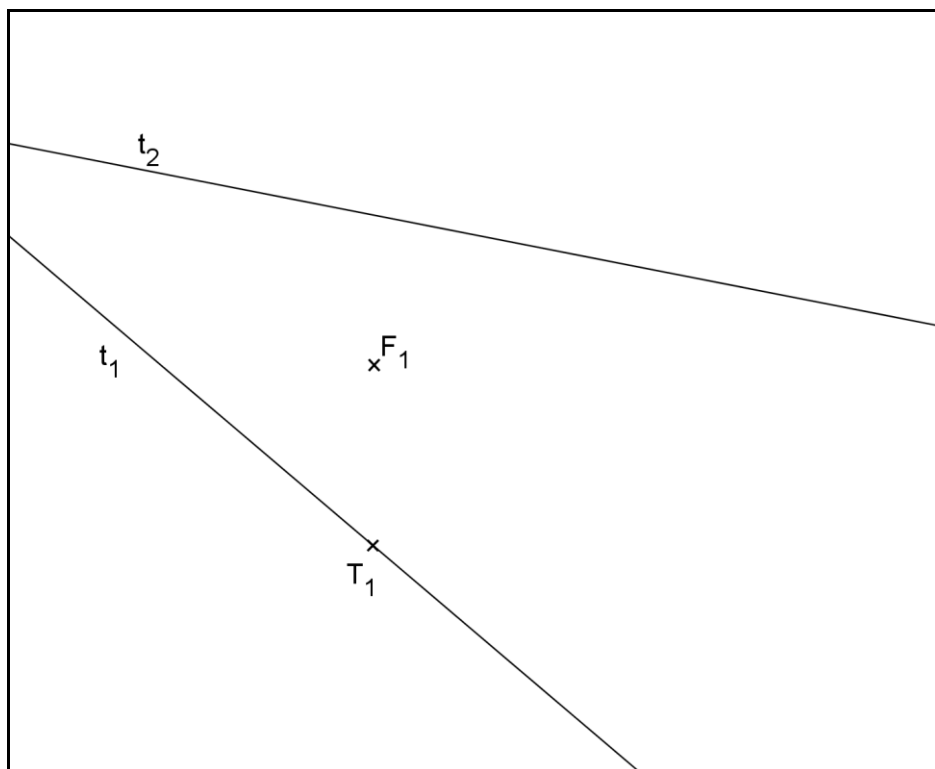
Příklad 15: Najděte bod dotyku T tečny t elipsy, která je dána svými ohnisky F_1, F_2 .



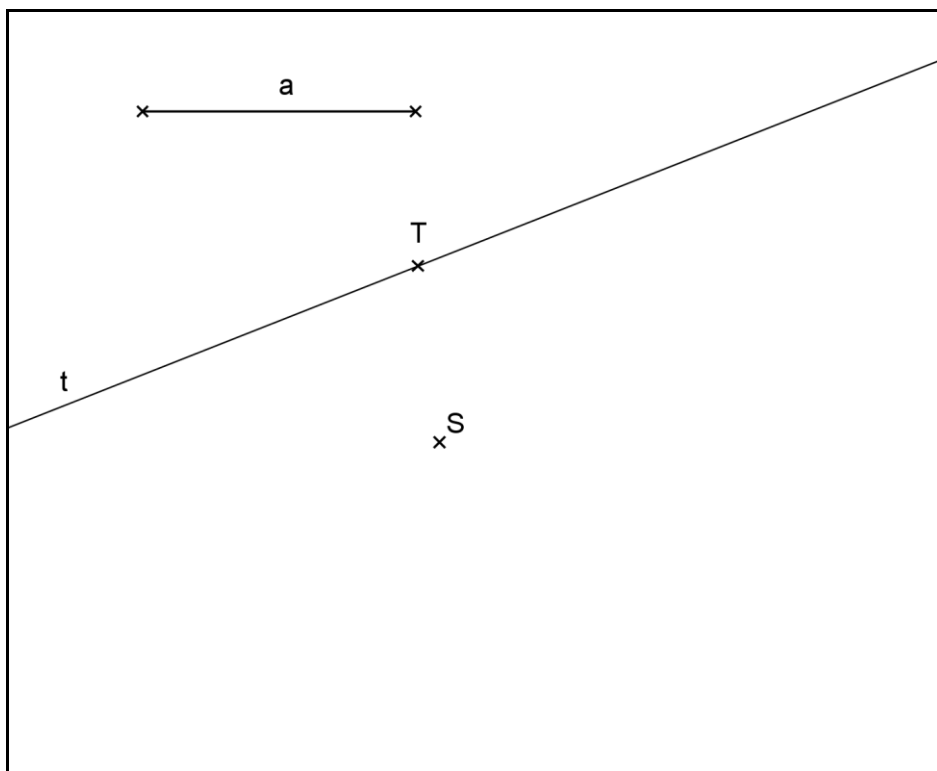
Příklad 16: Sestrojte elipsu, znáte-li její hlavní osu o_1 , ohnisko F_1 a dále tečnu t s bodem dotyku T .



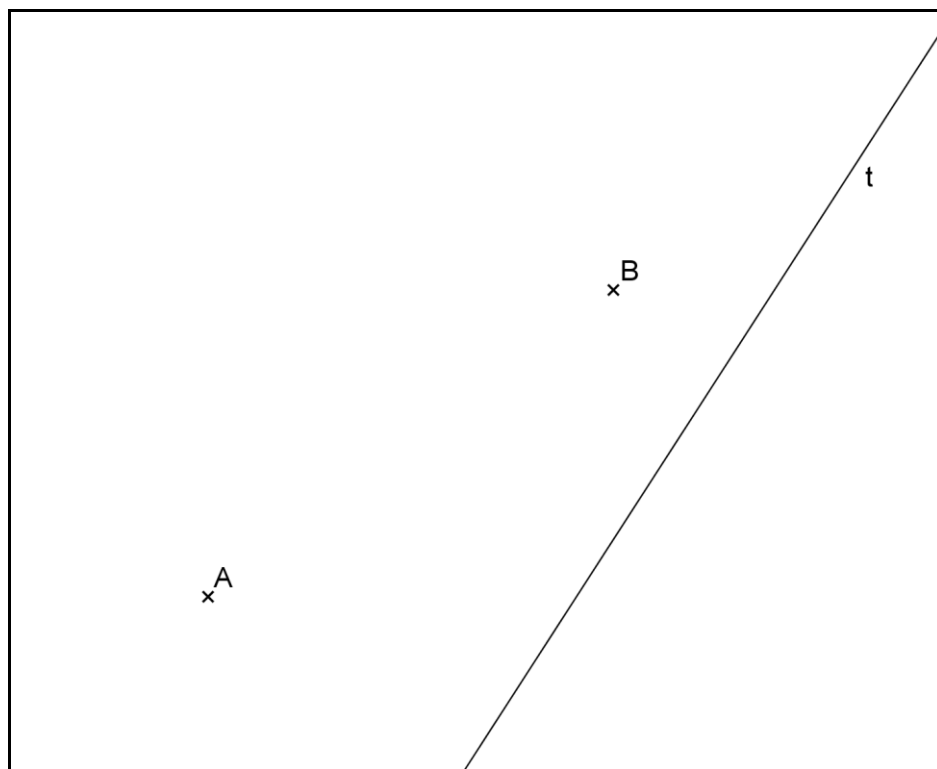
Příklad 17: Narýsujte elipsu, je-li dáno její ohnisko F_1 , tečny t_1, t_2 a bod dotyku $T_1 \in t_1$.



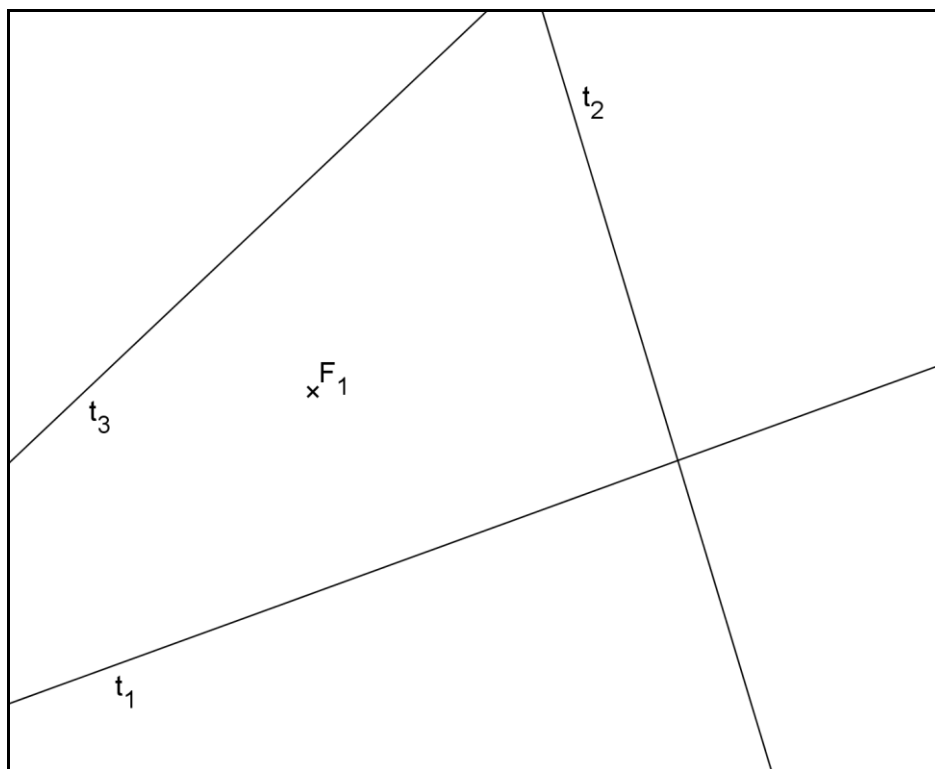
Příklad 18: Zkonstruujte elipsu, která je dána svým středem S , tečnou t s bodem dotyku T a délkou hlavní poloosy a .



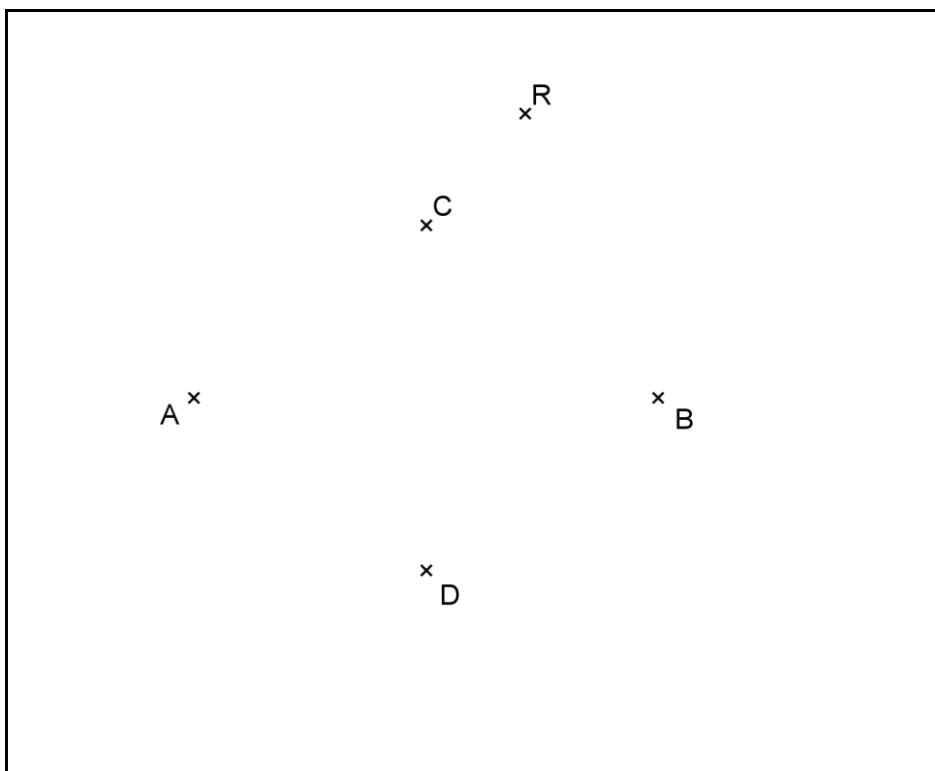
Příklad 19: Zkonstruujte elipsu, jsou-li dány její hlavní vrcholy A, B a tečna t .



