Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra primárního vzdělávání

Studijní program: Učitelství pro základní školy

Studijní obor Učitelství pro 1. stupeň základní školy
Prohloubený studijní program - Angličtina

AKTIVIZUJÍCÍ ČINNOSTI PRO ROZVOJ KOMBINATORICKÉHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ 1. STUPNĚ ZŠ

ACTIVATING ACTIVITIES FOR DEVELOPMENT OF COMBINATORY THINKING OF FIRST-GRADE PUPILS

Diplomová práce: 11–FP–KPV–0046

Autor:

Lucie Vilimovská

Podpis:

Vilimovská

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
137	28	83	16	40	8

V Liberci dne 26. dubna 2012

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Lucie VILIMOVSKÁ**
Osobní číslo:	**P07000518**
Studijní program:	**M7503 Učitelství pro základní školy**
Studijní obor:	**Učitelství pro 1. stupeň základní školy**
Název tématu:	**Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně ZŠ**
Zadávající katedra:	**Katedra primárního vzdělávání**

Zásady pro vypracování:

Cíl:
Cílem diplomové práce je vypracovat soubor aktivit včetně řešených problémů, které budou sloužit k rozvoji kombinatorického myšlení žáků a jejich přípravě na přijímací zkoušky na víceleté gymnázium.
Požadavky:
Znalost Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání.
Znalost systému přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia.
Základní přehled o typových kombinatorických úlohách a struktuře přijímacích testů na víceletá gymnázia.
Metody:
Analýza učebnic, resp. problematických úloh (zejména kombinatorických) z hlediska přípravy na víceletá gymnázia.
Vytvoření souboru řešených úloh.
Praktické ověření souboru ve škole.
Vyhodnocení účinnosti navrženého souboru.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

CIRJAK, M.: Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (Tvorivosť v matematike). Prešov, Essox 2000.
HEJNÝ, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. Bratislava, SPN 1990
LOKŠOVÁ, I. - Lokša, J.: Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole. Praha, Portál 1999.
OPAVA, Z.: Matematika kolem nás. Praha, Albatros 1989.
Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
Přijímací testy z matematiky pro nižší ročník víceletých gymnázií.
Sborníky matematických olympiád a soutěží.
Sbírky úloh.
Učebnice matematiky pro první stupeň základní školy.
Zajímavá a zábavná matematika.

Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání diplomové práce: **18. dubna 2011**
Termín odevzdání diplomové práce: **20. dubna 2012**

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

L.S.

doc. PaedDr. Jaroslav Perný, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 30. dubna 2011

Čestné prohlášení

Název práce: Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně ZŠ

Jméno a příjmení autora: Lucie Vilimovská

Osobní číslo: P07000518

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má diplomová práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval/a samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložila elektronickou verzi mé diplomové práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedla jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 26. 4. 2012

Vilimovská

Lucie Vilimovská

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat všem, kteří mě podporovali při tvorbě diplomové práce. Vedoucí práce, paní docentce RNDr. Janě Příhonské, Ph.D., děkuji za odbornou pomoc, cenné připomínky a vstřícný přístup. Martinu Jandovi děkuji za ilustraci úloh. V neposlední řadě patří veliký dík mé rodině a všem blízkým, kteří mi byli oporou jak při psaní diplomové práce tak po celou dobu studia.

ANOTACE

Diplomová práce se zabývá problematikou kombinatoriky na prvním stupni základních škol. Vymezuje její základní pojmy, analyzuje současnou situaci a pojednává o významu a možnostech širšího využití tohoto oboru na prvním stupni ZŠ. Zaměřuje se především na rozvoj různorodých řešitelských strategií žáků při řešení kombinatorických problémů. Zabývá se také oblastmi ovlivňujícími úspěšnost řešení těchto problémů. Součástí diplomové práce je v praxi přímo využitelný soubor řešených úloh, doplněný o náměty aktivizujících činností pro rozvoj kombinatorického myšlení.

Klíčové pojmy: kombinatorika, kombinatorické myšlení, žák prvního stupně základní školy, řešitelské strategie, aktivizující činnosti.

SUMMARY

This diploma thesis deals with combinatorics in primary schools. It defines the basic concepts, analyzes the current situation and discusses the importance and possibilities of wider use of this field in the primary school. It mainly focuses on the development of various solving strategies of students in combinatorial problems solving. It also deals with issues that affect the success of solving these problems. The diploma thesis contains a collection of solved problems which is directly usable in practice and it is complemented by stimulating activity ideas developing combinatorial thinking.

Keywords: combinatorics, combinatorial thinking, a pupil of primary school, solving strategies, stimulating activities.

L´ANNOTATION

Cette thèse traite de la combinatoire dans les écoles primaires. Elle définit les concepts de base combinatoires, analyse la situation actuelle et discute de l´importance et des possibilités de plus large utilisation de cette discipline dans les écoles primaires. Elle se concentre principalement sur le développement de diverses stratégies de résolution de problèmes des élèves en résolution de problèmes combinatoires. Elle traite aussi des domaines qui ont un impact sur le succès de la résolution de ces problèmes. La thèse contient une collection de problèmes résolus directement utilisables dans l´enseignement qui est accompagnée de suggestions pour le développement de l'activation des activités de raisonnement combinatoire.

Les mots clés : la combinatoire, la pensée combinatoire, d´élève de l'école primaire, les stratégies de résolution, l'activation de l'activité.

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů 8

I. Úvod 9

II. Teoretická část 10

2.1 Postavení matematiky v RVP ZV 10

2.2 Pojetí a cíle matematiky na 1. stupni ZŠ 13

2.3 Význam a využití aktivizujících činností ve výuce 17

2.4 Kombinatorika 18

2.4.1 Historie kombinatoriky 19

2.4.2 Základní pojmy kombinatoriky 20

2.4.3 Kombinatorika na 1. stupni ZŠ 24

2.5 Kombinatorické úlohy v učebnicích pro 5. ročník ZŠ 27

2.6 Kombinatorika v přijímacích zkouškách na osmiletá gymnázia 33

III. Praktická část 36

3.1 Stanovení hypotéz 36

3.2 Realizace experimentu 39

3.2.1 Vstupní test 40

3.2.2 Procvičování 72

3.2.3 Kontrolní test 97

3.2.4 Dotazník 120

3.3 Ověření hypotéz 127

IV. Závěr 130

Seznam literatury 132

Internetové zdroje 135

Přílohy 137

Seznam použitých zkratek a symbolů

A_1 (A_2, A_k)	konečné množiny
aj.	a jiní
atd.	a tak dále
DP	diplomová práce
H1 – H4	označení hypotéz
k	proměnná
K (K´)	kombinace (s opakováním)
KT	kontrolní test
kap.	kapitola
m.	metoda
n (n_1, n_2, n_k)	proměnné
N	obor přirozených čísel
např.	například
Odp.	odpověď
obr.	obrázek
P (P´)	permutace (s opakováním)
popř.	popřípadě
př. n. l.	před naším letopočtem
resp.	respektive
RVP	Rámcový vzdělávací program
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program základního vzdělávání
s.	strana
ŠVP	Školní vzdělávací program
tab.	tabulka
tj.	to jest
V (V´)	variace (s opakováním)
VT	vstupní test
ZŠ	základní škola
$\in$	náleží
$\cup$	sjednocení
+	plus
–	minus
=	rovná se
·	krát
!	faktoriál
%	procenta
5.A, 5.B	označení pátých tříd

I. Úvod

Kombinatorika je odvětvím matematiky, kterému se na základních školách, a zvláště na prvním stupni, nevěnuje přílišná pozornost. Sama jsem se s kombinatorickými problémy setkala až na gymnáziu. Prošli jsme základní kombinatorické vztahy, pomocí vzorečků spočítali několik příkladů a za týden byla látka považována za dostatečně probranou. Tehdy mě kombinatorika nijak zvlášť nezaujala.

Až na vysoké škole při předmětu Matematika v praxi 1 jsem se s kombinatorikou seznámila hlouběji. Bavilo mě řešit kombinatorické problémy zejména takovými metodami, kdy nepotřebujete znát vzorce. Tehdy mě napadlo, že s využitím experimentů, obrázků, tabulek a grafů by se kombinatorické myšlení mohlo více rozvíjet již u žáků na prvním stupni. Také jsem si uvědomila, že nás kombinatorika doprovází nejen ve škole při matematice, ale i v běžném životě. Často se rozhodujeme mezi různými možnostmi, rozmýšlíme se, co si objednáme v restauraci, jak se oblékneme, rovnáme knihy do polic… Ačkoliv si to vůbec neuvědomujeme, řešíme téměř neustále praktické kombinatorické problémy.

Při volbě tématu diplomové práce jsem se rozhodla věnovat se právě kombinatorice. Hlavním cílem DP je vytvoření a praktické ověření účinnosti souboru řešených úloh, které podporují rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně ZŠ. Mělo by se tak dít takovými formami a strategiemi, při kterých žáci nepotřebují znát kombinatorické vztahy a vzorce. Důraz je kladen zejména na rozvoj řešitelských strategií využívajících grafické zaznamenání problému. Dílčím cílem je obohatit soubor úloh o aktivizující metody a činnosti, které žáky motivují a vzbudí v nich zájem o danou problematiku.

Poznatky z praktické části a vytvořený soubor kombinatorických úloh plánuji dále využít a rozšiřovat. Ráda bych soubor řešených úloh s náměty pro praxi dala k dispozici učitelům na základní školy, čímž bych mohla alespoň trochu zlepšit zapojení kombinatoriky na 1. stupeň základních škol a tím podpořit rozvoj kombinatorického myšlení žáků mladšího školního věku.

II. Teoretická část

V teoretické části diplomové práce se zaměřuji obecně na postavení matematiky v Rámcovém vzdělávacím programu základního vzdělávání a na pojetí matematiky na 1. stupni základní školy. Pro účely praktické části stručně píšu o aktivizujících činnostech, zvláště pak o jejich významu a využití ve výuce. Problematiku kombinatoriky zpracovávám z hlediska historického, popisuji její základní pojmy a principy a snažím se nahlédnout na možnosti využití kombinatoriky na prvním stupni základní školy. S tím souvisí i četnost výskytu kombinatorických úloh v učebnicích matematiky pro první stupeň základní školy a v přijímacích zkouškách na osmiletá gymnázia. Tuto tematiku zpracovávám v závěru teoretické části.

2.1 Postavení matematiky v RVP ZV

Současná reforma školství přináší nový pohled na vzdělávání. Jejím hlavním cílem je přizpůsobení forem a obsahu vzdělávání potřebám společnosti a rozvoji vědy a techniky. Žák nemá již jen pasivně přejímat vědomosti, ale má se z něho ve škole stát aktivní člověk, schopný samostatně řešit problémy, které ho v životě potkají. Změny se má docílit zavedením rámcových vzdělávacích programů pro jednotlivé stupně a typy škol. Na základě RVP si školy vytvářejí vlastní školní vzdělávací programy, jež mohou přizpůsobit požadovanému zaměření. Hlavní vzdělávací strategie škol mají vést k tomu, aby si žáci osvojili klíčové kompetence.

V RVP ZV je kompetencí myšlen souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti. V základním vzdělávání by se u žáků mělo dbát na osvojování šesti nadpředmětových klíčových kompetencí: kompetence k učení, kompetence k řešení problémů, kompetence komunikativní, kompetence sociální a personální, kompetence občanské, kompetence pracovní. Každá z klíčových kompetencí je charakterizována obecně a dále je její obsah přizpůsoben konkrétní vzdělávací oblasti (RVP ZV, 2007, s. 14 – 17).

„**Matematika a její aplikace**“ je jednou z devíti vzdělávacích oblastí RVP ZV. V základním vzdělávání je tato oblast založena zejména na aktivních činnostech, jež jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné pro praktický život a napomáhá tak k získávání matematické gramotnosti. (Fuchs aj. 2006, s. 7).

Cíle vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace bývají naplňovány v předmětu (nejčastěji nazývaném) matematika. Na prvním stupni je matematika hojně zastoupena. Dle RVP ZV je k dispozici pro první stupeň 22 hodin matematiky (týdenní zastoupení). Tato časová dispozice je nejčastěji rozdělena následujícím způsobem: v prvním období (1. – 3. ročník) 4 hodiny matematiky týdně a ve druhém období (4., 5. ročník) 5 hodin týdně. (Fuchs aj. 2006, s. 17)

Vzdělávací obsah oblasti Matematika a její aplikace je pro 1. stupeň základního vzdělávání členěn do čtyř tematických okruhů (číslo a početní operace; závislosti, vztahy a práce s daty; geometrie v rovině a v prostoru; nestandardní aplikační úlohy a problémy). Pro každý z nich jsou stanoveny očekávané výstupy (za 1. a 2. období) a doporučené učivo (RVP ZV, 2007, s. 29 – 32).

Očekávané výstupy tematických okruhů pro 1. stupeň ZŠ:

- **Číslo a početní operace**

  1. období: *„Žák používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků. Čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1000. Užívá lineární uspořádání, zobrazí číslo na číselné ose. Provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly. Řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace.“* (RVP ZV, 2007, s. 30)

  2. období: *„Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení. Provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel. Zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel. Řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel.“* (RVP ZV, 2007, s. 30)

- **Závislosti, vztahy a práce s daty**

  1. období: *„Žák se orientuje v čase, provádí jednoduché převody jednotek času. Popisuje jednoduché závislosti z praktického života. Doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel.“* (RVP ZV, 2007, s. 31)

  2. období: *„Žák vyhledává, sbírá a třídí data, čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy.“* (RVP ZV, 2007, s. 31)

- **Geometrie v rovině a v prostoru**

  1. období: *„Žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci. Porovnává velikosti útvarů, měří a odhaduje délku úsečky. Rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině.“* (RVP ZV, 2007, s. 31)

  2. období: *„Žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce. Sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran. Sestrojí rovnoběžky a kolmice. Určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu. Rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru.“* (RVP ZV, 2007, s. 31)

- **Nestandardní aplikační úlohy a problémy**

  2. období: *„Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.“* (RVP ZV, 2007, s. 32)

Úlohy pro rozvoj kombinatorického myšlení souvisí dle mého názoru nejvíce s tematickými okruhy Nestandardní aplikační úlohy a problémy a Závislosti, vztahy a práce s daty. Během řešení kombinatorických problémů žáci na prvním stupni hledají možné postupy a řešitelské strategie, které při jiných, resp. běžných úlohách většinou nevyužívají. Dle vlastního uvážení pracují s informacemi ze zadání úlohy. Úspěšnost řešení kombinatorických úloh tedy není primárně závislá na osvojených algoritmech a početních operacích, a může tak přinést pocit úspěchu a naplnění i žákům jindy neúspěšným.

2.2 Pojetí a cíle matematiky na 1. stupni ZŠ

Pojetí matematiky na prvním stupni v užším slova smyslu se odvíjí od školních vzdělávacích programů každé ze základních škol a bezpochyby také souvisí s přístupem každého učitele matematiky. Obecně je však ovlivněno očekávanými výstupy a učivem daným RVP ZV. Zde je definováno také cílové zaměření oblasti Matematika a její aplikace. Ukazuje se, že nestačí osvojit si početní, respektive konstrukční návyky. Učitelé by měli naučit žáky využít získané dovednosti a vědomosti v každodenním životě. Neboli je důležité (avšak také poměrně náročné) rozvíjet u žáků cit pro aplikaci získaných kompetencí. Právě utváření a rozvíjení klíčových kompetencí je tedy dle RVP ZV hlavním cílem vzdělávání. (Fuchs aj. 2006, s. 7). V oblasti Matematika a její aplikace dochází k získávání a rozvoji klíčových kompetencí prostřednictvím:

- využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech (např. odhady, měření, porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace)
- rozvíjení paměti žáků (numerické výpočty, osvojení si nezbytných matematických vzorců a algoritmů)
- rozvíjení **kombinatorického** a logického myšlení, kritického usuzování a srozumitelné a věcné argumentace při řešení matematických problémů
- rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů
- vytváření si zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, různých metod řešení úloh)
- vnímání a porozumění složitosti reálného světa matematizací reálných situací
- provádění rozboru problému a plánu řešení, dále odhadováním výsledů a volbou vhodného postupu k vyřešení problému
- přesného a stručného vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloha a zdokonalováním grafického projevu
- rozvíjení kooperace při řešení problémových a aplikovaných úloh

- rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, dále rozvíjením systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti v matematice (RVP ZV, 2007, s. 29 – 30).

Cirjak (2000, s. 8 – 9) uvádí pět hlavních cílů pro zkvalitnění matematické přípravy žáků odpovídajících potřebám současné společnosti, jež vypracovala americká Společnost učitelů matematiky:

1. Žáci se mají naučit oceňovat význam matematiky pro rozvoj společnosti.
2. Žáci mají věřit ve svoje matematické schopnosti. Učitel by je měl přesvědčit, že matematika je všeobecná každodenní činnost člověka.
3. **Žáci se mají naučit řešit problémové úlohy, divergentní úlohy a úlohy zaměřené na aplikace. Toto je hlavní úloha školské matematiky.**
4. Žáci se mají naučit matematicky komunikovat (slovně i písemně), studovat matematické texty, klást otázky, diskutovat.
5. Žáci se mají naučit matematicky myslet, vyslovovat hypotézy, ověřovat jejich platnost, odhadovat, argumentovat svoje výroky.

Matematické vzdělávání by mělo vést žáky obecně k vytvoření si pozitivního postoje k matematice a k zájmu o ni a o její aplikace. Podstatnou roli zde hraje bezesporu učitel matematiky a jeho přístup ke vzdělávacímu procesu. Pouze kvalitní pedagog může vést své žáky tak, aby u nich převažovaly pozitivní emoce, což je pro další vzdělávání podstatné. Nesporným významem matematického vzdělávání je také rozvoj osobnosti žáka. Vede ke kázni ve vyjadřování, k efektivitě v organizaci vlastní práce, rozvíjí důslednost, vytrvalost, schopnost sebekontroly, tvořivost, vynalézavost, sebedůvěru a pracovitost (Fuchs aj. 2006, s. 5 – 8).

Hejný s Kuřinou (2009, s. 9 – 16) zdůrazňují, že by se učitelé matematiky měli čas od času zamyslet nad svým stylem vyučování a nad možnostmi, jak toto vyučování zkvalitnit. Varuje před přílišným formalismem a transmisivním pojetím matematiky a naopak nabádá učitele k zapojení konstruktivistických přístupů do výuky. Konkrétně podává výčet hlavních myšlenek konstruktivismu v tzv. desateru (s. 194 – 195):

1. **Aktivita:** Matematiku je nutno chápat jako specifickou lidskou aktivitu, nikoliv jen jako výsledek formulovaný souborem definic, vět a důkazů.
2. **Řešení úloh:** V matematice je podstatné hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování.
3. **Konstrukce poznatků:** poznatky (nejen z matematiky) jsou nepřenosné. Vznikají v mysli poznávajícího člověka a jsou individuální.
4. **Zkušenosti:** Vytváření poznatků se opírá o zprostředkované informace, je však podmíněno zkušenostmi poznávajícího. Žák by měl mít dostatek příležitostí nabývat zkušeností v každodenním životě, ale i ve škole (experimentováním, řešením problémů,…).
5. **Podnětné prostředí:** Je důležité vytvářet prostředí podněcující tvořivost. Vyžaduje to tvořivost učitele, dostatek vhodných podnětů a pozitivní sociální klima školní třídy.
6. **Interakce:** Konstrukce poznatků je sice proces individuální, k jeho rozvoji však přispívá sociální interakce ve třídě (diskuse, srovnávání výsledků, argumentace,…).
7. **Reprezentace a strukturování:** Dílčí matematické zkušenosti a poznatky jsou různě orientovány, tříděny, hierarchizovány. Vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.
8. **Komunikace:** Je důležité pěstování různých jazyků matematiky (např. neverbální vyjadřování, matematická symbolika,…). Je třeba vést žáky systematicky ke zdokonalování vyjadřování a naslouchání druhým.
9. **Vzdělávací proces:** V matematice jej hodnotíme ze tří hledisek. Prvním je porozumění matematice (vytváření si představ, pojmů a postupů). Druhým je zvládnutí matematického řemesla (trénink a paměťové zvládnutí určitých pravidel, algoritmů či definic) a třetím je aplikace matematiky (jež je buď vyvrcholením vzdělávacího procesu, či motivačním faktorem).
10. **Formální poznání:** Je nutné si uvědomit, že transmisivním či instruktivním přístupem k vyučování získáváme poznání, jež je pouhým uložením informací do paměti. To umožňuje jejich reprodukci, obvykle však dochází k jejich rychlému zapomínání.

Z hlediska didaktického pojetí matematiky by měl učitel dodržovat určitý soubor zásad, který podporuje efektivitu vyučování. Pro školskou matematiku nám dle Gábora (aj. 1989, s. 106 – 110) poslouží konkrétně těchto deset didaktických zásad:

- zásada výchovnosti
- zásada vědeckosti
- zásada praktičnosti
- zásada individuálnosti
- zásada názornosti
- zásada uvědomělosti
- zásada přiměřenosti
- zásada soustavnosti
- zásada důkladnosti
- zásada trvalosti

Na prvním stupni by měl učitel zejména respektovat přirozené potřeby žáků. Měl by být obeznámen s úrovní myšlenkových operací žáků a přizpůsobit tomu výuku. Jak zmiňuje Perný (2010, s. 7) matematické pojmy (ať už aritmetické, algebraické či geometrické) jsou svou abstraktností pro mladší žáky obtížně pochopitelné. Učitel by měl být tedy na výuku matematiky dobře odborně i metodicky připraven. Je nezbytně nutné, aby se uměl srozumitelně a odborně správně vyjadřovat, aby si osvojil matematické pojmy a vztahy mezi nimi a aby svým kladným přístupem u žáků vytvářel pozitivní vztah k matematice.

Z důvodu krátkodobé pozornosti a soustředěnosti žáků prvního stupně je nutné během výuky obměňovat organizační formy i vyučovací metody a volit zejména takové, které mají na žáky aktivizující vliv. Velký důraz by měl učitel klást na motivaci a pozitivní přístup k žákům. Nejen v hodinách matematiky by měl zapojovat zajímavá témata a podporovat přirozenou hravost a spontánnost dětí. Měl by citlivě pracovat s chybami žáků a dát jim prostor pro hledání vlastních postupů a experimentování.

2.3 Význam a využití aktivizujících činností ve výuce

Přestože aktivizující činnosti bývají zařazovány mezi trendy moderního vyučování, nejsou ničím novým (např. již J. A. Komenský prosazoval aktivní učení). Ve školách ovšem nejsou obecně využívány takovou měrou, jak by se očekávalo. Je to pravděpodobně zapříčiněno vyššími nároky na učitele, který by měl promýšlet zapojení aktivizujících činností do výuky z různých hledisek. Dále se také v praxi objevuje mnoho faktorů, které využití aktivizujících činností znesnadňují. Jde například o překážky časové, organizační, materiální či o překážky ze strany studentů i samotného učitele. (Kotrba; Lacina 2007, s. 13 – 40).

Aktivizující metody jsou však ve vyučování velmi přínosné. Zlepšují samotný proces výuky a činí vyučování efektivnějším. Jsou zaměřeny především na vlastní aktivitu žáků, zejména pak na rozvoj myšlení, řešení problémů a tvořivosti. Přinášejí totiž problémový, tvořivý přístup při osvojování nových poznatků (Lokšová; Lokša 2003, s. 119). Vzhledem k tomu, že mají aktivizující metody rozvíjet tvořivost žáků, je tato kompetence vyžadována prvotně od učitelů. Horák (2009, s. 7) k této problematice říká: „*Tvořivost v práci učitele je předpokladem pro rozvoj tvořivosti žáků. Výzkumně bylo prokázáno, že netvořivý učitel nemůže vychovávat tvořivé žáky. Před učiteli tak stojí nová výzva. Být tvořiví.*“

Nelze opomenout také to, že aktivizující činnosti zvyšují obvykle zájem žáků o probíranou tematiku. Souvislost mezi aktivizujícími činnostmi a motivací je zřejmá. Lokšová; Lokša (1999, s. 10) uvádí, že: „*Motivace má dynamizující,* ***aktivizující*** *a usměrňující funkci.*“ Dalším z přínosů aktivizujících činností je rozvoj kooperace. Nejde pouze o kooperaci mezi žáky, ale také mezi žáky a učitelem. Dále mohou tyto metody vhodným vedením napomoci zlepšování třídní atmosféry (Kotrba; Lacina 2007, s. 36 – 44).

Aktivizující metody, podobně jako ostatní vyučovací metody, můžeme dělit dle různých hledisek (Kotrba; Lacina 2007, s. 81 – 141):

- podle náročnosti přípravy (času, materiálů, pomůcek)
- podle časové náročnosti samotného průběhu ve výuce

- podle zařazení do kategorií
  - **hry** (např. didaktické, soutěže, interakční, neinterakční hry)
  - **problémové úlohy** (např. metody heuristické, m. černé skříňky, úlohy na předvídání, atd.)
  - **diskusní metody** (např. brainstorming, brainwriting, řetězová diskuse, m. Philips 66, m. cílených otázek, atd.)
  - **situační metody** (rozborové, m. konfliktních situací, m. incidentu, m. postupného seznamování s případem, atd.)
  - **inscenační metody** (strukturní, nestrukturní, mnohostranné hraní rolí)
  - **speciální metody** (m. icebreakers, projektová výuka, atd.)
- podle účelu a cílů použití ve výuce (diagnostické, opakovací, motivační, výkladové, k odreagování)

Je na učiteli, aby zvážil, jaké aktivizující metody jsou pro danou skupinu žáků vhodné a realizovatelné. Měl by také promyslet, čeho chce dosáhnout, co je cílem aktivity. Na prvním stupni základních škol je učitelův výběr aktivizujících metod bezpochyby podmíněn úrovní myšlenkových operací žáků, a mírou jejich osvojených schopností a dovedností.

2.4 Kombinatorika

Kombinatorika je matematickou disciplínou, která se, zjednodušeně řečeno, zabývá kombinováním různých prvků. Matematicky jde o studium uspořádaných či neuspořádaných množin a jejich částí. Od mnoha jiných matematických disciplín (např. geometrie, algebra, matematická analýza, aj.) ji odlišuje to, že pracuje pouze s množinami konečnými (Calda; Dupač 2001). Lze říci, že kombinatorika je jakousi výjimkou i z hlediska historického, o čemž píšu v kapitole 2.4.1 Historie kombinatoriky. Dále se věnuji základním pojmům a standardním situacím objevujícím se v kombinatorice. Vzhledem k zaměření diplomové práce je ovšem z mého pohledu nejdůležitější kapitola 2.4.3. Kombinatorika na prvním stupni ZŠ.

2.4.1 Historie kombinatoriky

Nelze zcela jasně určit, kdy vznikla kombinatorika. Jisté je však to, že narozdíl od mnohých jiných matematických disciplín nepochází z Řecka. Určité náznaky kombinatoriky lze spatřovat již kolem roku 2200 př. n. l. v čínské posvátné Knize proměn. Zde se objevuje pojem „konfigurace“ neboli zobrazení množiny prvků do konečné abstraktní množiny se zadanou strukturou (Příhonská 2008, s. 9 – 10). První kombinatorické úlohy se však objevily pravděpodobně v Indii. Například již v 6. století př. n. l. se mohli čtenáři jistého lékařského spisu *Susruta* dočíst, že z šesti základních příchutí lze namíchat 63 různých chutí. Použití vzorců lze předpokládat u tehdejšího výrobce parfémů Varahamihiru, který uvažoval, že mícháním 4 z 16 základních ingrediencí získá 1820 vůní (Hecht aj. 1996, s. 2)

Ve třetím století našeho letopočtu byla sepsána mystická židovská kniha s hebrejským názvem *Sefer Yetzirah*. V ní lze objevit využití faktoriálů. Autor tehdy napsal: „Ze dvou kamenů postavíš dva domy, ze tří kamenů postavíš šest domů, ze čtyř postavíš čtyřiadvacet domů,…“ I další židovští či islámští autoři popisovali úlohy, kdy se z daného počtu písmen sestavovala možná slova, ovšem zobecnění užitých pravidel přišlo až v 11. století ve Francii. Učinil tak rabín Abraham ibn Ezra, který pozorováním hvězd odvodil pravidlo pro výpočet *k* – prvkových kombinací ze 7 prvků. Zajímal ho počet všech možných konjunkcí sedmi vesmírných objektů (Slunce, Měsíc, Merkur, Venuše, Mars, Jupiter, Saturn), jež všechny považoval za planety (Hecht aj. 1996).

Od 13. století lze v mnohých pracích objevit kombinatorické důkazy a odvozování složitějších vztahů. V 16. století se ve vyšších vrstvách společnosti těšily velké oblibě hazardní hry jako např. různé loterie, hra v kostky, karetní hry. Právě ve zmiňovaných hrách se využívalo kombinatorických úloh. Řešily se problémy, kolika způsoby může na dvou kostkách padnout daný počet ok, kolik způsoby lze získat v jedné hře dvě esa, apod. Takovéto kombinace začal jako první počítat italský matematik Niccolo Tartaglia (Příhonská 2008, s. 10 – 11). Zde se nabízí myšlenka využití právě zmiňovaných her a herních pomůcek (karty, kostky) při rozvoji kombinatorického myšlení u žáků (nejen) 1. stupně základní školy.

V 17. století se kombinatorika začínala objevovat jako samostatná matematická disciplína, což dle Mačáka (1997, s. 18) souviselo s formováním teorie pravděpodobnosti. Přispěli k tomu významní matematici jako např. Pascal, Fermat, Bernoulli, Leibniz, Euler či Laplace. Zkoumali (podobně jako jejich předchůdci) matematické jevy při řešení dalších hazardních her, zejména lota, pasiáns, či různých sázek (Příhonská 2008, s. 11). Nejen o současné problematice hazardních her, náhodných pokusů (hodů kostkou či mincí), a dalších pravděpodobnostních úloh využívajících i kombinatorických pravidel se rozepisuje Płocki v práci *Pravdepodobnosť okolo nás* (2007).

Za první samostatné práce věnované kombinatorické problematice jsou považovány Pascalova T*raité du triangle arithmétique* (1654), a zejména pak Liebnizova *Ars combinatoria* (1666). Období budování kombinatoriky jako samostatné matematické disciplíny završila kniha Jakoba Bernoulliho z roku 1685 *Ars conjectandi* (Mačák 1997, s. 18 – 19).

Kombinatorika (jako každé jiné matematické odvětví) je úzce spojena s ostatními disciplínami. Svými pojmy a metodami se uplatňuje především v algebře, teorii čísel, teorii her, v geometrii, ale i v topologii či matematické analýze. Vzhledem ke zvýšenému zájmu o problémy diskrétní matematiky se v posledních letech kombinatorika bouřlivě rozvíjí a je využívána v mnoha oborech, jako např. v dopravním, výrobním, a jiném plánování, při sestavování a luštění šifer, her, aj. (Příhonská 2008, s. 11 – 12).

2.4.2 Základní pojmy kombinatoriky

„*Má-li každé pravidlo výjimku, pak kombinatorická pravidla jsou výjimkou, neboť žádnou výjimku nemají*.“ Těmito slovy zahajují kapitolu o kombinatorických pravidlech autoři Calda a Dupač (2001, s. 8). V kombinatorice pracujeme s konečnou množinou N všech přirozených čísel obsahujících *n* prvků. Z nich pak vybíráme množiny či uspořádané *k*-tice. Platí, že $k \in$ N; $n \in$ N.

K řešení velké části kombinatorických úloh nám poslouží dvě jednoduchá pravidla. Jejich podvědomé chápání lze spatřovat již u žáků 1. stupně ZŠ (viz kap. 3.2.3 Kontrolní test). Prvním z nich je **kombinatorické pravidlo součtu** (Příhonská 2008, s. 15 – 16):

> Jsou-li $A_1, A_2, \dots A_k$ konečné množiny, které mají po řadě $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvků, a jsou-li každé tyto dvě množiny disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ je roven $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Druhým využívaným pravidlem je **kombinatorické pravidlo součinu** (Příhonská 2008, s. 16):

> Jestliže množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 má n_2 prvků, množina A_k má n_k prvků, pak počet všech možných uspořádaných *k*-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby,… *k*-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven součinu $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

Ačkoliv se u žáků 1. stupně základní školy zmiňovaná pravidla nezavádí, a stejně tak ani další pojmy jako variace, permutace či kombinace, uvádím je v práci jako nadstavbu při řešení realizovaných kombinatorických problémů. Považuji tedy za vhodné zachytit zde stručně jejich charakteristiku.

Variace bez opakování:

> *k*-členná variace z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Počet V(*k*, *n*) všech *k*-členných variací z *n* prvků je: $\boldsymbol{V(k,n) = n\,(n-1)\,(n-2)\dots(n-k+1)}$

(Calda; Dupač 2001, s. 13 – 14)

Typickými situacemi variací jsou např.:

- hledání všech trojciferných čísel z číslic 1, 3, 5, 9 bez opakování stejných cifer
- hledání všech trojbarevných vlajek, jsou-li k dispozici látky barvy černé, červené, zelené, bílé a žluté, pokud se barvy neopakují
- hledání anagramů (tj. slov vzniklých přeskupením písmen výchozího slova)

Variace s opakováním

> *k*-členná variace s opakováním z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát. Počet V´(*k*, *n*) všech *k*-členných variací s opakováním z *n* prvků je: $\boldsymbol{V'(k,n) = n^k}$

(Calda; Dupač 2001, s. 35 – 37)

Příkladem variací s opakováním jsou:

- hledání všech znaků Morseovy abecedy složených z jednoho až čtyř signálů (tj. tečka či čárka)
- hledání všech možností trojmístného číselného kódu bezpečnostního zámku
- hledání všech státních poznávacích značek vozidel, je-li k dispozici 21 písmen a 9 cifer a jsou li ve tvaru: číslice, písmeno, číslice a k tomu čtyřciferné číslo

Faktoriál

> Pro každé přirozené číslo *n* definujeme: $\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}$
>
> (Symbol $n!$ čteme "*n* faktoriál".) $0! = 1; 1! = 1; 2! = 2; 3! = 6; 4! = 24; \ldots$

(Farská 2006)

Permutace

> Permutace z *n* prvků je uspořádaná *n*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou (jde tedy o *n*-člennou variaci z ***n*** prvků). Počet P(*n*) všech permutací z n prvků je: $\boldsymbol{P(n) = n!}$

(Calda; Dupač 2001, s. 17 – 18)

Příkladem úloh využívajících permutace jsou:

- hledání způsobů rozsazení čtyř chlapců na čtyři židle
- hledání způsobů, jak lze seřadit deset dětí do jednoho zástupu
- počet všech možných pořadí, v nichž šest aut projede při závodu cílem

Permutace s opakováním

> Permutace s opakováním z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň jednou. Počet P´(k_1, k_2,... k_n) permutací

s opakováním z *n* prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují k_1, k_2,… k_n-krát, je: $\boldsymbol{P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$

(Calda; Dupač 2001, s. 40 – 42)

Úlohy využívající permutace s opakováním jsou např.:

- Hledání počtu anagramů slov, kde se opakují písmena, např. MAMINKA
- Hledání způsobů, jimiž jde seřadit sedm kuliček (2 červené, 4 modré, 1 bílá)

Kombinační číslo

Kombinační číslo je symbol, který označuje počet *k*-členných kombinací z *n* prvků. Pro všechna celá nezáporná čísla *n, k*, $k \leq n$, je: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Symbol $\binom{n}{k}$ čteme jako „*n* nad *k*“.

(Farská 2006)

Kombinace

k-členná kombinace z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Počet K (*k, n*) všech *k*-členných kombinací z *n* prvků je: $\boldsymbol{K(k,n)} = \binom{n}{k}$

(Calda; Dupač 2001, s. 25 – 27)

Typickým příkladem kombinací jsou např.:

- hledání tří žáků z 20, jež zastoupí třídu na recitační soutěži
- hledání počtu cinknutí, pokud si vzájemně připíjí pět přátel
- hledání počtu zápasů, hraje-li sedm týmů systémem každý s každým

Kombinace s opakováním

k-členná kombinace s opakováním z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát. Počet K´(*k, n*) všech *k*-členných kombinací s opakováním z *n* prvků je: $\boldsymbol{K'(k,n)} = \binom{n+k-1}{k}$

(Calda; Dupač 2001, s. 52)

Příkladem úloh využívajících kombinací s opakováním jsou:

- hledání možnosti nákupu 4 lízátek z 6 nabízených druhů
- hledání způsobů, kterými si mohou tři osoby rozdělit sedm stejných jablek

U žáků na prvním stupni můžeme řešením kombinatorických úloh rozšiřovat podvědomí o těchto pravidlech a pojmech a můžeme je tak připravit na jejich pozdější zavádění (např. na druhém stupni ZŠ).

2.4.3 Kombinatorika na 1. stupni ZŠ

Trendem ve výuce matematiky je poslední dobou snaha o její popularizaci. S tím souvisí vytváření motivačního prostředí a zařazování tzv. nestandardních matematických úloh (viz kap. 2.1 Postavení matematiky v RVP ZV). Právě nestandardním úlohám věnuje pozornost např. i Metodický portál RVP, jež vydal článek, jak tyto úlohy zařadit do výuky matematiky (Houska 2009).

Nestandardní úlohy jsou takové, jež vyžadují určitou tvořivost, originalitu a důvtip a jejich cílem je vzbudit u žáků zájem o matematiku. Důraz je kladen na rozvoj myšlení, na aktivní činnost žáků. Při řešení nestandardních úloh se nabízí různé strategie řešení. Oproti standardním úlohám tedy není výchozím předpokladem využití pamětných znalostí, osvojených vzorců či algoritmů (Gerová 2007, s. 38). Mezi nestandardní lze zařadit právě i kombinatorické úlohy.

Kombinatorika hraje důležitou roli v rozvoji matematického myšlení. Její význam je zejména v rozvoji logického myšlení, obecných kombinačních schopností (kombinačního myšlení) a lze ji považovat za základ pro řešení různých pravděpodobnostních problémů (Příhonská 2008, s. 9).