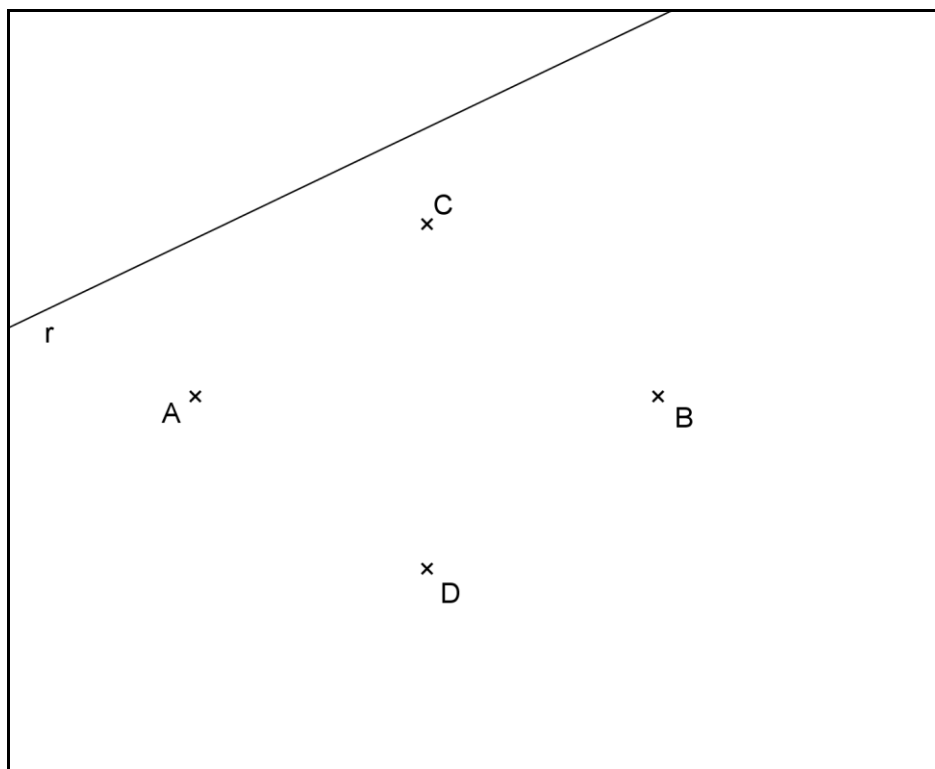
Příklad 20: Narýsujte elipsu, když znáte její ohnisko F_1 a tři její tečny t_1, t_2, t_3 .



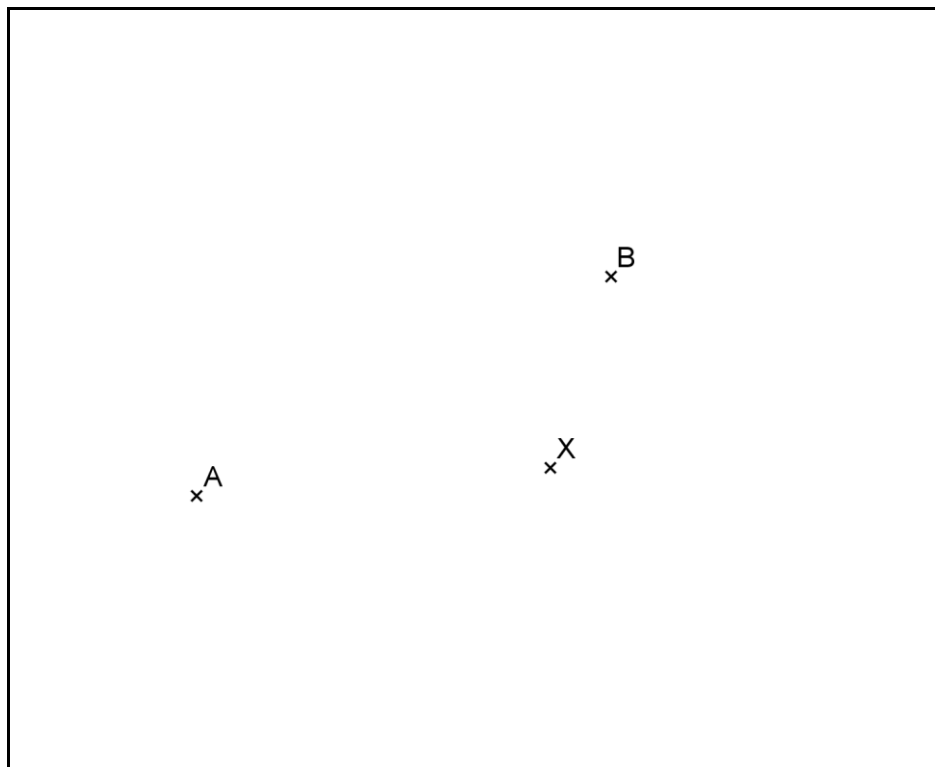
Příklad 21: K elipse, která je dána svými vrcholy A, B, C, D , sestrojte tečny (a opatřete je dotykovými body) procházející bodem R .



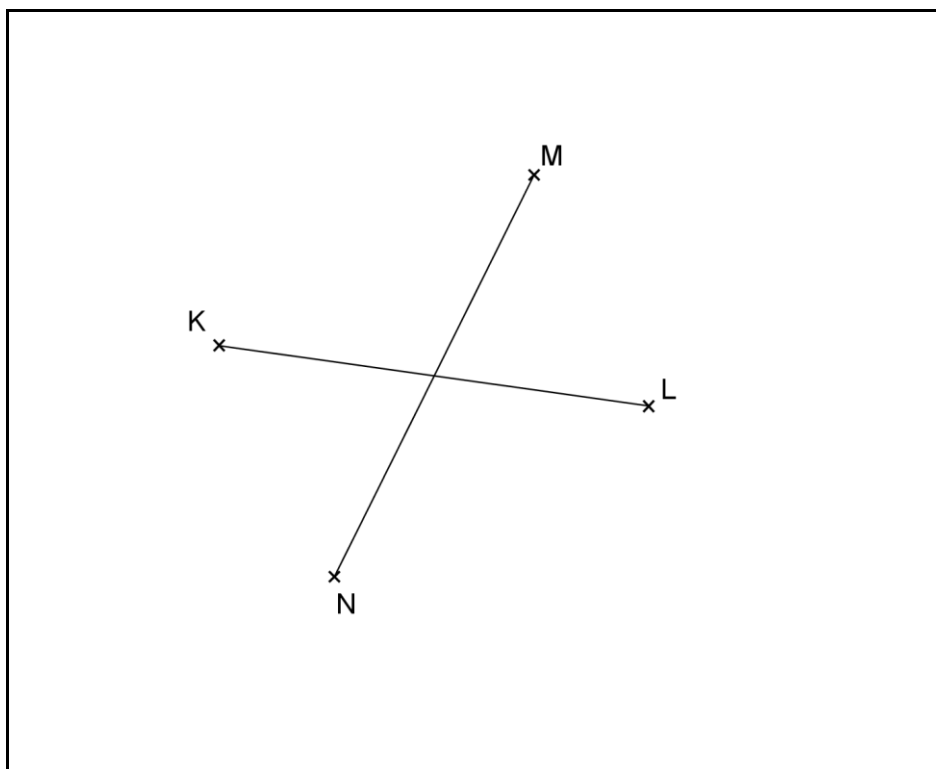
Příklad 22: K elipse, která je dána svými vrcholy A, B, C, D , sestrojte tečny (a opatřete je dotykovými body) rovnoběžné s přímkou r .



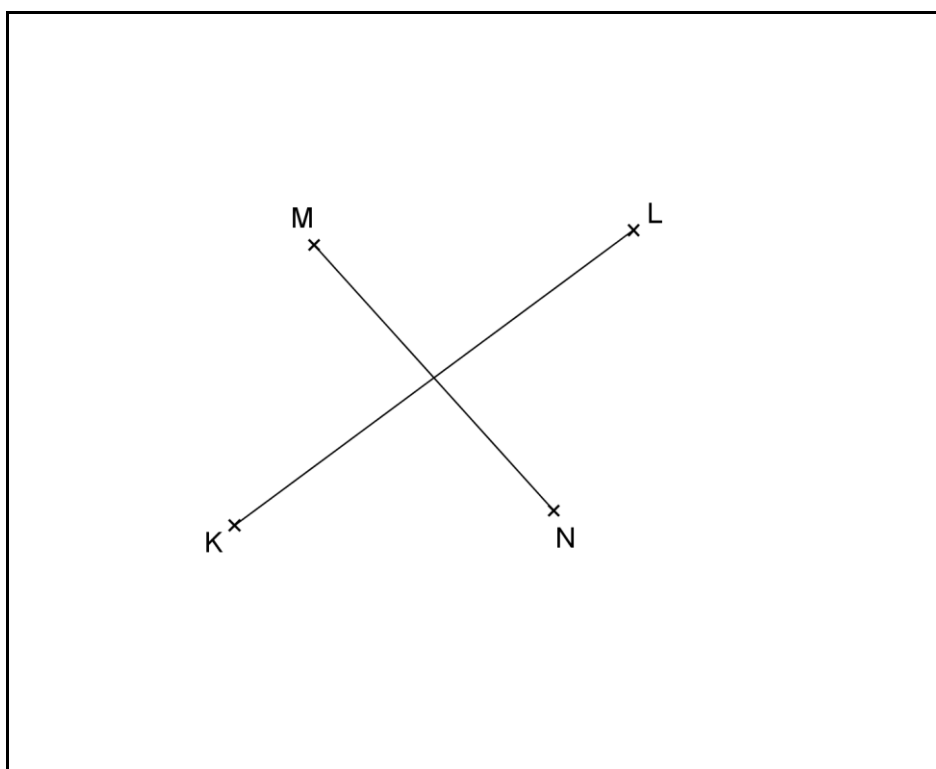
Příklad 23: Sestrojte hyperoskulační kružnice elipsy, znáte-li její hlavní vrcholy A, B a jeden její bod X .



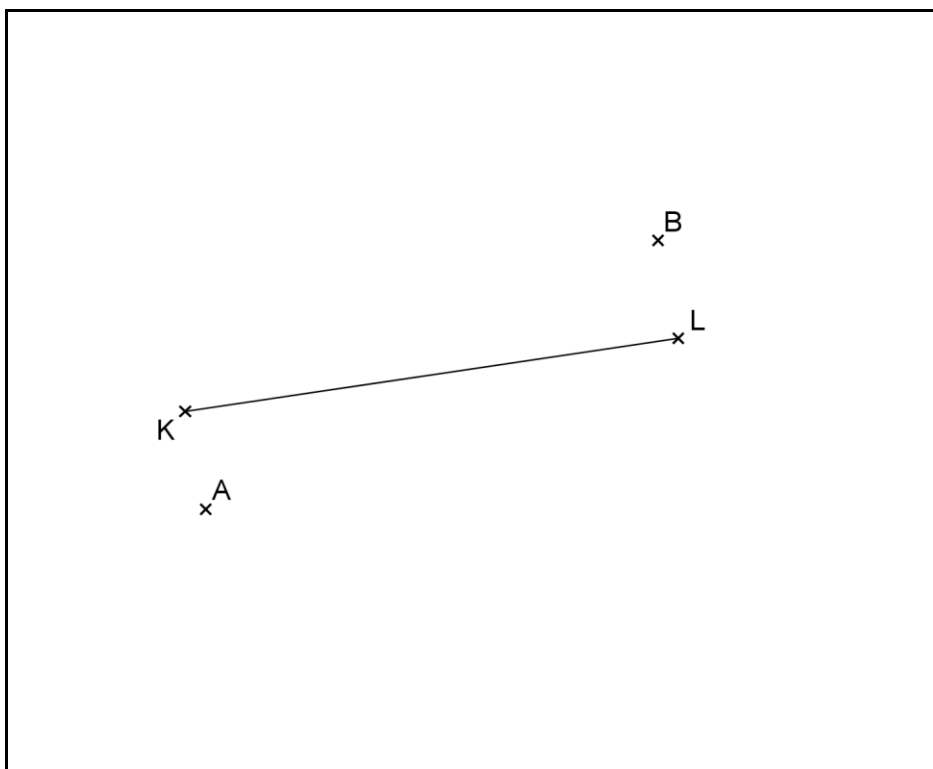
Příklad 24: Najděte osy elipsy, znáte-li její sdružené průměry KL , MN .



Příklad 25: Sestrojte elipsu, znáte-li její sdružené průměry KL , MN .



Příklad 26: Najděte průměr MN elipsy, který je sdružený se zadaným průměrem KL , znáte-li oba hlavní vrcholy A, B elipsy.



Hyperbola

Příklad 1: Sestrojte hyperbolu, jsou-li dána její ohniska F_1, F_2 , $e = 5$. Dále znáte rozdíl průvodičů jejích bodů $\|F_1X| - |F_2X\| = 7$.

Příklad 2: Sestrojte hyperbolu, jež je dána jedním hlavním vrcholem A , středem S a délkou vedlejší poloosy $b = 3$. $|AS| = 4$

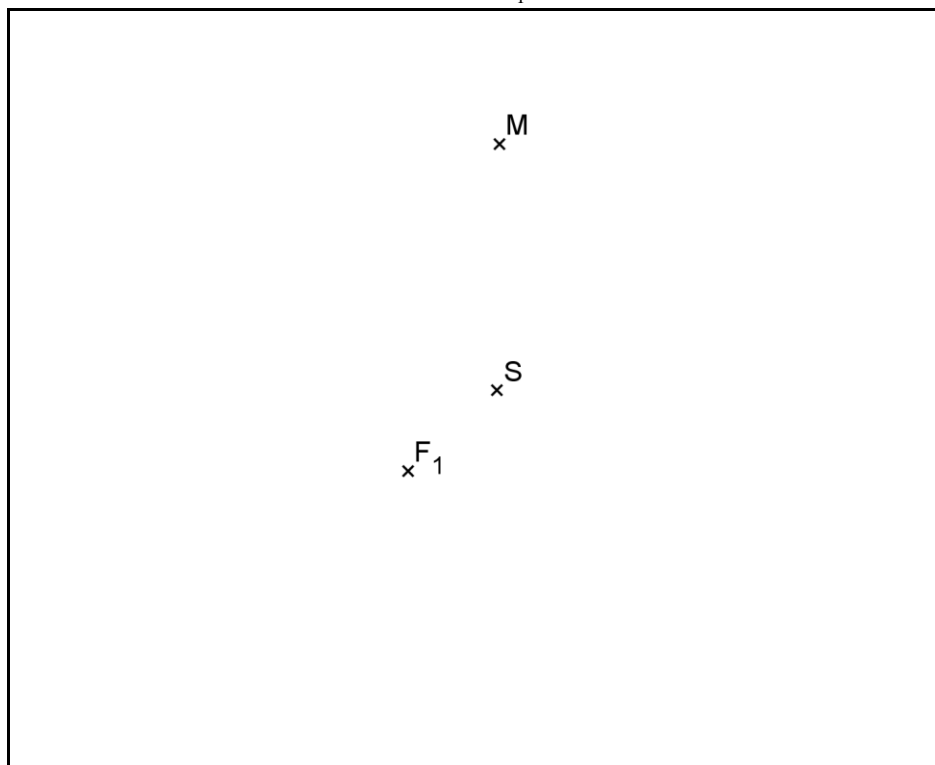
Příklad 3: Narýsujte hyperbolu, znáte-li délku její hlavní poloosy $a = 2$ a excentricitu $e = 4$.