S rozvojem kombinačního myšlení se děti setkávají již v útlém věku doma či v mateřských školách. Staví hrady z barevných kostek, rovnají předměty a hrají nejrůznější hry (Zýková 2011). Proto bychom měli navázat na jejich zkušenosti a zapojovat do výuky takové problémy a aktivity, které podporují další rozvoj kombinačního myšlení. Dle Blažkové aj. (2007, s. 51) je to jeden z aspektů, který by se na 1. stupni neměl opomíjet.

Scholtzová (2003, s. 5) uvádí důvody, proč bychom kombinatoriku měli zařazovat do vyučování. V první řadě jde o její atraktivnost. Žáci se prostřednictvím kombinatorických úloh mohou v matematice setkat se zajímavými problémy, jež jim poskytují možnost zkoumání, experimentování a objevování. S tím souvisí i propojitelnost matematiky s každodenním životem, se známými situacemi. Využitím zajímavých témat a námětů žáky motivujeme k řešení úloh a tím zvyšujeme i jejich zájem o matematiku (Pavlovičová; Vasková 2008, s. 67 – 72).

Dále dle Scholtzové (2003, s. 5) kombinatorika přináší aktivity vhodné jak pro výborné žáky, tak pro ty, jež v matematice nebývají obvykle úspěšní. Právě proto, že řešení kombinatorických úloh na 1. stupni je do značné míry nezávislé na využití osvojených algoritmů či pamětných vědomostí, umožňuje méně matematicky nadaným žákům zažít pocit úspěchu, dodává jim odvahy pro další řešení a zlepšuje tak jejich „matematické“ sebevědomí.

V neposlední řadě se žáci prostřednictvím her a zajímavých problému seznamují s kombinatorickými principy (Scholtzová 2003, s. 5).

Jak už jsem se zmínila, nestandardní úlohy (tedy i kombinatorické) vyžaduji určitou tvořivost žáků. Je to dáno volností výběru řešitelské strategie. Žáci by si měli sami zvolit, jak budou postupovat. Je však úkolem učitele seznamovat žáky s různorodými řešitelskými strategiemi již od samého začátku školní docházky (Pavlovičová 2009, s. 75 – 80). Sledováním zvolených žákovských strategií se naopak učitel může vcítit do dětského myšlení. Měl by se zamýšlet, jaký proces probíhal při řešení v hlavě žáka, co napsal žák na papír (a co tím chtěl říci učiteli) a jak si samotný učitel vysvětluje písemný záznam řešené úlohy (Gerová 2007, s. 45 – 46).

Při řešení kombinatorických úloh na prvním stupni ZŠ se nejčastěji objevují následující řešitelské strategie (využívám je i v praktické části DP):

- pokus (experiment) – náhodný či systematický
- kreslení obrázku (s využitím barev)
- kreslení diagramu (např. stromového)
- využití tabulky

- užití grafu (např. uzlového)
- výpis možností
- logická úvaha
- využití matematického příkladu (popř. vzorce)

Při zapojování kombinatorických problémů do výuky na 1. stupni by měli učitelé postupovat následujícím způsobem (Bálint In Scholtzová 2003, s. 5):

1. Žáci hledají nejprve jednu, potom několik možností. Učitel si tak ověří, zda pochopili zadání a vědí, co mají hledat.
2. Žáci hledají co nejvíce různých možností řešení úlohy.
3. Žáci hledají všechny možnosti řešení. Měli by si být jistí, že našli všechny možnosti – to je možné tehdy, pokud objeví určitý pořádek/systém v hledání možností.
4. Žáci nemusí najít (resp. vypsat) všechny možnosti, ale měli by nalézt určitý systém, na jehož základě usoudí, jaké bude pokračování a kolik bude řešení.
5. Není třeba, aby žáci vyjmenovali/vypsali všechny případy, neboť dle analýzy podmínek zvládnou vypočítat všechny možnosti.

Na prvním stupni s žáky nejvíce pracujeme na bodech 1. – 3. Je zřejmé, že učitel by měl vést žáky k organizaci své práce (nejen v matematice) a k hledání určitého systému řešení. Žáci při řešení kombinatorických úloh postupují od konkrétního zachycování skutečnosti ke zjednodušování řešení (resp. grafického záznamu), což souvisí právě i s rozvojem systematičnosti. Pokud žáci naleznou určitý systém, pak svůj záznam zjednodušují, zrychlují a obvykle naleznou i více možností řešení. To se ukázalo i v praktické části této práce.

Učitelé by s kombinatorikou na prvním stupni ZŠ měli začít prostřednictvím manipulativní činností dětí. K tomu nám velmi dobře poslouží např. barevné kostky, obrázky, pastelky, aj. Je vhodné využít i osvědčených her, jako např. Logic, Tangramy, Člověče, nezlob se, Scrabble. Velkou oblibu jistě žáci najdou v hledání cest z bludišť a labyrintů (ať už v těch na papíře, či v opravdových). Je spousta možností, jak zapojit kombinatoriku do hodin matematiky.

V další kapitole sleduji, jak zapojují kombinatoriku do výuky autoři učebnic matematiky.

2.5 Kombinatorické úlohy v učebnicích pro 5. ročník ZŠ

Přestože kombinatorika není učivem 1. stupně ZŠ, můžeme v některých učebnicích matematiky najít úlohy, které určitou měrou rozvíjejí kombinatorické myšlení (Příhonská; Vilimovská 2012). Pro potřeby diplomové práce jsem se zaměřila na učebnice matematiky pro 5. ročník základní školy a hledala jsem v nich právě úlohy tohoto typu. Nahlédnutí do učebnic mi umožnil zaměstnanec liberecké firmy GEOM zabývající se prodejem učebnic. K dispozici jsem měla nejnovější dostupná vydání učebnic matematiky pro 5. ročník ZŠ nakladatelství Alter, Didaktis, Fraus, Nová škola, Prodos a SPN.

ALTER: Matematika pro 5. ročník, (Justová 2009)

Učebnice odpovídá požadavkům RVP ZV a obsahuje aktualizované úlohy z předchozí trojdílné učebnice. Autorka Jaroslava Justová zařadila do učebnice pouze jedinou úlohu rozvíjející kombinatorické myšlení. Najdeme ji na straně 156 v kapitole Nestandardní úlohy. Je zaměřena na tematiku šachového turnaje a ptá se na počet odehraných zápasů. Správnou odpověď žáci volí ze čtyř nabídnutých možností. Úloha není nijak graficky doplněna.

- **s. 156:** Nestandardní úlohy

  7. V turnaji v šachu soutěžila dvě čtyřčlenná družstva. Každý hráč prvního družstva hrál utkání se všemi hráči druhého družstva. Kolik se odehrálo zápasů?
  Bylo odehráno: a) 8 zápasů b) 12 zápasů c) 16 zápasů d) 24 zápasů

DIDAKTIS: Matematika – učebnice pro 5. ročník základní školy (Blažková aj. 2011)

Učebnice je zpracována podle RVP ZV. Má nevšední vzhled i pojetí matematiky. Je úzce propojena se vzdělávací oblastí Člověk a jeho svět a ukazuje matematiku jako praktický nástroj pro každodenní život. Každá kapitola obsahuje po stranách rozbor řešení daného typu úlohy krok za krokem. Pro ty, kteří se nechtějí připravit o radost z nalezení vlastního postupu je učebnice opatřena na každé straně klopami, jež řešení zakryjí.

Učebnice obsahuje mnoho zajímavých témat a setkáme se zde i s problémovými úlohami, ovšem kombinatorice se učebnice téměř nevěnuje. Pouze prvky kombinatoriky lze spatřit pouze v závěrečné kapitole Náročnější příklady pro chytré hlavičky na straně 79. V úloze o vstupenkách hledáme čísla končící dvojčíslím 31. V rýsovací úloze lze spatřit rozvoj kombinatorického myšlení, neboť je několik způsobů, jak narýsovat čtyřlístek dle vzoru. Na straně 81 se vyskytuje úloha s tematikou přelívání vody do lahví různého objemu. Také zde můžeme postupovat různými způsoby a řešit úlohu experimentem.

- **s. 79:** Náročnější příklady pro chytré hlavičky

  Na školní ples bylo prodáno 530 vstupenek (vstupenky byly číslovány 000, 001, 002,…). Při losování vyhráli 333 Kč všichni ti, kteří měli vstupenku končící dvojčíslím 31. Kolik takových vstupenek vyhrálo a kolik korun pořadatelé vyplatili?

- **s. 81:**
  Máme tři lahve o objemu 8 l, 5 l, a 3 l. 8 l láhev j e plná vody. Jakým způsobem odměříte 2 l, když víte, že nesmíte žádnou část vody vylít mimo nádoby.

FRAUS: Matematika pro 5. ročník základní školy (Hejný aj. 2011)

Jde o další učebnici sestavenou dle požadavků RVP ZV, jejímž cílem je podpora rozvoje klíčových kompetencí. Má netradiční vzhled a hojně využívá fotografií, ilustrací a piktogramů. Obsahuje mnoho problémových úloh, mezi kterými se objevuje i několik úloh rozvíjejících kombinatorické myšlení žáků. Hned zkraje učebnice v kapitole opakování na straně 14 nalezneme úlohy s prvky kombinatoriky. První z nich je klasická úloha s charakterem permutací, kde mají žáci z daných cifer tvořit trojciferná čísla. Ve druhé úloze mají žáci přeskupovat daný počet kartiček pexesa a rozhodnout, kolik je z nich možno sestavit obdélníků. Dalším úkolem je doplňování sčítacích trojúhelníků. Je zde několik možností, jak doplnit prázdná okénka. Poslední úlohou na straně 14 je čtení názvů planet z tabulek. Na straně 23 je další úloha rozvíjející kombinatorické myšlení. Žáci mají za úkol sečíst všechna trojciferná čísla složená ze dvou daných cifer. Dále se prvky kombinatoriky objevují na stranách 68 – 71 v kapitole Pravděpodobnost a náhoda.

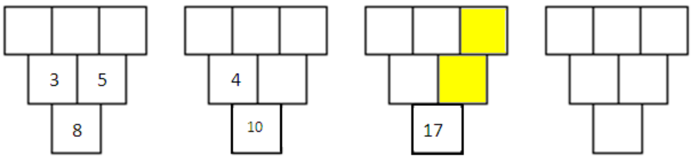
- **s. 14:** Opakování

50. Kolik různých trojciferných čísel můžeš vytvořit z číslic:

a) 1, 2, 3 b) 5, 4, 0 c) 5, 3, 0, 7 Každá číslice smí být použita jen jednou.

51. Kolik různých obdélníků můžeš vytvořit z a) 12; b) 18; c) 24 čtvercových kartiček pexesa?

52. Kolika způsoby lze doplnit sčítací trojúhelník? Nejmenší číslo není menší než 0.



Součet čísel v barevných polích je 8. Součet tří čísel prvního řádku je 4 (ve čtvrtém trojúhelníku).

53. Kolika způsoby je možné přečíst názvy planet v tabulkách?

např.:

Z	E	M
E	M	Ě

- **s. 23:** Rozšiřující učivo (Zákonitosti, vztahy a práce s daty)

25. Najdi součet všech osmi trojmístných čísel, ve kterých se vyskytují pouze číslice:

a) 1 a 2 b) 1 a 3 c) 2 a 5

NOVÁ ŠKOLA: Uvažuj, odhaduj, počítej: Učebnice matematiky pro 5. ročník (Rosecká; Růžička 2010)

Učebnice se skládá ze dvou částí, v té první, jejíž autorkou je Zdena Rosecká, jsou zejména příklady a úlohy z aritmetiky. Druhá část autora Jiřího Růžičky (otočíme-li učebnici) se nazývá Jak je lehká geometrie. Úlohy zaměřující se na rozvoj kombinatorického myšlení najdeme na straně 39 v samostatné kapitole s názvem Kombinatorika. První úloha má charakter permutací, tedy jde o přeskupování daného počtu prvků. V úloze mají žáci za úkol přeskupovat čtyři číslice (např. v čísle 2579) a vzniklá čísla seřadit dle velikosti. Ve druhé úloze (charakter variace) řadí žáci lístečky s čtyřmístným kódem složeným ze dvou písmen (např. ABAA, BAAA, ABBB, aj.) dle abecedy a poté nahrazují písmena číslicemi. K pochopení úloh má v obou případech žákům pomoci grafický příklad (tabulka s čísly, výčet všech možností přeskupení). Za úlohu rozvíjející kombinatorické myšlení lze považovat také tu ze strany 45. Zde mají žáci různými způsoby rozměňovat částku 50 Kč na drobné mince.

- **s. 39:** Kombinatorika (Hrej si)

1. Lukáš si hraje se čtverečky, které vyrobil z krabičky od čaje. Napsal na ně číslice. Čtverečky s číslicemi přesunuje a zapisuje si čísla složená z těchto číslic.

1 3 4 8	3 1 4 8	4 1 3 8	8 1 3 4
1 3 8 4	3 1 8 4	4 1 8 3	8 1 4 3
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Proveď totéž s číslicemi 2 5 7 9 nebo 4 6 8 9 nebo 1 3 5 0. Napsaná čísla seřaď podle velikosti. Kolik různých čísel z těchto číslic dovedeš samostatně sestavit?

2. Anetka se rozhodla urovnat rozházené lístečky podle abecedy. Když to také dokážeš, pokračuj podle pokynů dole.

AAAA BAAA ABAB AAAB BBAB
BBAA BBBB ABBA BABA BABB

AABA ABBB BAAB ABAA BBBA AABB

Ze dvou libovolných číslic sestavuj čtyřciferná čísla tak, že na urovnaných kartách nahrazuješ písmena číslicemi. Piš je pod sebe do sloupce.

- **s. 45:**

3. Rozměňuj peníze na drobné (vyplať různými způsoby).

PRODOS: Matematika a její aplikace 5, 1. – 3. díl (Molnár; Mikulenková 2008)

Tato trojdílná sada učebnic vyšla v nové edici Modrá řada, která je vytvořena pro vzdělávání dle RVP. V prvním díle jsem nenarazila na žádné kombinatorické úlohy. Ve druhém díle se úlohy rozvíjející kombinatorické myšlení objevují ve dvou kapitolách; poprvé na straně 18 v kapitole Logické slovní úlohy. V 1. úloze mají žáci za úkol kombinovat kusy oblečení a určit počet různých kombinací. Tato úloha je doplněna obrázky s oblečením. Ve druhé úloze je třeba zjistit, kolik ponožek musí chlapec vytáhnout z batohu, aby měl pár. Třetí úloha se zabývá uspořádáním červených a modrých vagonů takovým způsobem, aby byly vagony uspořádány symetricky. Ve čtvrté (poměrně náročnější) úloze vytahujeme kuličky ze tří různých krabic s přeházenými popisky a máme zjistit, kolik kuliček je nutno vytáhnout, abychom popisky uspořádali správně. Na 45. straně v kapitole Nestandardní úlohy je úloha, kde mají žáci přeskupovat 4 symboly všemi možnými způsoby (tedy charakter permutací). K tomu jim má pomoci obrázek těchto symbolů a tabulka s uspořádáním políček 6x4. Třetí díl učebnice Matematika a její aplikace 5 obsahuje dvě kombinatorické úlohy v kapitole Nestandardní úlohy na straně 3. V první z nich žáci zjišťují, kolik bude podání rukou, pozdraví-li se čtyři chlapci a kolik podání rukou přibude, přidají-li se k chlapcům ještě dvě dívky. Pro lepší pochopení mají žáci k dispozici obrázek s šesti různě barevnými dlaněmi. Druhá úloha se shoduje s jedinou kombinatorickou úlohou z „alterovské“ učebnice. Žáci mají určit počet odehraných zápasů v šachovém turnaji, úloha je doplněna (narozdíl od Alteru) obrázkem. V učebnici se objevila i kapitola Úlohy z přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia, žádnou kombinatorickou úlohu však neobsahuje.

1. díl:

- nic z kombinatoriky

2. díl:

- **s. 18:** Logické slovní úlohy

  1. a) Věrka si vzala na dovolenou 2 sukýnky, 2 kalhoty a 5 halenek. Kolika různými způsoby se může obléknout?

1. b) Pavlína má s sebou 3 kalhoty a 7 triček. Která z dívek si může obléknout více různých kombinací oblečení?

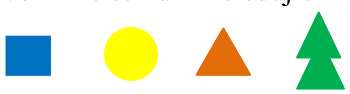
2. Nepořádný Vilík má v batohu 2 páry modrých, 2 páry hnědých a 2 páry černých ponožek. Kolik ponožek má v batohu? Jaký nejmenší počet ponožek musí potmě z batohu vytáhnout, aby měl 1 pár ponožek téže barvy? A když potřebuje 2 páry?

3. Lokomotiva táhne 6 vagonů, každý z vagonů je buď červený, nebo modrý. Pořadí barev jednotlivých vagonů je přitom stejné zepředu jako zezadu. Kolik takových vláčků umíte nakreslit?

4. Máš 3 plné krabice kuliček. Jsou označeny nálepkami: bílé, červené, bílé a červené. Nálepky označují barvu kuliček, které jsou v krabicích. Jednoho dne ti někdo nálepky přemístí tak, že žádná není na správné krabici. Kolik kuliček musíš z krabic bez nahlížení vyjmout, abys mohl správně uspořádat popisky?

- **s. 45**: Nestandardní úlohy

1. Jak lze seřadit následující 4 symboly? Nakresli všechny možnosti.



(+ tabulka 6 x 4)

3. díl:

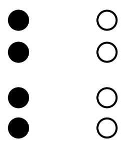
- **s. 3:** Nestandardní úlohy

1. Bohouš, Libor, Pepík a Standa se vítají a podávají si ruce.

a) Kolik je to celkem podání rukou?

b) Kolik podání rukou přibude, přijdou-li za nimi Věrka a Pavlína?

2. V šachovém utkání hrají proti sobě dvě čtyřčlenná družstva. Každý šachista jednoho družstva hraje s každým hráčem druhého družstva. Kolik partií se sehraje?



- **s. 57:** Úlohy z přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia
  Neobsahuje žádné kombinatorické úlohy.

SPN: Matematika pro 5. ročník ZŠ (Vacková aj. 2010)

Učebnice obsahuje dvě kombinatorické úlohy, vždy v kapitole Chytrost nejsou žádné čáry. První z nich najdeme na straně 72. Žáci mají zadané datum a jeho ciferný součet a mají uvést různá data, jejichž ciferný součet je shodný. Hrají si tedy se součtem čtyř cifer. Druhá kombinatorická úloha je na straně 109. Zde je k dispozici tabulka s uspořádáním polí 3x3. Žáci mají vytvářet různá čísla tak, že z každého sloupce a každého řádku použijí vždy jednu číslici.

- **s. 72:** Chytrost nejsou žádné čáry

  2. Představ si, že podle kalendáře je 24. 11. Ciferný součet tohoto data je 8 (2 + 4 + 1 + 1 = 8). Kolik dní v roce má stejný ciferný součet jako tento den? Jednotlivá data vypiš.

- **s. 109:** Chytrost nejsou žádné čáry

  2. Z cifer v tabulce sestav různá trojciferná čísla tak, že z každého sloupce a každého řádku vždy použiješ právě jednu cifru. Kolik bude celkem takových trojciferných čísel?

1	4	7
2	5	8
3	6	9

2.6 Kombinatorika v přijímacích zkouškách na osmiletá gymnázia

Jak už jsem se zmínila v předešlé kapitole, objevují se kombinatorické úlohy v učebnicích matematiky pro 5. ročník ve velmi malé míře. Pokud v učebnicích tento typ úloh není zastoupen vůbec a sám učitel je do výuky nezapojí, pak se s nimi žáci 1. stupně v podstatě nesetkají. Pouze vybraní žáci mohou s kombinatorickými úlohami přijít do kontaktu na soutěžích typu Matematická olympiáda či Klokánek. Můžeme tedy říci, že na prvním stupni je kombinatorika více méně opomíjena. Přesto se s ní žáci v některých případech mohou setkat u přijímacích zkoušek na osmiletá gymnázia, v důležité chvíli, kdy se rozhoduje o jejich další cestě ve vzdělávání.

Nahlédla jsem do několika přijímacích testů z matematiky na osmiletá gymnázia a sledovala jsem v nich výskyt úloh zaměřených na kombinatorické myšlení. Gymnázia tyto úlohy do přijímacích testů z matematiky zapojují, ovšem není to pravidlem. Většinou najdeme nejvýše jednu kombinatorickou úlohu v jednom testu.

Konkrétní ukázky přijímacích testů z matematiky je možné nalézt přímo na webových stránkách gymnázií (např. /www.gymnachod.cz) a na webových stránkách specializujících se na přípravu žáků k přijímacím zkouškám (např. www.zkousky-nanecisto.cz). Mnohá gymnázia netvoří pro účel přijímacích zkoušek vlastní testy, ale využívají služeb společnosti SCIO. Na webových stránkách www.scio.cz je k nahlédnutí několik ukázkových testů včetně řešení.

Žákům pátých tříd základních škol je pro matematickou přípravu na přijímací zkoušky osmiletých gymnázií určeno i množství publikací. Snaží se žákům přiblížit formu přijímacích testů a typické úlohy, s nimiž se v testech mohou setkat. V některých publikacích je shrnuto učivo matematiky prvního stupně, které doplňují úlohy často se vyskytující v přijímacích zkouškách z matematiky. V jiných najdeme konkrétní přijímací testy konkrétních gymnázií z předchozích let.

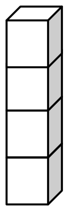
Zejména matematické přípravě žáků k přijímacím zkouškám na osmiletá gymnázia se věnuje autor Petr Husar. Pro tyto účely vydává knižní publikace *Matematikou krok za krokem k přijímacím zkouškám* (Husar 2002)*; Matematika: Příprava k přijímacím zkouškám na osmiletá gymnázia* (Husar 2003). Kombinatorické úlohy zapojuje do přípravných testů nejčastěji ze všech uváděných autorů. Jeho rady můžeme najít také na internetových stránkách www.zkousky-nanecisto.cz, které odkazují na mnohé ukázkové přijímací testy nejen z matematiky, mimo jiné právě i na SCIO testy.

Podobnou publikaci jako Husar vydaly i autorky Menzelová s Kuntovou (1998): *Přijímací zkoušky z matematiky: Příklady a testy pro přípravu žáků 5. ročníků ZŠ ke studiu na osmiletých gymnáziích.* Autorky seznamují žáky s uceleným přehledem učiva matematiky 1. stupně ZŠ, doplňují ho příklady a úlohami k procvičení látky. Jsou zde i úlohy s rozšiřujícím učivem, které by měli zvládnout zájemci o studium na osmiletém gymnáziu. V závěrečné části knihy najdeme všechny výsledky. Kombinatorické úlohy se v celé publikaci vyskytují pouze dvě.

Dále jsem nahlédla do publikace *Přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia: Matematika* (Dolejší 2006). Publikace obsahuje 15 vzorových přijímacích zkoušek z matematiky včetně řešení. Dle autora jsou zde zastoupeny všechny typické matematické příklady, s nimiž se žáci u přijímacích zkoušek setkávají. Kombinatorické úlohy však najdeme pouze ve třech testech z patnácti.

Pro ilustraci přidávám ukázku vybraných úloh z přijímacích zkoušek zaměřených na kombinatorické myšlení:

- Věra má celkem 3 sukně, dvoje kalhoty, 4 halenky a 5 svetříků. Kolik celkem různých kombinací sukně – halenka, sukně – svetřík, kalhoty – halenka, nebo kalhoty – svetřík může sestavit? (SCIO, 2003)
- Z číslic 0, 5, 3, 6, 8 vytvořte největší a nejmenší trojciferné číslo, ve kterém se číslice neopakují. Jaký je rozdíl těchto vytvořených čísel? (SCIO, 2004)
- Částku 33 Kč mám rozdělit na 3 díly, z nichž každý je větší nebo roven 10 Kč. Kolik je všech různých možností takového dělení? (www.zkousky-nanecisto.cz)
- Kolika různými způsoby můžeme postavit věž ze čtyř kostek (viz obrázek), jsou-li dvě červené, jedna bílá a jedna modrá? Jednotlivé možnosti vypište. (Dolejší 2006, s. 51)



- Čtyři přátelé si navzájem podali ruce. Kolik stisknutí rukou to bylo celkem? (Jiráskovo gymnázium, přijímací zkoušky 2007/08)
- Na pultě byly tři druhy zákusků v ceně 5,60 Kč, 7,70 Kč a 9,50 Kč. Maminka z nich koupila dva zákusky. Kolik korun zaplatila? (Úloha má 6 řešení. (Menzelová; Kuntová. 1998, s. 25)
- Ve velké červenozelené míse bylo šest jablek a osm hrušek. Do místnosti přiběhly ze zahrady děti a z mísy si vzaly celkem sedm kusů ovoce. Zůstala v míse aspoň jedna hruška? Zůstalo v míse aspoň jedno jablko? Vypiš všechny možnosti, jaké ovoce v míse zůstalo. (Husar 2003, s. 100)

III. Praktická část

3.1 Stanovení hypotéz

V praktické části DP jsem se soustředila na tři základní oblasti ovlivňující úspěšnost řešení kombinatorických úloh, a pro každou jsem stanovila uvedené hypotézy:

I. ZKUŠENOSTI ŽÁKŮ

Chci zjistit, jak zkušenosti a zájmy žáků ovlivňují úspěšnost řešení.

H1: Řešení úloh a jejich úspěšnost jsou ovlivněny zkušenostmi a zájmy žáků.

- Komentář:

  Předpokládám, že předchozí zkušenosti žáků ovlivňují pozitivně úspěšnost řešení slovních úloh, kombinatorických nevyjímaje. Těchto zkušeností mohou žáci nabýt zejména ve škole. Kombinatorické úlohy se objevují již v některých učebnicích pro pátý ročník (*více v kap. 2.5 Kombinatorické úlohy v učebnicích pro 5. ročník*). Některé typy úloh ze vstupního testu by jim tedy mohly být známé.

  Dalším předpokladem je skutečnost, že chlapci a dívky mají zpravidla odlišné zájmy a že toto zájmové zaměření ovlivňuje úspěšnost řešení kombinatorických úloh. Například u chlapců (ve větší míře než u dívek) je více méně známá obliba skupinových sportů. Při fotbale, florbale, hokeji (a podobných) se chlapci účastní turnajů, kde se mohou seznámit s tabulkovým zápisem odehraných zápasů. Právě tato zkušenost by jim mohla pomoci při řešení kombinatorických úloh se sportovní tematikou. U dívek by se mohly při řešení úloh větší měrou projevit například zkušenosti s praktickými činnostmi z domácnosti a z běžného života (jako např. domácí práce, vaření, nakupování). Tím však nechci říci, že chlapci s těmito činnostmi nemohou mít také bohaté zkušenosti, ani to, že dívky se nemohou účastnit sportovních turnajů.

- Metoda ověření:

  Analýza učebnic matematiky pro pátý ročník. Dotazník pro žáky 5. tříd. Vyhodnocení vstupních testů. Pozorování řešitelských strategií. Rozhovor s učiteli.

II. PRÁCE S INFORMACEMI

Zajímá mě, zda umí žáci pracovat s informacemi, zda umí ze zadání úlohy vybrat ty podstatné, roztřídit je a zaznamenat. S tím souvisí i schopnost porozumění textu (odpovídá žák na to, na co se ho ptáme?).

H2: Řešení kombinatorických úloh rozvíjí schopnost žáků třídit, zaznamenávat a dále zpracovávat vstupní informace v zadání úlohy.

H2a: Utřídění vstupních informací pozitivně ovlivňuje úspěšnost žáka při řešení úlohy.

- Komentář:

  Při řešení slovních úloh hraje důležitou roli porozumění textu a práce s informacemi. Předpokládám, že řešení kombinatorických úloh rozvíjí schopnosti pracovat se zadanými informacemi, utřídit si nejdůležitější fakta, hledat odpověď na správnou otázku a tím do značné míry ovlivňuje pozitivně i úspěšnost řešení.

- Metoda ověření:

  Srovnání výsledků (úspěšnosti řešení) ve vstupním testu a v kontrolním testu. Porovnání dvou tříd (s přímým působením studentky a bez přímého působení).

III. ŘEŠITELSKÉ STRATEGIE

Chci zjistit, jaké strategie žáci nejvíce používají, které jsou nejlepší a zda různé metody řešení ovlivňují úspěšnost.

H3: Při samostatném řešení kombinatorických úloh žáky převládá metoda spontánního hledání výsledku tipováním a náhodným zkoušením nad metodou systematického řešení.

- Komentář:

  Předpokládám, že žáci při řešení vstupního testu budou ve velké míře využívat metody tipování a náhodného zkoušení. Tipováním myslím způsob, kdy žák „tipne“ neboli náhodně odhadne výsledek, aniž by své tvrzení nějak písemně (nebo jinak graficky) ověřil či vysvětlil (např. ve vstupním testu k úloze 3. o tvorbě rozvrhu napíše žák pouze odpověď, že paní učitelka může sestavit 3 různé rozvrhy). Metodou náhodného zkoušení mám na mysli takový postup, kdy žák spontánně hledá různé možnosti řešení a písemně či graficky je zaznamenává. Tyto možnosti řešení žák nalézá náhodně, nehledá je systematicky (sledujeme zejména postup řešení v úloze 2., kde Maruška skládá částku z různých mincí).

- Metoda ověření:

  Sledování řešitelských strategií u jednotlivých úloh ve vstupním testu. Experimentální činnost a pozorování řešitelských strategií žáků při přímém působení ve třídě.

H4: Využití obrázku a grafického znázornění ovlivňuje pozitivně úspěšnost řešení.

- Komentář:

  Předpokládám, že žáci budou při řešení úloh ve vstupním testu využívat vlastních kreseb. Domnívám se, že grafické znázornění zadaných informací napomáhá žákům k pochopení úlohy, její podstaty a k rozvoji matematické představivosti. Hraje tedy mimo jiného důležitou roli při práci žáků s informacemi, což sleduji v oblasti II v rámci stanovené hypotézy *H2*.

- Metoda ověření:

  Sledování souvislostí mezi grafickým znázorněním, resp. znázornění obrázkem a úspěšností řešení v úlohách ve vstupním testu. Sledování řešitelských strategií žáků při přímém působení ve třídě. Porovnání úspěšnosti řešení s využitím grafického znázornění a bez něj.

3.2 Realizace experimentu

Experiment jsem (po předchozí domluvě s panem ředitelem Vykoukalem) realizovala v únoru 2012 na základní škole Aloisina Výšina v Liberci. Škola vzdělává žáky od první do deváté třídy dle školního vzdělávacího programu „Škola pro život, škola pro všechny“. Prioritou tohoto ŠVP je všestranný rozvoj osobnosti každého žáka, založený na poskytnutí kvalitního všeobecného vzdělání s důrazem na současné trendy a uplatnitelnost v každodenním životě. Nově se škola v jedné ze dvou prvních tříd zaměřuje na estetickou výchovu (ZŠ Aloisina výšina).

Pro účely experimentu jsem měla k dispozici třídy 5.A a 5.B. S třídními učiteli (tj. v 5.A Mgr. Šárka Poláková, v 5.B Mgr. Dušan Polívka) jsem nejprve domluvila časovou dotaci. Pan učitel mi nabídl více hodin pro realizaci, proto jsem pracovala převážně právě s žáky 5.B. S paní učitelkou 5.A jsem se dohodla, že její třída mi poslouží jako kontrolní.

Ve třídě 5.A je 23 žáků (8 chlapců a 15 dívek). Celkový studijní průměr z matematiky při pololetním vysvědčení v této páté třídě činil 1,74. Ve třídě 5.B je 25 žáků (10 chlapců a 15 dívek). Celkový studijní průměr z matematiky za poslední hodnocené pololetí byl v 5.B 2,08. Na základě těchto informací jsem očekávala lepší výkony při řešení kombinatorických úloh od třídy 5.A (ačkoli jsem si uvědomovala, že známky nejsou vždy úplně objektivní a nevypovídají o řešitelských strategiích žáků). Konkrétní rozložení známek v pátých třídách včetně procentuálního zastoupení ukazuje tabulka RE1.

	5.A		**5.B**	
známka	**žáků**	**%**	**žáků**	**%**
1	10	43,5	5	20
2	9	39,1	14	56
3	4	17,4	5	20
4	-	-	1	4
5	-	-	-	-

Tab. RE1: Zastoupení známek z matematiky v jednotlivých třídách

Na počátku realizace jsem žákům obou pátých tříd zadala vstupní test (*viz kapitola 3.2.1 Vstupní test*). Dále jsem pracovala s 24 žáky 5.B. Během šesti vyučovacích hodin (rozložených do jednoho týdne) jsem s žáky stihla realizovat 12 úloh rozvíjejících kombinatorické myšlení. Sledovala jsem žáky při řešení daných problémů, zejména jsem se soustředila na jejich řešitelské strategie. Snažila jsem se u žáků rozvíjet systematické řešení úloh, pracovat na jejich prvotní práci se zadanými informacemi a zapojovat experimentální činnost. Dále jsem úlohy obohatila o činnosti, jež žáky motivují a zlepšují jejich přístup k řešení daných kombinatorických problémů (*viz kap. 3.2.2 Procvičování*).

Pro ověření účinnosti souboru úloh jsem žákům 5.A i 5.B zadala kontrolní test. Na úplný závěr experimentu žáci vyplnili dotazník zjišťující jejich předchozí zkušenosti s kombinatorickými úlohami (5.A i 5.B) a poskytující zpětnou vazbu k řešeným úlohám ve třídě 5.B.

Celkově jsem tedy s žáky 5.A a 5.B strávila 10 vyučovacích hodin.

3.2.1 Vstupní test

Vstupní test byl zadán žákům 5.A a 5.B hned při našem prvním setkání. Jeho cílem bylo zmapovat vstupní úroveň řešitelských strategií žáků a nalézt odpověď na tyto otázky:

- Rozumí žáci zadání úlohy (souvisí s porozuměním textu)? Vědí, na co mají odpovědět, co mají zjistit?
- Umí žáci pracovat s informacemi ze zadání? Vyberou ty podstatné? Roztřídí je?
- Jaké řešitelské strategie žáci využívají? Zachycují informace ze zadání graficky?
- Řeší žáci úlohy systematicky, či dávají přednost tipování, náhodnému zkoušení, apod.?
- Mají žáci zkušenost s řešením kombinatorických úloh? Popř. Projeví se tato zkušenost na úspěšnosti řešení?

Vzorové zadání vstupního testu

1. *Ve škole se koná florbalový turnaj. Přihlásilo se do něj pět družstev: TUČŇÁCI, MISTŘI, PARTIČKA, SPRÁVNÁ PĚTKA a NEBOJSOVÉ. V turnaji si zahrají všechny týmy navzájem (každý s každým jednou). Kolik bude celkem zápasů?*

2. *Maruška má zaplatit 11 Kč. Jak může složit přesnou částku, když má v kapse PĚTIKORUNY, DVOUKORUNY a KORUNY? Může použít všechny druhy mincí, nebo jen některé.*

3. *Paní učitelka připravuje rozvrh na pondělí. Žáci budou mít tyto předměty: ČESKÝ JAZYK, MATEMATIKU, TĚLESNOU VÝCHOVU, ANGLICKÝ JAZYK a HUDEBNÍ VÝCHOVU. Pan ředitel rozhodl, že ANGLICKÝ JAZYK musí být druhou hodinu a TĚLESNÁ VÝCHOVA pátou hodinu. KOLIK RŮZNÝCH ROZVRHŮ na pondělí může paní učitelka sestavit?*

Bonusová úloha:

Šimon má v šuplíku MODRÉ a ČERVENÉ ponožky. NÁHODNĚ ze šuplíku vytáhl TŘI ponožky. Má Šimon jistotu, že drží v ruce PÁR STEJNÝCH PONOŽEK?

První sportovně laděná úloha má charakter kombinací bez opakování. Hledáme dvojice týmů z pěti možných, přičemž nám nezáleží na pořadí (důležitou informací je, že každé dva týmy spolu hrají jen jednou). U žáků předpokládám zejména řešení s využitím tabulky či zaznamenávání konkrétních dvojic týmů.

Ve druhé úloze lze sledovat rozvoj řešitelských strategií žáků, zejména pak využití systematičnosti. Žáci mají hledat různé způsoby, jak lze složit částku 11 Kč, jsou-li k dispozici mince o hodnotě 1, 2 a 5 Kč. Úlohu lze řešit několika způsoby, ovšem ne každý je výhodný (např. zakreslování všech možností by bylo časově náročné).

Třetí kombinatorická úloha vstupního testu má charakter permutací. Zadání obsahuje mnoho informací, bude tedy důležité, jak si je žáci zaznamenají. Po dodržení všech podmínek ze zadání zbývají tři předměty, jež mohou žáci různě umisťovat do třech volných hodin v rozvrhu.

Bonusová úloha byla záměrně zařazena až na konec testu. Má totiž pravděpodobnostní charakter. Pro žáky prvního stupně jsou úlohy tohoto typu dost obtížné. Musí si nejprve uvědomit počet všech možností vytažených ponožek a poté podvědomě použít klasickou definici pravděpodobnosti. Problematické může být i samotné porozumění úloze.

Ukázku vyplněného vstupního testu přikládám v tištěné příloze P2. Další využití úloh ze vstupního testu v praxi lze nalézt ve volné příloze P7 – Soubor řešených úloh.

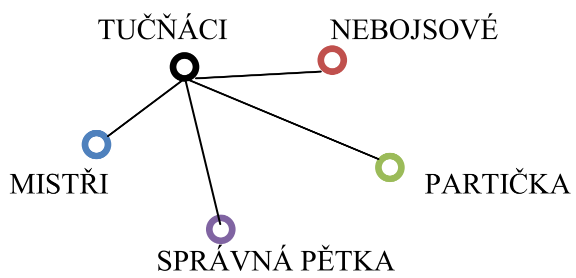
Vzorové řešení vstupního testu

Jednotlivé úlohy jsou řešeny zejména různými grafickými metodami (graf, obrázek, tabulka, logický strom možností), či výčtem možností – tedy takovými způsoby, které se pravděpodobně budou nejvíce objevovat v řešení žáků 1. stupně. Řešení pomocí kombinatorických pravidel a vztahů je jakousi nadstavbou této práce.