Příklad 4: Narýsujte hyperbolu, jejíž ohniska F_1, F_2 jsou od sebe vzdálena o 7 a pro kterou platí $b = 1,5$.

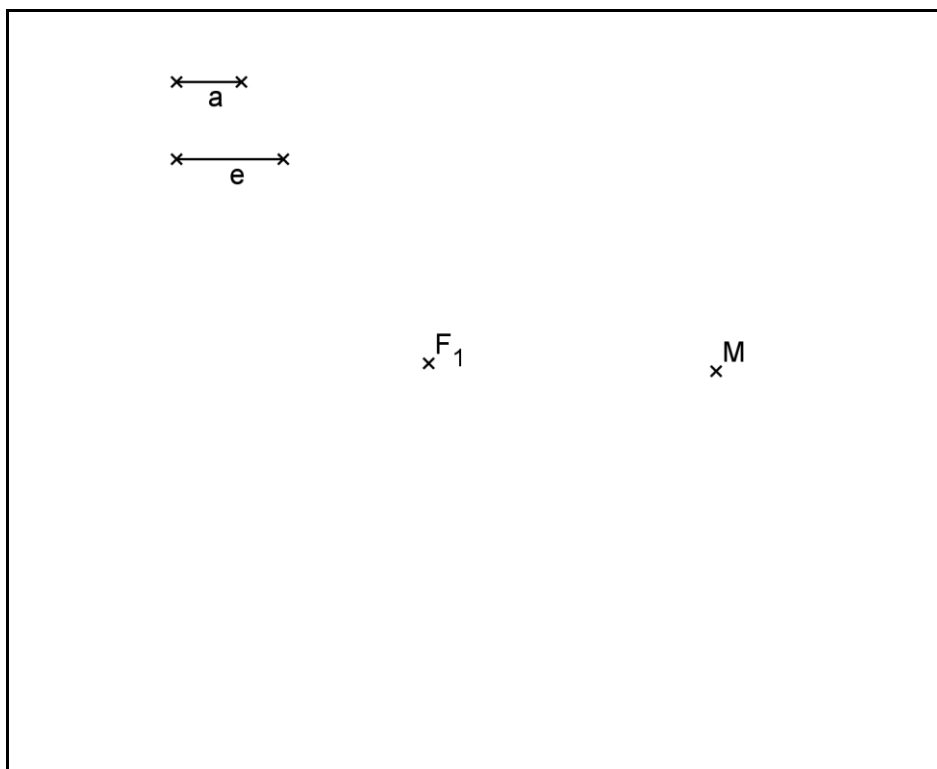
Příklad 5: Existuje-li hyperbola o následujících parametrech, potom ji narýsujte. $a = 7$, $b = 6$, $e = 14$.

Příklad 6: Pokud existuje hyperbola o následujících parametrech, narýsujte ji. $a = 4$, $b = 3$, $e = 5$.

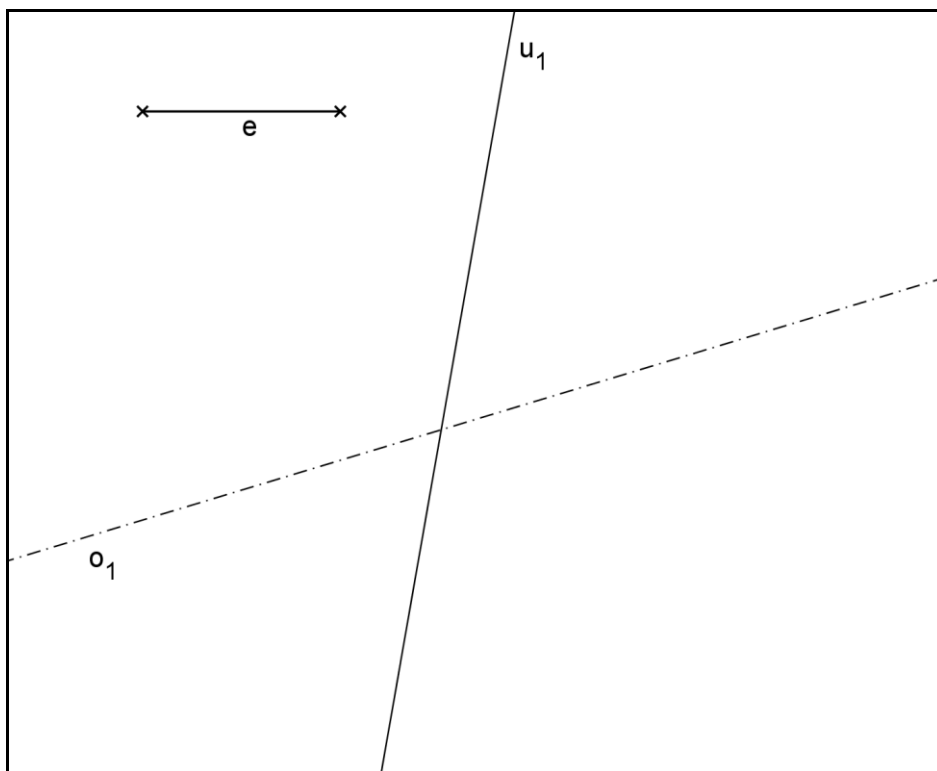
Příklad 7: Sestrojte hyperbolu, znáte-li její ohnisko F_1 , střed S a jeden další její bod M .



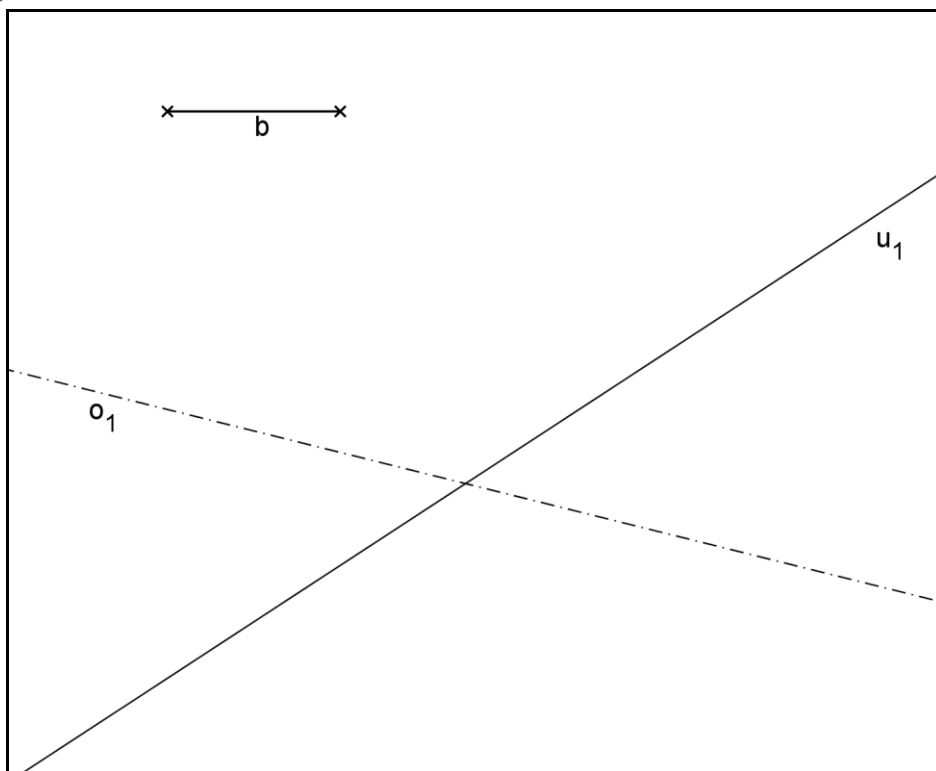
Příklad 8: Sestrojte hyperbolu, znáte-li její ohnisko F_1 , velikost hlavní poloosy a , velikost excentricity e a jeden její bod M .



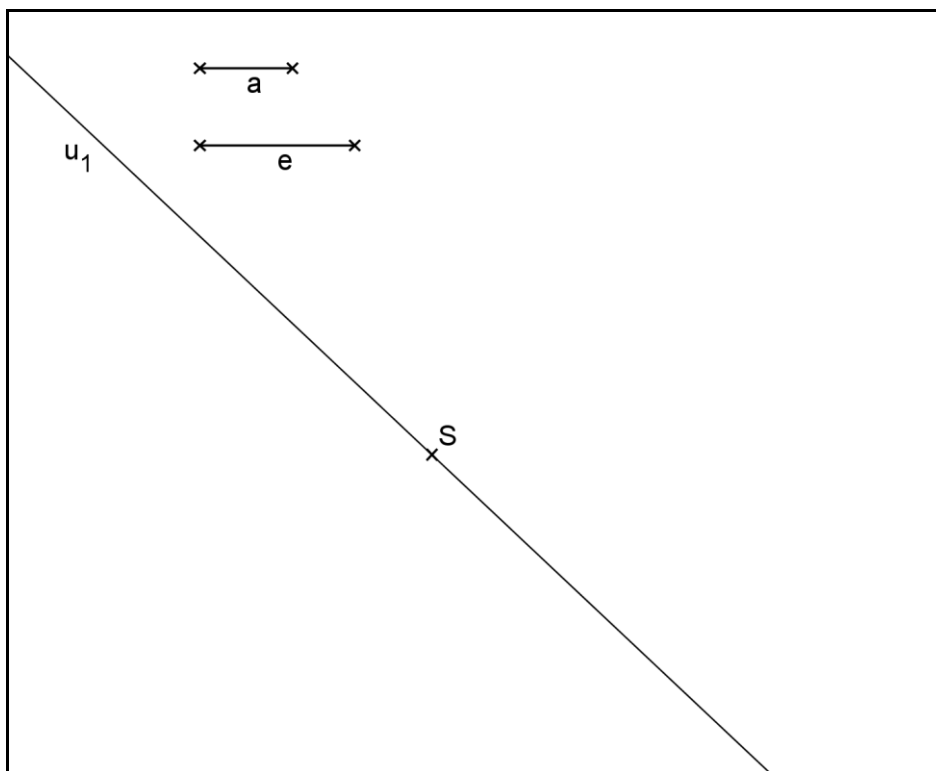
Příklad 9: Sestrojte hyperbolu, znáte-li její hlavní osu o_1 , asymptotu u_1 a excentricitu e .



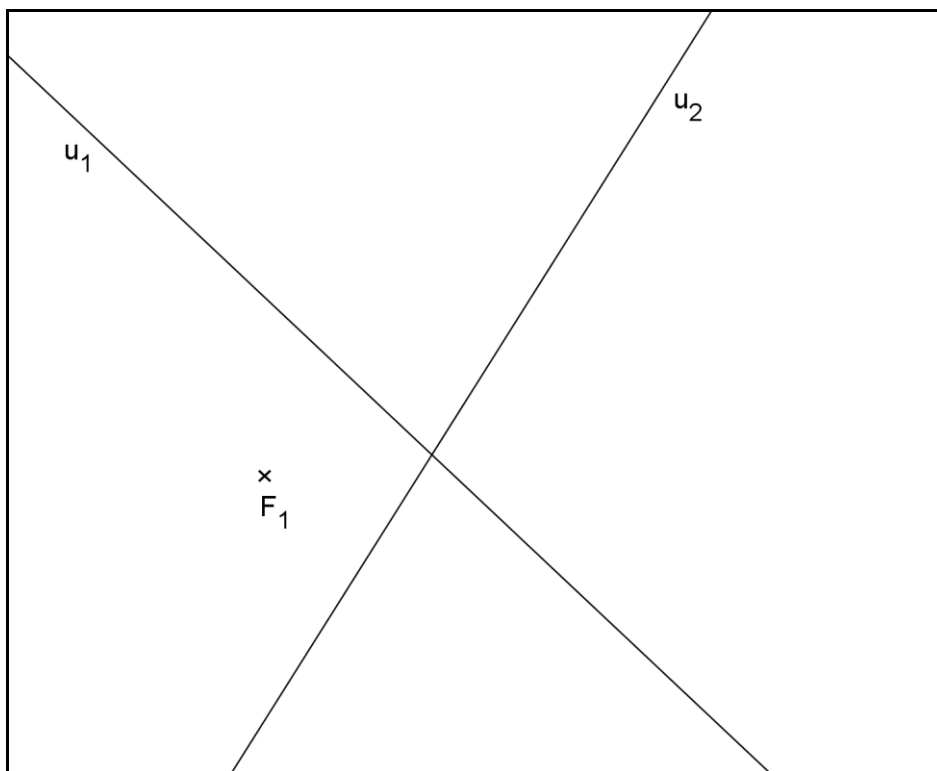
Příklad 10: Sestrojte hyperbolu, je-li dána její hlavní osa o_1 , asymptota u_1 a velikost vedlejší poloosy b .