1. *Ve škole se koná florbalový turnaj. Přihlásilo se do něj pět družstev: TUČŇÁCI, MISTŘI, PARTIČKA, SPRÁVNÁ PĚTKA a NEBOJSOVÉ. V turnaji si zahrají všechny týmy navzájem (každý s každým jednou). Kolik bude celkem zápasů?*

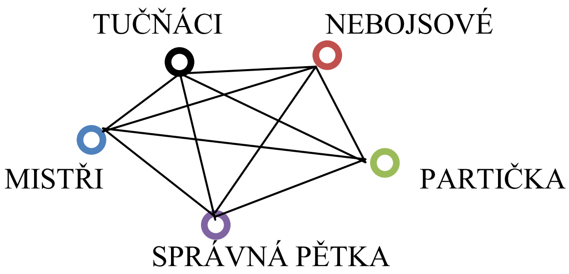
ŘEŠENÍ: ***užitím uzlového grafu***

- Turnaje se účastní 5 týmů, proto bude v grafu 5 uzlů.
- Spojnice mezi grafy představují odehrané zápasy.
- Víme, že „každý s každým" hraje pouze jednou.
- Nejprve si ukažme, které zápasy bude hrát jeden z týmů, např. TUČŇÁCI:



- Z obrázku je zřejmé, že Tučňáci odehráli 4 zápasy.

- Nyní doplníme ostatní odehrané zápasy (spojnice mezi týmy):



- Když spočítáme spojnice mezi všemi týmy, zjistíme celkový počet odehraných zápasů.
- Spojnic je 10. Celkem bylo odehráno 10 zápasů.

ŘEŠENÍ: ***tabulkou***

	TUČŇÁCI	MISTŘI	PARTIČKA	SPRÁVNÁ 5	NEBOJSOVÉ
TUČŇÁCI					
MISTŘI					
PARTIČKA					
SPRÁVNÁ 5					
NEBOJSOVÉ					

- Musíme si uvědomit, že v tabulce jsou zápasy, které nemohly být nikdy odehrány. Jde o takové, kdy by měl hrát jeden tým sám se sebou. Tato okénka

	TUČŇÁCI	MISTŘI	PARTIČKA	SPRÁVNÁ 5	NEBOJSOVÉ
TUČŇÁCI					
MISTŘI					
PARTIČKA					
SPRÁVNÁ 5					
NEBOJSOVÉ					

proškrtáme:

- Nyní nám v tabulce zbývá 20 volných okének. Je toto správný počet odehraných zápasů? Zkusme to ověřit. Vezměme si například vzájemný zápas týmů Mistři a Nebojsové. Předpokládejme, že Nebojsové zvítězili nad Mistry 5 : 3. Jak se tato informace objeví v tabulce? Znázorníme:

	TUČŇÁCI	MISTŘI	PARTIČKA	SPRÁVNÁ 5	NEBOJSOVÉ
TUČŇÁCI					
MISTŘI					3 : 5
PARTIČKA					
SPRÁVNÁ 5					
NEBOJSOVÉ		5 : 3			

- V tabulce vidíme, že jeden odehraný zápas se do tabulky píše dvakrát, a to z pohledu obou týmů. Pokud je tedy 20 volných okének, kolik bude odehraných zápasů?

- 20 : 2 = 10 Celkem bylo odehráno 10 zápasů.
- KONTROLA: Spočítáme volná okénka na jedné straně od proškrtaných zápasů:

	TUČŇÁCI	MISTŘI	PARTIČKA	SPRÁVNÁ 5	NEBOJSOVÉ
TUČŇÁCI		3 : 1	2 : 2	2 : 3	1 : 4
MISTŘI	*1*		1 : 4	3 : 4	3 : 5
PARTIČKA	*2*	*5*		5 : 2	2 : 3
SPRÁVNÁ 5	*3*	*6*	*8*		1 : 4
NEBOJSOVÉ	*4*	*7*	*9*	*10*	

ŘEŠENÍ: ***výpis všech možností***

- Odehrané zápasy si můžeme také jednoduše vypsat. Abychom se v zápise dobře orientovali, vybereme vždy jeden tým a vypíšeme všechny zápasy, které odehrál. U dalších týmů již vzájemný souboj s předešlými týmy neuvádíme:

TUČŇÁCI: Tučňáci : Mistři
Tučňáci : Partička
Tučňáci : Správná pětka
Tučňáci : Nebojsové

MISTŘI:	Mistři : Partička
	Mistři : Správná pětka
	Mistři : Nebojsové
PARTIČKA:	Partička : Správná pětka
	Partička : Nebojsové
SPRÁVNÁ PĚTKA:	Správná pětka : Nebojsové
NEBOJSOVÉ:	***Již hráli se všemi týmy!***

- KONTROLA: Zkontrolujeme, zdá hrály opravdu všechny týmy s těmi ostatními.
- Celkem bylo odehráno 10 zápasů.

ŘEŠENÍ: ***užitím kombinatorického pravidla součtu***

- První tým hrál se 4 týmy, pro druhý tým zbývají už jen 3 týmy (s prvním již hrál), pro třetí tým zbývá odehrát zápas se 2 týmy, čtvrtý tým odehraje poslední zápas s pátým týmem:

  4 + 3 + 2 + 1 = 10 zápasů

ŘEŠENÍ: ***početně – užitím kombinatorických vztahů***

- Jde o kombinace dvou týmů z pěti (bez opakování). Pro výpočet využijeme kombinačních čísel:

$$K(2,5) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot4\cdot3!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot4}{2!} = \frac{20}{2} = \underline{\underline{10}}$$

2. *Maruška má zaplatit 11 Kč. Jak může složit přesnou částku, když má v kapse PĚTIKORUNY, DVOUKORUNY a KORUNY? NAJDI VŠECHNY ZPŮSOBY! Může použít všechny druhy mincí, nebo jen některé.*

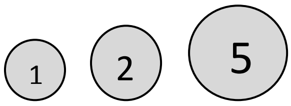
Pozn.: *Úloha rozvíjí různé řešitelské strategie (ne každá je však výhodná). Při řešení je také možné sledovat rozvoj systematičnosti řešení testovaných žáků.*

ŘEŠENÍ: ***tabulkou***

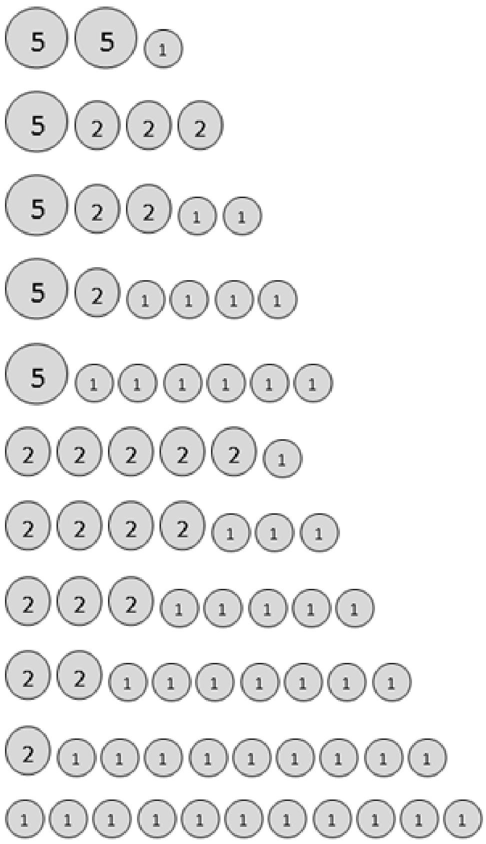
11 Kč	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
pětikoruny	2	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-
dvoukoruny	-	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
koruny	1	-	2	4	6	1	3	5	7	9	11

- Maruška může složit částku 11 Kč jedenácti způsoby.

ŘEŠENÍ: ***graficky***

- Jaké typy mincí má Maruška k dispozici? 

- Znázorníme všechny možností složení částky 11 Kč:



- Našli jsme 11 způsobů, jak lze složit částku 11 Kč.

ŘEŠENÍ: ***početně***

- barevně si označíme cifry vyjadřující pětikoruny, dvoukoruny a koruny:

5 . 2 + 2 . 0 + 1 . 1 = 11

5 . 1 + 2 . 3 + 1 . 0 = 11

5 . 1 + 2 . 2 + 1 . 2 = 11

5 . 1 + 2 . 1 + 1 . 4 = 11

5 . 1 + 2 . 0 + 1 . 6 = 11

5 . 0 + 2 . 5 + 1 . 1 = 11

5 . 0 + 2 . 4 + 1 . 3 = 11

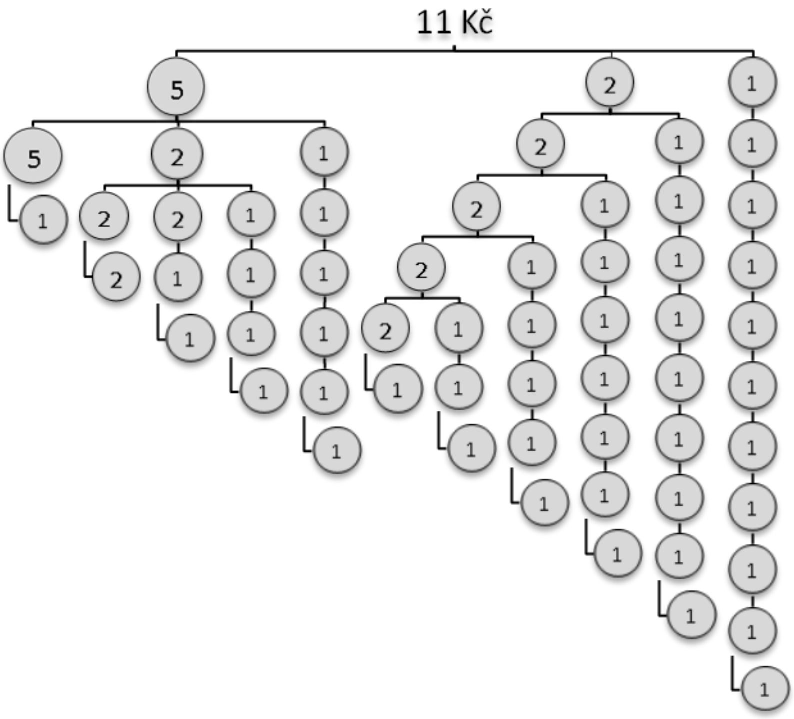
5 . 0 + 2 . 3 + 1 . 5 = 11

5 . 0 + 2 . 2 + 1 . 7 = 11

5 . 0 + 2 . 1 + 1 . 9 = 11

5 . 0 + 2 . 0 + 1 . 11 = 11

ŘEŠENÍ: ***logický strom možností***



3. *Paní učitelka připravuje rozvrh na pondělí. Žáci budou mít tyto předměty: ČESKÝ JAZYK, MATEMATIKU, TĚLESNOU VÝCHOVU, ANGLICKÝ JAZYK a HUDEBNÍ VÝCHOVU. Pan ředitel rozhodl, že ANGLICKÝ JAZYK musí být druhou hodinu a TĚLESNÁ VÝCHOVA pátou hodinu. KOLIK RŮZNÝCH ROZVRHŮ na pondělí může paní učitelka sestavit?*

ŘEŠENÍ: ***tabulkou***

- využijeme zkratky předmětů, pevně dané předměty označíme barevně:

<table>
<tr><th>1.</th><th>2.</th><th>3.</th><th>4.</th><th>5.</th></tr>
<tr><td>ČJ</td><td rowspan="6">AJ</td><td>M</td><td>HV</td><td rowspan="6">TV</td></tr>
<tr><td>ČJ</td><td>HV</td><td>M</td></tr>
<tr><td>HV</td><td>ČJ</td><td>M</td></tr>
<tr><td>HV</td><td>M</td><td>ČJ</td></tr>
<tr><td>M</td><td>ČJ</td><td>HV</td></tr>
<tr><td>M</td><td>HV</td><td>ČJ</td></tr>
</table>

- Z tabulky je zřejmé, že existuje 6 možností sestavení rozvrhu na pondělí.

ŘEŠENÍ: ***výčtem možností***

- Lze sestavit tyto různé předměty:

ČJ – AJ – M – HV – TV

ČJ – AJ – HV – M – TV

HV – AJ – ČJ – M – TV

HV – AJ – M – ČJ – TV

M – AJ – ČJ – HV – TV

M – AJ – HV – ČJ – TV

ŘEŠENÍ: ***početně – užitím kombinatorických vztahů***

- Dva předměty jsou pevně dané, zbývá nám do rozvrhu umístit 3. Vybíráme tedy 3 předměty do tří volných okének. Jde o permutaci!

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{6}}$$

Bonusová úloha:

Šimon má v šuplíku MODRÉ a ČERVENÉ ponožky. NÁHODNĚ ze šuplíku vytáhl TŘI ponožky. Má Šimon jistotu, že drží v ruce PÁR STEJNÝCH PONOŽEK?

ŘEŠENÍ: ***graficky***

- šuplík je plný modrých a červených ponožek
- Šimon náhodně vybere 3 ponožky, jaké jsou varianty?

- U vytahování ponožek nezáleží na pořadí!

- Má Šimon jistotu, že drží v ruce pár stejných ponožek?
  ANO, Šimon si může být zcela jistý, že drží v ruce pár stejných ponožek.

ŘEŠENÍ: ***úvahou***

- Když má Šimon v šuplíku modré a červené ponožky a vytáhne náhodně tři z nich, pak má v ruce zcela jistě dvě stejné ponožky:

$\boxed{\text{modrou – modrou}}$ – modrou

$\boxed{\text{modrou – modrou}}$ – červenou

modrou – $\boxed{\text{červenou – červenou}}$

červenou – $\boxed{\text{červenou – červenou}}$

Může si být tedy jist, že má v ruce vždy pár stejných ponožek.

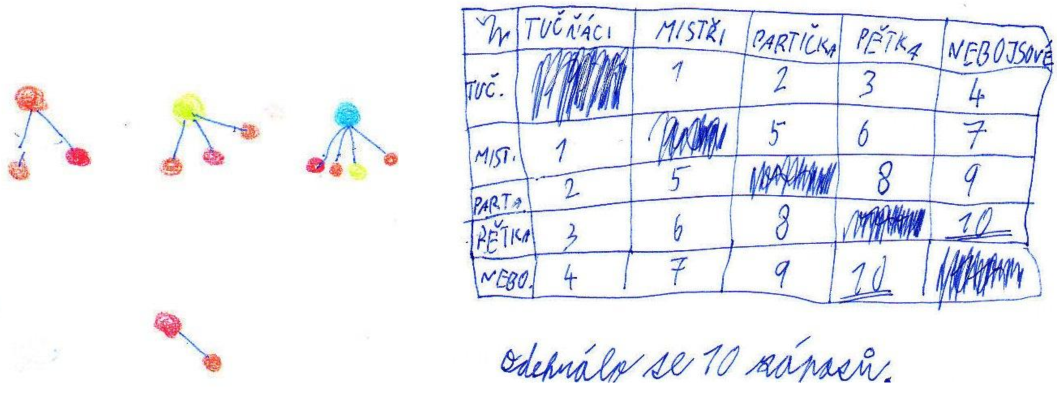
Vyhodnocení vstupního testu

Vstupní test řešilo celkem 45 žáků. 22 žáků z kontrolní třídy 5.A (7 chlapců a 15 dívek) a 23 žáků (9 chlapců a 14 dívek) ze třídy 5.B, se kterou jsem během experimentu procvičovala řešení kombinatorických úloh. Na řešení vstupního testu (dále jen VT) měli všichni žáci 45 minut. Jako podklad pro zpracování výsledků vstupního testu mi posloužila XLS tabulka, kam jsem zaznamenala sledované jevy konkrétně pro každou úlohu a žáka (viz příloha P1).

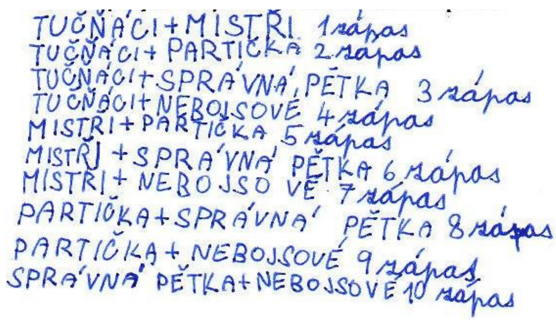
1. *Ve škole se koná florbalový turnaj. Přihlásilo se do něj pět družstev: TUČŇÁCI, MISTŘI, PARTIČKA, SPRÁVNÁ PĚTKA a NEBOJSOVÉ. V turnaji si zahrají všechny týmy navzájem (každý s každým jednou). Kolik bude celkem zápasů?*

Celkově řešilo úlohu úspěšně 60% testovaných žáků pátého ročníku (tj. 27 ze 45). Z hlediska úspěšnosti tříd dopadly výsledky podobně. Správně úlohu vyřešilo 63,6% žáků 5.A (tj. 14 z 22). Třída 5.B řešila úlohu s úspěšností 56,5% (tj. 13 z 23). Pokud se soustředím na hledisko pohlaví, pak dopadla lépe děvčata. Úlohu správně vyřešilo 65,5% z nich (tj. 19 z celkových 29). Ačkoliv jde o úlohu se sportovní tematikou, chlapci byli úspěšní méně (***to vyvrací částečně H1***). Ke správnému výsledku došlo 50% chlapců z testovaných tříd (tj. 8 z celkových 16).

75,6% žáků (tj. 34 ze 45) zachytilo zadání úlohy graficky (spojováním bodů, tabulkou, výčtem zápasů). Z nich 25 (odpovídá 73,5%) řešilo úlohu úspěšně (*viz obr. VT1, VT2*).



Obr. VT1 **Ukázka grafického znázornění 1. úlohy VT – spojování bodů, tabulka**

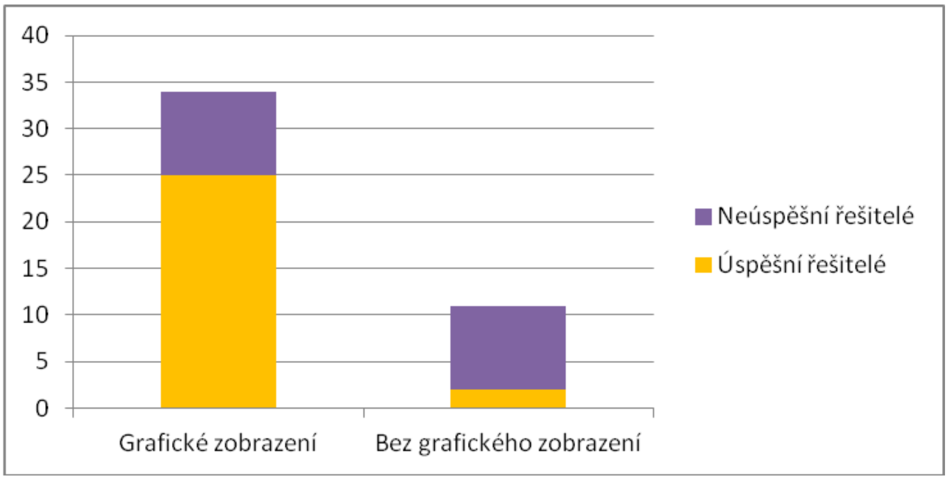


Obr. VT2 **Ukázka řešení 1. úlohy VT - výčet zápasů**

Oproti tomu 24,4% (tj. 11) žáků řešilo úlohu bez jakéhokoliv grafického zachycení. Správného výsledku dosáhli dva z nich. Sedm žáků doprovází své grafické řešení úlohy příkladem: 4 + 3 + 2 + 1 = 10. Nevědomky tak používají a chápou kombinatorické pravidlo součtu (viz obr. VT3).

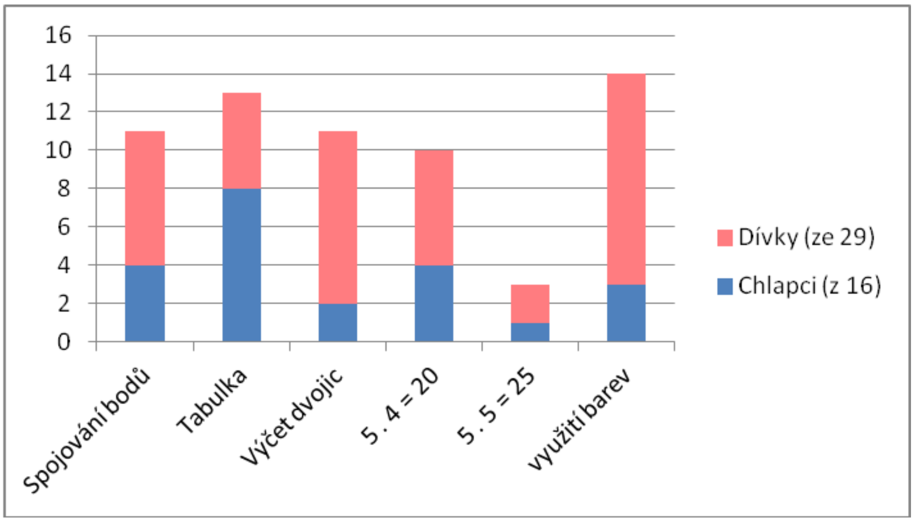
Obr. VT3 **Ukázka: kombinatorické pravidlo součtu**

Úspěšnost řešení v závislosti na využití řešitelských strategií zachycuje graf VT1 (***podporuje H4***):



Graf VT1 Vliv grafického zobrazení informací na úspěšnost řešení

V grafu VT2 jsou zachyceny využité řešitelské strategie v celkovém kontextu všech žáků:

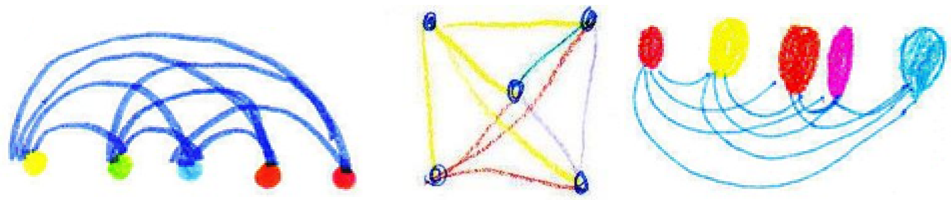


Graf VT2 Metody řešení 1. úlohy vstupního testu

Řešitelské strategie žáků v obou třídách se obecně liší.

Vyhodnocení výsledků třídy 5.A

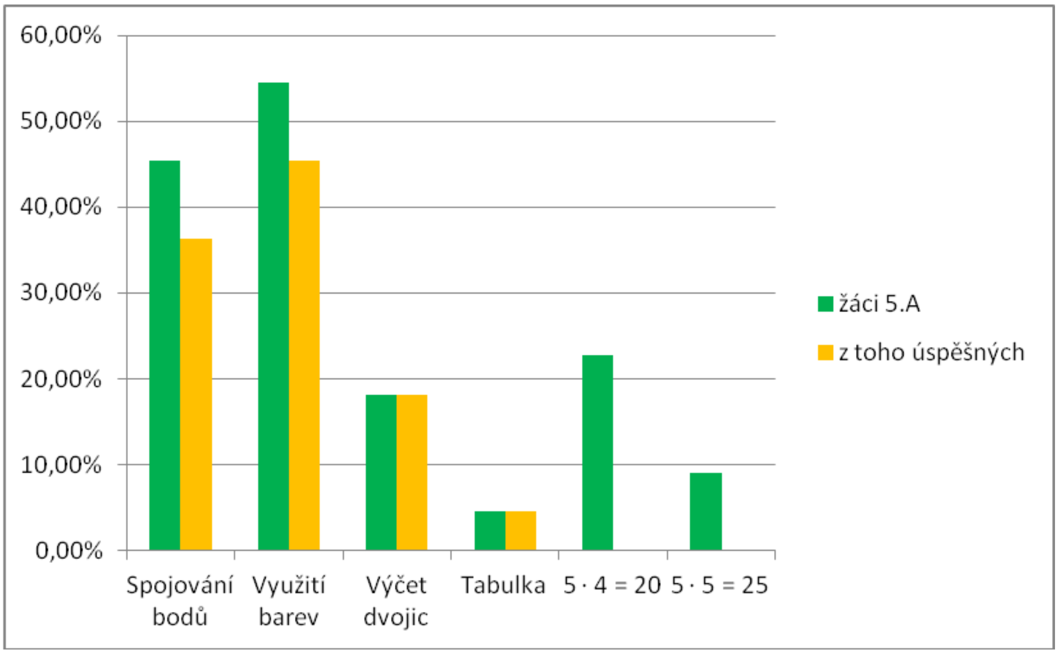
Ve třídě 5.A se nejčastější metodou stalo spojování bodů, využilo ji 45,4% žáků (tj. 10 z 22). Správného řešení dosáhlo 8 z nich. Mezi těmito osmi úspěšnými řešiteli bylo 7 žáků, kteří pro přehlednost využili barev (viz obr. VT4).



Obr. VT4 Ukázka řešení 1. úlohy VT v 5.A - spojování bodů

Pozn. *Volbu řešit úlohu pomocí spojování bodů ovlivnila bezpochyby předchozí zkušenost z hodin matematiky. Paní učitelka přiznala, že náročnější úlohy často žákům ilustruje na tabuli právě tímto způsobem* ***(potvrzuje H1)****.*

Celkově ve třídě 5.A použilo při řešení první úlohy vstupního testu barevné pastelky nebo fixy 54,5% žáků (tj. 12 – tři chlapci a devět dívek), bez ohledu na zvolenou metodu. Z těchto 12 žáků dosáhlo správného výsledku 10. Další metodou byl výčet dvojic, využilo jej 18,2% žáků 5.A (tj. 4). Všichni tito žáci dosáhli správného výsledku. Jediný řešitel využil úspěšně metodu tabulky. 31,8% (tj. 7) žáků 5.A řešilo úlohu využitím matematického příkladu, ovšem všichni neúspěšně. 22,7% žáků 5.A (tj. 5 – jeden chlapec a 4 dívky) využilo pro řešení úlohy nesprávného příkladu: $5 \cdot 4 = 20$. Tito žáci si neuvědomili fakt, že dva týmy hrají navzájem jen jednou. Dvě děvčata z 5.A řešila úlohu jiným nesprávným příkladem: $5 \cdot 5 = 20$. Toto řešení opomíjí fakt, že jeden tým hraje zápasy pouze se zbývajícími čtyřmi (nikoliv 5) týmy. Kombinatorické pravidlo součtu (tedy příklad: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$) se objevilo v řešení pěti žáků. Úspěšnost žáků 5.A v závislosti na použité strategii je zachycena v grafu VT3.

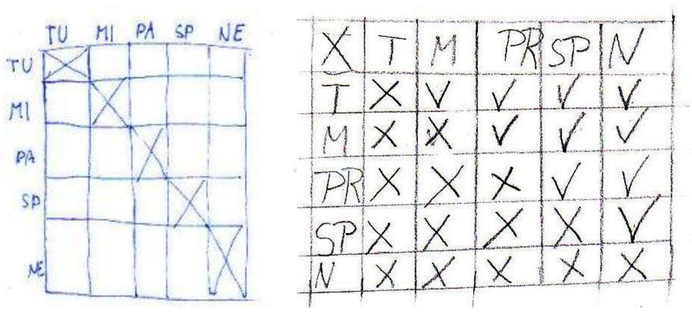


Graf VT3 **Metody řešení 1. úlohy vstupního testu - třída 5.A**

Vyhodnocení výsledků třídy 5.B

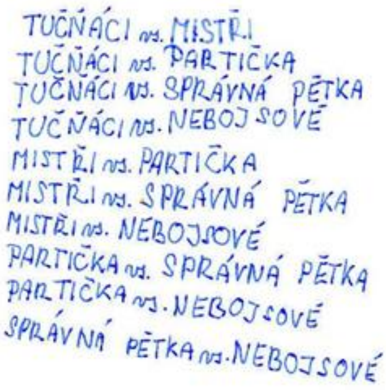
Ve třídě 5.B převládala metoda řešení tabulkou (viz obr VT5). Využilo ji 12 z 23 (tj. 52,2%) žáků, z nichž jen 6 bylo úspěšných.

Pozn. *Na volbu žáků řešit úlohu pomocí tabulky měl zřejmě velký vliv pan učitel, který si neodpustil komentář: „Přeci všichni víme, jak se zapisují sportovní turnaje".*



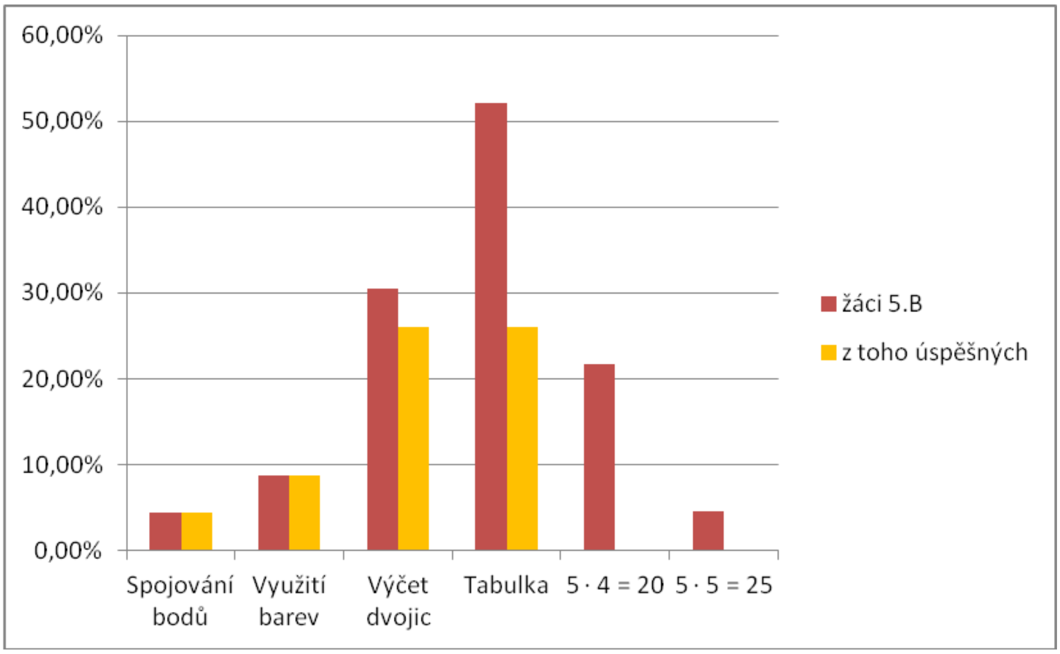
Obr. VT5 **Ukázka řešení 1. úlohy VT v 5.B - tabulka**

Druhou nejčastější metodou v 5.B byl výčet dvojic (viz obr VT6). Úlohu takto řešilo 7 žáků – jeden chlapec a šest dívek (tj. 30,4 %). Jedna žákyně zapomněla zaznamenat jeden odehraný zápas a nedosáhla tedy správného výsledku, ostatní žáci byli při výčtu dvojic úspěšní.



Obr. VT6 Ukázka řešení 1. úlohy VT v 5.B - výčet zápasů

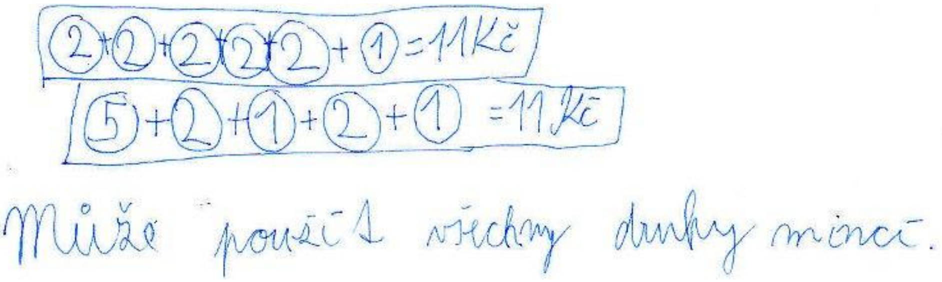
Jediná žákyně 5.B řešila úlohu úspěšně spojováním bodů. Barevných pastelek či fixů využily v 5.B pouze dvě dívky, u kterých (jako jediných ve třídě) je zachyceno také kombinatorické pravidlo součtu. Šest žáků (26,1%) řešilo první úlohu vstupního testu pomocí příkladu, ovšem všichni neúspěšně. Z těchto šesti zvolil jediný žák příklad $5 \cdot 5 = 25$, ostatní počítali $5 \cdot 4 = 20$. Úspěšnost řešení v závislosti na využité metodě řešení je zachycena v grafu VT4.



Graf VT4 Metody řešení 1. úlohy vstupního testu - třída 5.B

2. *Maruška má zaplatit 11 Kč. Jak může složit přesnou částku, když má v kapse PĚTIKORUNY, DVOUKORUNY a KORUNY? Může použít všechny druhy mincí, nebo jen některé.*

Při vyhodnocování druhé úlohy vstupního testu jsem se kromě metod řešení a grafického znázornění zaměřila také na (ne)pozornost žáků při čtení zadání a porozumění textu. Celkem 28,9% (tj. 13 ze 45) žáků neodpovídalo na to, na co byli dotazováni. Za otázku tito žáci považovali dodatek v zadání, že Maruška může použít všechny druhy mincí, nebo jen některé. Jejich odpověď tedy pak obvykle zněla: *„Může použít všechny druhy mincí“* (viz obr. VT7).

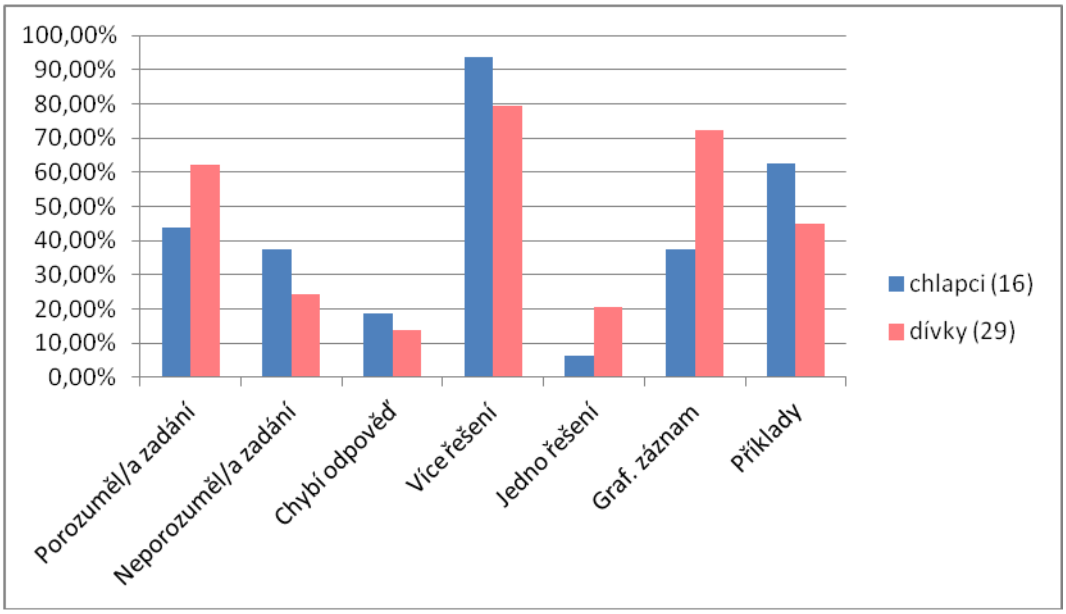


Obr. VT7 Ukázka - neporozumění 2. úloze VT v 5.A

Pozn. *K této skutečnosti docházelo častěji ve třídě 5.A, kde jsem záměrně žákům kromě zadání nesdělila k úloze nic navíc. Chtěla jsem tím ověřit, jak porozumění textu a pozornost žáků ovlivňuje úspěšnost řešení a řešitelské strategie, a získat tak cenné informace pro ověření hypotézy **H2a**. Neupozornila jsem žáky na to, že je více způsobů řešení a nechala jsem je, aby si sami poradili se zadáním. Naopak ve třídě 5.B jsem zdůraznila, na co se žáků vlastně ptám. Napomohla jsem jim tak porozumět zadání úlohy a předpokládala jsem, že tím pozitivně ovlivním úspěšnost řešení. Když pak žáci 5.B začali s hledáním možností, tak jsem se dotázala, zda neexistují další způsoby, jak částku zaplatit. Ve třídě 5.B tedy žáci našli dle očekávání průměrně mnohem více různých možností řešení.*

Všech 11 možností, jak může Maruška zaplatit částku 11 Kč, nenašel žádný ze žáků. Všichni žáci pátých tříd našli průměrně více než 5 možností, jak zaplatit částku 11 Kč. O trochu více se tentokrát dařilo chlapcům, našli v průměru 5 až 6 způsobů. Děvčata našla průměrně 5 způsobů řešení. Významnější srovnání ovšem vyplývá z výsledku tříd 5.A a 5.B.

Zvolené řešitelské strategie druhé úlohy vstupního testu v závislosti na pohlaví zobrazuje graf VT5.