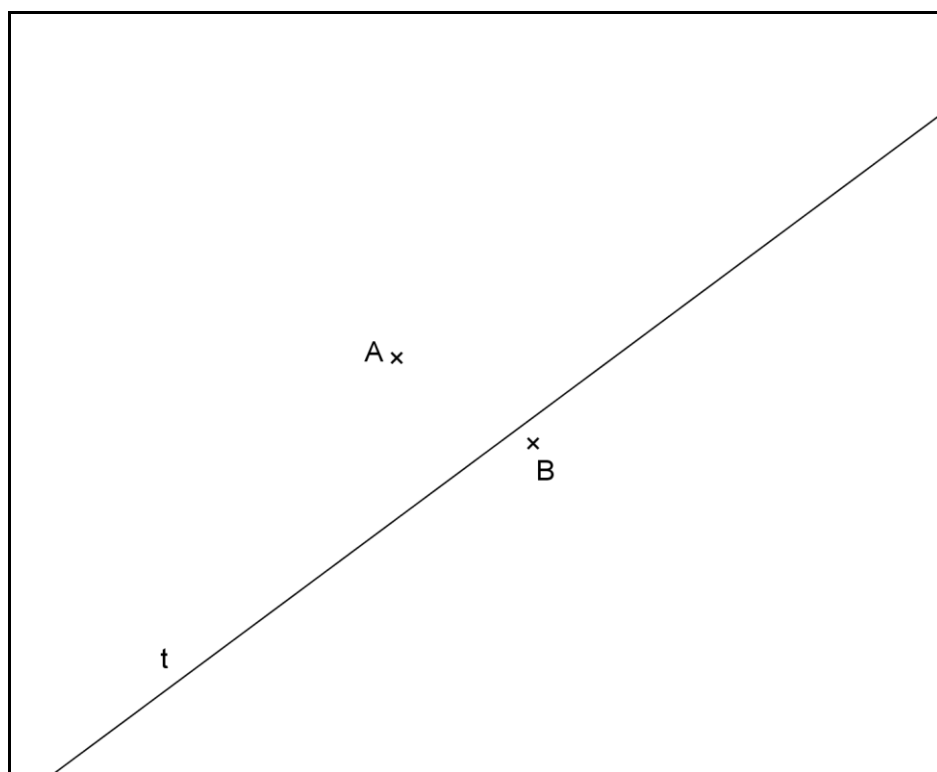
Příklad 11: Jestliže znáte velikost hlavní poloosy a , excentricitu e , asymptotu u_1 a střed hyperboly S , narýsujte danou hyperbolu.



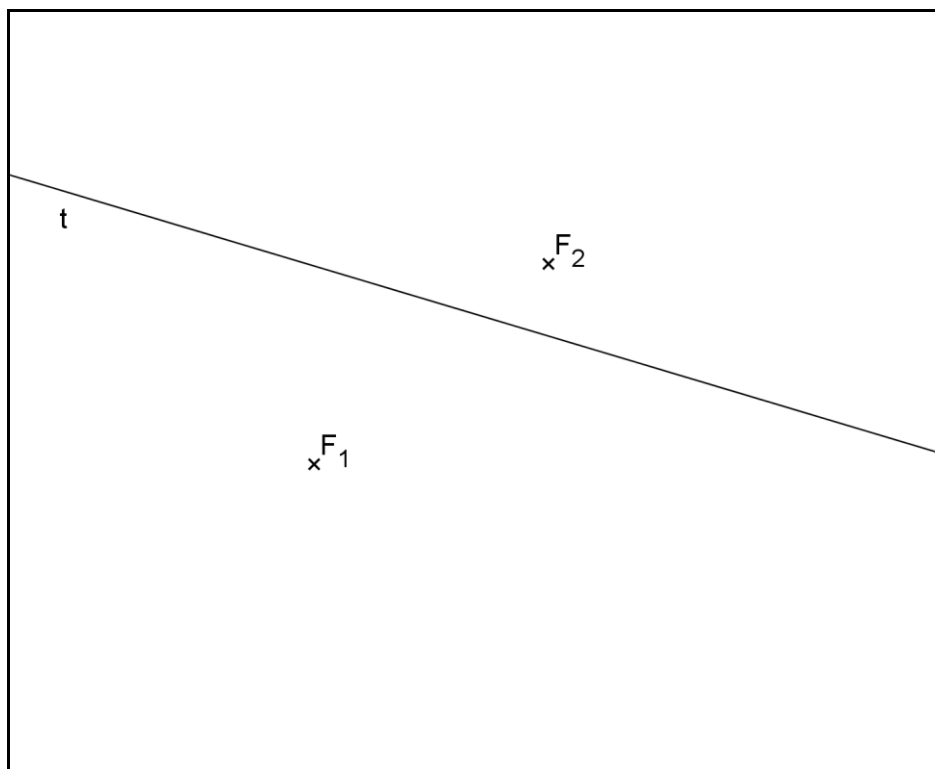
Příklad 12: Znáte-li ohnisko hyperboly F_1 a její asymptoty u_1, u_2 , sestrojte ji.



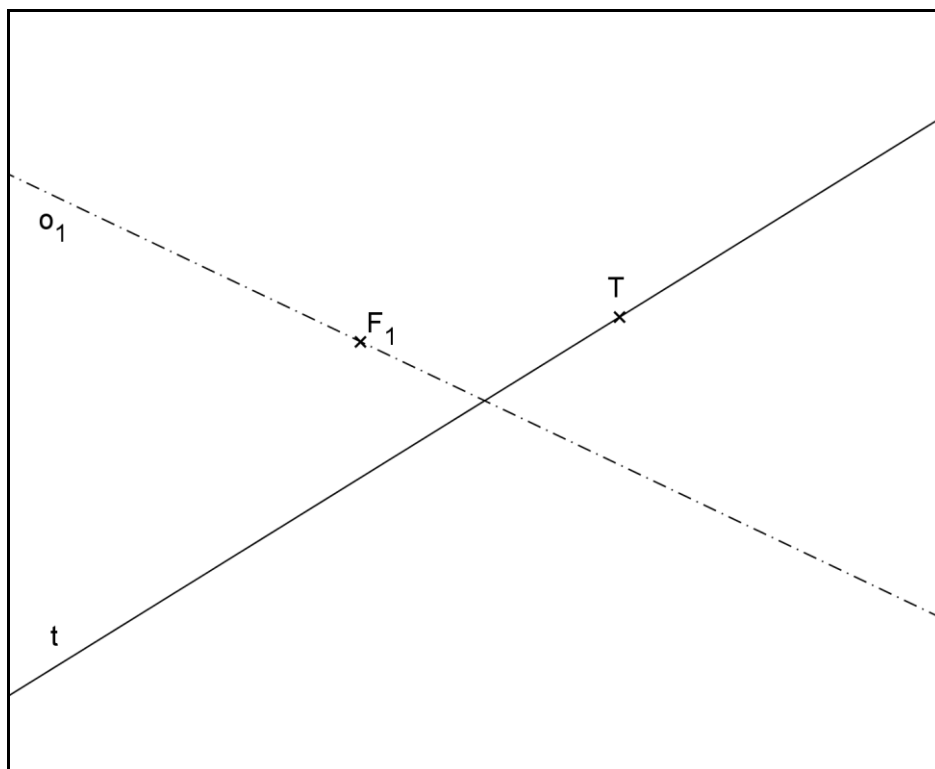
Příklad 13: Sestrojte hyperbolu, jsou-li dány oba její vrcholy A, B a tečna t .



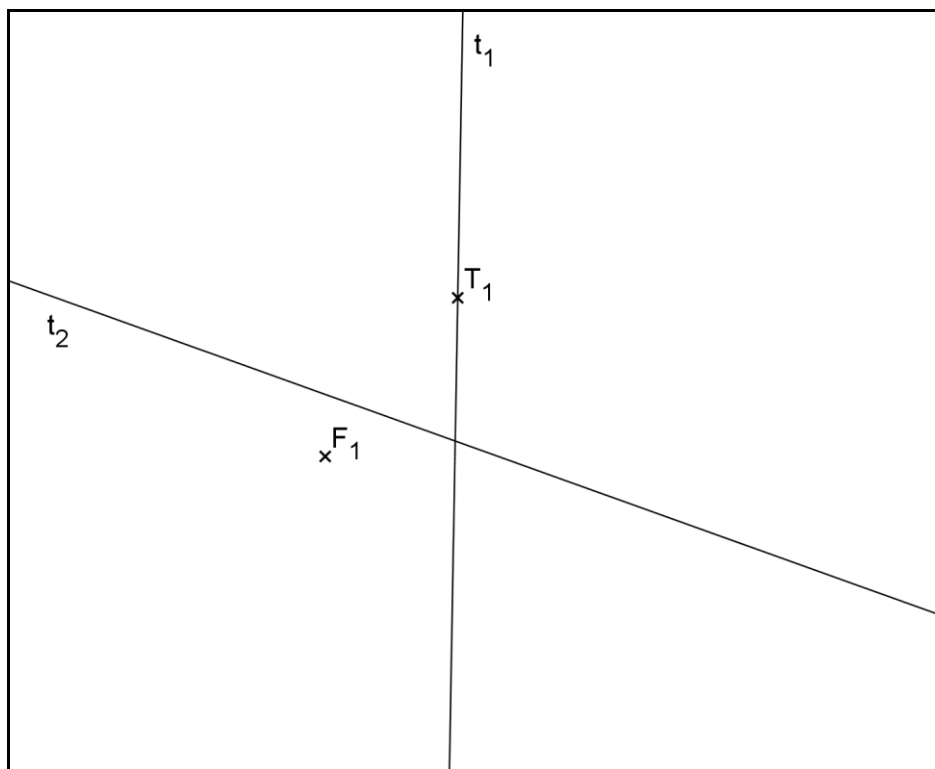
Příklad 14: Najděte bod dotyku T tečny t hyperboly, která je dána svými ohnisky F_1, F_2 .



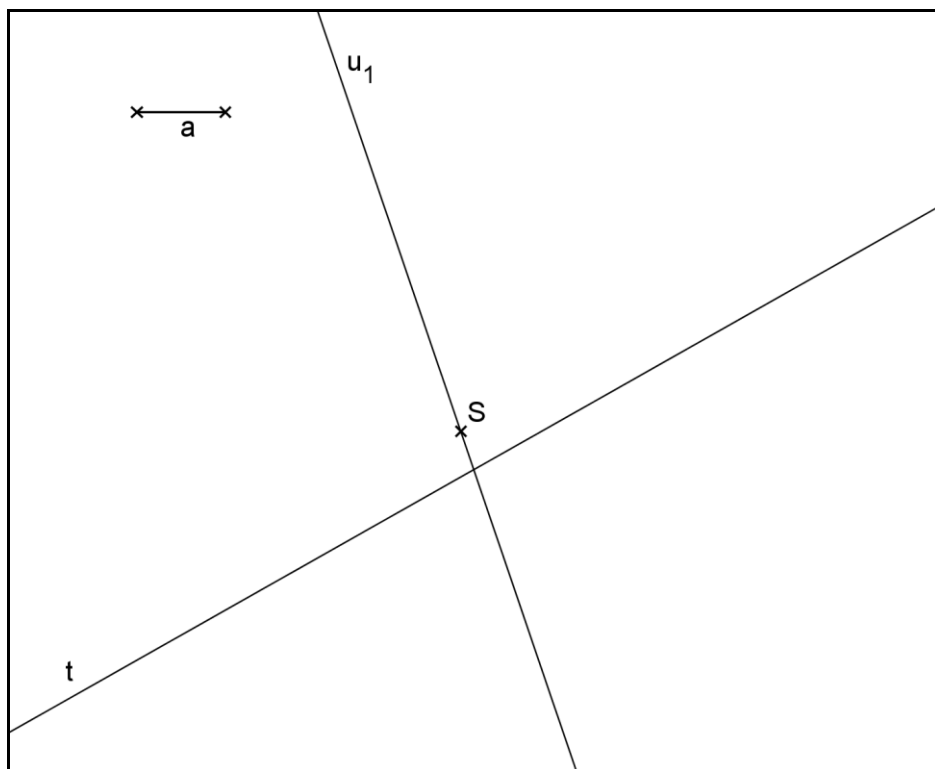
Příklad 15: Sestrojte hyperbolu, znáte-li její hlavní osu o_1 , ohnisko F_1 a dále tečnu t s bodem dotyku T .