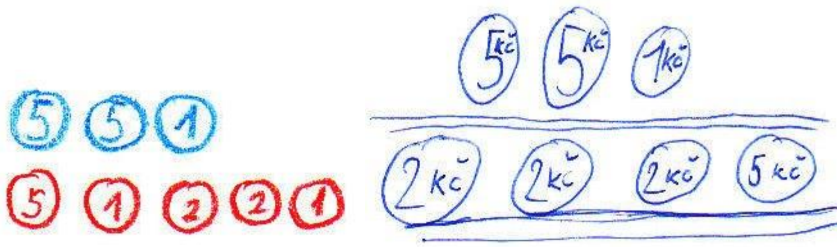


Graf VT5 Řešitelské strategie 2. úlohy vstupního testu

Vyhodnocení výsledků třídy 5.A

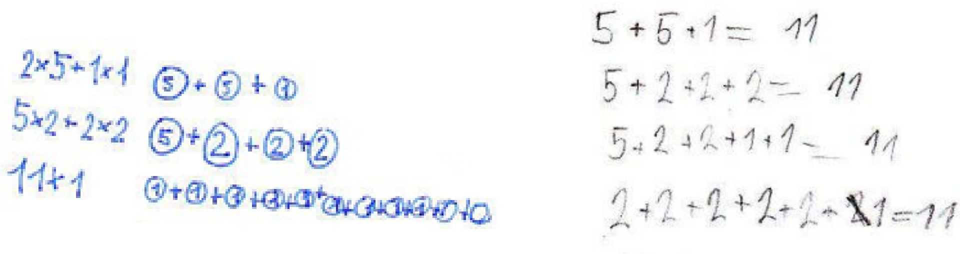
Jak už jsem zmínila, žáci 5.A nedostali ke druhé úloze kromě zadání žádné další pokyny. Všichni žáci 5.A našli průměrně pouze 3 způsoby, jak mohla Maruška zaplatit částku 11 Kč. Chlapci nalezli průměrně více než 3 možnosti, dívky pak méně než 3 možnosti. Dva žáci nalezli 6 možností, což představovalo maximum této třídy. 45,5% žáků (tj. 10 z 22) si přečetlo zadání úlohy nepozorně (či správně neporozuměli zadání). Odpovídali pak na dodatek *(Může použít všechny druhy mincí, nebo jen některé.),* jako by byl psán formou otázky. Sedm z těchto žáků však znázornilo graficky alespoň dvě možnosti řešení (průměrně 3,29). Zbylých 31,8% žáků 5.A (tj. 7) pochopilo, na co se jich v zadání ptám. Neznamená to však, že by všichni tito žáci hledali různé způsoby, jak může Maruška zaplatit částku. Tři z nich se spokojili s jedinou možností. (Celkově se ve třídě 5.A spokojilo s jediným řešením 7 žáků – 1 chlapec a 6 dívek (odpovídá 31,8% třídy). Dvě a více možností našlo 68,2% žáků 5.A (tj. 15 z 22), bez ohledu na to, zda porozuměli zadání úlohy.

Kromě jediného žáka (tedy 95,5%) zachytili všichni úlohu graficky, a to kreslením mincí (viz obr. VT8).



Obr. VT8 **Ukázky řešení 2. úlohy VT v 5.A - kreslení mincí**

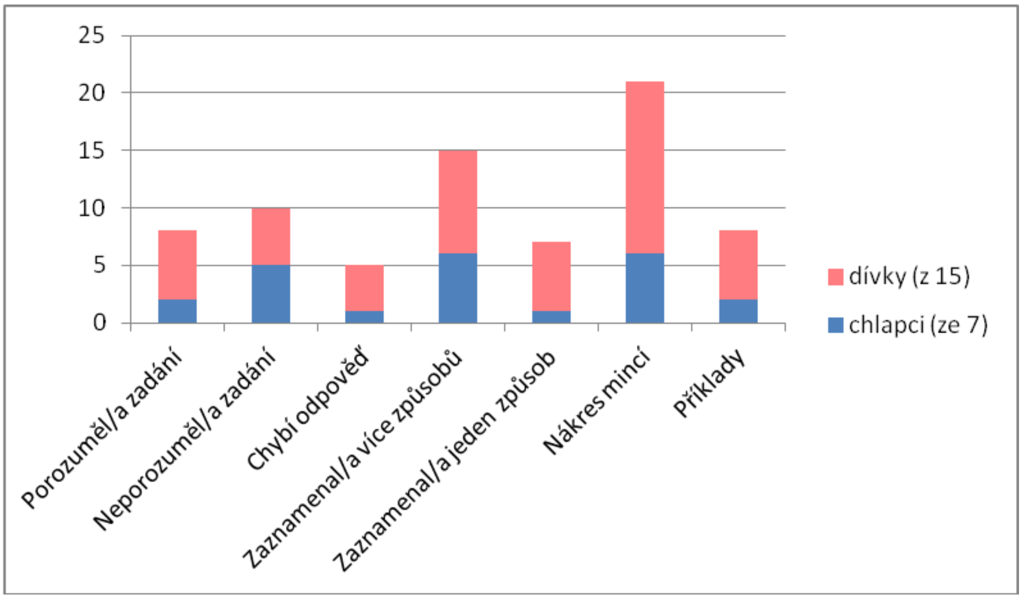
Druhá ukázka grafického řešení na obr. VT8 ukazuje žákovu snahu o zobrazení reálné situace. Kromě hodnoty mince přidal i popis Kč. 8 žáků 5.A (odpovídá 36,4%), využilo kromě kreslení mincí také vypisování příkladů (viz obr. VT9). Barvy v této úloze nehrály rozhodující roli – využily jich 4 žákyně, dvě z nich pochopily zadání, další dvě nikoliv. 5 žáků 5.A (představuje 22,7%) vůbec neodpovědělo na otázku, ačkoliv graficky znázornili několik způsobů řešení.



Obr. VT9 **Ukázka řešení 2. úlohy VT v 5.A - vypisování příkladů**

.

Celkové řešitelské strategie třídy 5.A ve druhé úloze vstupního testu z hlediska pohlaví zachycuje graf VT6.



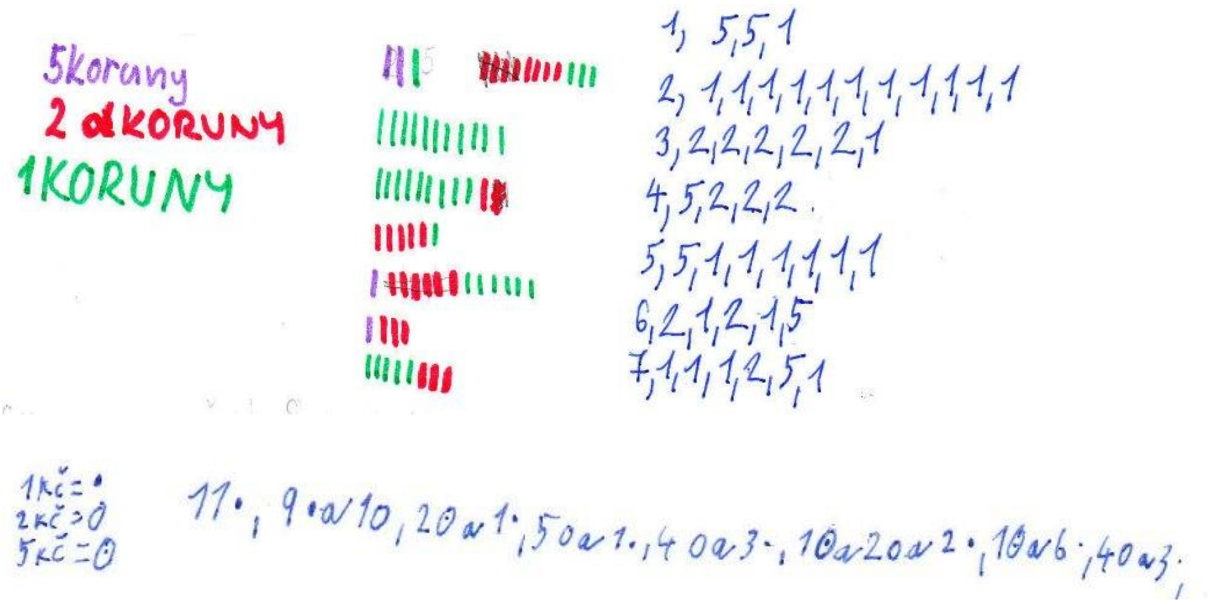
Graf VT6 Řešitelské strategie 2. úlohy vstupního testu - třída 5.A

Vyhodnocení výsledků třídy 5.B

Pozn. *Ve třídě 5.B jsem upozornila žáky na to, aby si uvědomili, na co mají odpovědět. Sledovala jsem pak, zda to vede k lepšímu porozumění zadání. Když začali žáci hledat první možnosti, jak lze složit částku 11 Kč, zeptala jsem se úmyslně jedné žákyně, zda to nejde i jiným způsobem. Poté jsem procházela třídu a sledovala, jak to ovlivní počet řešení u ostatních žáků.*

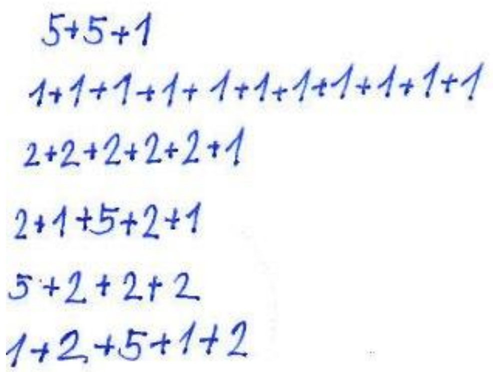
Výsledky jsou následující: pouze 3 žáci (tj. 12,5%) odpovídali na dodatek („*Může použít všechny druhy mincí*.“). 18 žáků 5.B (představuje 75%) odpovídalo formou: „*Maruška může zaplatit částku x způsoby.“* Oproti 5.A (průměrně 3 řešení na žáka) našli žáci 5.B průměrně více než 7 možností řešení. Chlapci našli průměrně 7 – 8 možností, dívky 7 možností řešení.

Je zřejmá souvislost mezi počtem nalezených řešení a způsobem grafického zaznamenání. Zatímco téměř všichni žáci 5.A své (průměrně 3) možnosti znázorňovali kreslením mincí, žáci 5.B své záznamy zjednodušovali. Mince zakreslovala pouze jediná žákyně (nalezla 6 možností). Dalších 6 žáků (představuje 25% třídy) využilo pro vyjádření mincí značky, čárky či vypisování čísel s hodnotou mince. Lze to považovat za náznak jistého kódování záznamu (viz obr VT10).



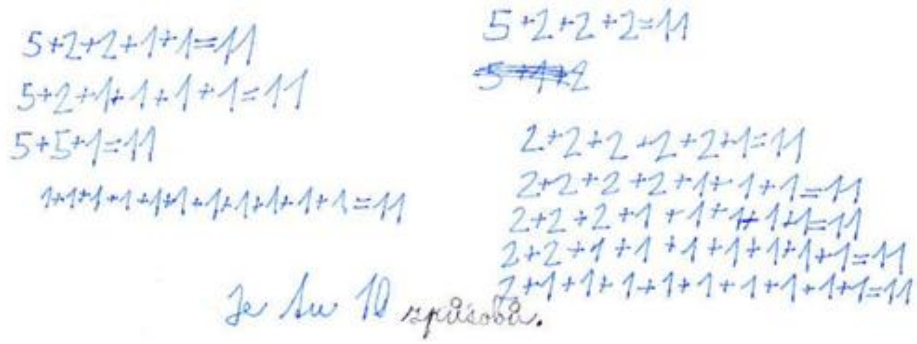
Obr. VT10 **Ukázka řešení 2. úlohy VT v 5.B – zjednodušování grafického záznamu**

Zbývajících 15 (62,5%) žáků hledalo různé možnosti řešení pouze vypisováním příkladů (viz obr. VT11). Pouze dvě žákyně využili při řešení barev.



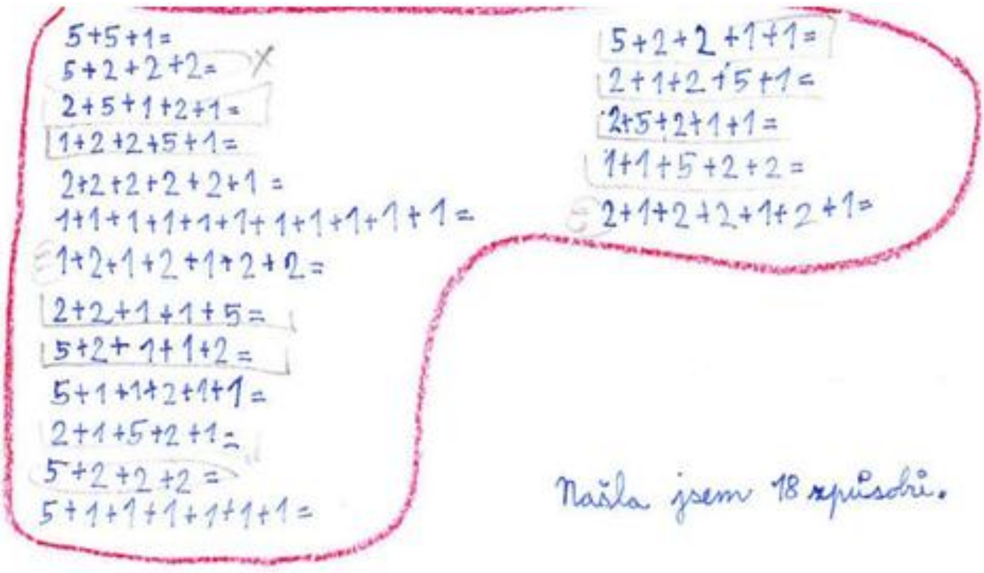
Obr. VT11 **Ukázka řešitelských strategií 2. úlohy VT v 5.B – výpis příkladů**

U žáků 5.B lze u 9 (39,13%) objevit systematičnost postupu (či alespoň náznak systematičnosti), která ovlivnila pozitivně úspěšnost řešení (***částečně podporuje H3***).



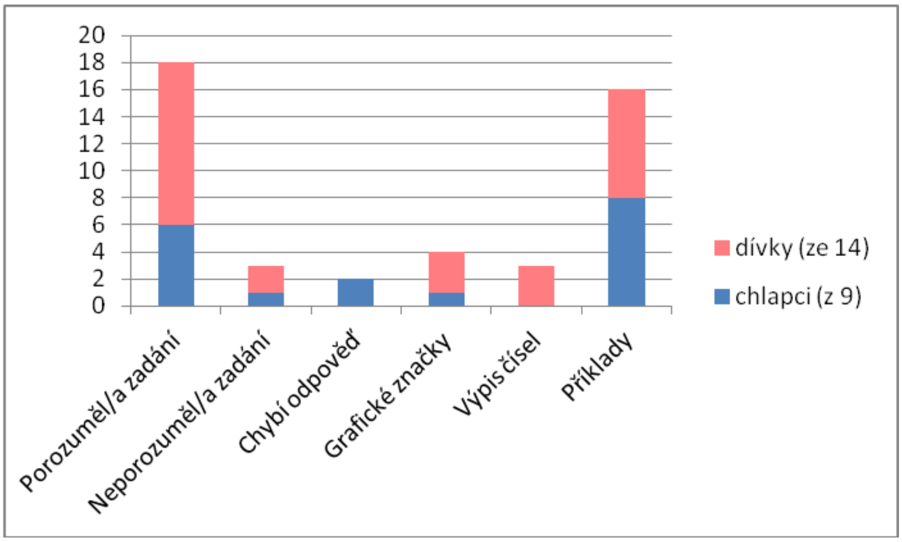
Obr. VT12 **Systematičnost při řešení 2. úlohy VT v 5.B**

Vyšší počet nalezených řešení je ale spojen také s negativním projevem opakování některých způsobů sestavení dané částky. U 7 žáků 5.B se opakoval alespoň jeden způsob složení částky. Někdy došlo k opakování přesného znění dané možnosti (např. 5, 5, 1 a poté opět 5, 5, 1), jindy bylo přeházeno pořadí prvků (např. 5, 5, 1 a poté 1, 5, 5). Žáci prvky nepřehazovali u všech nalezených možností, ale většinou jen u jedné či dvou. Tyto obměněné možnosti řešení byly také obvykle daleko od sebe (tedy nenásledoval jeden za druhým). Předpokládám tedy, že to nebylo úmyslem, ale spíše chybou z nepozornosti. Pouze u jedné žákyně mohlo jít o záměr, neboť nalezla 8 možností, jak sestavit částku 11 Kč a poté přehazovala jednotlivé mince, až došla k počtu 18 možných řešení (jediná dvě z nich se shodovala i v pořadí prvků, zde šlo patrně o nepozornost). Viz obr. VT13.



Obr. VT13 **Ukázka řešení 2. úlohy VT v 5.B - opakování možností s různým pořadím prvků**

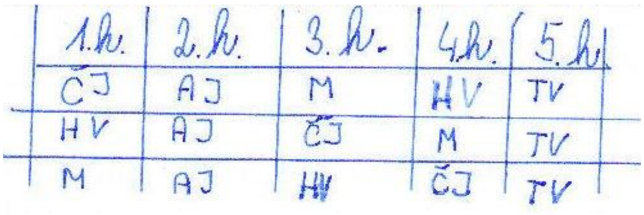
V grafu VT7 jsou zachyceny využité řešitelské strategie třídy 5.B s ohledem na pohlaví žáků.



Graf VT7 Řešitelské strategie 2. úlohy vstupního testu – třída 5.B

3. *Paní učitelka připravuje rozvrh na pondělí. Žáci budou mít tyto předměty: ČESKÝ JAZYK, MATEMATIKU, TĚLESNOU VÝCHOVU, ANGLICKÝ JAZYK a HUDEBNÍ VÝCHOVU. Pan ředitel rozhodl, že ANGLICKÝ JAZYK musí být druhou hodinu a TĚLESNÁ VÝCHOVA pátou hodinu. Kolik různých rozvrhů na pondělí může paní učitelka sestavit?*

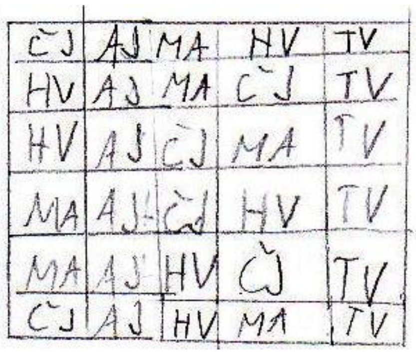
Třetí úlohu vstupního testu řešila úspěšně jedna třetina (tj. 15) žáků pátých tříd. V porovnání tříd se více dařilo žákům 5.B, úspěšných bylo 39,1%. Ve třídě 5.A dosáhlo správného výsledku 27,3% žáků. Z hlediska pohlaví byli úspěšnější chlapci. Správně jich odpovědělo 7 z celkových 16 (představuje 43,75%). Úspěšných děvčat bylo celkově 8 z 29 (odpovídá 27,59%). 16 žáků (představuje 35,56% z 45), tedy více než třetina z celkového počtu dospěla k nejčastější chybné odpovědi: „*Paní učitelka může sestavit tři rozvrhy.*“ Těchto 16 žáků sice doplnilo tři předměty do třech volných polí, ovšem neuvědomilo si, že dva předměty lze vždy prohodit mezi sebou (viz obr. VT14).



Obr. VT14 **Ukázka nejčastějšího chybného řešení 3. úlohy VT**

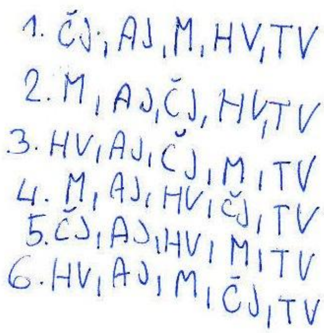
Pět žáků (11,11%) odpovědělo chybně, že sestavených rozvrhů mohlo být 5. Tři žáci (6,67%) vlivem nepozornosti zopakovali jeden rozvrh dvakrát a uvedli, že různých rozvrhů může být 7. Zbývající jednotlivci uvedli odpovědi: 9, 25, 27, své výsledky ovšem nezdůvodnili grafickým znázorněním.

Nejčastější metodou se stalo zobrazení rozvrhu tabulkou (viz obr. VT15). Využilo ji 68,89% (tj. 31) žáků.



Obr. VT15 **Ukázka řešení 3. úlohy VT – tabulka**

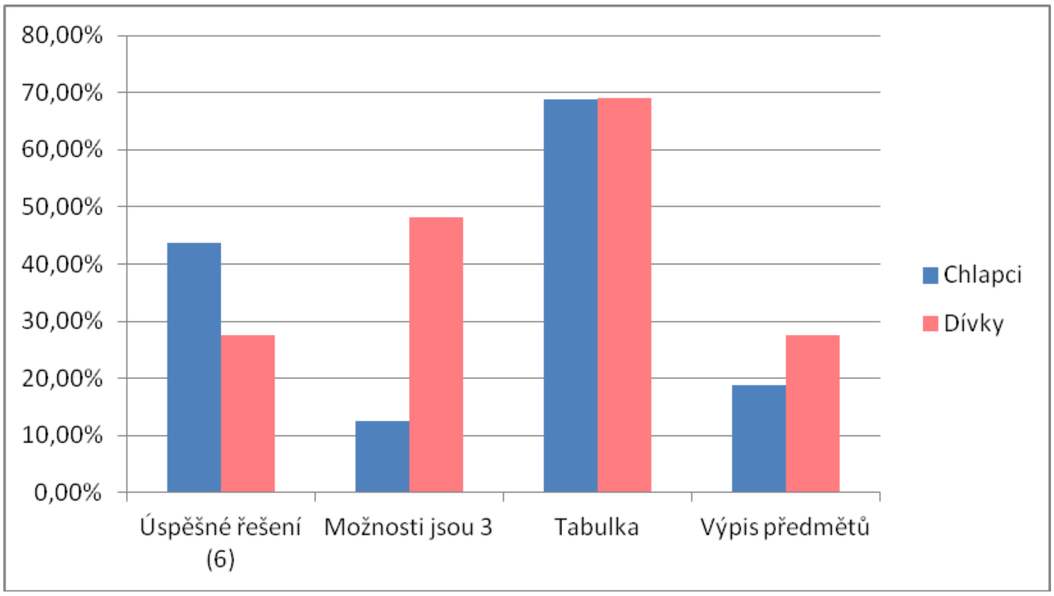
11 žáků (odpovídá 24,44%) využilo pro řešení úlohy vypisování různého uspořádání předmětů (viz obr. VT16).



Obr. VT16 **Ukázka řešení 3. úlohy VT - výpis předmětů**

Barvami si při řešení pomohli pouze 4 žáci 5.A (ovšem 2 z nich odpověděli, že různé rozvrhy jsou 3).

Graf VT8 ukazuje, jak správná volba řešitelské strategie (v tomto případě zápis do tabulky, resp. tabulkové schéma) pozitivně ovlivňuje úspěšnost řešení.

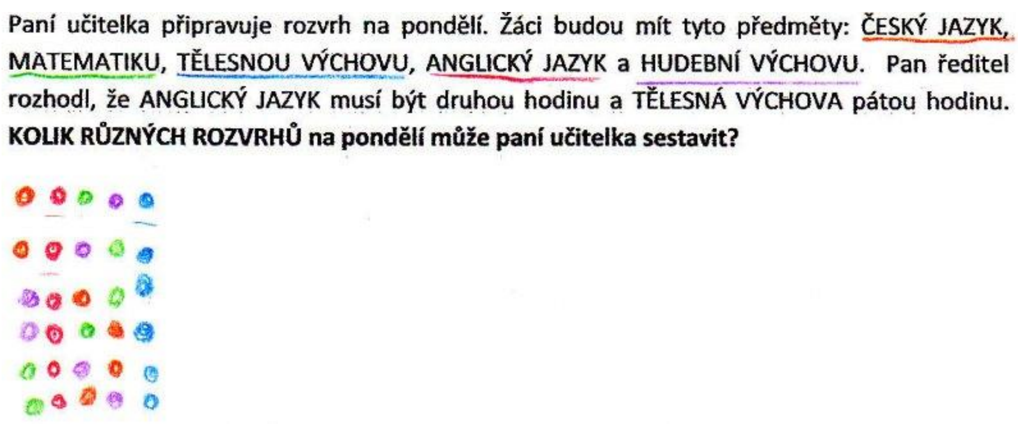


Graf VT8 Řešitelské strategie a úspěšnost řešení 3. úlohy vstupního testu

Vyhodnocení výsledků třídy 5.A

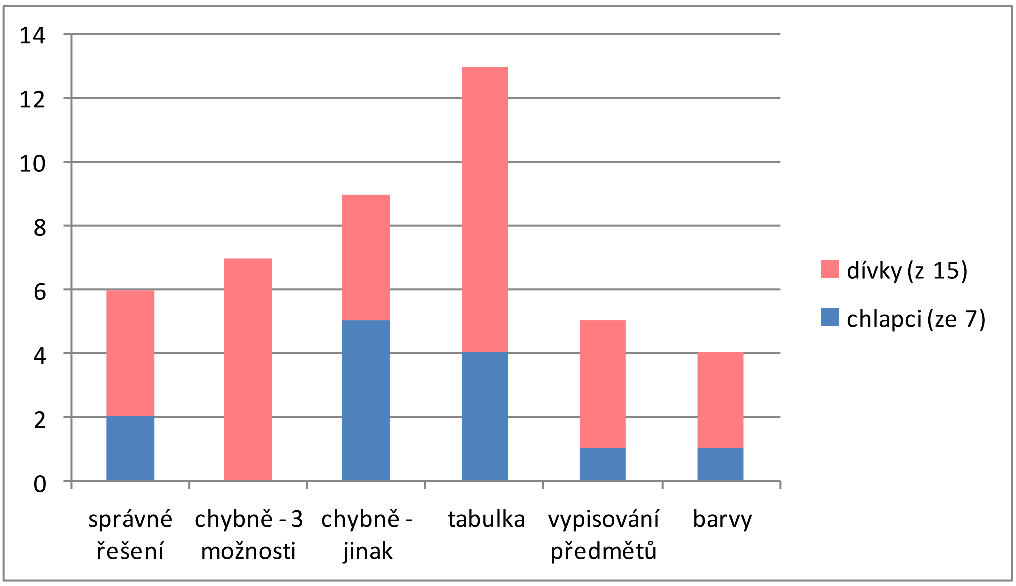
Ve třídě 5.A řešilo třetí úlohu vstupního testu úspěšně 6 žáků (2 chlapci a 4 dívky) z 22, což představuje 27,27% třídy. Neúspěšnými řešiteli se stalo 5 chlapců a 11 dívek (72,73% třídy). 7 dívek (46,67%) odpovědělo špatně, že možné rozvrhy jsou 3. Dvě dívky zopakovaly jednu možnost dvakrát a našly tedy 7 možností. Další neúspěšná dívka naopak na jedno řešení zapomněla. Jedna z dívek neporozuměla zadání úlohy. Její odpověď zněla: *„Paní učitelka může sestavit 5 hodin.“* Neúspěšní chlapci (5 ze 7) našli každý jiné řešení. První chlapec jednu možnost zapomněl, druhý zopakoval dva stejné rozvrhy. Třetí chlapec řešil úlohu úvahou, že do tří okének může prostřídat 3 předměty a ještě je prohodit. Svou úvahu vyjádřil chybně matematickým příkladem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Další chlapec použil příklad $3 \cdot 3 = 9$. Pátý neúspěšný chlapec odpověděl, že možných rozvrhů je 25. Tři poslední zmiňovaní chlapci svá řešení nevyjádřili graficky.

Nejčastější metodou v 5.A se stala tabulka. Pro řešení třetí úlohy ji zvolilo celkem 13 žáků: 4 chlapci (57,14%) a 9 dívek (60%). Pět žáků (1 chlapec a 4 díky) vypisovalo předměty bez využití tabulky. Čtyři žáci (18,18% třídy 5.A) doprovodili svá řešení barvami, učinil tak 1 chlapec úspěšně, 1 dívka neúspěšně a 2 dívky neúspěšně. Obr. VT17 ukazuje na snahu žáka o dobrou komunikaci s učitelem a dobrou práci se vstupními informacemi prostřednictvím zvýrazňujících prvků (***podpoření H2, resp. H2a***).


Paní učitelka připravuje rozvrh na pondělí. Žáci budou mít tyto předměty: ČESKÝ JAZYK, MATEMATIKU, TĚLESNOU VÝCHOVU, ANGLICKÝ JAZYK a HUDEBNÍ VÝCHOVU. Pan ředitel rozhodl, že ANGLICKÝ JAZYK musí být druhou hodinu a TĚLESNÁ VÝCHOVA pátou hodinu. **KOLIK RŮZNÝCH ROZVRHŮ na pondělí může paní učitelka sestavit?**

Obr. VT17 Ukázka využití barev při řešení 3. úlohy VT

Úspěšnost řešení třetí úlohy VT ve třídě 5.A s ohledem na pohlaví v závislosti na využité řešitelské strategii je zachycena v grafu VT9.

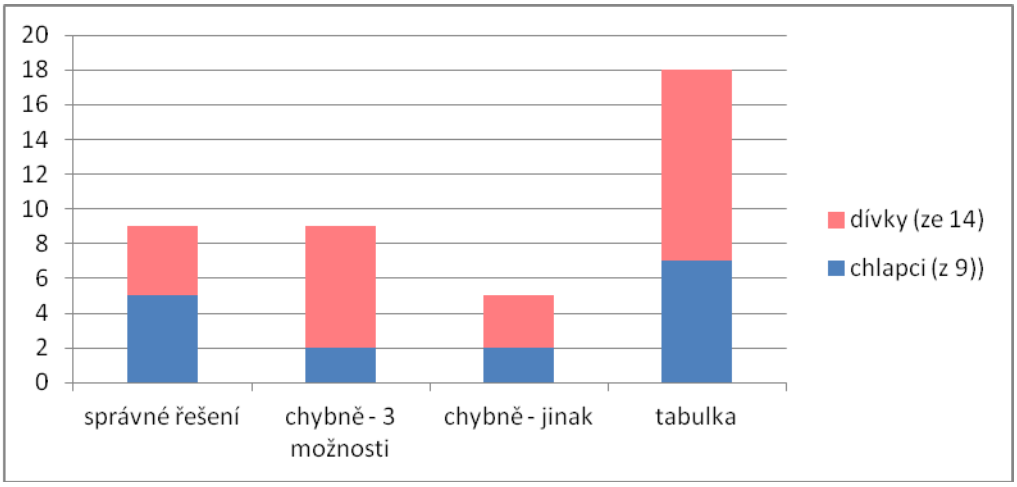


Graf VT9 Úspěšnost a metody řešení třetí úlohy - 5.A

Vyhodnocení výsledků třídy 5.B

Ve třídě 5.B řešilo třetí úlohu vstupního testu úspěšně 39,1% žáků (5 chlapců a 4 dívky). Nejčastější chybným řešením byly opět tři možné rozvrhy. Úlohu takto řešilo 50% dívek (7 ze 14) a 2 chlapci z celkových 9 (představuje 22,2%). Dvě dívky odpověděly, že možných rozvrhů je 5 (prohazovaly předměty bez systematičnosti a na jedno řešení tak zapomněly), stejně úlohu řešil také jeden chlapec (ten však nedodržel podmínku ze zadání, že Aj musí být 2. hodinu a TV 5. hodinu). Jeden z chlapců odpověděl, že možných rozvrhů je 9, ovšem v tabulce jich znázornil jen 5.

Tabulka byla ve třídě 5.B nejčastější metodou, volilo ji 18 žáků z 23 (tj. 78,3%). Z hlediska pohlaví tabulku využilo 77,8% (7 z 9) chlapců a 78,6% (11 z 14) dívek 5.B. Pomocí vypisování předmětů řešilo úlohu 6 žáků (2 chlapci a 4 dívky) 5.B, což odpovídá 26,1% . Barev k řešení nevyužil žádný žák (viz graf VT10).



Graf VT10 Úspěšnost a metody řešení třetí úlohy - 5.B

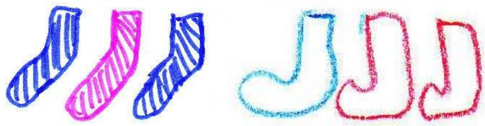
Bonusová úloha:

Šimon má v šuplíku MODRÉ a ČERVENÉ ponožky. NÁHODNĚ ze šuplíku vytáhl TŘI ponožky. Má Šimon jistotu, že drží v ruce PÁR STEJNÝCH PONOŽEK?

Pozn. *Tato úloha byla záměrně umístěna až na konec vstupního testu a označena jako bonusová. Má totiž pravděpodobnostní charakter, což je pro žáky něco nového. Při řešení si museli uvědomit hned několik věcí: že pár jsou dvě stejné ponožky, jaké ponožky mohl Šimon vytáhnout a poté, zda má jistotu, že drží pár.*

Žáci pátých tříd si s úlohou poradili nad očekávání úspěšně. 75,56% (tj. 34 z celkových 45) žáků odpovědělo správně: „*Ano, Šimon má jistotu, že v ruce drží pár stejných ponožek*.“ Z hlediska úspěšnosti tříd dopadla lépe 5.B. Správně odpovědělo 86,96% jejích žáků (tj. 20 z 23). Ve třídě 5.A se správná odpověď objevila u 63,63% žáků (tj. 14 z 22). Porovnám-li výkon chlapců a dívek, dopadli lépe chlapci. Správně jich odpovědělo 13 z celkových 16 (představuje 81,25%). Že má Šimon jistotu, odpovědělo celkem 21 z 29 dívek (tj. 72,41%). Odpověď ne zvolilo 6 žáků (tj. 13,33%). Tři žáci (tj. 6,67%) nedokázali rozhodnout, zda je odpověď *ano* či *ne*. Jejich odpovědi byly následující: „*Šimon mohl mít pár a nemusel. Je to 50 na 50. Nevím*.“ Dva žáci (4,44%) na úlohu vůbec neodpověděli.

Jedinou metodou při řešení této úlohy bylo kreslení obrázku (***vysoká úspěšnost správného řešení podporuje hypotézu H4***). Objevila se u 60% žáků (tj. 27 ze 45). Z hlediska pohlaví využívaly kresby více dívky: 20 z celkových 29 (představuje 68,97%). Chlapců kreslilo celkově 7 z 16 (tj. 43,75%). Žáci ke grafickému zobrazení úlohy přistupovali různě. Devět žáků (tedy jedna třetina z těch, co kreslili) nakreslilo jedinou kombinaci tří vytažených ponožek (viz obr. VT18).



Obr. VT18 Ukázka grafického řešení bonusové úlohy VT - jedna kombinace

Osm z nich dle tohoto obrázku usoudilo, že odpověď je ano. Devátý žák odpověděl: *„Ne, vytáhl dvě modré a jednu červenou ponožku.“*

Pozn. *Mohu se jen domnívat, proč tento žák odpověděl ne. Napadají mě tyto možnosti: 1. Žák nerozuměl zadání. 2. Žák nepochopil pojem pár. 3. Žák věděl, co je pár, a proto rozhodl, že tři vytažené ponožky nejsou pár (červená ponožka mu přebývala).*

Deset žáků (37% z těch, kteří kreslili) zakreslilo dvě možnosti vytažených ponožek (tedy dvě různé trojice). Dle svého nákresu všichni tito žáci usoudili, že Šimon má jistotu vytaženého páru (viz obr.VT19).

Obr. VT19 **Ukázka grafického řešení bonusové úlohy VT - dvě kombinace**

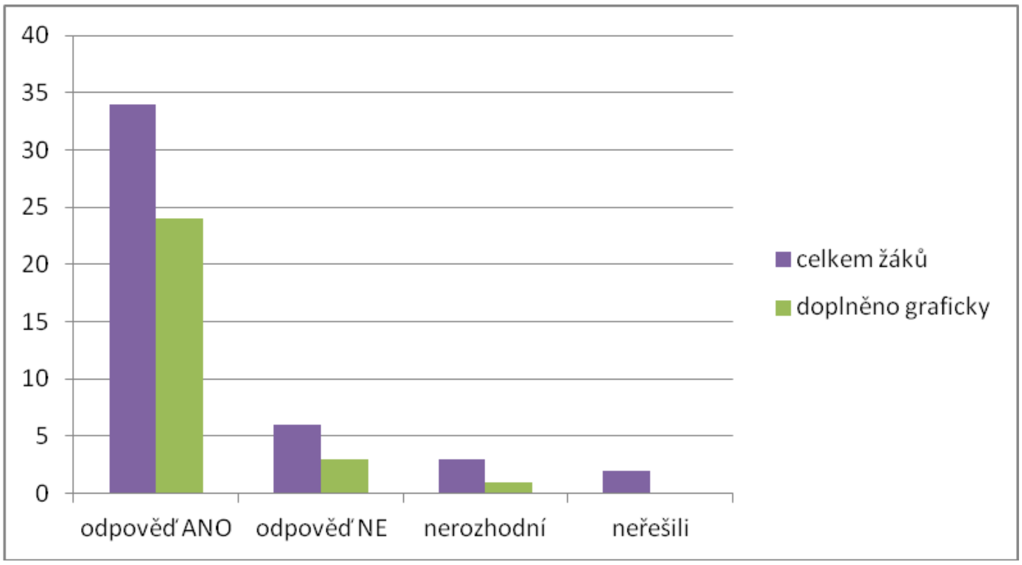
4 dívky (14,81% z těch, kteří kreslili) nakreslily všechny čtyři možnosti vytažených ponožek. Tři z nich dle obrázku usoudily, že Šimon má jistotu. Čtvrtou dívku obrázek nepřesvědčil a její odpověď zněla: *„Šimon mohl mít pár a nemusel.“* (viz obr. VT20).

Obr. VT20 **Ukázka grafického řešení bonusové úlohy VT - všechny kombinace**

Dva žáci zakreslili 4 ponožky (dva páry) a jejich odpovědi i pochopení úlohy byly podobné: *„Šimon vytáhl 3, ale jen 2 mohou být v páru.“ „Ne, nemá, jeden pár jsou dvě ponožky.“*

40% žáků (tj. 18 ze 45) nevyužilo kreslení obrázku. Úlohu tedy řešili úvahou. 11 z těchto žáků odpovědělo správně, že má Šimon jistotu vytaženého páru. 3 žáci, jež nevyužili nákresu, volili odpověď ne. Další dva žáci vůbec neodpověděli. U dvou zbývajících žáků byla odpověď nerozhodná: *„Nevím. Je to 50 na 50.“*

Celková úspěšnost řešení bonusové úlohy je zachycena v grafu VT11.