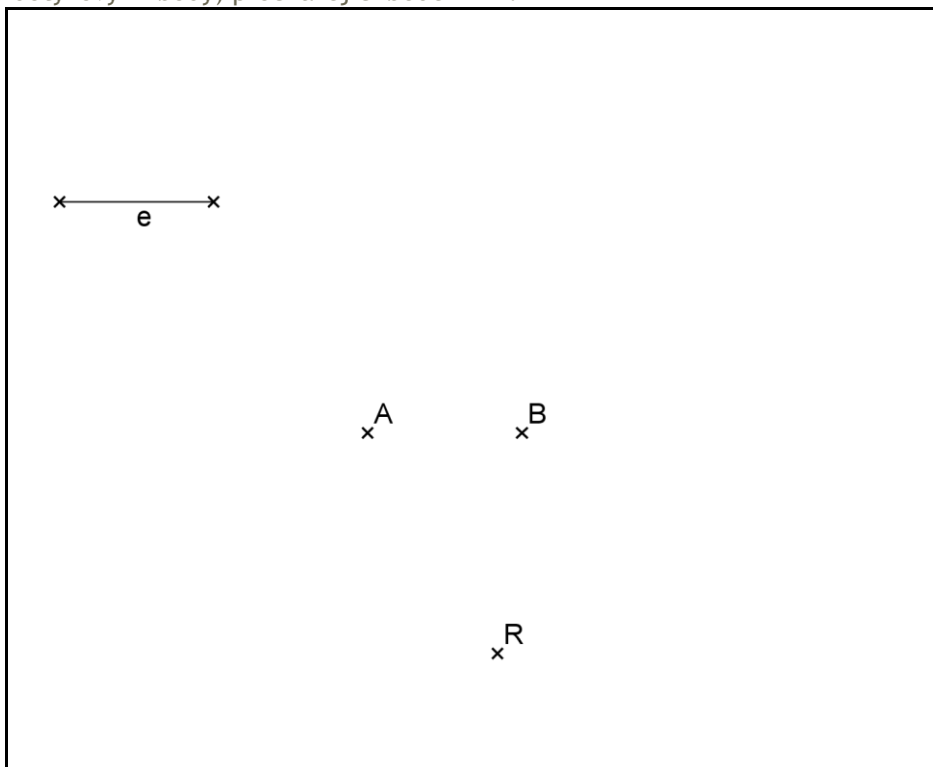
Příklad 16: Narýsujte hyperbolu, je-li dáno její ohnisko F_1 , tečny t_1, t_2 a bod dotyku $T_1 \in t_1$.



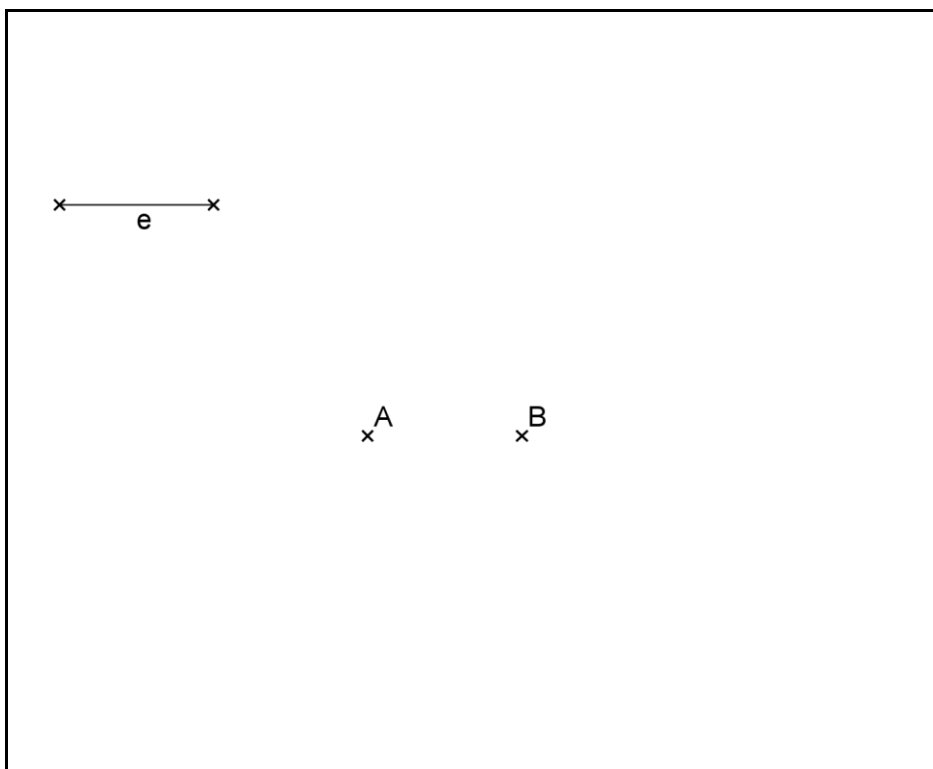
Příklad 17: Zkonstruuje hyperbolu, která je dána svým středem S , tečnou t , asymptotou u_1 a délkou hlavní poloosy a .



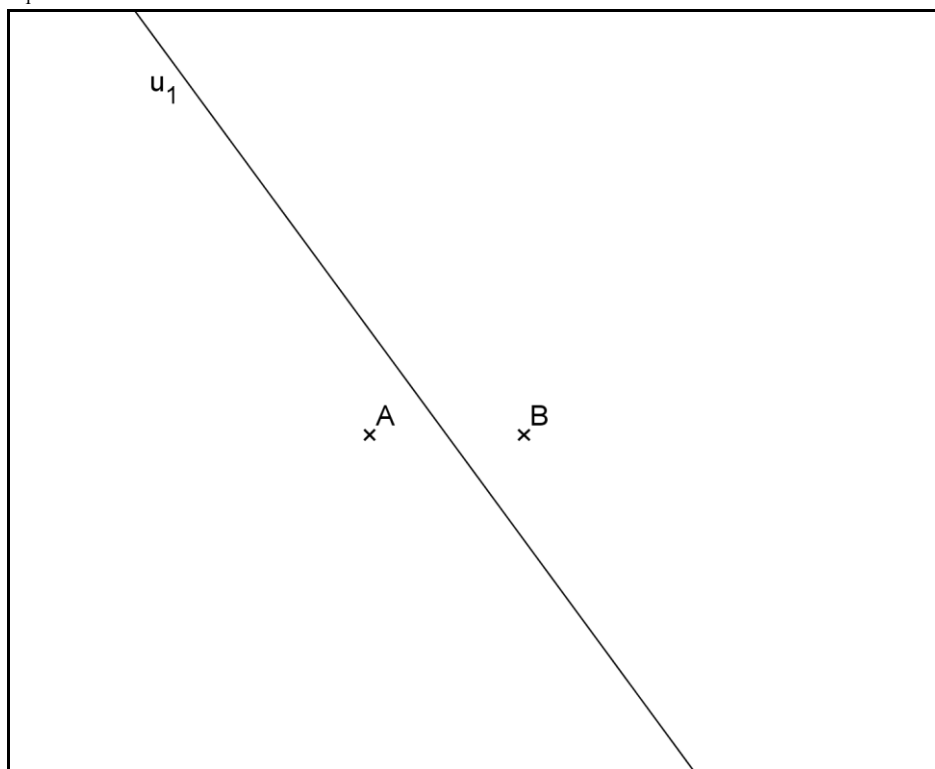
Příklad 18: K hyperbole, která je dána svými vrcholy A, B a excentricitou e sestrojte tečny (a opatřete je dotykovými body) procházející bodem R .



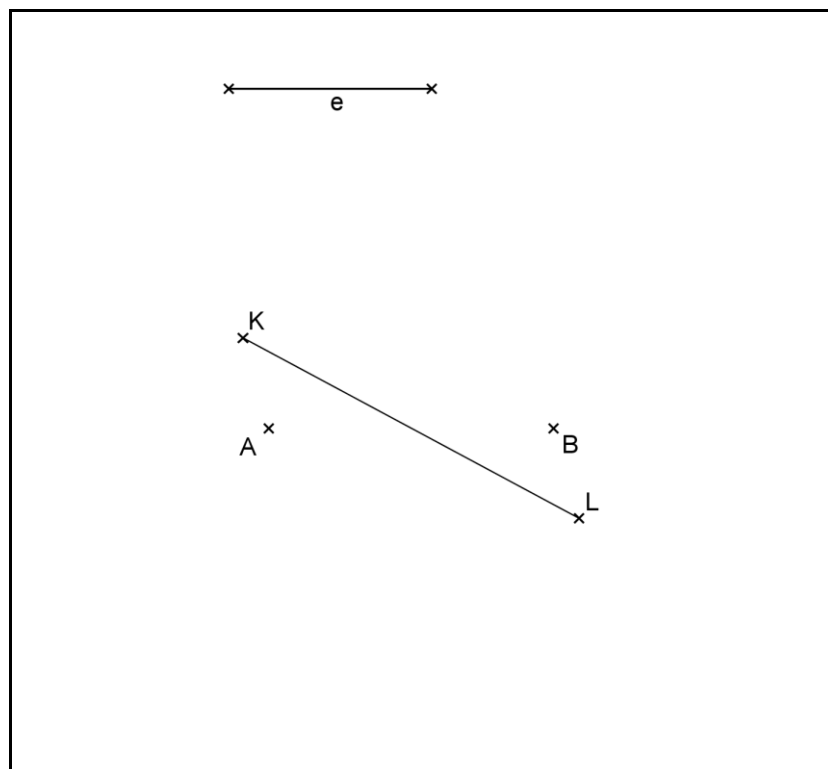
Příklad 19: K hyperbole, která je dána svými vrcholy A, B a excentricitou e sestrojte tečny (a opatřete je dotykovými body), jejichž odchylka od hlavní osy je $+60^\circ$.



Příklad 20: Sestrojte hyperoskulační kružnice hyperboly, znáte-li její hlavní vrcholy A, B a její asymptotu u_1 .



Příklad 21: Najděte průměr MN hyperboly, který je sdružený se zadaným průměrem KL , znáte-li oba hlavní vrcholy A, B hyperboly.

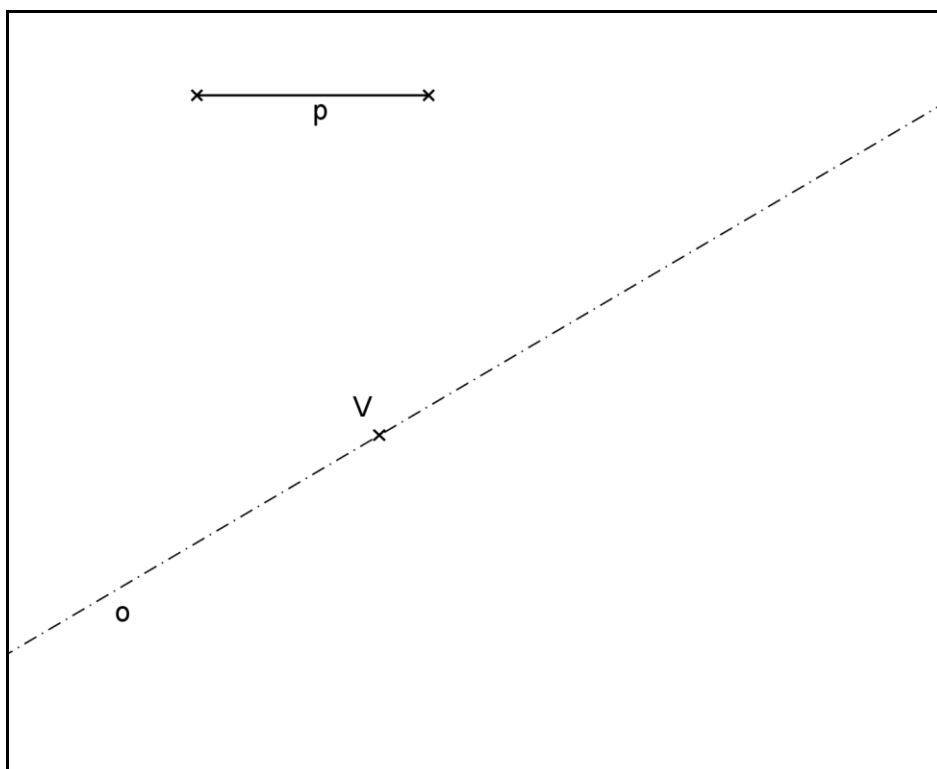


Parabola

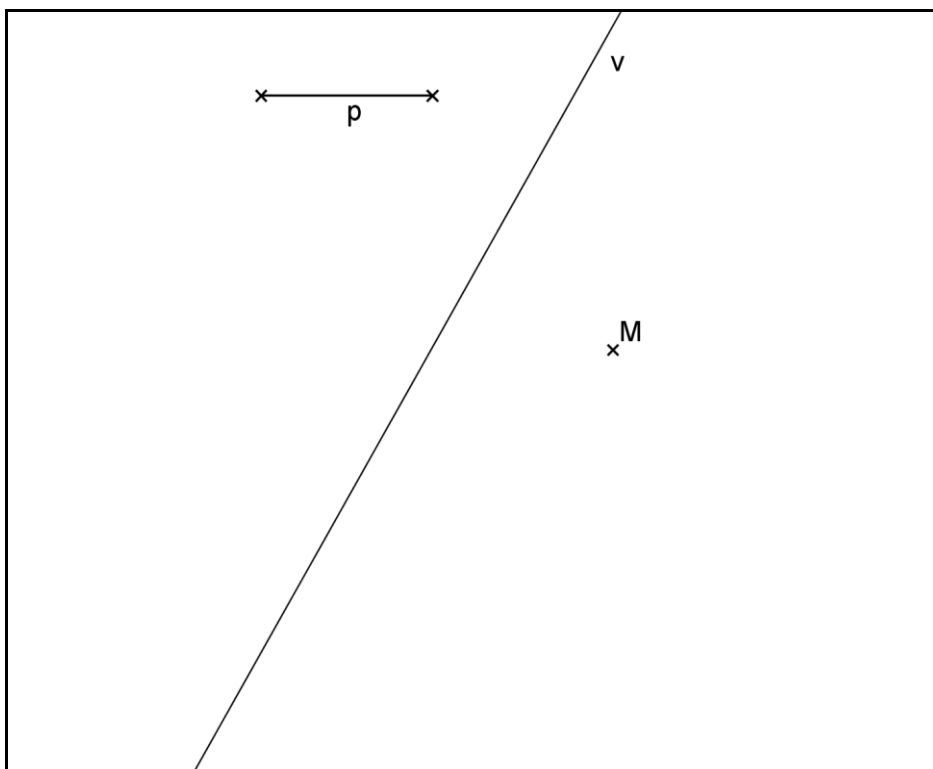
Příklad 1: Sestrojte parabolu, je-li dáno její ohnisko F a řídící přímka d . Parametr p má hodnotu 3 jednotky.

Příklad 2: Sestrojte parabolu, jež je dána vrcholem V a řídící přímkou d .

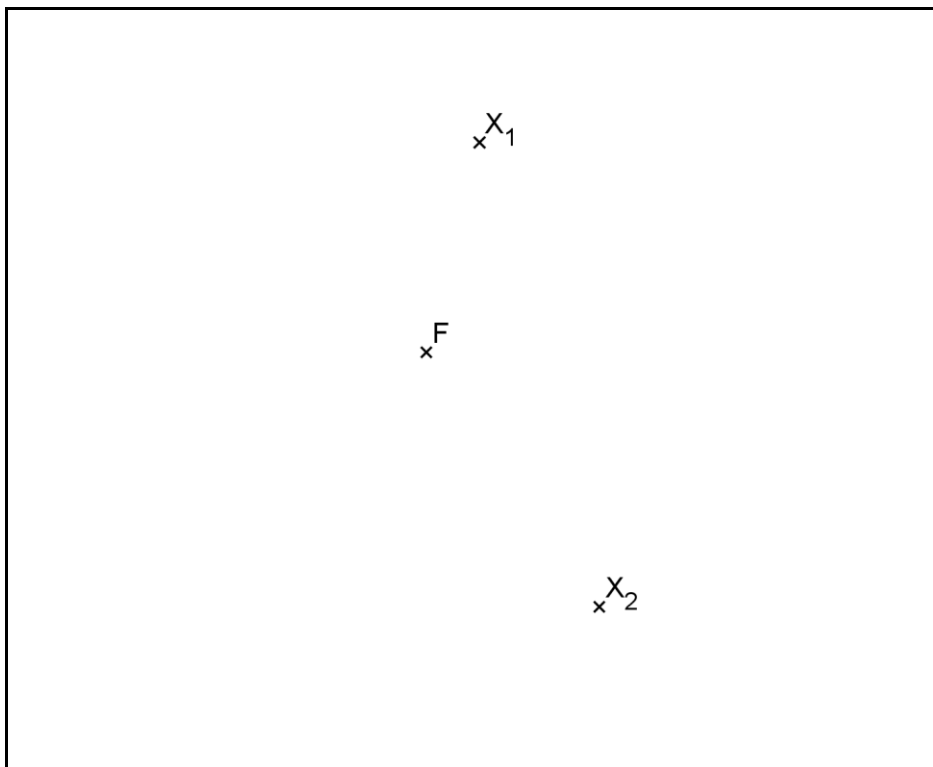
Příklad 3: Narýsujte parabolu, znáte-li velikost parametru p , vrchol V a její osu o .



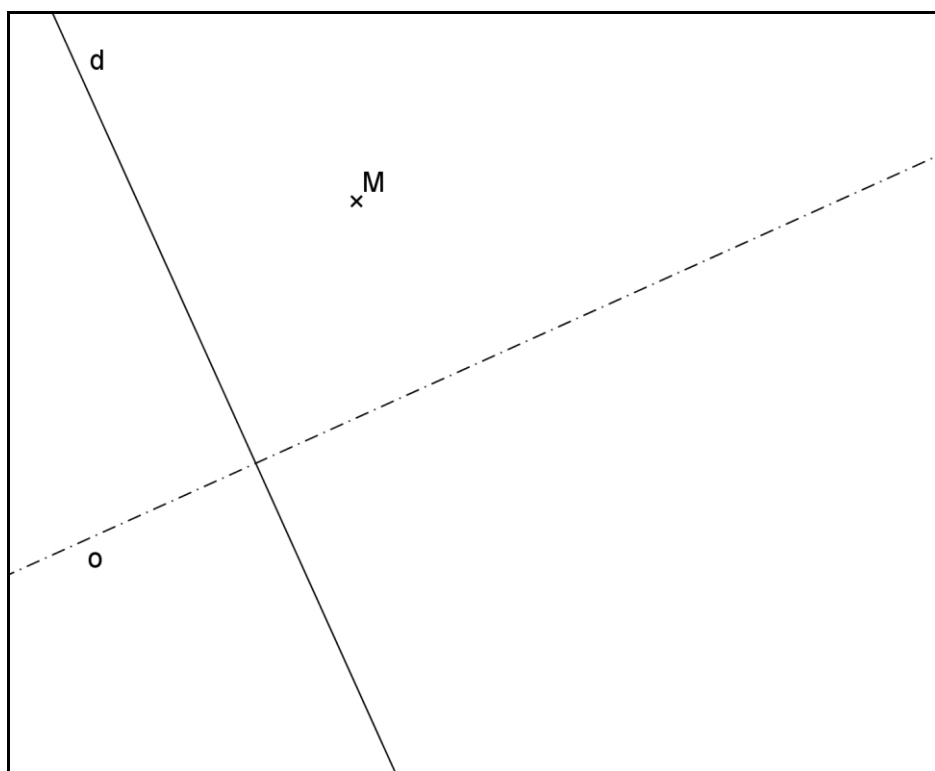
Příklad 4: Sestrojte parabolu, znáte-li velikost parametru p , vrcholovou tečnu v a jeden její bod M .



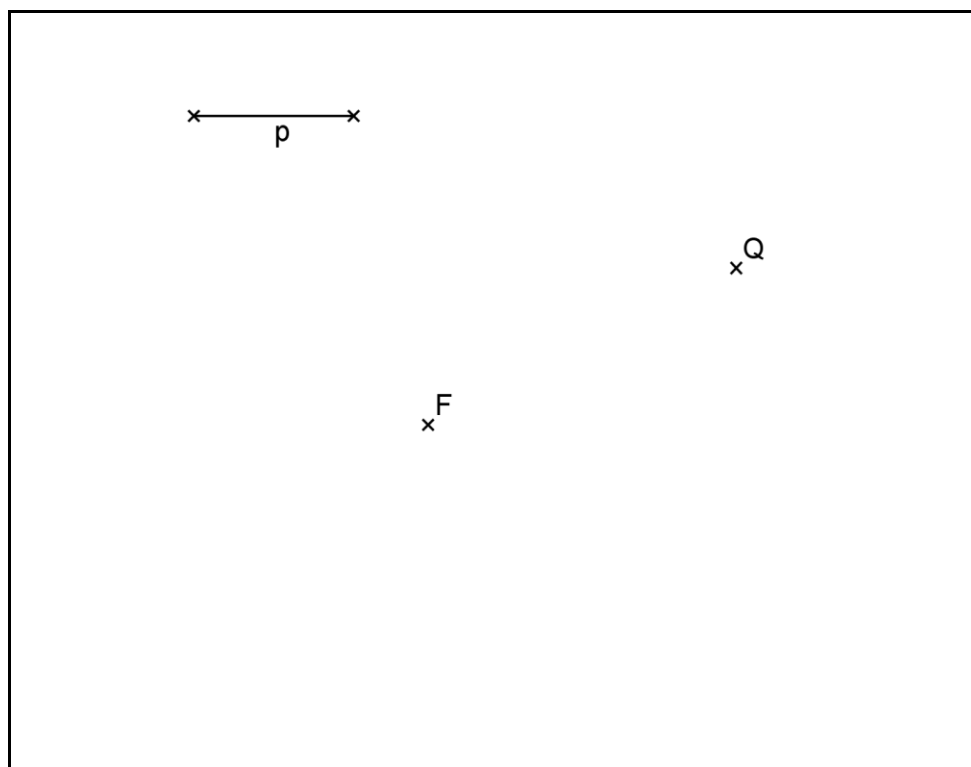
Příklad 5: Sestrojte parabolu, znáte-li ohnisko F a dva její body X_1, X_2 .



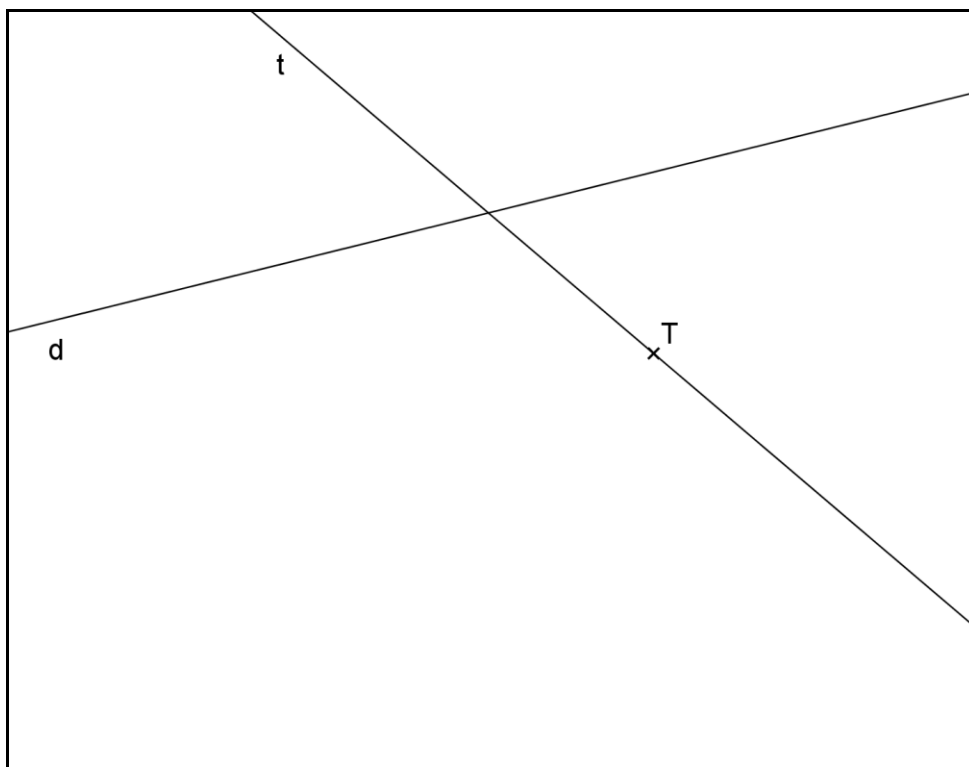
Příklad 6: Sestrojte parabolu, znáte-li osu o , řídicí přímku d a jeden její bod M .



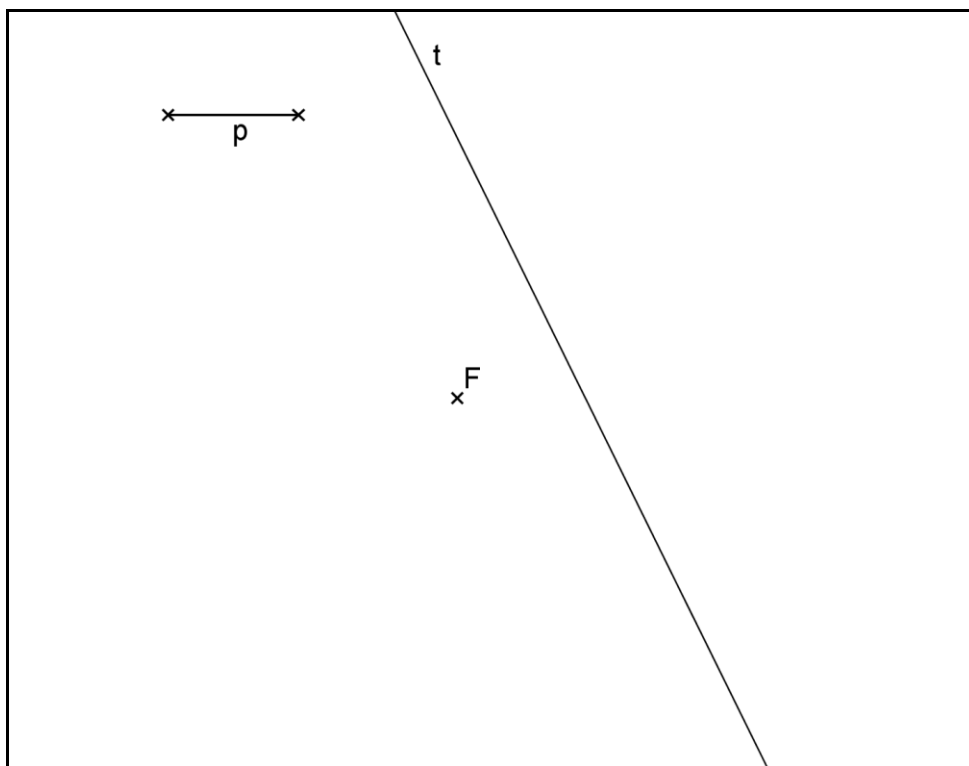
Příklad 7: Sestrojte parabolu, je-li dáno její ohnisko F , hodnoty parametru p a bod Q , který leží na řídicí přímce.