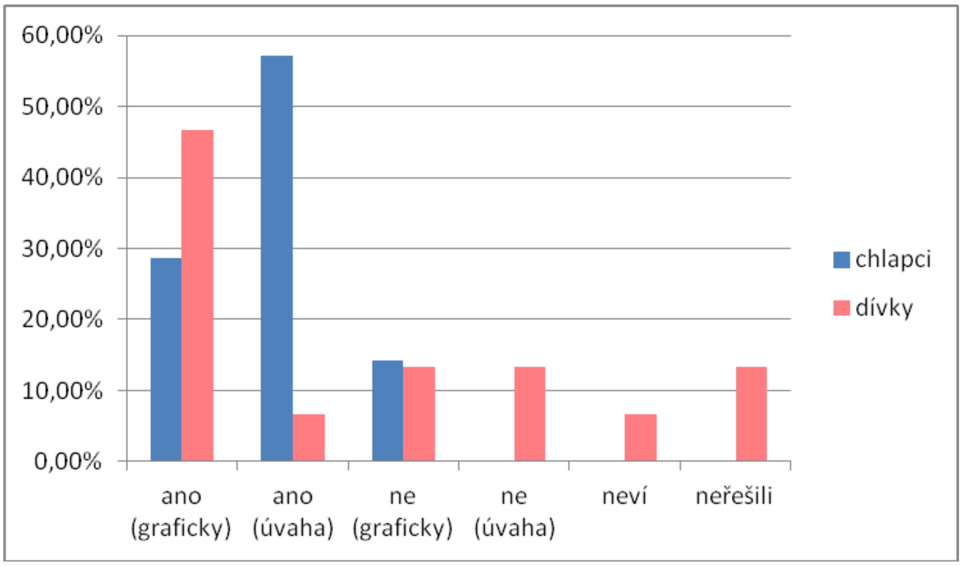
Graf VT11 **Úspěšnost řešení bonusové úlohy vstupního testu**

Vyhodnocení výsledků třídy 5.A

Má Šimon jistotu, že drží v ruce pár stejných ponožek? *„Ano, Šimon má jistotu, že drží pár ponožek."* Takovouto odpověď (či podobnou) správně zvolilo 14 žáků 5.A (tj. 63,64%). Dle pohlaví takto odpovědělo 85,71% chlapců (tj. 6 ze 7) a 53,33% dívek (tj. 8 z 15). Odpověď ne zvolilo 22,73% žáků 5.A (1 chlapec a 4 dívky). 54,44% (tj. 12) žáků řešilo úlohu pomocí obrázku. Tři z nich byli neúspěšní a opověděli *ne*.

Pozn. *Tito tři žáci odpovídají na otázku podobně: „Ne, nemá, jeden pár jsou dvě ponožky." „ Šimon vytáhl 3, ale jen 2 mohou být v páru." „Ne, vytáhl dvě modré a jednu červenou ponožku." Jde o možné pojetí úlohy: Šimon nemá v ruce pár, ale tři ponožky.*

Jeden žák odpověděl ne, aniž by své rozhodnutí nějak zdůvodnil. Tři žáci 5.A úlohu vůbec neřešili (viz graf VT12).

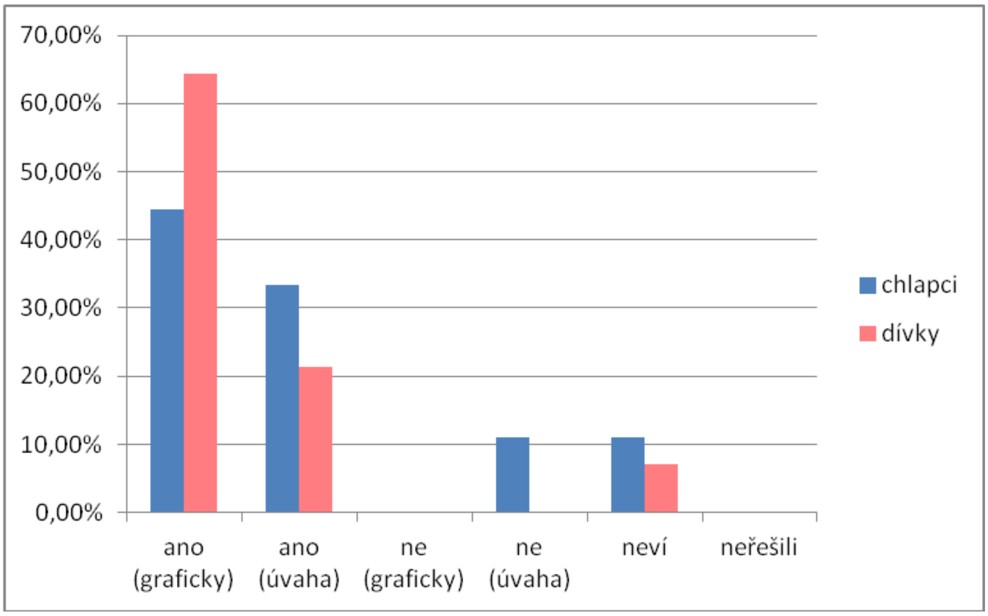


Graf VT12 **Úspěšnost řešení bonusové úlohy - 5.A**

Vyhodnocení výsledků třídy 5.B

Ve třídě 5.B zvolilo odpověď *ano* celkem 20 žáků z 23 (tj. 86,96%). Učinilo tak 77,78% chlapců (tj. 7 z 9) a 92,86% dívek (tj. 13 z 14) z 5.B. Odpověď *ne* zvolil jediný chlapec (z 9), který nevyužil grafického znázornění. Metodu obrázku ve třídě 5.B použilo celkem 44,4% chlapců (4 z 9) a 78,57% dívek (11 z 14). Šest žáků (3 chlapci a 3 dívky) odpovědělo správně pouze na základě úvahy, bez grafického zobrazení. Jeden chlapec, jenž nevyužil obrázku, opověděl: „*Je to 50 na 50*“. Jedna z dívek odpověděla také nerozhodně: „*Šimon mohl mít pár a nemusel*“. Těžko posuzovat, proč zvolila takovouto odpověď, patřila totiž mezi čtyři žákyně, které jako jediné zakreslily všechny možné vytažené trojice ponožek.

Úspěšnost řešení 5.B z hlediska pohlaví zachycuje graf VT13.



Graf VT13 Úspěšnost řešení bonusové úlohy - 5.B

Shrnutí výsledků vstupního testu

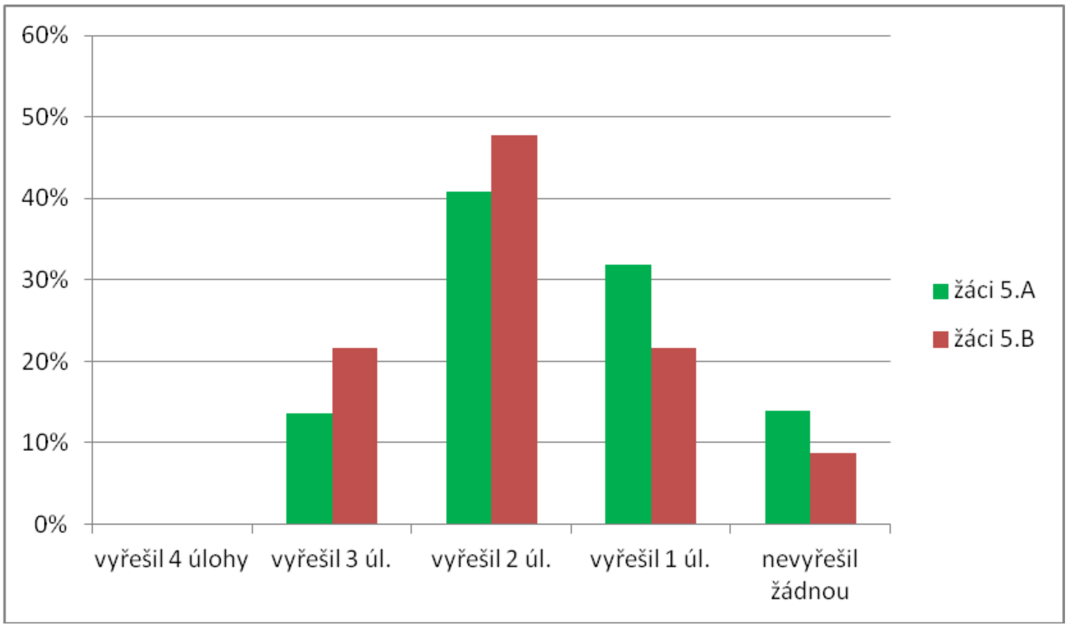
Žáci testovaných 5. tříd řešili vstupní test nad očekávání úspěšně. Úroveň a rozmanitost řešitelských strategií žáků při řešení kombinatorických úloh mě mile překvapila.

Celková úspěšnost jednotlivých žáků pátých tříd je uvedena v tabulce VT1:

Celková úspěšnost jednotlivců	žáci 5.A	žáci 5.B
Řešili úspěšně všechny 4 úlohy.	0	0
Řešili úspěšně 3 úlohy.	3	5
Řešili úspěšně 2 úlohy.	9	11
Řešili úspěšně 1 úlohu.	7	5
Nevyřešili úspěšně žádnou z úloh.	3	2

Tab. VT1 Úspěšnost jednotlivých žáků při řešení VT

Z tabulky je zřejmé, že úspěšnější při řešení vstupního testu byli žáci 5.B. Dokazuje to i následující graf VT14 s procentuálním vyjádřením situace:



Graf VT14 Celková úspěšnost jednotlivců při řešení VT

Při výpočtu aritmetického průměru tak vychází na jednoho žáka 5.A jedna až dvě úspěšně vyřešené úlohy (1,55). V případě žáků 5.B se jedná spíše o 2 vyřešené úlohy na jednoho žáka (1,83).

Vyhodnocením výsledků vstupního testu (*dále jen VT*) jsem dospěla k těmto poznatkům:

- Žákům k úspěšnému řešení kombinatorických úloh pomáhá grafické znázornění a využití barev *(viz. Vyhodnocení 1. úlohy VT – konkrétně graf Vliv grafického zobrazení informací na úspěšnost řešení; vyhodnocení bonusové úlohy VT)*. ***Podporuje to hypotézu H4.***
- Žáci ze třídy 5.B byli při řešení vstupního testu oproti třídě 5.A úspěšnější ve třech úlohách ze čtyř. Uvědomuji si však, že lepší výsledky 5.B při řešení druhé úlohy vstupního testu byly pravděpodobně výrazně ovlivněny mými pokyny při zadávání testu (*více viz vyhodnocení 2. úlohy VT*). Úspěšnost řešení tedy souvisí s utříděním vstupních informací (***podporuje H2a***).
- Osvojené řešitelské strategie se v testovaných třídách liší:
  - U žáků 5.A jednoznačně vítězí strategie využití barev *(je nejvíce zřejmá při vyhodnocení 1. a 3. úlohy VT)* a konkrétnějšího zobrazení informací ze zadání

úlohy – např. kreslí mince (*viz vyhodnocení 2. úlohy VT),* spojují body představující týmy *(viz vyhodnocení 1. úlohy VT),* atd. K těmto řešitelským strategiím jsou žáci vedeni v hodinách matematiky při řešení slovních úloh – mají s nimi tedy již zkušenosti (dle slov paní učitelky) – ***podporuje H1***.

- Žáci 5.B svá grafická řešení zjednodušují a jsou schopni utřídit informace ze zadání úlohy i bez kreslení konkrétních obrázků. Využívají hojněji řešení pomocí tabulky (*viz vyhodnocení 1. a 3. úlohy VT*), značek, výčtu možností *(viz vyhodnocení 1. a 3. úlohy VT)* a řešení pomocí matematických příkladů *(viz vyhodnocení 2. úlohy VT).* Vzhledem k tomuto zjednodušování grafického zaznamenání informací z úloh nalézají žáci 5.B více možností řešení a objevuje se u nich mnohem výrazněji systematičnost *(viz vyhodnocení 2. úlohy VT).*

- Již výsledky vstupního testu ukázaly, že systematický výpis všech možností ovlivňuje pozitivně úspěšnost řešení (*viz vyhodnocení 2. úlohy VT*). Systematické řešení úloh souvisí do velké míry s utříděním a zpracováním informací (***částečně podporuje H2a***)
- Z vyhodnocení vstupního testu (*zejména pak u 2. a 4. úlohy*) je zřejmé, že úspěšnost řešení kombinatorických úloh závisí velkou měrou na pozornosti při čtení zadání úlohy a na porozumění textu.

3.2.2 Procvičování

Jak už jsem se zmínila v úvodu praktické části, úlohy pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků jsem procvičovala se 24 žáky 5.B.

Pozn.: *Před zahájením experimentu jsem musela získat souhlas rodičů žáků pátých tříd s fotodokumentací činností (žádost viz Příloha 6).*

K dispozici jsem měla šest vyučovacích hodin, při kterých žáci 5.B řešili dvanáct kombinatorických problémů. Pro lepší orientaci jsem každý z nich pojmenovala; stejné názvy používám dále v dotazníku (viz kap. 3.2.4 Dotazník). U každého problému uvádím jedno z možných řešení, popisuji řešitelské strategie a přístupy žáků, zaznamenávám jejich dotazy a připomínky a dále odkazuji na přílohu *Soubor řešených úloh*. V něm jsou úlohy podrobněji rozpracovány z hlediska cílů, metod, pomůcek, řešitelských strategií a dalších námětů, jež vyplynuly právě z realizace.

- **1. hodina:**

DÁREK M + T: *Na Vánoce zůstal pod stromečkem ve čtyřčlenné rodině Novotných dárek s nápisem M + T.*

A) Pro koho dárek mohl být? Zkus vymyslet různé možnosti.

B) Komu by mohl dárek patřit, pokud by jej našla pod stromečkem tato pětičlenná rodina: táta Karel, máma Věra, syn Marek, dcera Tereza, dcera Adéla?

C) Pojmenuj členy jiné pětičlenné rodiny tak, aby bylo možností co nejvíce.

D) Pro koho by mohl být dárek ve vaší třídě?

Pro úvodní motivaci jsem do třídy přinesla dárek s popiskem M + T. Zeptala jsem se žáků, pro koho by mohl být ve čtyřčlenné rodině (viz bod A). Žáci odpovídali takto: „*Pro mámu a tátu*“. „*Pro nějaké děti od M a T.*“ „*Pro mámu a tetu.*“ „*Pro nějaká zvířata, třeba Micku a Tlapku.*“ Dále jsem vyzvala žáky, aby zkusili vymyslet konkrétní jména. Pro ilustraci uvádím odpovědi: „*Michal a Tereza*“, „*Markéta a Tomáš*“, „*Mirek a Tadeáš*“, „*Marek a Týna*“, apod.

Poté žáci ve dvojicích řešili další otázku (viz bod B**)** týkající se dárku. Každé dvojici jsem rozdala pracovní list (viz přílohy). Všichni žáci řešili úlohu vypisováním možných dvojic. Správné řešení jsem pro kontrolu zapsala na tabuli.

UKÁZKA ŘEŠENÍ: *výčet kombinací*

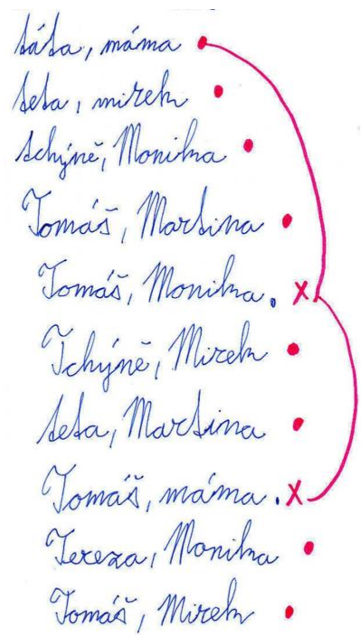
M + T odpovídá: **m**áma + **t**áta, **M**arek + **T**ereza, **m**áma + **T**ereza, **M**arek + **t**áta

Odp.: Dárkem mohly být obdarovány čtyři různé dvojice.

S úlohou neměli žáci větší problémy. U některých dvojic nebylo dodrženo pořadí jmen dle nápisu na dárku M + T, psali tedy například: táta + máma, Tereza + máma. Ve dvou případech vypsali žáci pouze jména členů rodiny od M či T, ale dále netvořili možné dvojice odpovídající zadání.

Následovalo řešení další otázky (viz bod C). Bylo zajímavé sledovat, jaká jména žáci přidělí členům rodiny (např. zda pojmenují mámu od M či od T) a i samotná volba členů rodiny byla překvapující. Projevila se tvořivost žáků. Objevilo se tak například mimino Tobiáš, teta Mahulena, tchýně Martina, tchán Mirek. Od zvolených členů rodiny a jmen se odvíjelo správné řešení.

Žáci velmi často opakovali dvojice, například tak, že mámu pojmenovali od M a tátu od T (či opačně) a poté vypsali obě dvojice (např. máma + táta, Markéta + Tomáš). Žáci, kteří mámě a tátovi nepřidělili jména, si tak výrazně ulehčili práci, ovšem nalezli méně dvojic (zpravidla šest). Dalším častým jevem bylo (stejně jako v předchozím bodě) nedodržení pořadí dvojic dle M + T. U některých žáků byla patrná snaha o lepší písemnou komunikaci, kdy nejprve vypsali členy rodiny a poté teprve vypisovali dvojice. Ostatní žáci začali rovnou vypisovat dvojice, což mi někdy neumožnilo přiřadit jména ke konkrétním členům rodiny. Většina žáků nevypsala vždy všechny možné dvojice. Nejvíce našli žáci osm dvojic z devíti možných, a to v následující rodině: **táta Tomáš, teta Tereza, tchýně Martina, tchán Mirek, máma Monika** (viz obr. RE1).



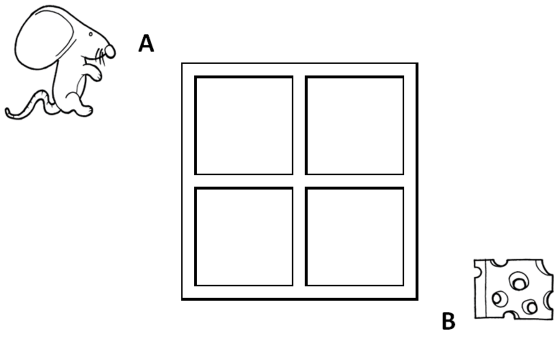
Obr. RE1 Ukázka žákovského řešení úlohy Dárek M+T

(více k úloze viz Soubor řešených úloh, str. 6)

MYŠ A SÝR: *Kolika způsoby se může dostat myška (z bodu A) chodbičkami ke kusu sýru (do bodu B)*

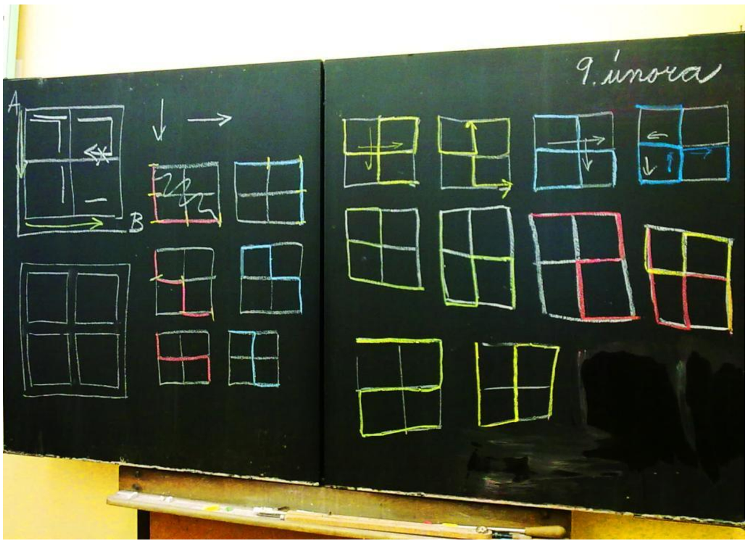
A) pokud může běžet jen dolů nebo doprava?

B) pokud může běžet jakkoli, ale nesmí proběhnout dvakrát stejnou uličku?



Úloha má charakter bludiště, žáci měli za úkol orientovat se ve čtvercové síti a najít možné cesty z levého horního rohu do pravého dolního rohu. Úlohu nejprve řešili všichni žáci samostatně. K dispozici měli kopii s deseti obrázky bludiště. (viz řešení) Dva chlapci zaznamenávali různé cesty propiskou, všichni ostatní využili barev. Bod A řešilo správně údajně 20 žáků z 24, všechny cesty ve druhém úkolu našli pouze tři chlapci a jedna dívka. Tito čtyři žáci jako jediní objevili dvojici dvou na první pohled stejných řešení, které však lze získat různými způsoby (viz poslední čtyři obrázky v řešení). Někteří žáci projevili při samostatném řešení nejistotu, ptali se, co mohou a co ne. Zaznamenala jsem tyto otázky: „ *Máme vyplnit jenom tu vrchní řadu?*“ (žák při řešení bodu A). „*Můžu kreslit víc možností do jednoho obrázku?*“ (žák na začátku samostatného řešení). „*Může ta myš projít dvakrát uprostřed?*“ (žákyně při objevení dalších možností – viz řešení, poslední čtyři obrázky).

Všechny možnosti otázky A (a poté i B) žáci zaznamenávali pro kontrolu na tabuli do připravených obrázků bludiště. Pro lepší orientaci jsem jim doporučila používat různě barevné křídy (viz obr. RE2).



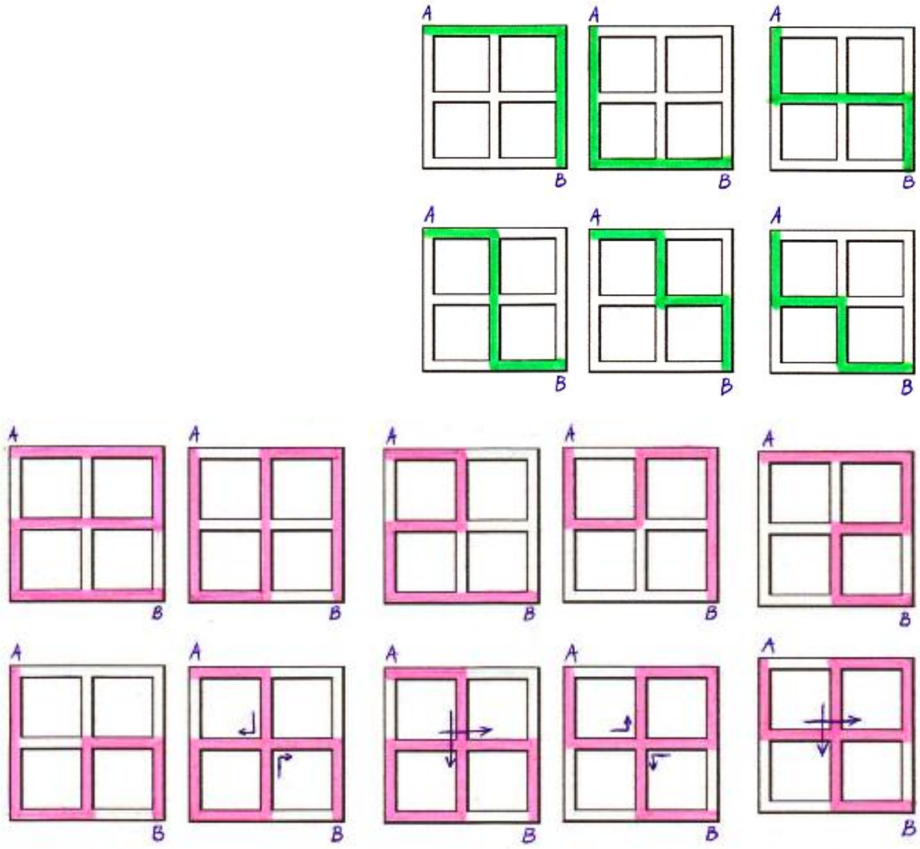
Obr. RE2 Kontrola řešení úlohy Myš a sýr

Odp.:

A) Existuje šest řešení, jak se lze dostat z bodu A do bodu B pouze směrem doprava a dolů.

B) Existuje celkem šestnáct řešení, jak se dostat z bodu A do bodu B, můžu-li jít jakýmkoliv směrem.

UKÁZKA ŘEŠENÍ:



Více k úloze lze nalézt v Souboru řešených úloh, s. 25.

- **2. hodina:**

CHLAPCI V KUPÉ: *Čtyři kamarádi, Adam, Bolek, Cyril a David se vydali na výlet. Jeli vlakem z Liberce do Českého ráje. Ve vlaku si našli volné kupé, kde bylo 6 míst, ale 2 místa byla již obsazená.*

A) Kolika možnými způsoby si chlapci mohli sednout?

B) Kolika způsoby by si chlapci mohli sednout, pokud by Bolek požadoval jedině místo u okna?

Nejprve jsem žákům rozdala natištěné pracovní listy s obrázky kupé a zeptala jsem se žáků, co by to mohlo být. Zazněly odpovědi: „*Bonboniéra*“, „*Pokoj*“,

„*Nějaká krabička*“, „*Byt s šesti pokoji*“. Odtud jsem žáky navedla ke správné odpovědi, tedy že jde o kupé ve vlaku. Ověřila jsem, zda žáci rozumí tomuto pojmu.

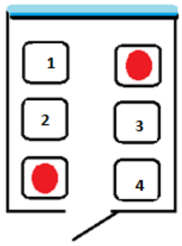
Po přečtení zadání úlohy jsem žáky nechala tipovat, kolik bude možností rozsazení chlapců. Objevily se tipy: 6, 8, 12, 30, 36. Poté jsme situaci společně zinscenovali. Před tabuli jsme umístili šest židliček. Náhodně jsem vybrala čtyři chlapce, kteří dostali na krk cedulky se jmény chlapců ze zadání (viz obr. RE3). Zeptala jsem se žáků, zda si chlapci můžou sednout kamkoliv. Žáci hromadně volali, že ne. Jedné z dívek jsem se tedy zeptala, kam si nemohou sednout. Odpověděla: „*Tam, jak jsou ty tečky.*“ Obrázek kupé jsem překreslila na tabuli pro větší názornost a na židle odpovídající místům s tečkami jsme umístili dvě dívky. Poté si chlapci začali sedat na volné židle. Zprvu si sedli náhodně. Zeptala jsem se žáků, jestli by nemohli sedět i jinak. Jednotliví žáci tedy experimentovali a různě přesazovali čtyři chlapce „v kupé“. Pro lepší názornost jsem situace zaznamenávala na tabuli. V této fázi řešení žáci přeskupovali chlapce na židlích náhodně bez využití systematičnosti.

Obr. RE3 Využití cedulek se jmény v úloze Chlapci v kupé

Abych žáky navedla na systematické řešení, poradila jsem jim, aby si k oknu v kupé přesadili Adama a poté hledali možnosti, kdy se přesazují pouze zbývající tři chlapci. Tyto možnosti už si žáci začali samostatně zaznamenávat do pracovního listu. Většina žáků pochopila, že v řádku je šest obrázků kupé a tedy, že možností, kdy je Adam u okna, bude šest. Dále už jsem sledovala, jak žáci pokračují s možnostmi, kdy je u okna postupně Bolek, Cyril i David.

Když žáci vyplnili všechna kupé, položila jsem jim otázku B (viz zadání úlohy). Pro žáky bylo již dle zaznamenaných situací jednoduché odpovědět, že možností je šest. Dále jsem žákům řekla, že ať střídáme tři chlapce na jakýchkoliv třech místech, pak bude výsledek stále stejný, tedy 6. Pan učitel k tomu doplnil, že takovému příkladu říkáme permutace.

UKÁZKA ŘEŠENÍ: *tabulkou*



1	2	3	4	I.
A	B	C	D	1.
A	B	D	C	2.
A	C	B	D	3.
A	C	D	B	4.
A	D	B	C	5.
A	D	C	B	6.

1	2	3	4	II.
B	A	C	D	7.
B	A	D	C	8.
B	C	A	D	9.
B	C	D	A	10.
B	D	A	C	11.
B	D	C	A	12.

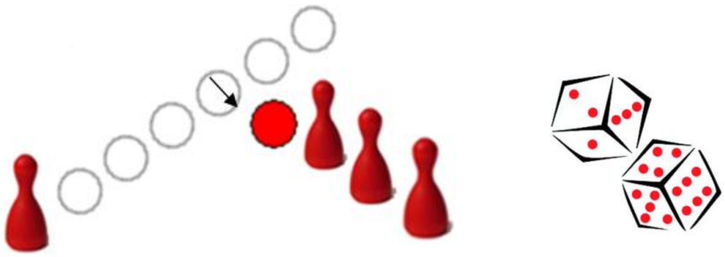
1	2	3	4	III.
C	A	B	D	13.
C	A	D	B	14.
C	B	A	D	15.
C	B	D	A	16.
C	D	A	B	17.
C	D	B	A	18.

1	2	3	4	IV.
D	A	B	C	19.
D	A	C	B	20.
D	B	A	C	21.
D	B	C	A	22.
D	C	A	B	23.
D	C	B	A	24.

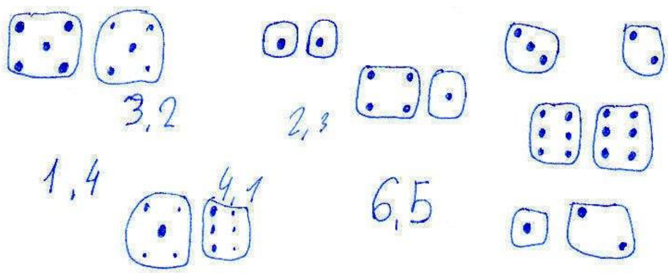
Odp.: Chlapci si v kupé mohou sednout 24 způsoby.

Více k úloze viz Soubor řešených úloh s. 16.

ČLOVĚČE, NEZLOB SE: *Klárka s Vojtou hrají hru Člověče, nezlob se. Vojtovi se moc nedaří, ale Klárčina poslední figurka je už jen 5 políček od domečku. Hodila tedy poprvé (to se ještě do domečku nedostala), pak hrál Vojta. Posledním hodem Klárka zvítězila – její figurka se dostala do domečku. Co padlo Klárce na kostkách během těchto dvou hodů? Zkus najít všechny možnosti.*



Žáci řešili úlohu ve dvojicích. Dostali lísteček s obrázkem situace. Nejprve jsem se jich zeptala, zda uhodnou, co je to za situaci, popřípadě za hru. Většina žáků se hlásila a správně odpověděli, že jde o Člověče, nezlob se. Až poté jsem jim přečetla zadání a mohli začít řešit. Každá dvojice dostala k dispozici jednu hrací kostku. Žáci přišli většinou velmi rychle na možnosti, kdy na kostce padlo: 1 + 4, 4 + 1, 2 + 3, 3 + 2. Když jsem jim řekla, že to ještě nejsou všechny možnosti, přišla přibližně polovina žáků na možnosti 6 + 5 a 5 + 6, z nichž druhá možnost je zbytečná (pokud hodí Klárka 5, tak zvítězí a již nepotřebuje dál házet). Žáci ještě přišli na jednu možnost: při prvním hodu spadne Klárce kostka na zem (tedy hod je neplatný), dále hází Vojta, poté Klárka hodí znovu a padne jí právě požadovaná 5. Většina žáků zapisovala možnosti pomocí příkladů. U dvou dívek se objevilo kreslení horní stěny kostky s číslem, které padlo (viz obr. RE4.



Obr. RE4 Ukázka žákovského řešení úlohy Člověče, nezlob se

Rychlým dvojicím jsem zadala další úkol: Zjistěte, kolik různých kombinací může padnout na dvou kostkách. Žáci většinou začali s vypisováním všech možných kombinací. Pouze u dvou chlapeckých dvojic jsem viděla řešení $6 \cdot 6 = 36$. Na tabuli jsem pak tento příklad zapsala a vysvětlila všem žákům, co nám vyjadřují dvě šestky (jde o šest možností na každé kostce).

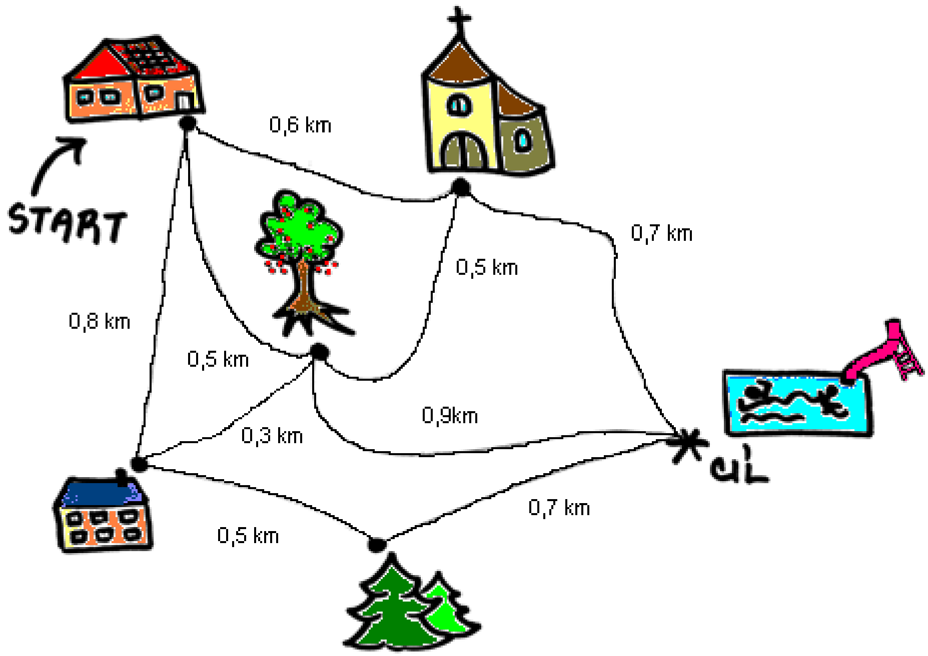
Více k úloze najdete v Souboru řešených úloh, s 30.

- **3. hodina:**

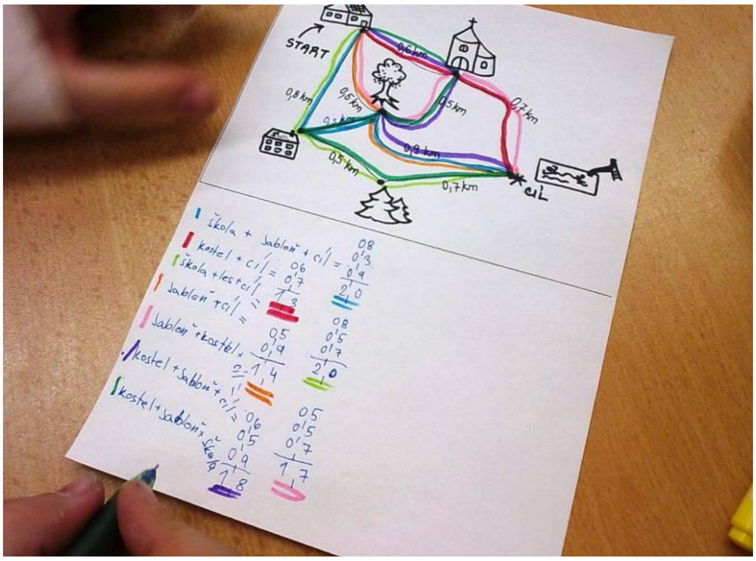
PETR NA KOLE: *Petr jede na kole na koupaliště.*

A) Zkus najít co nejvíce možností, kudy může Petr jet (na žádné místo se nevrací podruhé).

B) Spočítej, která z možných cest je nejkratší a která nejdelší.



Žáci 5.B dostali k řešení plánek. Nejprve bylo nutné definovat si různé orientační body na mapě, jde tedy o: dům, kde Petr bydlí, kostel, jabloň, školu, les a koupaliště. Ve trojicích pak žáci hledali různé cesty z domu na koupaliště a následně počítali délku tras. Tři dívčí trojice využily k řešení barvy (viz obr. RE5). Většina žáků zaznamenávala různé trasy vypisováním míst, kterými Petr projel. Pouze dvě chlapecké dvojice se snažili o zjednodušení záznamu různých tras a místo výpisu stanovišť zapisovali zkratky. Většina žáků objevila všechny možné trasy, pouze u dvou dvojic jsem zaznamenala jednu chybějící trasu, kterou si doplnily během společné kontroly.



Obr. RE5 Ukázka řešitelských strategií v úloze Petr na kole

Při samostatném řešení trojic žáků jsem možné trasy včetně délky vypsala zezadu na tabuli. Kontrolování poté proběhlo společně a bylo poměrně zdlouhavé. Na žácích jsem sledovala únavu a ztrátu zájmu o řešení či kontrolování úlohy.

UKÁZKA ŘEŠENÍ: *výpisem orientačních bodů včetně počítání délky trasy*

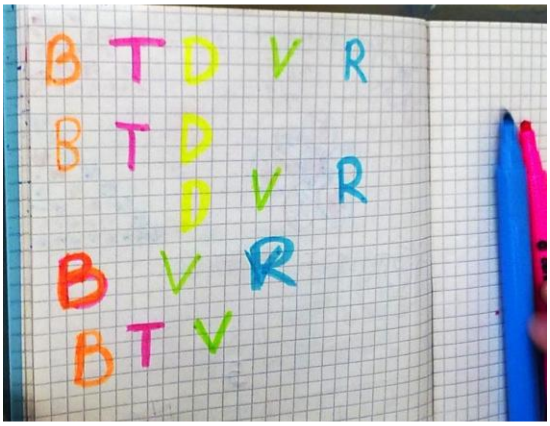
1. dům – kostel – koupaliště	0,6 + 0,7 = **1,3 km**
2. dům – kostel – jabloň – koupaliště	0,6 + 0,5 + 0,9 = **2 km**
3. dům – kostel – jabloň – škola – les – koupaliště	0,6 + 0,5 + 0,3 + 0,5 + 0,7 = **2,6 km**
4. dům – jabloň – kostel – koupaliště	0,5 + 0,5 + 0,7 = **1,7 km**
5. dům – jabloň – koupaliště	0,5 + 0,9 = **1,4 km**
6. dům – jabloň – škola – les – koupaliště	0,5 + 0,3 + 0,5 + 0,7 = **2 km**
7. dům – škola – jabloň – kostel – koupaliště	0,8 + 0,3 + 0,5 + 0,7 = **2,3 km**
8. dům – škola – jabloň – koupaliště	0,8 + 0,3 + 0,9 = **2 km**
9. dům – škola – les – koupaliště	0,8 + 0,5 + 0,7 = **2 km**

Odp.: Petr může dojet na koupaliště devíti různými cestami, z nichž je nejdelší trasa: dům – kostel – jabloň – škola – les – koupaliště. Naopak nejkratší trasou je: dům – kostel – koupaliště.

Více k úloze v Souboru řešených úloh, s. 27.