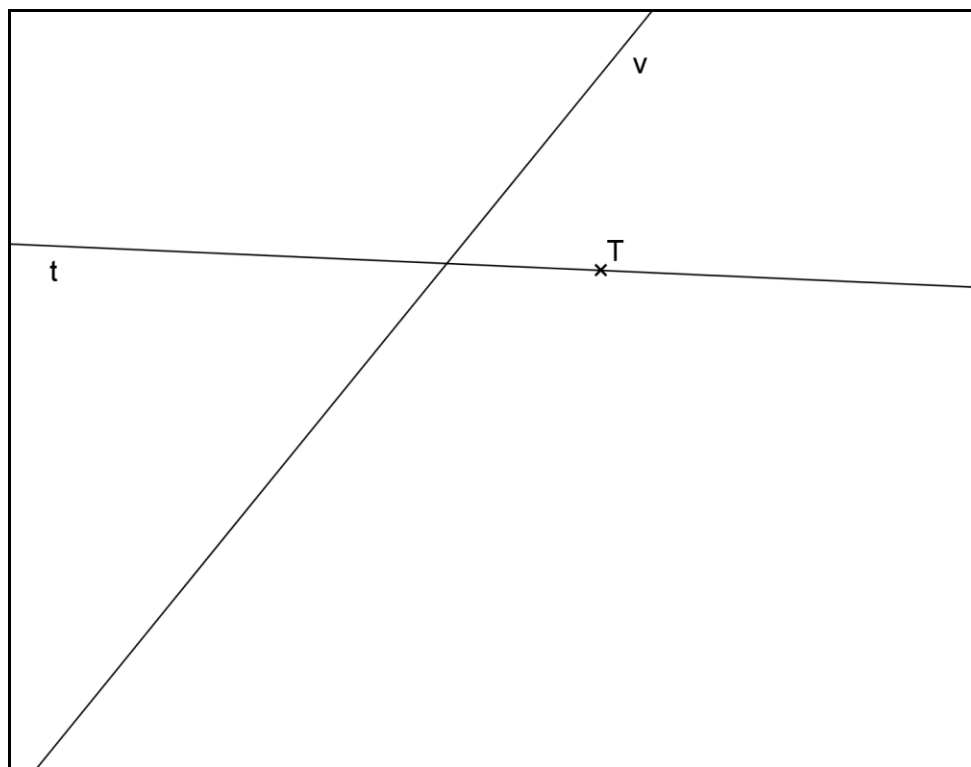
Příklad 8: Jestliže znáte řídicí přímku d paraboly, její tečnu t s bodem dotyku T , narýsujte danou parabolu.



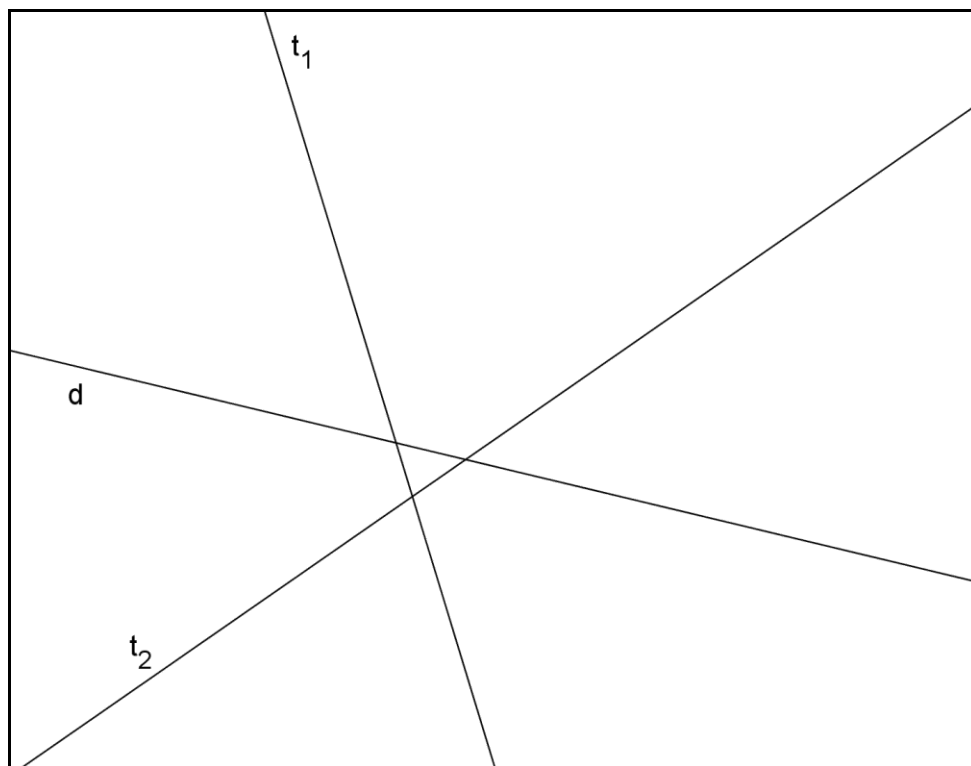
Příklad 9: Znáte-li ohnisko paraboly F , její parametr p a tečnu t , sestrojte její osu a najděte vrchol V .



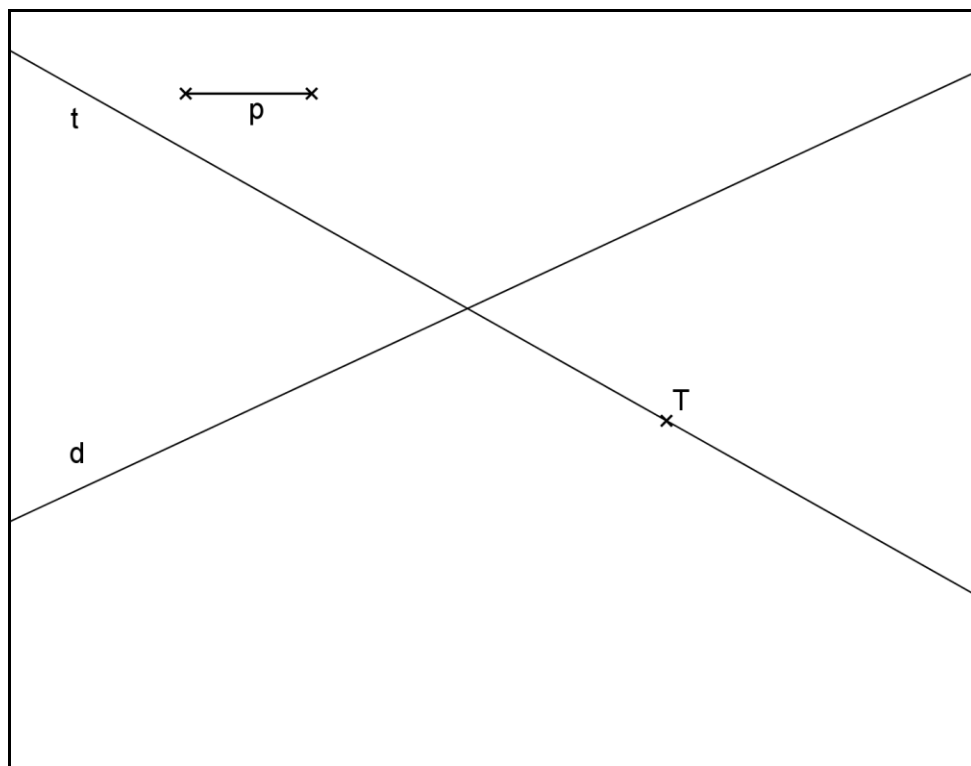
Příklad 10: Sestrojte parabolu, je-li dána její vrcholová tečna v a tečna t s bodem dotyku T .



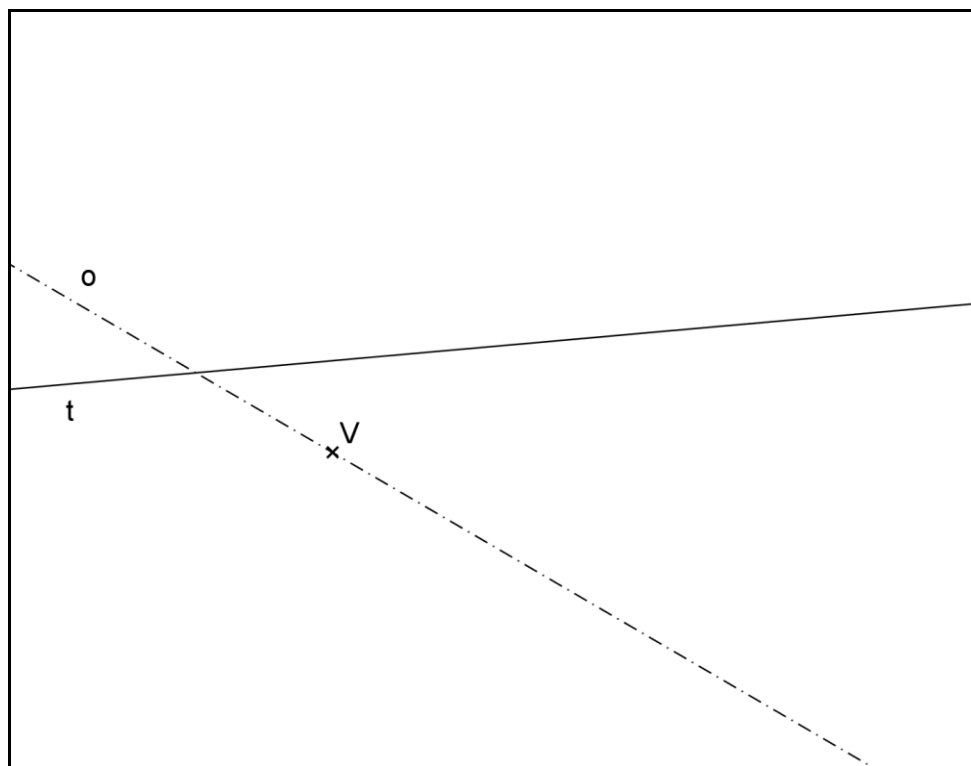
Příklad 11: Zkonstruuje parabolu, je-li dána její řídící přímka d a tečny t_1, t_2 . Dohleďte body dotyku tečen.



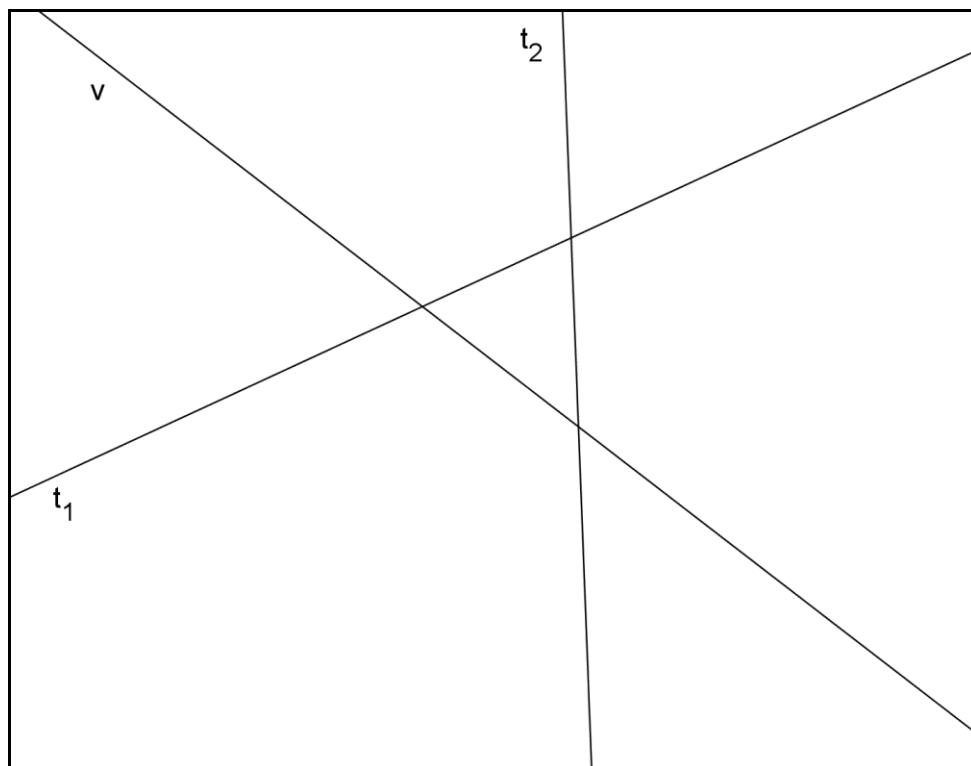
Příklad 12: Najděte bod dotyku T tečny t paraboly, která je dána svou řídicí přímkou d a parametrem p .