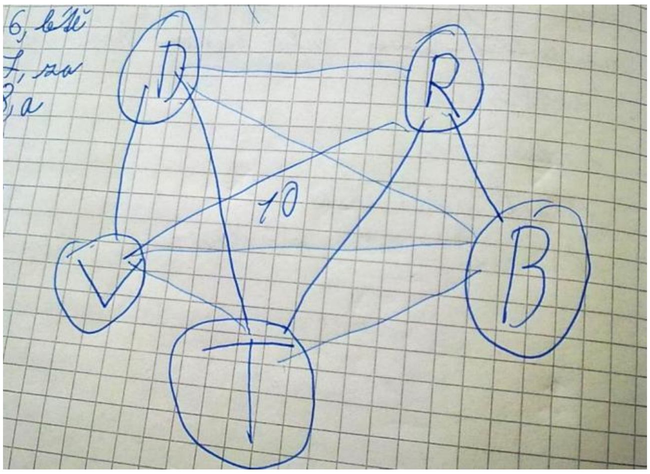
NÁSTROJE: *V hodině Hudební výchovy rozdala paní učitelka pěti žákům různé nástroje. Mají doprovodit písničku tak, aby se střídali, ale aby vždy hráli najednou pouze tři z nich. Kolik najdeš takových trojic?*

Na úvod jsem se žáků 5.B zeptala, zda hrají na nějaké hudební nástroje a zda mají rádi hudební výchovu. Dostalo se mi obecně kladné odpovědi. K motivaci a také k názornosti jsem dále využila rytmické nástroje, které mi zapůjčila paní učitelka hudební výchovy. Z nich si pět vylosovaných žáků vybralo: *bubínek, triangl, dřívka, vajíčko a rolničky*. Poté jsem všem žákům přečetla zadání úlohy. Navrhla jsem, abychom si společně zazpívali nějakou písničku. Žáci zcela spontánně vybrali Hlídače krav od Jaromíra Nohavici. K tomu nás doprovázeli právě žáci s nástroji. Měli se snažit hrát vždy jen tři. Při této situaci jsme si užili hodně legrace, neboť všichni pozorovali hrající žáky, kterým se při zpěvu domluva moc nedařila. Hráli tak buď všichni, nebo jen dva, ale tři se společně téměř nesešli. Po chvilce zpěvu jsme se vrátili k řešení úlohy. Vyvolaní žáci vždy určili tři nástroje, které by spolu mohli hrát. Náhodně tak tvořili požadované trojice. Dále jsem žáky vyzvala, aby na volný list papíru, či do sešitu zkusili úlohu zaznamenat a vlastním způsobem vyřešit. Pro názornost jsem nástroje nechala ležet na viditelném místě na koberci.



Obr. RE6 **Ukázka řešitelských strategií v úloze Nástroje – barevné zkratky**

Řešitelské strategie žáků byly rozmanité. Někdo si nástroje kreslil, jiní využívali vypisování zkratek (viz obr. RE6), objevila se i tabulka či spojování bodů (viz obr. RE7). Různé způsoby znázornění chodili vybraní žáci předvést na tabuli (viz obr. RE8) a společně s celou třídou jsme pak určovali, která z metod je nejpřehlednější. Zvítězilo řešení pomocí spojování bodů (tzv. uzlový graf).



Obr. RE7 **Ukázka řešitelských strategií v úloze Nástroje – uzlový graf**

Obr. RE8 **Ukázka různých řešitelských strategií v úloze Nástroje**

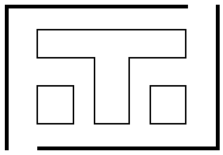
UKÁZKA VZOROVÉHO ŘEŠENÍ: *tabulkou*

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
dřívka	X	X	X	X	X	X				
rolničky	X	X	X				X	X	X	
vajíčko	X			X	X		X	X		X
triangl		X		X		X	X		X	X
bubínek			X		X	X		X	X	X

Odp.: Z pěti nástrojů je možné sestavit deset různých trojic

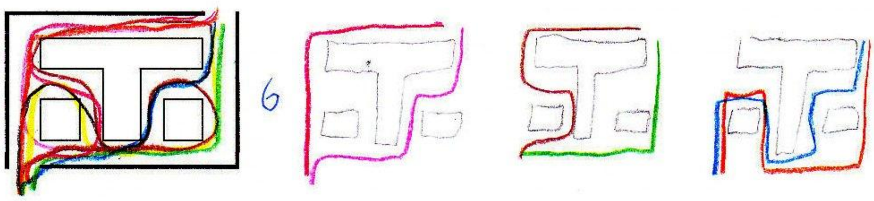
Více k úloze viz Soubor řešených úloh, s. 23

- **4. hodina:**



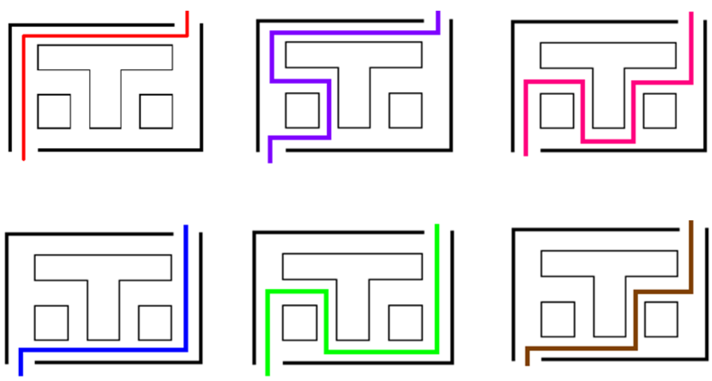
BLUDIŠTĚ: *Kolika způsoby je možné projít toto bludiště?*

Úloha nečinila žákům velké potíže. Měli za úkol samostatně hledat různé způsoby v natištěném bludišti. Dvě třetiny žáků (tj. 16 z 24) si bludiště alespoň jednou překreslily, čímž dosáhly lepší orientace v nalezených cestách (viz obr. RE9) Kromě dvou chlapců využili všichni ostatní žáci barevné fixy či pastelky. Různé cesty jsme znázornili společně na tabuli do tří obrázků bludiště.



Obr. RE9 **Ukázka žákovského řešení úlohy**

ŘEŠENÍ: *graficky*



Odp.: Bludiště lze projít šesti způsoby.

Více k úloze v Souboru řešených úloh, s. 33.

ZVÍŘECÍ DELEGACE: *Jednou se zvířata v džungli rozhodla, že vyšlou delegaci ke králi zvířat, aby zjistila, co je nového. Chtěla jich vyrazit spousta: 4 pštrosi, 2 tygři, 2 pavouci, 3 berušky, 2 žirafy a slon. Zvědavá opice potřebovala zjistit, kdo všechno se delegace zúčastní, proto se schovala ve křoví a sledovala, kdo kolem ní projde. Viděla však jenom nohy.*

A) Kolik by opice viděla projít nohou, pokud by za lvem vyrazila úplně všechna zvířata?

B) Kdo se mohl účastnit delegace, pokud opice viděla 12 nohou? Najdi co nejvíce možností.

C) Kdo se mohl účastnit delegace, pokud by opice viděla projít nohy v tomto pořadí: 6 nohou stejného druhu, 4 nohy stejného druhu, 8 nohou stejného druhu?

D) Mohla by se spolu ve skutečnosti sejít všechna tato zvířata?

Jde o úlohu, jejíž realizace se mi osobně líbila ze všech nejvíce. Na úvod hodiny jsem žákům prozradila, že si vytvoříme ve třídě malý karneval. Měla jsem připravené masky a postupně jsem vyvolala žáky, kteří měli zájem představovat pro účely úlohy nějaké zvíře. Před tabulí tedy postupně stály berušky, žirafy, slon, tygři, pavouci a pštrosi (viz obr. RE10, RE11)

Obr.RE10 Ukázka realizace úlohy Zvířecí delegace – pštrosi

Obr. RE11 Realizace úlohy Zvířecí delegace

Pak jsem třídě přečetla zadání. Některým ze zvířat jsme museli „přidat“ končetiny, abychom mohli spočítat končetiny celé zvířecí delegace (viz bod A). K tomu nám posloužily pruhy černé látky, které jsem žákům přehodila přes záda. Celkový počet nohou počítali všichni žáci, tedy i ti, kteří byli součástí delegace. Většina žáků spočítala končetiny správně. Tři žáci sečetli končetiny chybně, ovšem šlo o rozdíly v řádu jednotek.

VZOROVÉ ŘEŠENÍ: **4 pštrosi, 2 tygři, 2 pavouci, 3 berušky, 2 žirafy a slon**

$4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 4 = \underline{62}$

Odp.: Všechna zvířata dohromady mají 62 končetin.

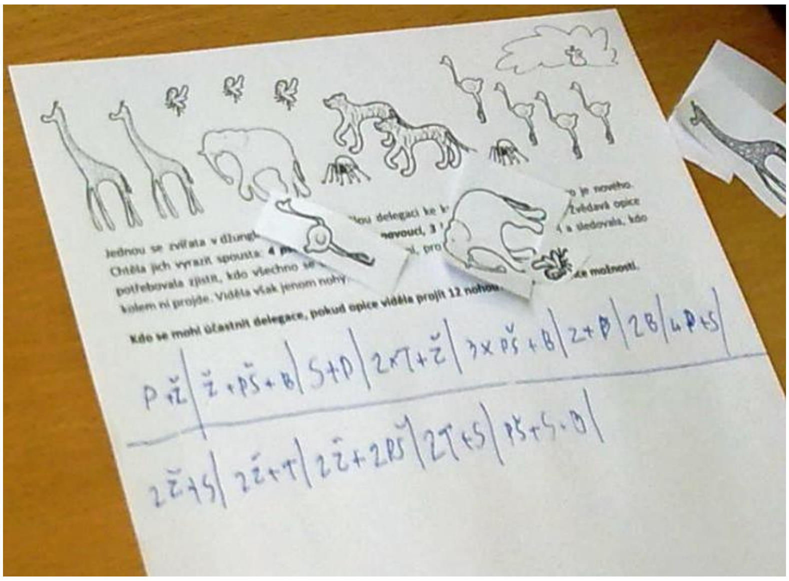
Pro řešení bodu B (viz zadání úlohy) jsme v úvodu také využili masek (viz obr. RE12). Žáci měli hledat skupinky zvířat, které mají dohromady dvanáct nohou. Vyvolávala jsem žáky v lavicích a ti navrhovali možné zvířecí skupinky. Povolaní žáci představující zvířata vždy předstoupili před tabuli a společně jsme zkontrolovali, zda mají dohromady opravdu dvanáct nohou (např. tedy skupinka: tygr, slon, žirafa). Dramatizace úlohy měla dle reakcí žáků velký úspěch. Dokazují to i výsledky dotazníku (viz kapitola 3.2.4 Dotazník).

Obr. RE12 **Realizace úlohy Zvířecí delegace**

Dále si všichni žáci sedli do lavic, vytvořili trojice a v nich pracovali na řešení úlohy (viz zadání B). K dispozici měli pracovní list se zadáním úlohy a obrázkem všech zvířat (viz obr. RE14) a dále kopii zaplněnou zvířaty, kterou rozstříhali a z jednotlivých zvířat pak tvořili skupinky. Tři dívčí skupinky zvířata nalepovala (viz obr. RE13). Nalepování zvířat zabralo děvčatům hodně času, což vedlo k menšímu počtu nalezených možností.

Obr. RE13 **Ukázka řešení úlohy Zvířecí delegace – nalepování**

Další dvě trojice dívek a všichni chlapci jen skládali zvířecí skupiny na lavici a poté slovně zapsali danou možnost. Jedna dívčí trojice a dvě chlapecké k tomuto zapisování využívaly zkratek (viz obr. RE14).



Obr. RE14 Ukázka řešení úlohy Zvířecí delegace – zkratky

Všechny trojice hledaly zvířecí skupinky náhodně, u nikoho se neobjevil systematický postup (***podporuje H3***). U dvou trojic žáků se vyskytl problém, kdy žáci vytvořili např. skupinku tří žiraf, přestože se v zadání objevily pouze dvě žirafy. Doporučila jsem tedy všem žákům, aby se drželi obrázku zvířat ilustrujícího zadání.

Po chvíli jsme společně se žáky zkontrolovali možné skupinky zvířat a ukázalo se, že nejúspěšněji řešila úlohu chlapecká trojice, která našla všech 22 možností (zvolila metodu skládání skupinek na lavici a následné zaznamenávání zkratek zvířat). Kontrolou mi bylo i to, že chlapcům nezbyl žádný volný obrázek zvířete z kopie (úmyslně jsem zde nakopírovala přesný počet zvířat dle všech možných skupinek).

VZOROVÉ ŘEŠENÍ:

příklad	zvířata	možn.
$6 + 6$	2 berušky	1.
$6 + 3 \cdot 2$	beruška, 3 pštrosi	2.
$6 + 4 + 2$	beruška, tygr, pštros beruška, žirafa, pštros beruška, slon, pštros	3. 4. 5.
$8 + 4$	pavouk, tygr pavouk, žirafa pavouk, slon	6. 7. 8.
$8 + 2 \cdot 2$	pavouk, 2 pštrosi	9.
$4 \cdot 2 + 4$	4 pštrosi, tygr 4 pštrosi, žirafa 4 pštrosi, slon	10. 11. 12.

příklad	zvířata	možn.
$2 \cdot 4 + 4$	2 tygři, slon 2 tygři, žirafa 2 žirafy, slon 2 žirafy, tygr	13. 14. 15. 16.
$2 \cdot 4 + 2 \cdot 2$	2 tygři, 2 pštrosi 2 žirafy, 2 pštrosi	17. 18.
$4 + 4 + 4$	tygr, slon, žirafa	19.
$4 + 4 + 2 \cdot 2$	tygr, slon 2 pštrosi tygr, žirafa, 2 pštrosi slon, žirafa, 2 pštrosi	20. 21. 22.

Odp.: Pokud opice viděla 12 zvířecích nohou, pak je 22 možností uspořádání takovéto delegace.

Bod C (viz zadání), kde se dále žáci mají zaměřit i na pořadí zvířat, se bohužel z časových důvodů nestihl realizovat. Jeho řešení lze nalézt v Souboru řešených úloh, s. 12.

Posledním bodem (viz D) jsem chtěla žáky přimět k tomu, aby se kriticky zamysleli nad zadáním úlohy. Ptala jsem se jich, zda by se všechna tato zvířata mohla doopravdy setkat na jednom místě. Vyzvala jsem žáky, aby se přihlásili ti, kteří se domnívají, že je to možné. Přihlásili se pouze čtyři žáci (tři dívky a jeden chlapec). Ostatní tvrdili, že to není možné. Jeden chlapec to vysvětlil slovy: „*Oni by se navzájem sežrali*!" Dále jsem si od paní učitelky vypůjčila mapu světa s obrázky zvířat žijících na daném kontinentu (SVĚT – typy krajin, biomy. STIEFEL EUROCART s.r.o., 2009). Vyvolala jsem několik žáku a vyzvala je, aby nám na mapě našli zvířata z naší úlohy. Zjistili jsme tedy, že některá ze zvířat by se ve volné přírodě nemohla potkat.

ŘEŠENÍ: Musíme si uvědomit, kde jednotlivá zvířata žijí a čím se živí:

PŠTROS: Afrika; všežravec (rostliny, hmyz, malí savci, plazi)
TYGR: Asie; masožravec
PAVOUK: téměř všude, kromě zamrzlých oblastí; hmyzožravec
BERUŠKA (Sluněčko sedmitečné): Evropa; hmyzožravec (mšice)
ŽIRAFA: Afrika; býložravec
SLON: Afrika, Asie (Indie); býložravec

Odp.: Ve skutečnosti by se spolu všechna tato zvířata nemohla ve volné přírodě nikdy setkat.

Více k této úloze v Souboru řešených úloh, s. 9.

- **5. hodina:**

PŘÍPITEK: *Na oslavě narozenin si spolu připilo 6 přátel.*

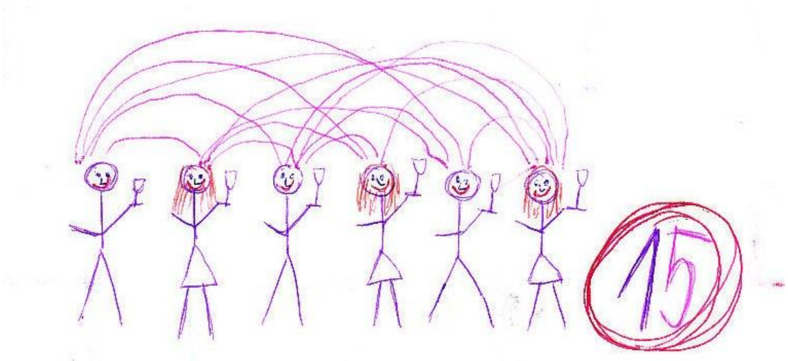
A) Kolik zaznělo cinknutí?

B) Uměl/a bys vypočítat, kolik by zaznělo cinknutí, pokud by si připili pouze 4 přátelé?

Po úvodním zadání problému jsem se žáků zeptala na jejich tip. Většina žáků odhadovala, že celkem si přátelé připijí 36krát. Objevila se i možnost, že si připijí 30krát („*ten první s pěti ostatními, takže to vynásobím*“). Poté jsem vybrala náhodně šest žáků a každému jsem dala skleničku. Vyzvala jsem je, ať si všichni připijí (viz obr. RE15). Žáci neřešili pořadí, ani si nevytvořili žádný systém, takže bylo obtížné spočítat, kolik zaznělo cinknutí (***podporuje H3***).

Obr. RE15 Realizace úlohy Přípitek

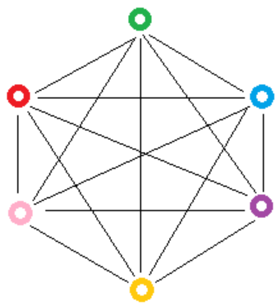
Vzhledem k tomu, že všichni žáci názorně viděli situaci, o které se v úloze mluví, navrhla jsem jim, ať zkusí chvíli ve dvojicích řešit úlohu samostatně. Sledovala jsem řešitelské strategie a zaznamenávání situace na papír. Osm dvojic z dvanácti si nakreslilo šest postav (viz obr. RE16). Z nich čtyři dvojice pak postavy spojovaly, ovšem pouze dvě došly ke správnému výsledku („*zazní 15 cinknutí*“).



Obr. RE16 Ukázka grafického řešení úlohy

Ostatní buď nenapsali žádný výsledek, nebo dali na předchozí tipování spolužáků a napsali, že cinknutí bude 30. Dvě dvojice řešily úlohu neúspěšně příkladem $6 \cdot 5 = 30$. Dvě zbývající dvojice spojovaly mezi sebou šest bodů a došly ke správnému výsledku. Jednoho ze žáků spojujícího úspěšně postavy, jsem vyzvala, aby své řešení znázornil na tabuli. Pro ověření si pak šest žáků znovu připilo, tentokrát již systematicky (první se všemi ostatními, druhý s ostatními kromě prvního, atd.), a ostatní počítali cinknutí. Opravdu jich bylo 15.

UKÁZKA ŘEŠENÍ: *uzlovým grafem*



Odp.: Při přípitku šesti přátel zazní 15 cinknutí.

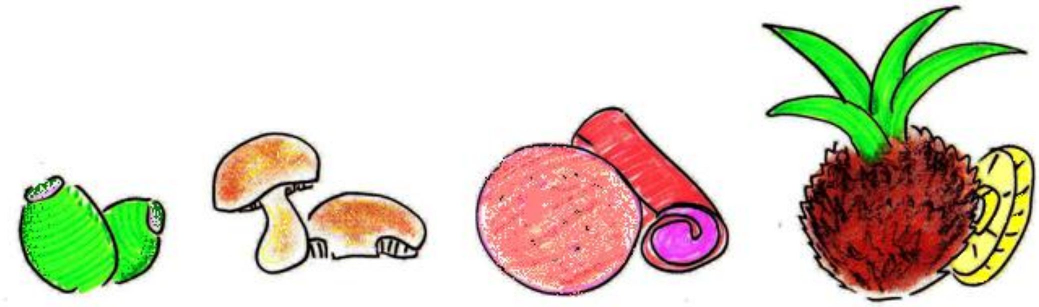
Další řešení a více k úloze viz Soubor úloh, s. 19.

PIZZA: *Základní nabídkou Pizzerie Bambino je pizza s rajčaty a sýrem. Pokud má host zájem, může si přiobjednat další suroviny: šunka, žampiony, olivy, ananas. Každou ze surovin si lze přiobjednat pouze jednou. Každá pizza se vyrábí buď velká, nebo malá.*

A) Kolik různých typů pizzy si může zákazník objednat?

B) Jaký druh pizzy by sis vybral ty?

V úvodu jsem žákům přečetla zadání úlohy. Poté jsem na tabuli nakreslila dvě kružnice (menší a větší) představující pizzu a ukázala jsem žákům obrázky surovin (olivy, žampiony, šunka, ananas) ze zadní strany opatřené lepicí hmotou (viz obr. RE17).



Obr. RE17 Obrázky surovin - pomůcka při realizaci

Ptala jsem se náhodně žáků, kterou pizzu by si vybrali oni, a volala jsem je k tabuli, aby svůj výběr znázornili vlepením obrázků do jedné z kružnic. Přibližně po osmi ukázkách jsem žáky vyzvala, aby zkusili úlohu řešit ve dvojicích pomocí tabulky (tu jsem jim nakopírovala).

VZOROVÉ ŘEŠENÍ: *tabulkou*

SUROVINY	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
šunka	X				X	X	X				X	X	X		X	_
žampiony		X			X			X	X		X	X		X	X	_
olivy			X			X		X		X	X		X	X	X	_
ananas				X			X		X	X		X	X	X	X	_

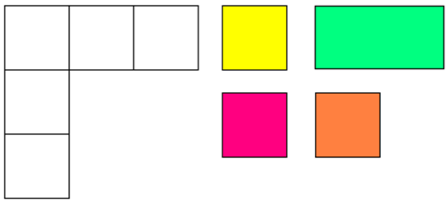
Více než polovina dvojic náhle nevěděla, co si s tabulkou počít. Musela jsem dvojice tedy jednotlivě obcházet a vysvětlovat žákům, jak do tabulky zaznamenáme konkrétní druh pizzy. Po chvíli jsem i několik sloupců z tabulky zakreslila na tabuli. Ze dvanácti dvojic vyplnilo celou tabulku pět (dvě chlapecké a tři dívčí). Pouze jedna chlapecká dvojice vyplnila celou tabulku systematicky: nejprve jedna přidaná surovina, dvě, tři, čtyři (***podporuje H3***). Následně jsem všem žákům znázornila na tabuli, jak bylo nejvýhodnější postupovat při vyplňování tabulky. Poté jsem je upozornila, že i když je vyplněných sloupců 16, tak různých pizz si může zákazník objednat 32, musíme brát v úvahu dvě velikosti.

Odp.: Zákazník si může objednat 32 druhů pizzy.

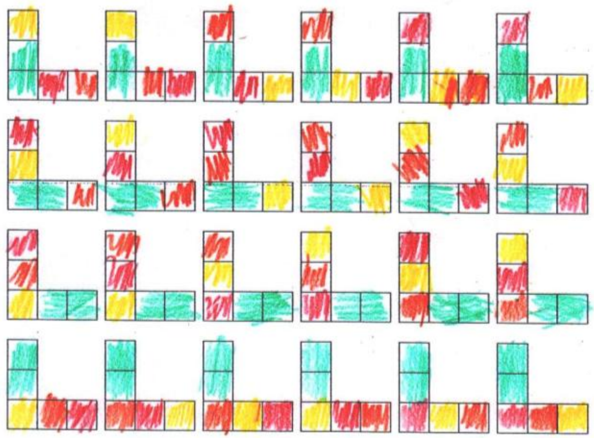
Více k úloze najdete v Souboru řešených úloh, s. 21.

- **6. hodina:**

ČTVERCOVÁ SÍŤ: *Kolika způsoby můžeme umístit barevné čtyřúhelníky do čtvercové sítě?*

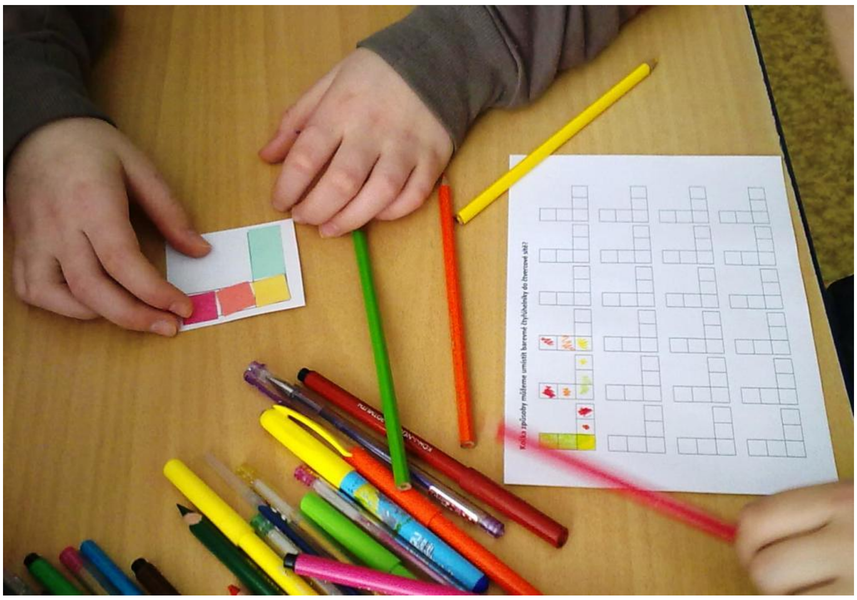


Úlohu jsem zaměřila na manipulaci s geometrickými útvary. Žáci 5.B měli za úkol vytvořit trojice. Každá skupinka dostala kopii čtvercového pole, nastříhané barevné čtyřúhelníky a pracovní list k zaznamenání různých možností uspořádání. Poté začali trojice žáků samostatně pracovat na úkolu. Sledovala jsem jejich postup a využité strategie. Většina skupin experimentovala a náhodně přeskupovala barevné útvary ve čtvercové síti. Pouze u jedné dívčí skupinky se objevil náznak systematičnosti (***podporuje H3***). Dívky však nenašly všechny způsoby uspořádání čtyřúhelníků v poli. Jedna chlapecká skupinka mě velmi zaujala a potěšila. Asi po pěti minutách zakreslování různých možností si mě chlapci zavolali a poprosili mě: „*Mohla byste nám dát nový papír? My jsme si v tom neudělali systém*.“ Poté jsem sledovala jejich postup, kdy si vždy umístili zelený obdélník do jednoho místa a obměňovali zbylé čtverce. Během krátké chvíle se jim tak podařilo jako jediným zaznamenat všechny možnosti řešení (viz obr. RE18).



Obr. RE18 Ukázka systematického řešení

Všichni žáci využívali při řešení barev. Zpočátku pilně vybarvovali každý čtvereček, ale postupně svůj záznam zjednodušovali a využívali různých značek (viz obr. RE 19). Tím se zrychlil postup řešení.



Obr. RE19 Ukázka řešení úlohy Čtvercová síť

Když jsem viděla, že žáci již skončili s hledáním možností (buď vyplnili všechna pole, nebo se spokojili s možnostmi, které dosud našli), vyzvala jsem chlapce z již zmiňované skupinky, aby všem vysvětlili, jak postupovali. Na některých ostatních žácích bylo znát, že si povzdechli a litovali toho, že také neobjevili nějaký systém. Jeden z žáků to okomentoval slovy: „*Potom je to jednoduchý, no*.“

Odp.: Barevné čtyřúhelníky lze umístit do sítě 24 způsoby.

Více k úloze viz Soubor řešených úloh, s. 31.

POHLEDY: *Kamarádky z páté třídy se dohodly, že si o prázdninách všechny navzájem pošlou pohledy. Odeslaných pohledů bylo celkem 20.*

A) Kolik bylo kamarádek?

B) Kolik pohledů dostala každá z dívek?

C) Kolik pohledů by si navzájem poslalo 10 kamarádek?

Úlohu jsme stihli bohužel probrat jen v rychlosti, neboť hodina musela být ukončena o 15 minut dříve z důvodu odchodu třídy 5.B na kulturní představení. Přečetla jsem tedy žákům zadání a nechala je přemýšlet o řešení. Někteří žáci si otevřeli pracovní sešit matematiky a zkoušeli řešit zadaný problém písemně. Po chvíli jsem se zeptala žáků, kolik bylo podle nich dívek posílajících si pohledy. Téměř polovina odpověděla, že dívek bylo deset. Dvě žákyně odpověděly, že dívky byly čtyři. Objevil se i výsledek 20 a 12. Přibližně čtvrtina třídy odpovídala správně, že dívek bylo pět. Nikdo z žáků ale nedokázal vysvětlit, jak na výsledek přišel. Pokusila jsem se tedy problém vysvětlit v rychlosti na tabuli. Nakreslila jsem dvě postavičky dívek a zeptala se žáků, kolik tyto dívky pošlou dohromady pohledů. Dostalo se mi správné odpovědi, že dva. Znázornila jsem to pomocí šipek. Dále jsem nakreslila tři dívky a opět jsem chtěla, aby žáci odhadli, kolik si dívky navzájem pošlou pohledů. Jeden chlapec odpověděl, že pošlou devět pohledů, protože: „*Tři krát tři*.“ Sdělila jsem mu, že to není správný výsledek. Další ze žáků odpověděl správně, že pohledů bude posláno šest a vysvětlil to slovy: „*No první pošle dva těm ostatním holkám, ta druhá pošle pohled první a třetí a ta třetí těm prvním dvěma, takže šest*.“ Jeho slova jsem potvrdila opět zakreslením šipek mezi tři dívky. Ještě jsem doplnila, že každá ze tří dívek pošle jen dva pohledy, sobě totiž pohled neposílá.

Pak jsem se zeptala, kolik pohledů pošlou dohromady čtyři dívky. Začalo se najednou hlásit mnohem více žáků. Vyvolaná dívka odpověděla správně, že dvanáct. Vysvětlila to následovně: „*Protože čtyři holky krát tři pohledy*." Další krok, tedy pět dívek, by nám již ukázal řešení původního problému. Položila jsem proto žákům otázku: „*Odeslaných pohledů bylo dvacet, kolik bylo dívek? Můžete to ukázat na prstech ruky?*" Sledovala jsem žáky a kromě dvou, kteří neukazovali vůbec nic a dalších dvou, kteří ukazovali deset prstů, všichni ostatní žáci ukazovali pět prstů. Tedy odpovídali správně, že dívek posílajících si pohledy bylo 5. Také správně doplnili, že každá dívka poslala čtyři pohledy.

Na závěr jsem se žáků 5.B zeptala, kolik by bylo celkem pohledů, kdyby si je poslalo navzájem deset dívek. Měli to zapsat příkladem do školního sešitu matematiky. Když jsem obcházela třídu, viděla jsem téměř u všech správný příklad: $10 \cdot 9 = 90$.

Více k úloze viz soubor úloh, s. 14.

Shrnutí fáze procvičování

Se žáky 5.B se mi velmi dobře spolupracovalo. Nezaznamenala jsem žádné výraznější projevy nezájmu či vyrušování. Žáci se snažili řešit úlohy nejlépe, jak uměli. S konkrétními problémy jsem se jim snažila pomoci a vše názorně vysvětlovat. Zpočátku jsem zaznamenala často se vyskytující nejistotu žáků (dotazy: „*Můžu to řešit takhle? Může to být takhle? Můžeme si vzít fixy?*" apod.). Bylo vidět, že žáci nejsou zvyklí řešit úlohy experimentováním. Dále jsem registrovala občasnou nepozornost žáků při čtení (či poslechu) zadání problému. Při grafickém řešení úloh byl zřejmý rozdíl mezi přístupem dívek a chlapců. Dívky častěji využívali barev či fixů a grafické zaznamenání problému jim trvalo delší dobu, neboť byly pečlivější. Někteří chlapci barvy téměř nepoužívali. Jejich grafické řešení bylo většinou jednodušší a rychlejší, ne však vždy správné.

Velmi si vážím přístupu třídních učitelů pátých tříd, tedy pana učitele Dušana Polívky a paní učitelky Šárky Polákové. Snažili se mi ve všem vyjít maximálně vstříc. Pomohli mi s organizací během hodin (např. rozdávání testů), nakopírovali mi některé pracovní listy, zařídili v předstihu, aby žáci předali rodičům žádost o fotodokumentaci realizace, atd.

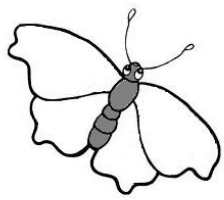
Pokud bych mohla na realizaci úloh něco změnit, pak bych se snažila získat více času. Přestože jsme se žáky stihli vyřešit dvanáct kombinatorických problémů, dalo by se na nich ještě více pracovat. Dále by (zejména pro žáky) bylo lepší probírat jednotlivé kombinatorické problémy průběžně po delší dobu, než nárazově během jednoho týdne. Občas byla na žácích znát únava a mírný pokles motivace z řešení stále podobných problémů. Pro mě i pro učitele pátých tříd však byla tato forma realizace z organizačního hlediska nejpřijatelnější.

3.2.3 Kontrolní test

Poté, co jsem se žáky 5.B procvičila zmiňovaných 12 kombinatorických úloh, byl čas ověřit účinnost našeho počínání. Pro tyto účely jsem žákům 5.A i 5.B zadala kontrolní test.

Vzorové zadání kontrolního testu

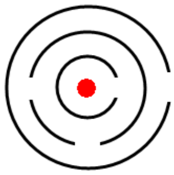
1. *Kolika způsoby lze vybarvit motýla na obrázku, pokud můžeš použít jen červenou a žlutou barvu? Barvy mohou být uspořádány jakkoliv.*



2. *Sára se rozhoduje, co si vezme na sebe. Vyndala ze skříně čtyři trička, dvě sukně a jedny kalhoty. Jak se může Sára obléknout? Vezme si buď jen kalhoty, nebo jen sukni, ne obojí!*

3. *V turnaji piškvorek se proti sobě utkaly dva trojčlenné týmy. Každý člen z jednoho týmu si zahrál se všemi členy druhého týmu. Kolik bylo celkem odehraných zápasů?*

4. *Kolika způsoby se dostane červená kulička ven z bludiště? Nikdy neprojde dvakrát stejnou cestou.*



První úloha kontrolního testu má charakter variací s opakováním. U žáků jsem předpokládala řešení s využitím barev. Vzhledem k tomu, že je obrázek poměrně jednoduchý, mohli by ho žáci překreslovat, ovšem výhodnější (z hlediska času i místa k řešení) by bylo zjednodušení grafického záznamu. Dále mě zajímalo, zda budou žáci 5.B více využívat systematičnosti.

Ve druhé úloze mají žáci za úkol hledat všechny možné kombinace oblečení. Tematicky bude úloha pravděpodobně bližší děvčatům, což by se mohlo projevit vyšší úspěšností řešení. Opět se zaměřím na řešitelské strategie žáků a na využití systematičnosti.

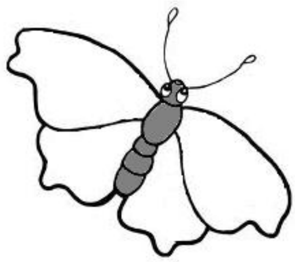
Třetí úloha je (podobně jako první úloha vstupního testu – viz kap. 3.2.1) zaměřena na hledání všech odehraných zápasů. Tentokrát jde ovšem o zápasy jednotlivých hráčů ze dvou týmů v turnaji piškvorek. Mohou se objevit snahy řešit úlohu tabulkou, ovšem dle mého názoru by byl v tomto případě výhodnější jiný grafický záznam. Jednotliví hráči totiž v zadání nejsou nijak označeni či pojmenováni, což by v případě řešení tabulkou mohlo žákům činit potíže.

Čtvrtá úloha má charakter jednoduchého bludiště. Předpokládám, že vzhledem k dostatku místa si budou žáci překreslovat obrázek bludiště. To by jim přineslo větší přehlednost při hledání různých cest, stejně jako případné využití barev. Při vyhodnocování budu sledovat, zda se výrazně liší počet nalezených cest v jednotlivých třídách.

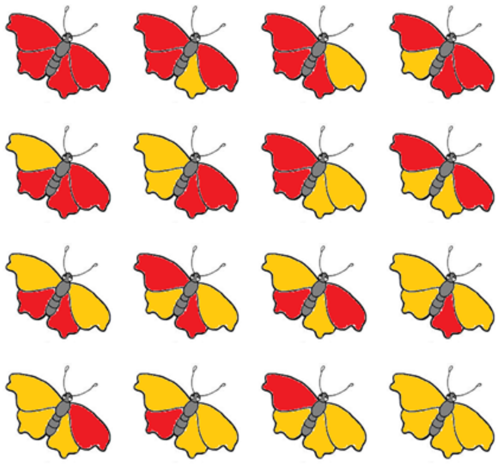
Příloha P4 nabízí ukázku vyplněného kontrolního testu. Další náměty k úlohám z kontrolního testu najdete v Soboru řešených úloh.

Vzorové řešení kontrolního testu

1. Kolika způsoby lze vybarvit motýla na obrázku, pokud můžeš použít jen červenou a žlutou barvu? Barvy mohou být uspořádány jakkoliv.



ŘEŠENÍ: ***graficky***



ŘEŠENÍ: ***početně (kombinatorické pravidlo součinu)***

- Motýl má čtyři křídla, každé křídlo lze vybarvit dvěma barvami, tedy:

  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

ŘEŠENÍ: ***početně (užitím kombinatorických vztahů):***

- tvoříme čtveřice ze dvou prvků (barev), které se mohou opakovat, jde o variace s opakováním:

  $V'(k,n) = n^k$

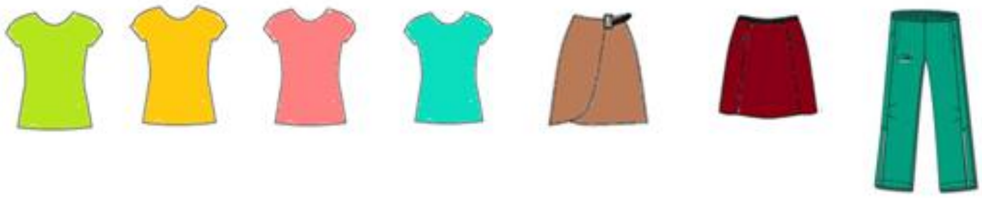
  $V'(4,2) = 2^4 = 16$

Odp.: Motýla lze vybarvit šestnácti způsoby.

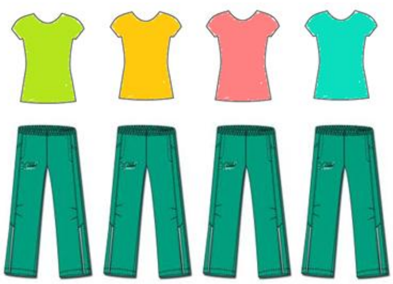
2. *Sára se rozhoduje, co si vezme na sebe. Vyndala ze skříně čtyři trička, dvě sukně a jedny kalhoty. Jak se může Sára obléknout? Vezme si buď jen kalhoty, nebo jen sukni, ne obojí!*

ŘEŠENÍ: ***graficky***

- Máme k dispozici: 4 trička, 2 sukně, 1 kalhoty

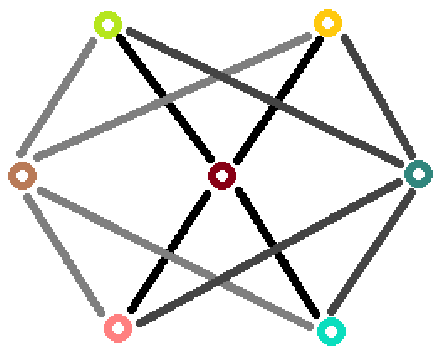


Jaké kombinace můžeme z těchto kusů oblečení vytvořit?

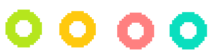


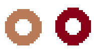
Sára se může obléknout dvanácti způsoby.

ŘEŠENÍ: ***pomocí uzlového grafu***



- každému kusu oblečení přidělíme značku:

  trička: 

  sukně: 

  kalhoty: 

- Spojnice mezi značkami představují různé kombinace oblečení.

ŘEŠENÍ: ***početně***

- Počet modelů *tričko* + *sukně* lze vyjádřit příkladem: $4 \cdot 2 = 8$

  Počet modelů *tričko* + *kalhoty* lze vyjádřit takto: $4 \cdot 1 = 4$

  Celkem je tedy: $8 + 4 =$ 12 možností

ŘEŠENÍ: ***početně (kombinatorické pravidlo součinu)***

- Pro každou kombinaci oblečení volím 1 tričko ze 4 možných a jednu sukni (či kalhoty) ze tří možností, tedy:

  $4 \cdot 3 = 12$

Odp.: Sára se může obléknout dvanácti způsoby.

3. *V turnaji piškvorek se proti sobě utkaly dva trojčlenné týmy. Každý člen z jednoho týmu si zahrál se všemi členy druhého týmu. Kolik bylo celkem odehraných zápasů?*

ŘEŠENÍ: ***tabulkou***

- Členy prvního týmu si označíme A, B, C, členy druhého týmu 1, 2, 3.

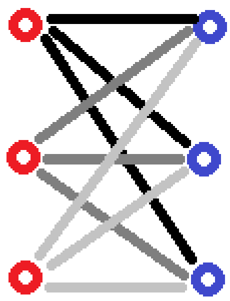
	1	2	3
A	●	●	●
B	●	●	●
C	●	●	●

Z tabulky je zřejmé, že bylo odehráno 9 zápasů.

ŘEŠENÍ: ***výčtem možností***

- Pokud si pojmenujeme hráče prvního týmu A, B, C a hráče druhého týmu 1, 2, 3, pak lze odehrané zápasy zapsat následovně:

  A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3



ŘEŠENÍ: ***užitím uzlového grafu***

- Hráčům přiřadíme značky:

  hráči 1. týmu 

  hráči 2. týmu 

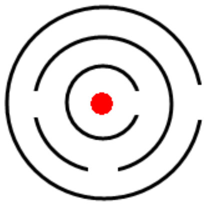
Spojnice mezi hráči představují odehrané zápasy.

ŘEŠENÍ: ***početně (kombinatorické pravidlo součinu)***

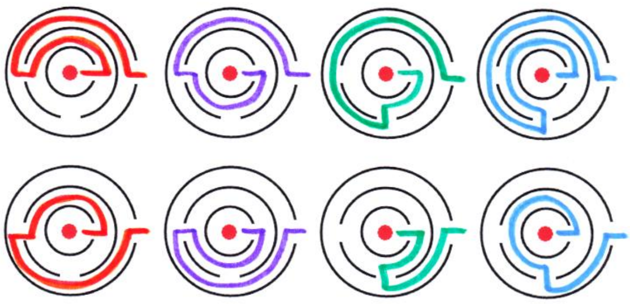
- V každém týmu jsou tři hráči, každý hráč prvního týmu si zahraje se všemi hráči ze druhého týmu, tedy: $3 \cdot 3 = 9$

Odp.: Celkem bylo odehráno 9 zápasů.

4. *Kolika způsoby se dostane červená kulička ven z bludiště? Nikdy neprojde dvakrát stejnou cestou.*



ŘEŠENÍ: ***graficky***



Odp.:

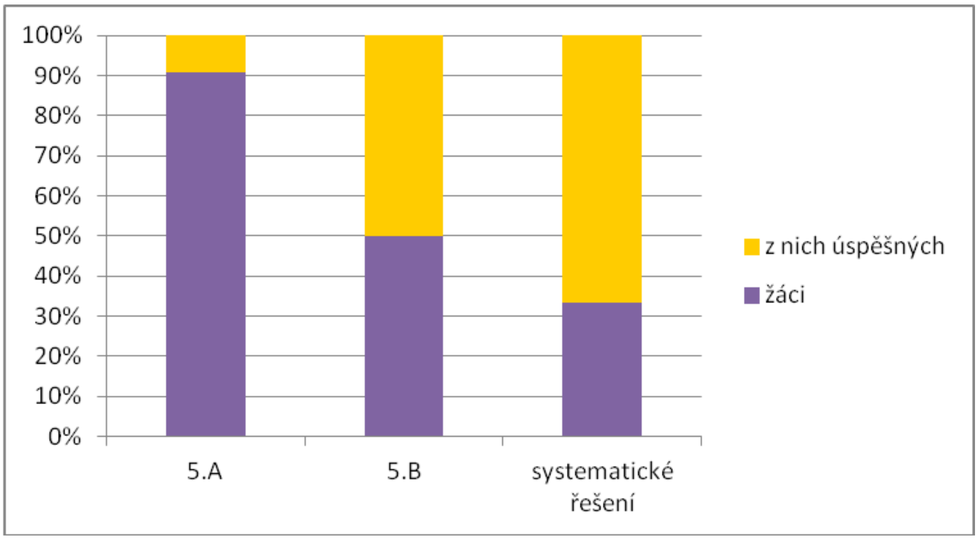
Kulička se dostane z bludiště 8 způsoby.

Vyhodnocení kontrolního testu

Kontrolní test byl zadán na závěr experimentu a vypracovalo jej 46 žáků. Z hlediska tříd jde o 22 žáků kontrolní třídy 5.A a 24 žáků třídy 5.B, s níž jsem procvičovala řešení kombinatorických úloh. Z hlediska pohlaví se jedná celkem o 17 chlapců a 29 dívek. Na vypracování testu měli všichni žáci 45 minut. Podkladem pro vyhodnocení výsledků KT byla tabulka XLS, kde zachycuji sledované jevy zvlášť pro každou úlohu a jednotlivé žáky (viz příloha P3).

1. *Kolika způsoby lze vybarvit motýla na obrázku, pokud můžeš použít jen červenou a žlutou barvu? Barvy mohou být uspořádány jakkoliv.*

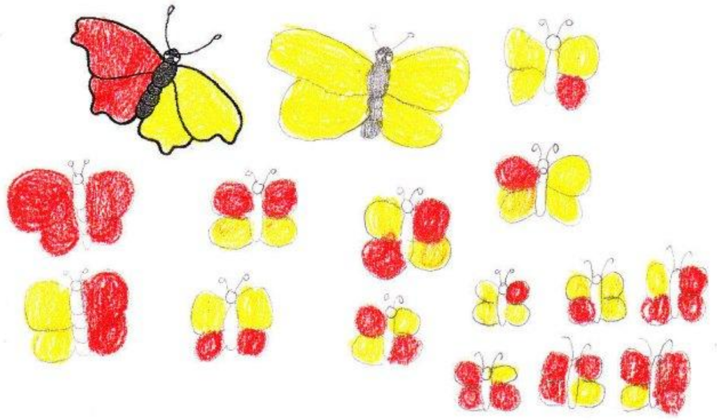
Úlohu řešilo úspěšně celkem 14 žáků (odpovídá 30,43% z celkového počtu 46 žáků). Pokud porovnám třídy, pak byla úspěšnější 5.B, správně úlohu vyřešilo 50% jejích žáků (tj. 12 z 24). Ve třídě 5.A vyřešili úlohu správně pouze 2 žáci (odpovídá 9,1% žáků ze třídy 5.A). Z hlediska pohlaví se dařilo chlapcům i děvčatům podobně. Správného výsledku dosáhlo celkově 29,4% chlapců (5 ze 17) a 31% děvčat (9 z 29). K řešení se přímo nabízelo využití barev, čehož využilo 91,3% ze všech testovaných žáků (tj. 42 ze 46). Úspěšnost řešení v obou třídách je zachycena v grafu KT1



Graf KT1 Úspěšnost řešení první úlohy kontrolního testu - celkově

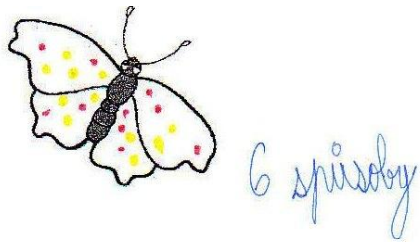
Vyhodnocení výsledků třídy 5.A

Jak už jsem zmínila, správného výsledku dosáhli pouze 2 žáci této třídy (tj. 9,1%), jeden chlapec a jedna dívka. Přesto však řešitelské strategie žáků 5.A nelze považovat za špatné. 63,6% žáků (tj. 14 z celkových 22) využilo při řešení úlohy grafického znázornění (***což podporuje hypotézu H4***). 11 žáků z těchto 14 překreslovalo obrázek motýla a následně vybarvovalo křídla červenou a žlutou pastelkou (viz obr. KT1). Zbylí 3 žáci zaznamenávali různé možnosti také graficky, ale zjednodušeně (pomocí čtyř barevných teček představujících motýlí křídla).



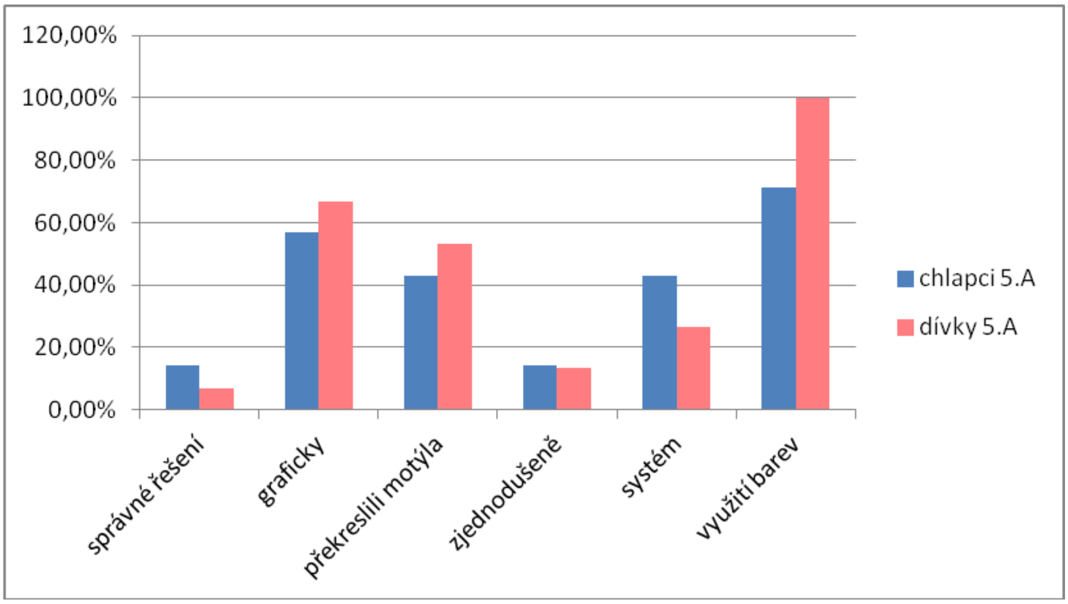
Obr. KT1 **Ukázka grafického řešení 1. úlohy KT - 5.A**

6 žáků z 5.A (představuje 27,3%) sice využilo barev, ale poznamenávali si různé možnosti přímo do natištěného obrázku. Není tedy možné přesně určit, které kombinace barevných křídel tito žáci objevili (viz obr. KT2).



Obr. KT2 **Ukázka využití barev při řešení 1. úlohy KT – 5.A**

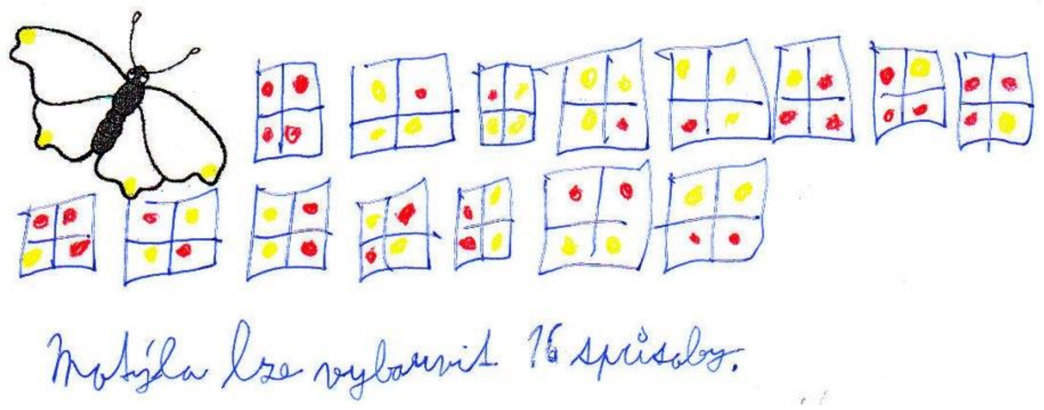
Barev využilo celkem 90,9% žáků 5.A (tj. 20 z 22). U 7 žáků (3 chlapci, 4 dívky), což představuje 31,8% žáků z 5.A, se objevila systematičnost řešení. 6 z těchto 7 žáků ale nenašlo všech 16 možností. Jediný žák doplnil své grafické řešení, ač neúspěšně, příkladem: $4 \cdot 2 = 8$. Neúspěšní žáci našli nejčastěji tato řešení: 14 možností (4 žáci), 8 možností (6 žáků), 6 možností (5 žáků). Dále se u jednotlivců objevilo 24, 12, 5, 4, 3 možností. Řešitelské strategie ve třídě 5.A s ohledem na pohlaví zachycuje graf KT2.



Graf KT2 Úspěšnost a řešitelské strategie první úlohy KT - 5.A

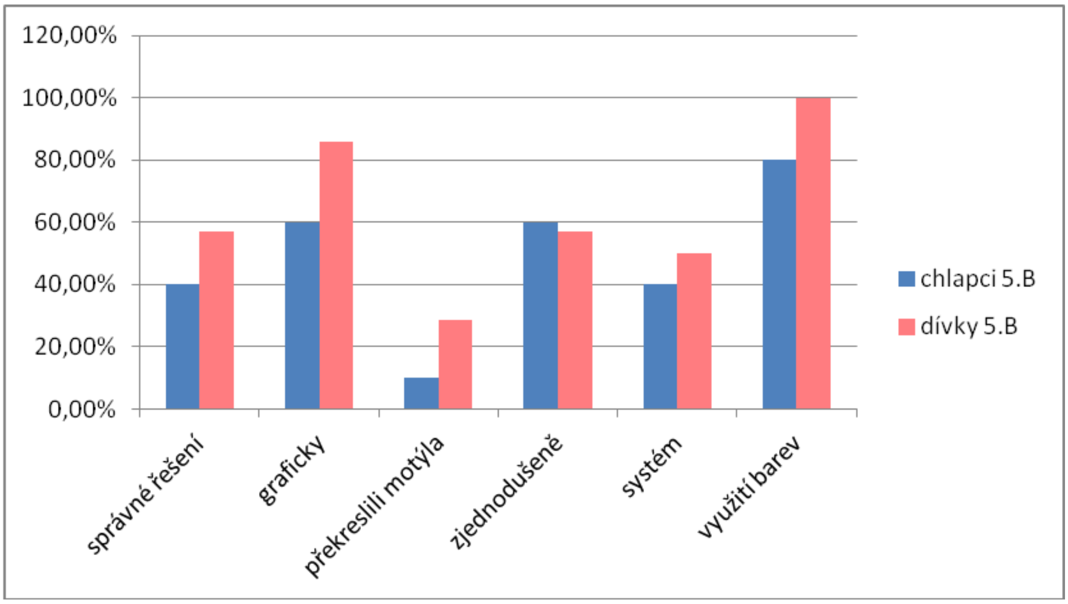
Vyhodnocení výsledků třídy 5.B

Oproti třídě 5.A dosáhla 5.B v první úloze kontrolního testu mnohem lepšího výsledku. V této třídě našlo všech 16 možností 50% žáků (tj. 12 z 24). Jedná se o 4 chlapce (tj. 40% chlapců 5.B) a 8 dívek (tj. 57,1% dívek 5.B). Barvy při řešení úlohy použilo všech 14 dívek a 8 chlapců (z 10). 75% žáků (6 chlapců a 12 dívek) z 5.B řešilo úlohu pomocí obrázků. Z těchto 18 žáků jich pouze 5 překreslovalo obrázek motýla, ostatních 13 znázorňovalo různé možnosti zjednodušeně (viz obr. KT3). U 11 žáků 5.B (4 chlapci, 7 dívek, představují 45,8% třídy) se objevilo systematické zaznamenávání možností (***podporuje H2***). Všichni tito žáci řešili úlohu úspěšně. Neúspěšní žáci (50% žáků třídy 5.B) nalezli tyto možnosti: 17, 14, 12, 10,… až 4.



Obr. KT3 **Ukázka - systematičnost grafického řešení 1. úlohy KT – 5.B**

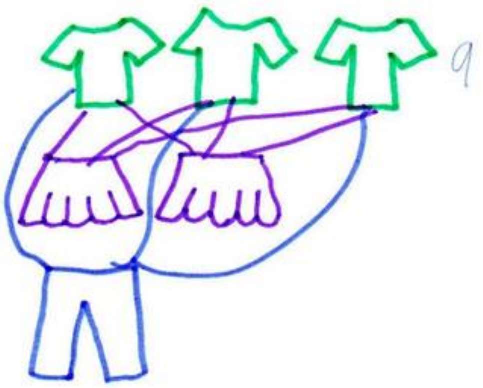
Zastoupení jednotlivých řešitelských strategií s ohledem na pohlaví ve třídě 5.B je zachyceno v grafu KT3.



Graf KT3 **Úspěšnost a řešitelské strategie první úlohy KT - 5.B**

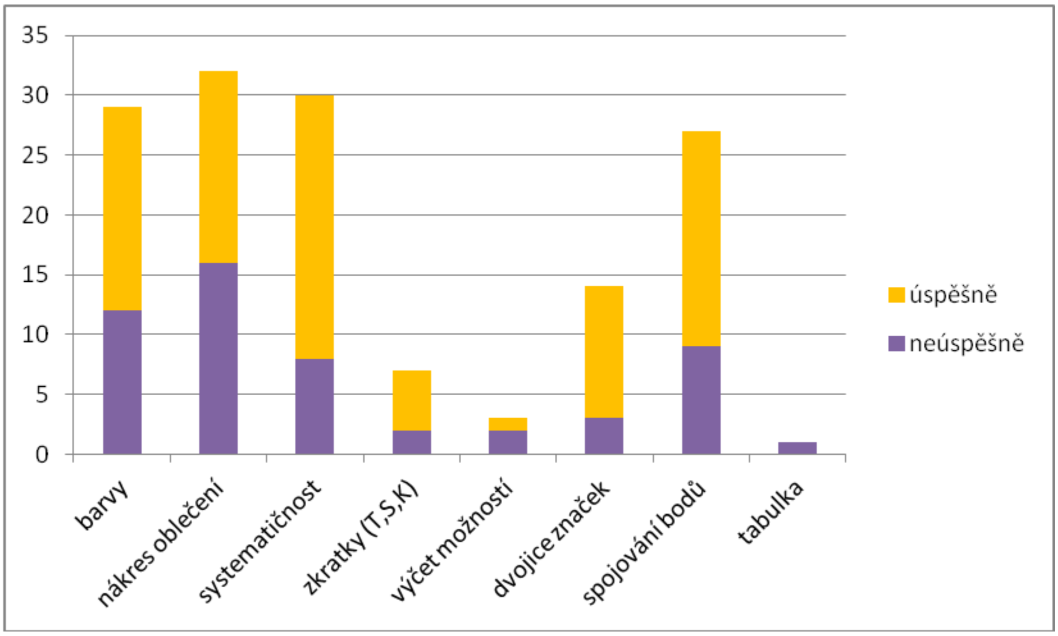
2. *Sára se rozhoduje, co si vezme na sebe. Vyndala ze skříně čtyři trička, dvě sukně a jedny kalhoty. Jak se může Sára obléknout? Vezme si buď jen kalhoty, nebo jen sukni, ne obojí!*

Správné odpovědi (*Sára si může obléknout 12 kombinací oblečení.)* dosáhlo celkem 50% žáků (tj. 23 ze 46). Z pohledu úspěšnosti tříd dopadla lépe 5.B, kde úlohu vyřešilo 54,2% jejích žáků (tj. 13 z 24). Pro srovnání v 5.A bylo úspěšných 45,4% žáků (10 z 22). Při řešení této úlohy se obecně mnohem více dařilo dívkám (***podporuje to hypotézu H1** – jde o oblečení, tedy o oblast bližší dívkám*). Z celkových 29 jich správného výsledku dosáhlo 18 (představuje 62,1%). Úspěšných chlapců bylo celkem 29,4% (tj. 5 ze 17). 8 ze všech 23 neúspěšných žáků řešilo úlohu vhodným způsobem, avšak nedodrželi počty kusů oblečení dle zadání. Zapomínali na trička, či nějaký kus oblečení přidali, proto je nelze zařadit mezi úspěšné řešitele (viz obr KT4). Dva chlapci úlohu vůbec neřešili.



Obr. KT4 **Ukázka řešení - nedodržení informací ze zadání**

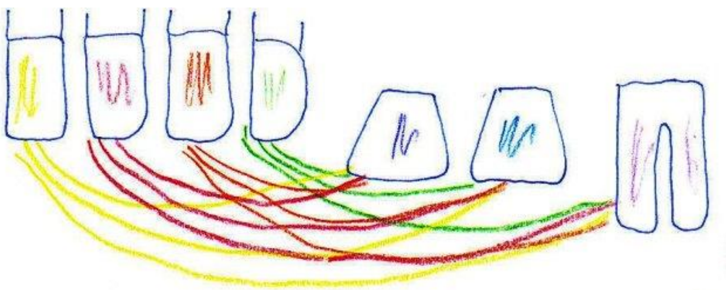
Mezi nejčastější metody patří spojování jednotlivých kusů oblečení (či bodů). Takto postupovalo celkem 16 žáků z celkových 46 (2 chlapci a 14 dívek). 14 žáků (5 chlapců a 9 dívek) znázorňovalo přímo jednotlivé kombinace dvou kusů oblečení s využitím značek či zkratek. 3 žáci (2 chlapci a 1 dívka) provedli přesný slovní výčet všech kombinací. Celkem 29 žáků (odpovídá 63% ze 46) doplnilo své grafické řešení barvami. Úspěšnost řešení v závislosti na využité strategii ukazuje graf KT4.



Graf KT4 **Řešitelské strategie ve druhé úloze kontrolního testu - celkově**

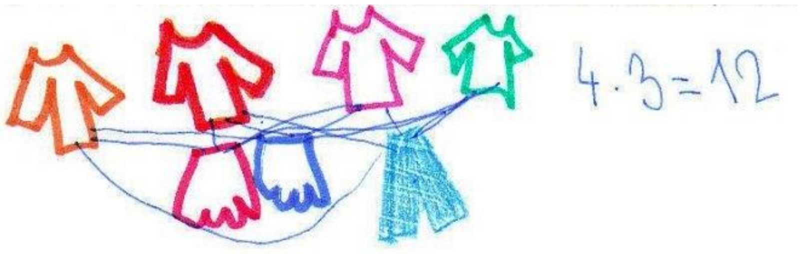
Vyhodnocení výsledků třídy 5.A

V 5.A řešilo druhou úlohu kontrolního testu úspěšně celkem 45,5% žáků této třídy (tj. 10 z 22). Z hlediska pohlaví jsou to 2 chlapci (ze 7) a 8 dívek (z 15). Barev při řešení využilo 16 žáků (představuje 72,2% třídy 5.A), z toho pouze 2 chlapci. 63,6% žáků (tj. 14 z 22) zobrazilo kombinace oblečení spojováním dvojic bodů či kusů oblečení (viz obr. KT5).



Obr. KT5 **Ukázka řešení 2. úlohy KT - 5.A**

Kromě jediného chlapce si všichni žáci 5.A při grafickém řešení pomohli nákresem oblečení. U 14 žáků (4 chlapci a 10 dívek), což představuje 63,6% 5.A, je zřejmá systematičnost řešení. Tři dívky doplnily svá řešení příkladem vyjadřujícím kombinatorické pravidlo součinu: 4 · 3 = 12 (viz obr. KT6).

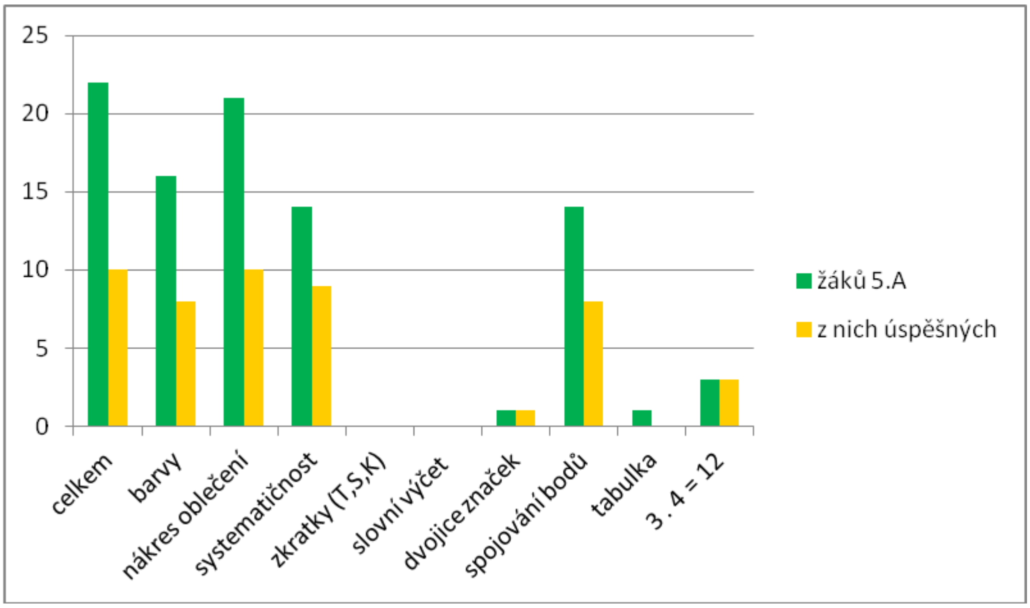


Obr. KT6 Ukázka řešení 2. úlohy KT s využitím matematického příkladu - 5.A

Jeden chlapec řešil úlohu tabulkou, místo čtyř triček však počítal s pěti. Dvě dívky nakreslily všechny kombinace oblečení (viz obr. KT7).

Obr. KT7 Ukázka zachycení všech kombinací ve 2. úloze KT – 5.A

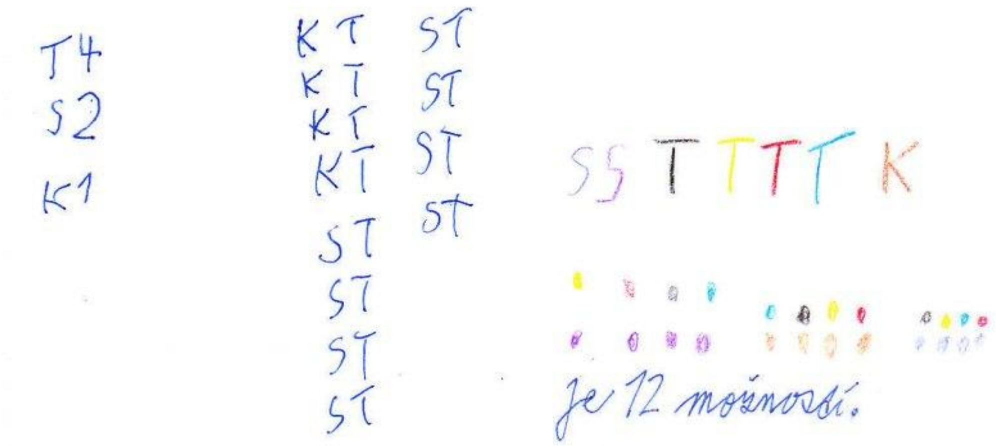
Úspěšnost žáků 5.A ve druhé úloze kontrolního testu v závislosti na zvolených řešitelských strategiích zachycuje graf KT5.



Graf KT5 **Úspěšnost a řešitelské strategie druhé úlohy kontrolního testu – 5.A**

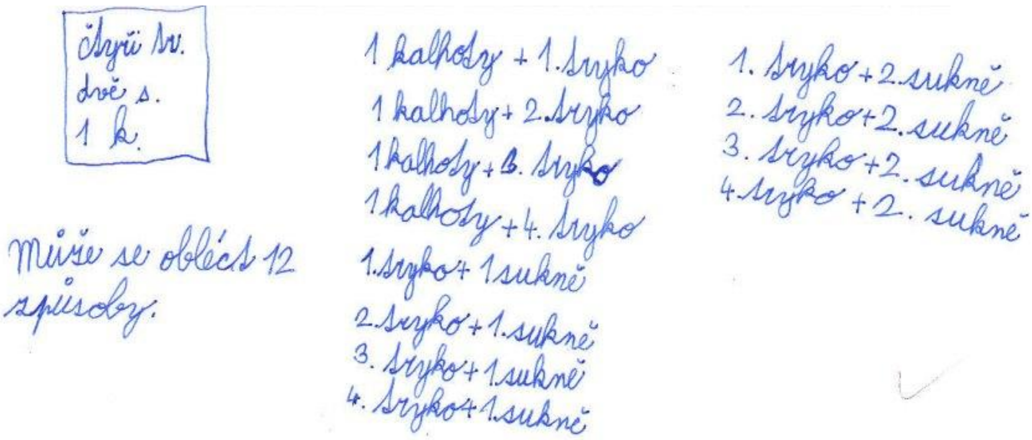
Vyhodnocení výsledků třídy 5.B

Ve třídě 5.B dosáhlo správného výsledku celkem 13 žáků z 24 (tj. 54,2%). Úspěšně řešilo úlohu 30% chlapců 5.B (3 z 10) a 71,4% dívek 5.B (10 ze 14). 13 žáků z celkových 24 (tj. 54,2%) využilo k řešení úlohy barvy. Nejčastější metodou v 5.B bylo zaznamenávání kombinací oblečení pomocí dvojic značek (či písmen). Tuto řešitelskou strategii využili 4 chlapci a 9 dívek (celkově tedy 54,2% třídy 5.B). 7 žáků zaznamenalo jednotlivé kusy oblečení pomocí zkratek, např. T1, T2, S1, K (viz obr. KT8).



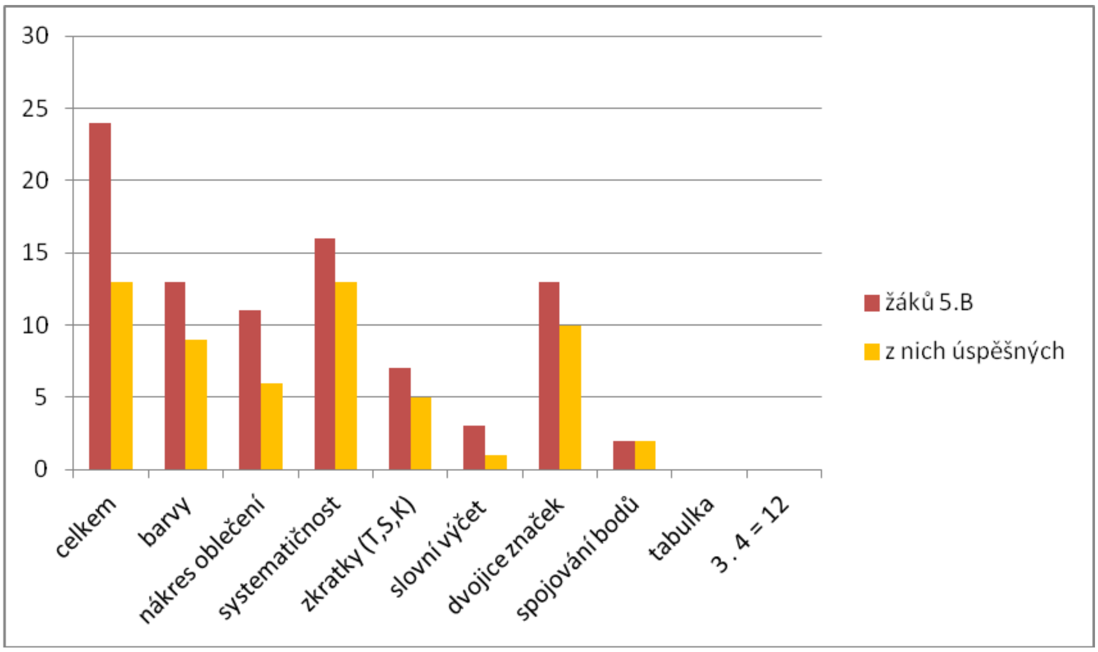
Obr. KT8 **Ukázka řešení 2. úlohy KT – 5.B**

Oblíbenou metodu 5.A – spojování jednotlivých kusů oblečení (či bodů) do dvojic - využilo ve třídě 5.B pouze 8,3% žáků (2 dívky). Dva chlapci a jedna dívka řešili úlohu pomocí úplného výčtu možností slovy (viz obr. KT9).



Obr. KT9 Ukázka řešení úlohy výčtem kombinací - 5.B

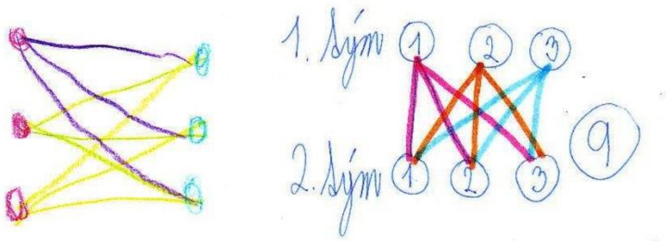
U 66,7% žáků 5.B (celkem 16 žáků – 4 chlapci a 12 dívek) se objevilo systematické řešení úlohy. 11 žáků (2 chlapci a 9 dívek) si při řešení pomohlo kresbou jednotlivých kusů oblečení. Úspěšnost žáků 5.B při řešení druhé úlohy kontrolního testu v závislosti na řešitelských strategiích zachycuje graf KT6.



Graf KT6 Úspěšnost a řešitelské strategie druhé úlohy kontrolního testu - 5.B

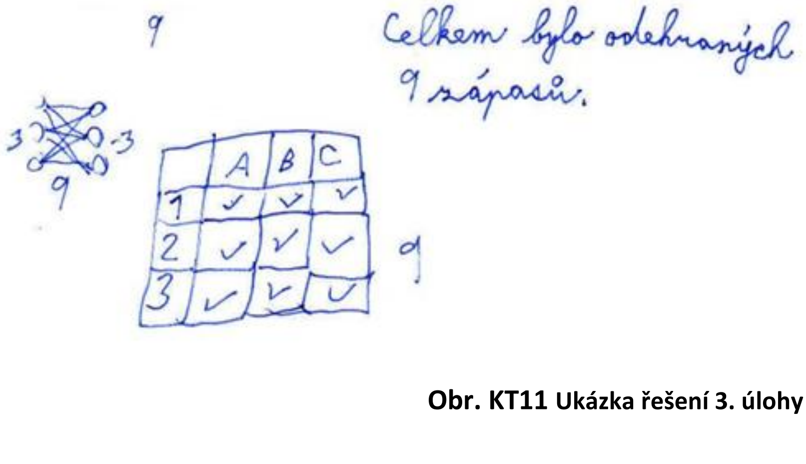
***3.** V turnaji piškvorek se proti sobě utkaly dva trojčlenné týmy. Každý člen z jednoho týmu si zahrál se všemi členy druhého týmu. Kolik bylo celkem odehraných zápasů?*

Ve třetí úloze kontrolního testu dosáhli testovaní žáci velmi vysoké úspěšnosti. Úlohu vyřešilo 37 žáků z celkových 46 (tj. 80,4%). Z hlediska tříd byla opět úspěšnější 5.B, správného výsledku dosáhlo 83,3% jejích žáků (tj. 20 z 24). V 5.A úlohu řešilo správně 77,3% žáků (tj. 17 z 22). Chlapci řešili úlohu úspěšně v 82,4% případů (tj. 14 chlapců z celkových 17). 23 dívek z celkových 29 (odpovídá 79,3%) také dosáhlo správného výsledku. Nejčastější metodou řešení bylo spojování bodů představujících hráče (viz obr. KT10). Využilo ji 28 z celkového počtu 46 žáků (odpovídá 60,9%).