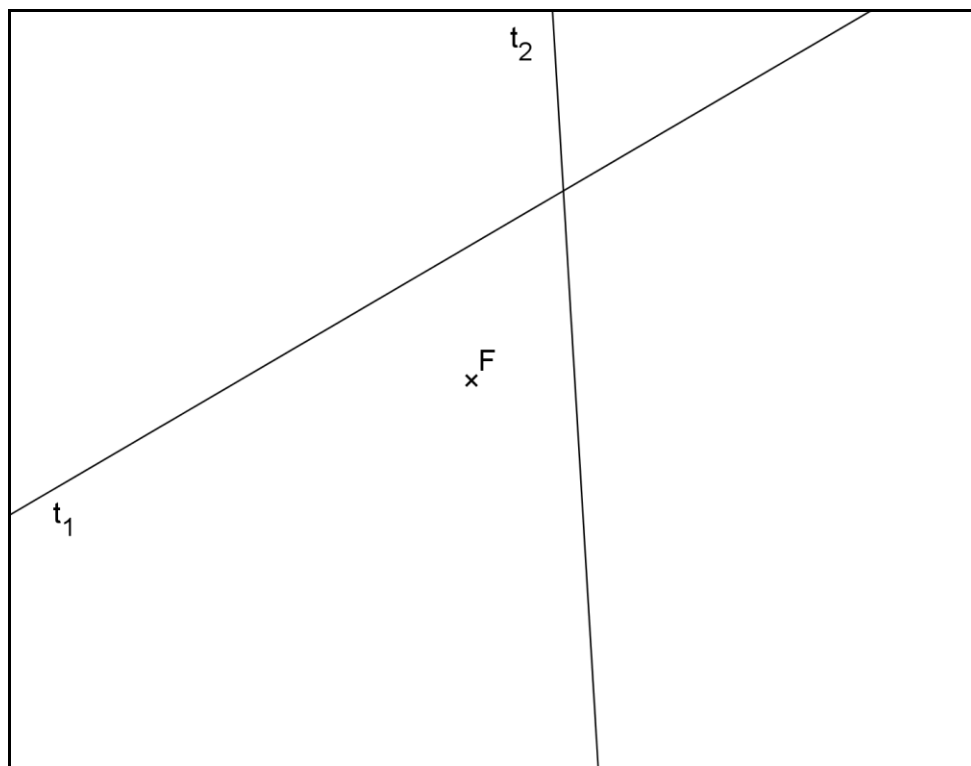
Příklad 13: Sestrojte parabolu, znáte-li její osu o , vrchol V a dále tečnu t .



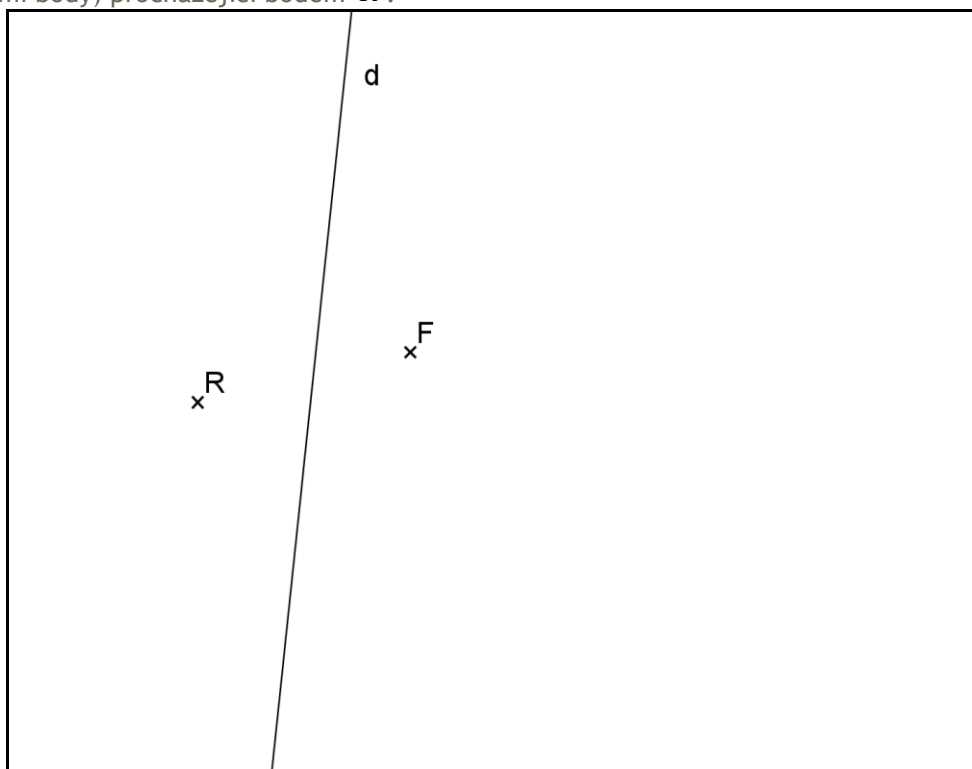
Příklad 14: Narýsujte parabolou, je-li dána její vrcholová tečna v a tečny t_1, t_2 . Dohleďte body dotyku tečen.



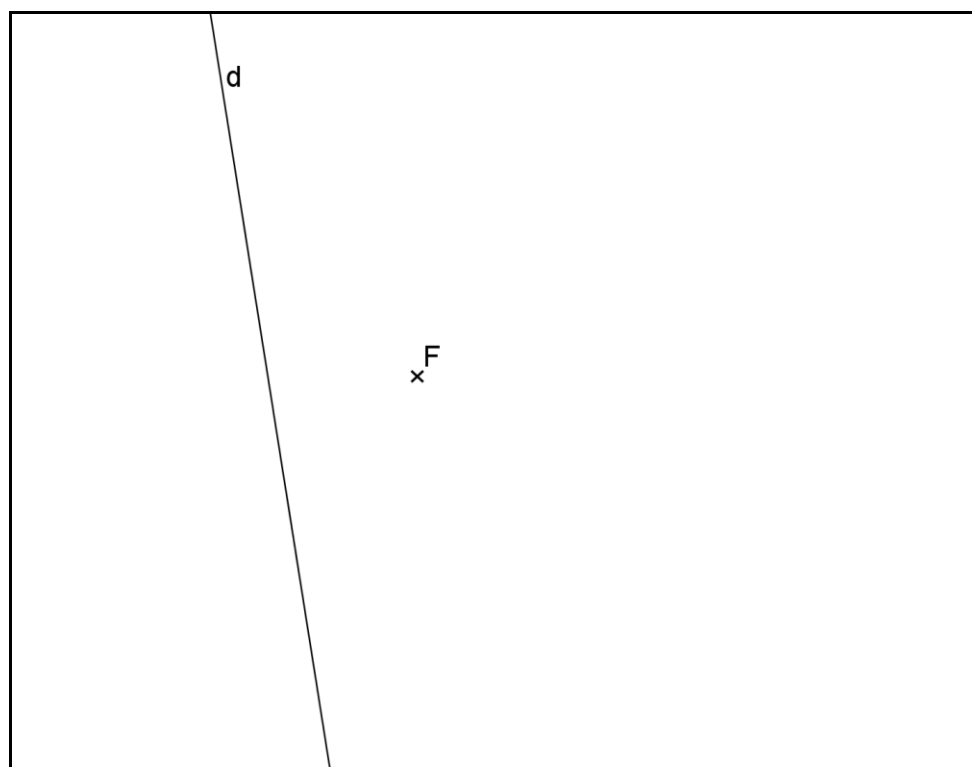
Příklad 15: Zkonstruuje parabolou, která je dána ohniskem F a tečnami t_1, t_2 .



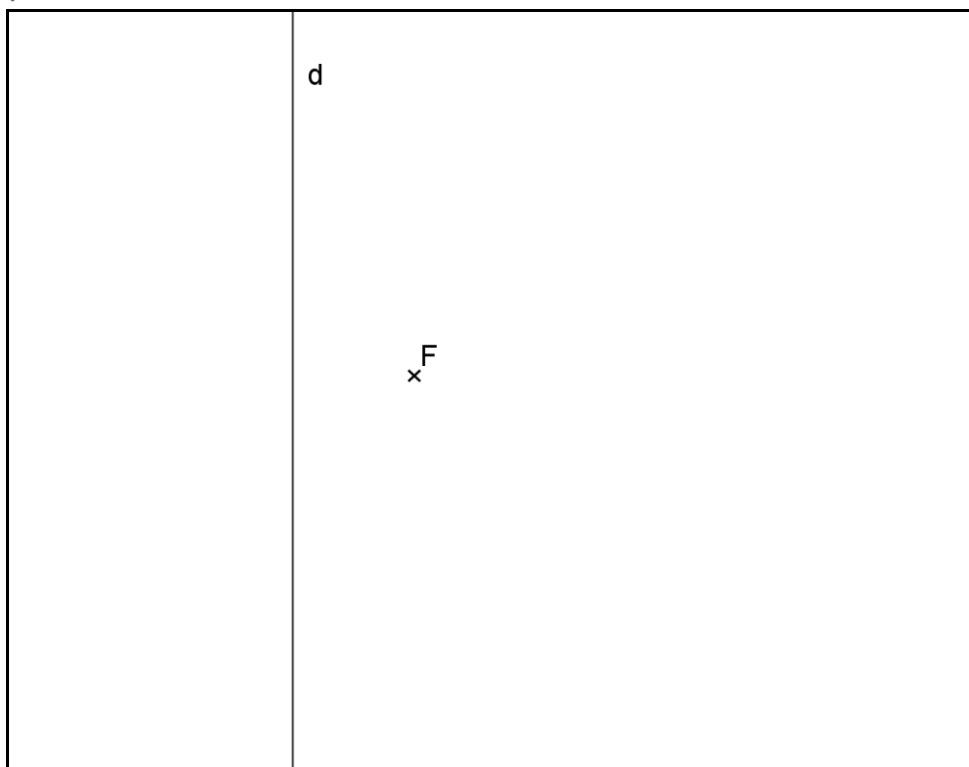
Příklad 16: K parabole, která je dána řídicí přímkou d a ohniskem F sestrojte tečny (a opatřete je dotykovými body) procházející bodem R .



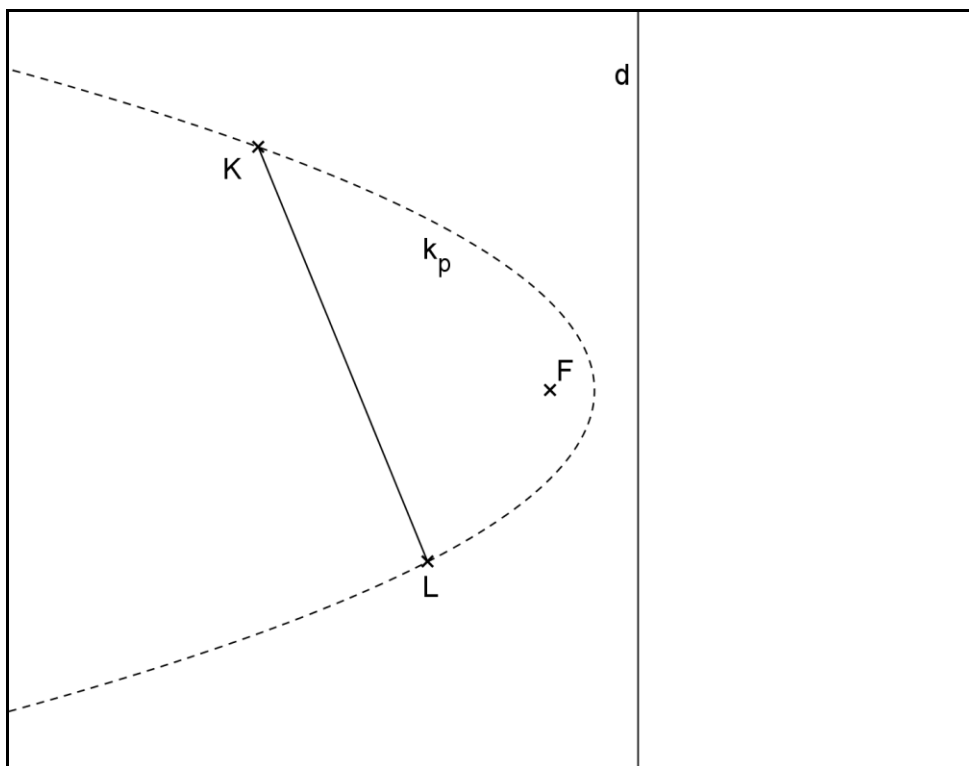
Příklad 17: K parabole, která je dána řídicí přímkou d a ohniskem F sestrojte tečny (a opatřete je dotykovými body), jejichž odchylka od osy paraboly je $+60^\circ$.



Příklad 18: Sestrojte hyperoskulační kružnici paraboly, znáte-li její ohnisko F a její řídicí přímku d .



Příklad 19: Najděte průměr r paraboly, který je sdružený se zadanou tětivou KL , znáte-li ohnisko F paraboly a její řídicí přímku d .



Příklad 20: K zadanému průměru r paraboly, najděte aspoň jednu tětivu paraboly, která je s průměrem sdružená. Je-li dáno ohnisko F paraboly a její řídicí přímka d .