Obr.KT10 Ukázka řešení 3. úlohy KT - spojování bodů

Pět žáků (všichni z 5.B), což odpovídá 10,9% z 46 využilo tabulky (viz obr. KT11). Sedm žáků (15,2%) vypočítalo úlohu pomocí příkladu: $3 \cdot 3 = 9$ (viz obr. KT13). Pět žáků zaznamenalo odehrané zápasy dvojicemi značek (viz obr. KT12). Celkem 52,2% (tj. 24 žáků – 20 dívek a 4 chlapci) doplnilo své řešení barvami.

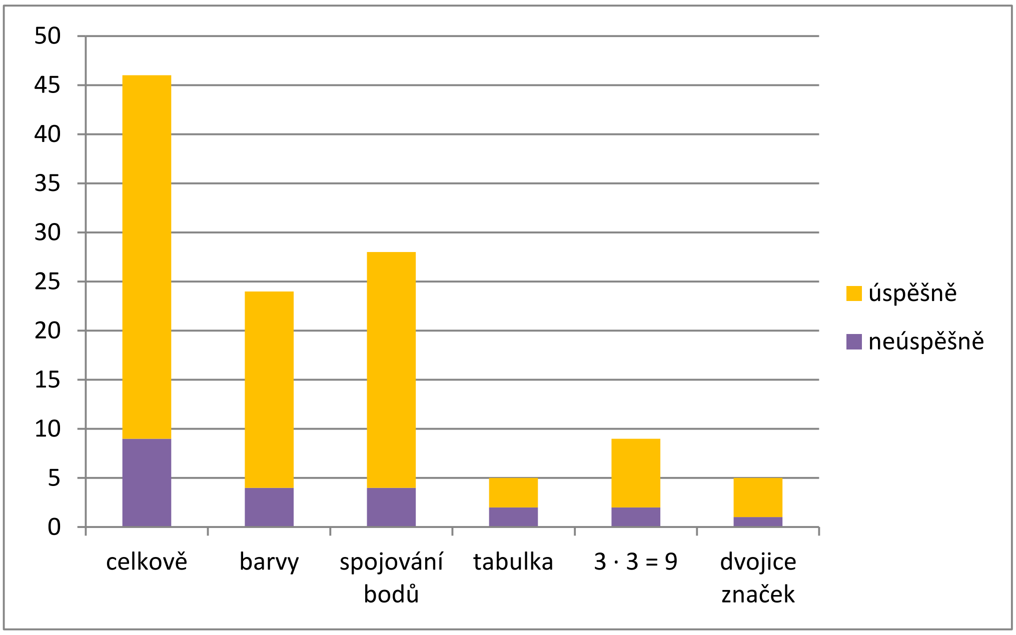


Obr. KT11 Ukázka řešení 3. úlohy KT – tabulka

Obr. KT12 **Ukázka řešení 3. úlohy KT - barevné značky**

Obr. KT13 **Ukázka řešení 3. úlohy KT - 5.A**

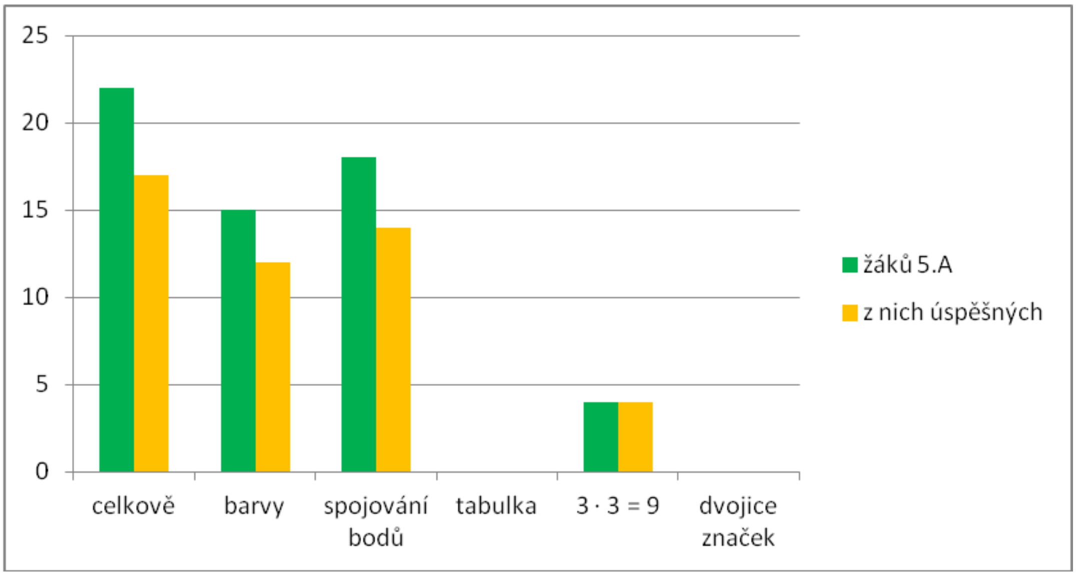
Celkovou úspěšnost řešení druhé úlohy kontrolního testu v závislosti na řešitelských strategiích zachycuje graf KT7.



Graf KT7 **Řešitelské strategie a úspěšnost 3. úlohy kontrolního testu - celkově**

Vyhodnocení výsledků třídy 5.A

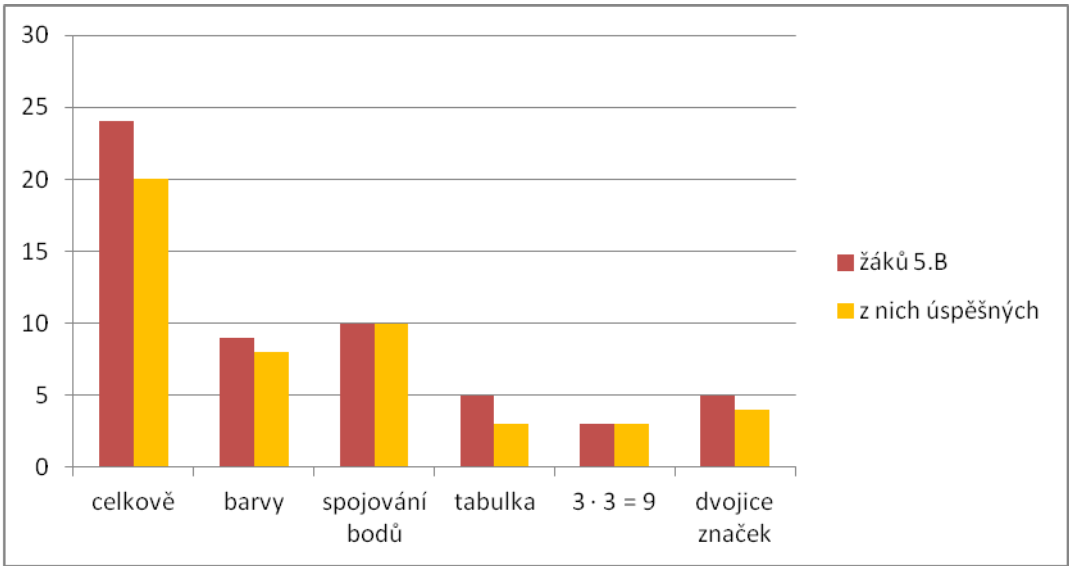
Ve třídě 5.A dosáhlo správného výsledku celkem 77,3% žáků. Z hlediska pohlaví se jedná o 5 chlapců ze 7 (tj. 71,4% chlapců z 5.A) a 12 dívek z 15 (tj. 80% dívek 5.A). U neúspěšných řešitelů 5.A se objevily tyto počty odehraných zápasů: 3, 15 a 18 (doplněno příkladem 6 · 3 = 18). Nejčastější metodou se ve třídě 5.A stalo spojování bodů představujících jednotlivé hráče. Úlohu takto řešilo celkem 18 žáků z 22 (tj. 81,8%). Metodu nevyužily pouze čtyři dívky. 68,2% žáků 5.A (tj. 15 z 22) doplnilo své řešení barvami. Čtyři dívky řešily úlohu pomocí příkladu: 3 · 3 = 9 (čímž prokázaly podvědomé chápání kombinatorického pravidla součinu). Žádný žák 5.A nevyužil k řešení úlohy tabulku. Graf KT8 ukazuje úspěšnost žáků 5.A v závislosti na zvolených řešitelských strategiích.



Graf KT8 Úspěšnost a řešitelské strategie třetí úlohy kontrolního testu - 5.A

Vyhodnocení výsledků třídy 5.B

Ve třídě 5.B řešilo třetí úlohu kontrolního testu úspěšně 83,3% žáků (tj. 20 z 24). Jde o 9 chlapců z 10 a 11 dívek z 14. U čtyř neúspěšných žáků se objevilo, že odehraných zápasů bylo: 6, dvakrát 15 a 18. Deset žáků (5 chlapců a 5 dívek), což odpovídá 41,7% třídy řešilo úlohu graficky spojováním bodů. 5 žáků (tj. 20,8%) využilo pro řešení tabulku. Shodný počet žáků, tedy 5, znázorňoval odehrané zápasy dvojicemi značek. Tři žáci řešili úlohu příkladem: 3 · 3 = 9. Jeden žák volil neúspěšně příklad: 3 · 2 = 6. Devět žáků 5.B (tj. 37,5%) doplnilo své řešení barvami. Úspěšnost žáků 5.B v závislosti za zvolených řešitelských strategiích je zachycena v grafu KT9.



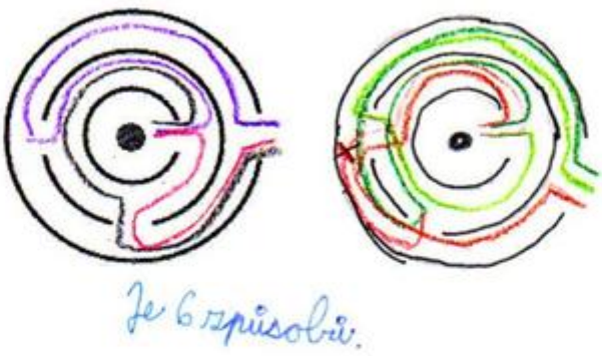
Graf KT9 Úspěšnost a řešitelské strategie třetí úlohy kontrolního testu - 5.B

4. *Kolika způsoby se dostane červená kulička ven z bludiště? Nikdy neprojde dvakrát stejnou cestou.*

Všech 8 možných cest našlo 7 žáků (3 dívky a 4 chlapci) z celkových 46 (tj. 15,2%). Jeden úspěšný řešitel je ze třídy 5.A, ostatních 6 je z 5.B. Při vyhodnocování poslední úlohy kontrolního testu jsem se zaměřila zejména na způsob hledání, resp. registraci, nalezených cest: zajímalo mě, zda budou žáci hledat všechny možné cesty v jediném natištěném bludišti, či zda budou hledat další možnosti ve vlastním překresleném obrázku (viz obr. KT14). Bludiště si alespoň jednou překreslilo 10 žáků ze 46 (tj. 21,7%).

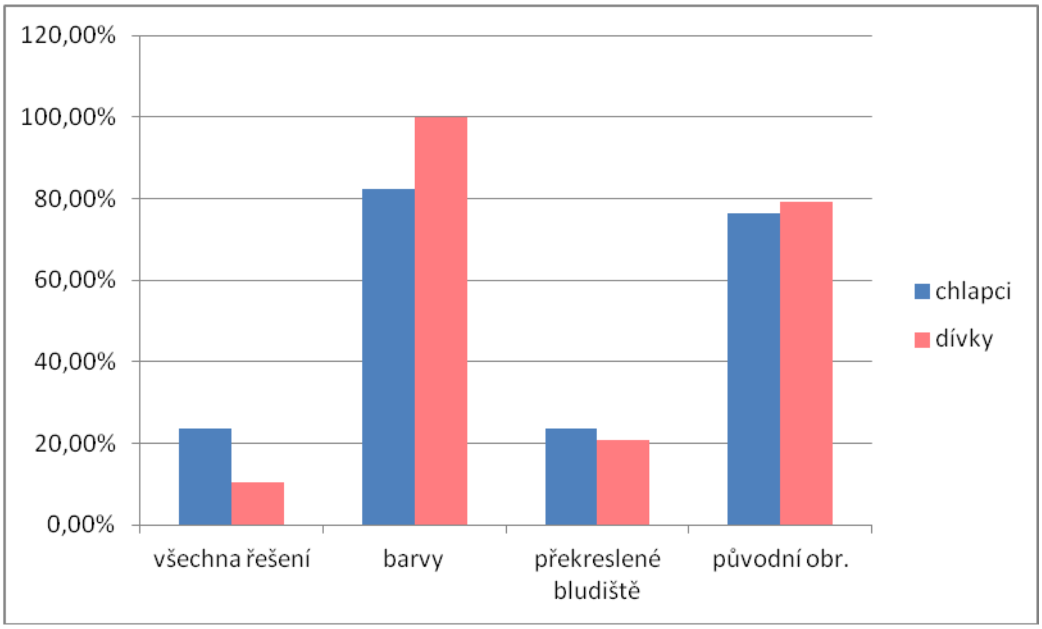
Pozn.: *Obrázek bludiště v kontrolním testu mohl být větší. Předpokládala jsem však, že si jej žáci budou hojněji překreslovat a hledat cesty ve více obrázcích.*

43 žáků ze 46 (tj. 93,5%) využilo při hledání možných cest barvy. Průměrně našli všichni testovaní žáci 5 možných cest.



Obr. KT14 **Ukázka řešení 4. úlohy KT - překreslené bludiště**

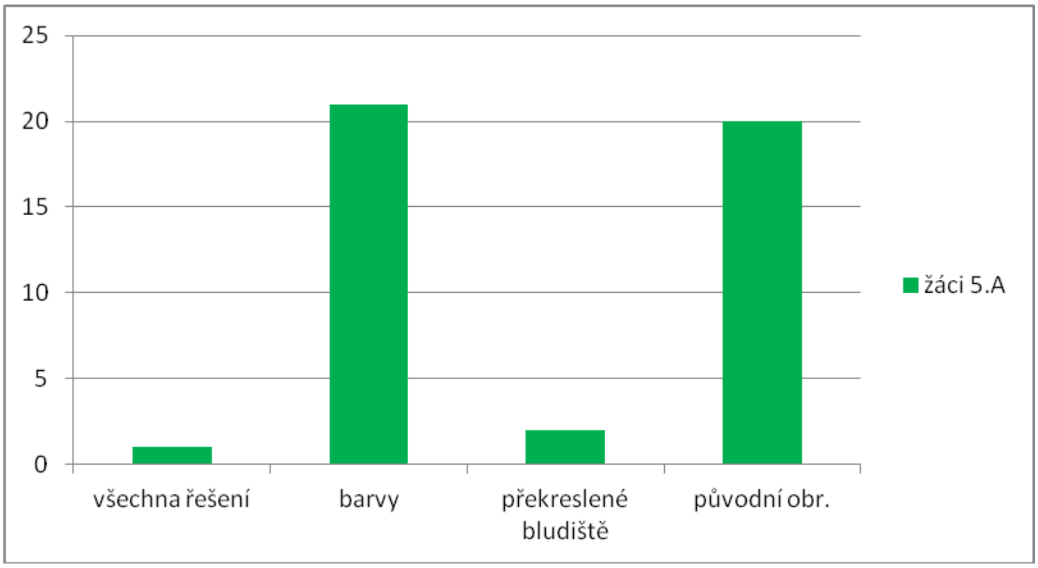
Strategie žáků s ohledem na pohlaví jsou zachyceny v grafu KT10. Vyplývá z něj, že pro evidenci řešení využívají žáci z velké části barev.



Graf KT10 Řešitelské strategie 4. úlohy KT – celkově

Vyhodnocení výsledků třídy 5.A

Všech 8 možných cest, kterými se kulička dostane z bludiště, objevila jediná žákyně. 20 žáků z celkových 22 (tj. 90,9%) hledalo různé možnosti v původním natištěném bludišti. Dva žáci (chlapec a dívka) si bludiště jednou překreslili. Barev v 5.A využilo 21 žáků (tj. 95,5%). Řešitelské strategie 5.A a úspěšnost řešení ukazuje graf KT11. Průměrně našli žáci 5.A 4 až 5 možných cest.

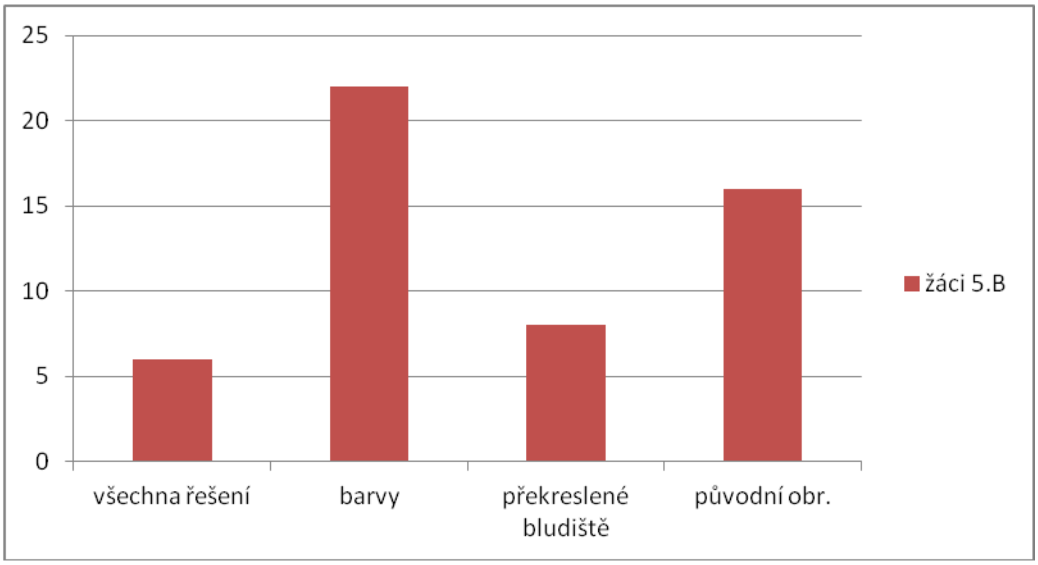


Graf KT11 Řešitelské strategie 4. úlohy KT - 5.A

Vyhodnocení výsledků třídy 5.B

25% žáků třídy 5.B (tj. 6 z 24) objevilo všechny možné cesty z bludiště. Z hlediska pohlaví jde o 2 dívky a 4 chlapce. Třetina žáků z 5.B (3 chlapci a 5 dívek) hledala cesty v překreslených bludištích. 4 z nich (1 chlapec, 3 dívky) si překreslili bludiště jen jednou. 4 zbývající žáci si bludiště překreslili 3 – 4 krát, což zřejmě velkou měrou přispělo k tomu, že poté nalezli všech 8 možných cest. Další dva úspěšní řešitelé patřili mezi 16 žáků, kteří hledali různé možnosti v jediném natištěném bludišti. 91,7% žáků 5.B (tj. 22 z 24) využilo při řešení barevné pastelky. Řešitelské strategie a úspěšnost řešení v 5.B ukazuje graf KT12. Průměrně našli žáci 5.B 6 cest z bludiště.

Pozn.: *Větší úspěšnost žáků 5.B lze přičíst právě překreslování bludiště, a hledání různých cest ve více obrázcích. Tím žáci dosáhli větší přehlednosti řešení. Jako další příčina se nabízí fakt, že s žáky 5.B jsem při procvičování kombinatorických úloh vyzkoušela také hledání cest ve dvou různých jednodušších bludištích. Vždy jsme různé cesty kontrolovali ve více překreslených obrázcích na tabuli (***podporuje H1***).*



Graf KT12 Řešitelské strategie 4. úlohy KT - 5.B

Shrnutí výsledků kontrolního testu

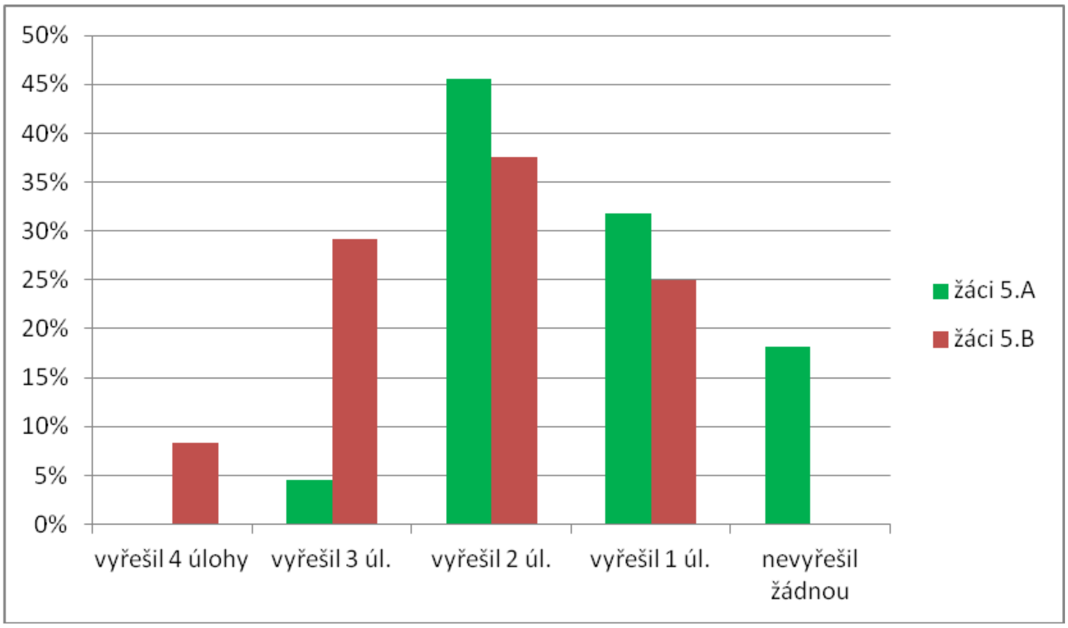
Výsledky kontrolního testu (dále i jako KT) ukazují, že:

- Celková úspěšnost jednotlivých žáků pátých tříd při řešení kontrolního testu je následující:

Celková úspěšnost jednotlivců	**žáci 5.A**	**žáci 5.B**
Řešili úspěšně všechny 4 úlohy.	0	2
Řešili úspěšně 3 úlohy.	1	7
Řešili úspěšně 2 úlohy.	10	9
Řešili úspěšně 1 úlohu.	7	6
Nevyřešili úspěšně žádnou z úloh.	4	0

Tab. KT1 Úspěšnost jednotlivých žáků při řešení VT

Z tabulky je zřejmé, že úspěšnější při řešení kontrolního testu byli žáci 5.B. Dokazuje to i následující graf KT13 s procentuálním vyjádřením situace.



Graf KT13 Celková úspěšnost jednotlivců při řešení KT

Výpočet aritmetického průměru ukazuje, že ve třídě 5.A řešil jeden žák průměrně úspěšně jednu úlohu (1,36). Oproti vstupnímu testu jde o mírné zhoršení (1,55). Ve třídě 5.B řešil jeden žák průměrně více než dvě úlohy úspěšně (2,21). Srovnám-li tento údaj se vstupním testem, pak jde o mírné zlepšení (z 1,83). ***(poukazuje na účinnost souboru úloh)***

Další údaje vyplývající z vyhodnocení vstupního testu:

- Žáci 5.B řešili v porovnání se třídou 5.A úspěšněji všechny čtyři úlohy vstupního testu.
- Řešitelské strategie třídy 5.A se nijak výrazně nezměnily: žáci hojně využívají barev (více než žáci 5.B), grafické znázornění je konkrétnější (obrázek motýla – *1. úloha KT*, oblečení – *2. úloha KT*, spojování bodů – *3. úloha KT*)
- U žáků 5.B (podobně jako při vstupním testu) je zřejmé zjednodušování grafického záznamu, které umožňuje nalézt v kratší době více možností řešení. Žáci také častěji využívají metod, při nichž není nutno využít barvy (značky – *viz vyhodnocení 1., 2., 3. úlohy KT* , zkratky, příklady – *obojí ve 2. úloze KT – viz vyhodnocení*).

- Oproti 5.A je v 5.B více uplatňováno systematické řešení (*viz vyhodnocení 1. a 2. úlohy KT*).
- Předešlé body ***podporují hypotézy H2, H2a, H3.***

Závěrečné shrnutí:

Z vyhodnocení kontrolního testu je zřejmé, že na základě utřídění si vstupních informací se u žáků rozvíjí schopnost lepšího záznamu řešení, s čímž souvisí i rozvoj systematického řešení kombinatorických problémů.

Dále se ukázalo, že systematické řešení úloh rozvíjí řešitelské strategie a zvyšuje úspěšnost v řešení úloh. Potvrdila se účinnost navrženého souboru kombinatorických problémů a navržený metodický postup pro využití kombinatorických úloh ve vyučovacích hodinách.

3.2.4 Dotazník

Dotazovaných bylo 22 žáků třídy 5.A (16 dívek a 6 chlapců) a 24 žáků z 5.B (17 dívek a 7 chlapců). Dotazník byl žákům předložen až po vyplnění kontrolního testu, tedy na úplný závěr experimentu.

Dotazníky pro žáky tříd 5.A a 5.B se lišily. Žáci 5.A odpovídali pouze na otázku, zda se někdy setkali s úlohami podobnými těm ve vstupním testu a dále na to, kde se podle nich mohou úlohy tohoto typu objevovat. Žáci 5.B navíc hodnotili kombinatorické úlohy, které jsem s nimi vyzkoušela během šesti vyučovacích hodin (viz kapitola 3.2.2 Procvičování). Měli za úkol určit obtížnost úloh a také je oznámkovat dle toho, jak jim přišly zábavné. Kromě toho jsem je vyzvala ke stručné sebereflexi, kdy měli dle svého mínění zapsat, co jim při řešení kombinatorických úloh dělalo problémy a co pro ně bylo naopak snadné. Ukázku vyplněného dotazníku lze nalézt v příloze P5.

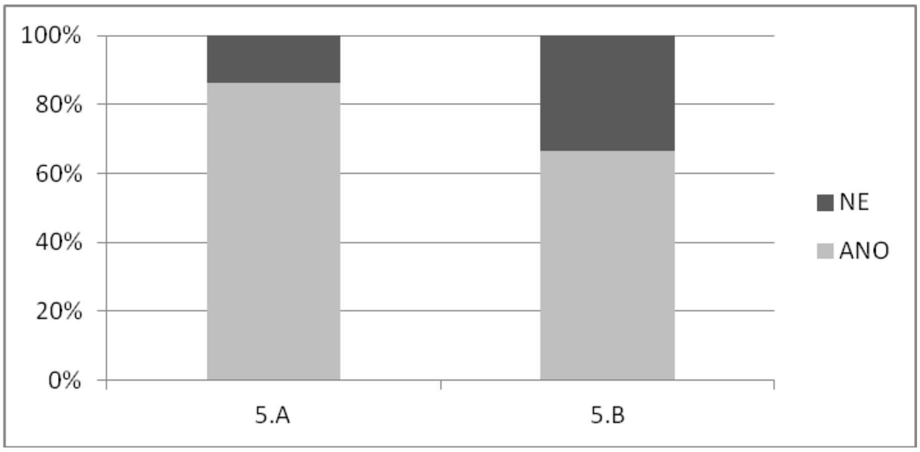
Vyhodnocením dotazníku jsem získala následující výsledky:

1. Setkal(a) ses už někdy s podobnými úlohami?

Ve třídě 5.A zvolilo 86,36% žáků (tj. 19 z 22) odpověď „ANO". Z hlediska pohlaví se jedná o 14 dívek (z 16) a 5 chlapců (z 6). Z těchto 19 žáků jich 15 (12 dívek a 3 chlapci) upřesňuje, že kombinatorické úlohy řešili ve škole. 5 žáků (2 dívky a 3 chlapci) údajně řešilo podobné úlohy doma. Volbu „venku" a „jinde" nezvolil žádný žák. Pouze tři žáci odpověděli, že se kombinatorické úlohy dosud neřešili. Jde o 2 dívky a 1 chlapce.

Z těchto výsledků je zřejmé, že žáci 5.A se ve škole již s kombinatorickými úlohami setkali. Potvrdila to i paní učitelka, která prý podobné problematické úlohy občas do výuky zařazuje (např. *„nedávno řešili v učebnici úlohu na výběr oblečení a tvoření různých kombinací"*). Úlohy s žáky řeší společně i na tabuli a hojně při tom využívá barevných kříd (***podporuje to hypotézu H1****: úspěšnost řešení komb. úloh je ovlivněna zkušenostmi žáků – právě v 5.A je při řešení úloh patrné časté využití barev*).

Ve třídě 5.B zvolilo odpověď „ANO" 66,67% žáků (tj. 16 z 24). Jde o 13 dívek a 3 chlapce. Z nich 14 žáků upřesňuje, že se s kombinatorickými úlohami setkalo ve škole (12 dívek a 2 chlapci). 2 dívky řešily tento typ úloh doma a jeden chlapec uvedl, že se s podobným typem úloh setkal „jinde" a to na sportovních akcích. Třetina žáků 5.B (tj. 4 dívky a 4 chlapci) uvedla, že se s kombinatorickými úlohami dosud nesetkala. Rozdíl mezi procentuálním zastoupením žáků, kteří odpověděli ano či ne v obou třídách ukazuje graf DOT1.



Graf DOT1: Odpověď žáků obou tříd na 1. otázku dotazníku

Pan učitel 5.B se zmínil, že problémové úlohy do vyučování občas zařazuje, ale nejsou to úlohy rozvíjející přímo kombinatorické myšlení. Dbá ale na rozvoj grafického řešení slovních úloh, což se pozitivně projevilo v řešitelských strategiích žáků 5.B již ve vstupním testu (***taktéž podporuje H1***).

V obou testovaných pátých třídách se žáci učí matematice dle učebnic vydavatelství Prodos. V nich, jak jsem zjistila (viz kapitola 2.4 Kombinatorické úlohy v učebnicích pro 5. ročník ZŠ), se kombinatorické úlohy vyskytují v malé míře až ve druhém a třetím díle. Pokud učitelé tyto úlohy nepřeskakují, pak by s nimi měli mít testovaní žáci alespoň základní zkušenost. V době, kdy jsem v pátých třídách prováděla výzkum, pracovali žáci již s druhou polovinou druhého dílu učebnice Prodos.

2. Kde si myslíš, že se podobné úlohy mohou objevovat?

Tuto volnou otázku jsem položila žákům 5.A i 5.B. Žáci odpovídali takto:

5.A:

- *v matematice /////////*
- *ve škole ///*
- *v matematických soutěžích /////*
- *ve kvízech //*
- *při sportech //*
- *v testu na myšlení /*
- *na internetu /*
- *v testech /*
- *v pracovním sešitě /*
- *v životě /*
- *v prvních třídách, lehčí už v MŠ /*

5.B:

- *při přijímačkách ///////*
- *ve škole (v matematice) //////*
- *v matematických soutěžích ////*
- *když se oblékám ///*
- *ve srovnávacích SCIO testech //*
- *v pracovním sešitě matematiky //*
- *na druhém stupni //*
- *na střední a vysoké škole //*
- *na táboře /*
- *doma při uklízení /*
- *na školním výletě /*
- *na internetu /*
- *v práci /*
- *na úřadě /*
- *v pololetních pracích /*
- *o Silvestru, až si budeme připíjet /*

Je zřejmé, že žáci 5.B (kteří prošli procvičováním kombinatorických úloh) si již lépe uvědomují, že kombinatorika nás doprovází v každodenních situacích.

3. Co ti dělalo při řešení úloh PROBLÉMY?

Tato volně položená otázka byla určena žákům 5.B. Řekla jsem jim, ať si vzpomenou, jak jsme zkoušeli různé kombinatorické úlohy, a ať zkusí napsat, co se jim při řešení nedařilo. Zpočátku byli žáci poněkud v rozpacích, tak jsem jim musela poradit a naznačit jim, na co se vlastně ptám. Dala jsem jim tyto návodné otázky: „*Co ti při řešení úlohy nešlo? Pochopil jsi vždycky zadání úlohy? Našel jsi vždycky nějaký systém řešení? Kreslil jsi při řešení obrázky? Pracovalo se ti lépe samostatně, nebo ve skupince?*“. Poté již žáci začali s psaním odpovědí. Objevily se následující (jsou označeny opakující se, či podobné odpovědi):

- *Dělalo mi problémy někdy si to znázornit nebo spočítat.*
- *To, kolik je řešení.*
- *Pořád to bylo o tom, kolik to má řešení, že jsem se pak do toho zamotal.*
- *Vyznat se v barvách.*
- *Nic.* //
- *Nevydržela jsem se soustředit.* //
- *Jak u čeho – no chce to hodně přemýšlet!*
- *Na začátku jsem to někdy nepochopila.* ////
- *Kolik je cest.*
- *Nevím.*
- *Většinou jsem nenašla všechna řešení.*
- *Dělají mi problémy všechny LOGICKÉ úlohy.*
- *Pizza mi dělala problém, protože jsem to nepochopila.* //

4. Co pro tebe bylo při řešení úloh SNADNÉ?

Volná otázka, podobná té v předchozím případě, určená taktéž jen žákům 5.B. Tentokrát zjišťuji, v čem byli žáci podle svého mínění při řešení kombinatorických úloh úspěšní, co se jim dařilo. Zaznamenala jsem tyto odpovědi:

- *Pomáhala mi tabulka, takže to bylo lehké.*
- *Když jsme si to ukazovali (např. kostýmy a ten vlak – cedulky).*
- *Pro mě to bylo snadné, ale musela jsem si udělat svůj systém.*
- *Zápis, znázornění (asi u dvou ne), používat barvy.*
- *Šly mi docela ty nákresy.*
- *Znázornit si to.*
- *Když tam byly tabulky.*
- *Bylo tam hodně místa na řešení úlohy.*
- *Hledat cesty.*
- *Si to představit.*
- *Šly mi dělat logické úvahy.*

- *Spočítat zvířecí nohy.*
- *Počítání.*
- *Přemýšlet.*
- *Úlohu vyřešit.*
- *Poslouchat.*

Je vidět, že žáci pátých tříd ještě nedokážou zcela dokonale popsat svůj výkon, respektive jej slovně zformulovat. Přesto si z jejich odpovědí lze udělat obrázek o tom, jak hodnotí vlastní silné a slabé stránky řešení kombinatorických úloh.

5. Úlohy, které se ti zdály LEHKÉ – ZAKROUŽKUJ!
Úlohy, které se ti zdály TĚŽKÉ – ŠKRTNI ČAROU!

Tuto otázku jsem měla lépe formulovat. Představovala jsem si totiž, že žáci vyberou jen některé úlohy, které se jim zdály moc těžké a pak některé úlohy, které pro ně byly velmi lehké. Žáci však většinou označovaly všechny úlohy, rozdělili je tedy do dvou skupin: na lehké a těžké. Nicméně i to mi posloužilo ke zhodnocení vnímání procvičovaných úloh žáky. Výsledky jsou následující:

Jako nejlehčí úloha se žákům 5.B jevila Chlapci v kupé. Jako jednoduchou ji označilo 21 žáků (z 24). Po ní následují úlohy označené dvaceti žáky: Zvířecí delegace, Petr na kole, Bludiště a Myš běží k sýru. Je zajímavé, že právě úlohy Zvířecí delegace a Chlapci v kupé jsme s žáky zinscenovali. Reálné zobrazení situace žáky dle reakcí při hodině velmi bavilo a jak je vidět, také jim pomohlo v pochopení úlohy a v kladnějším pojímání obtížnosti úlohy. Úlohy zaměřené na grafické hledání cest odněkud někam (charakter bludiště) byly ve třídě 5.B také velmi oblíbené. Vzhledem k tomu, že je všem žákům na první pohled jasné, co a jakým způsobem mají v takovýchto úlohách hledat, pak není nijak překvapivé, že tyto úlohy řadí mezi jednoduché. Z hlediska pohlaví byla náročnost úloh pojímána odlišně. Zatímco všichni chlapci (7) považují za nejjednodušší úlohu Bludiště, všechny dívky (17) označily za nejlehčí úlohu Petr na kole.

Nejobtížněji vnímanou úlohou se ve třídě 5.B staly Nástroje. Ačkoliv jsme pro lepší představu využili v hodině konkrétních nástrojů, nezdála se žákům tato úloha lehká. Za těžkou ji považovalo celkem 13 žáků 5.B (z 24). Druhou nejtěžší realizovanou úlohou se stala Pizza, označilo ji 10 žáků 5.B.

I tentokrát se liší názor chlapců a dívek. Chlapcům připadaly nejtěžší úlohy Petr na kole a Dárek M+T. Označili je shodně 4 chlapci (ze 7). Dívkám se zdála nejtěžší úloha Nástroje (10 ze 17), po ní následovala Pizza (8 ze 17).

Celkové ohodnocení náročnosti úloh ve třídě 5.B ukazuje tabulka DOT1.

NÁROČNOST:	CELKOVĚ		CHLAPCI		DÍVKY	
	lehké	**těžké**	**lehké**	**těžké**	**lehké**	**těžké**
Dárek M+T	18	6	3	4	15	2
Chlapci v kupé	21	3	6	1	15	2
Zvířecí delegace	20	4	4	3	16	1
Přípitek	17	7	6	1	11	6
Čtvercová síť	16	8	4	3	12	5
Nástroje	11	13	4	3	7	10
Člověče, nezlob se	18	6	6	1	12	5
Pohledy	15	9	4	3	11	6
Pizza	14	10	5	2	9	8
Petr na kole	20	4	3	4	17	0
Bludiště	20	4	7	0	13	4
Myš a sýr	20	4	6	1	14	3

Tab. DOT1: Vnímaná obtížnost úloh ve třídě 5.B

6. Oznámkuj úlohy podle toho, jak tě BAVILY:

(známka **1** = úloha mě hodně bavila; známka **5** = úloha mě vůbec nebavila)

Vyzvala jsem žáky 5.B, aby jednotlivé procvičované úlohy oznámkovali dle toho, jak se jim zdály zábavné. Někteří žáci se nechali zmást dodatkem, kde vysvětluji, co znamená známka 1 a známka 5, a používali nejprve pouze tyto dvě známky. Po chvíli jsem si toho všimla a vyzvala jsem je, aby využívali všechny známky od jedničky do pětky.

Nejvíce žáky dle známek v dotazníku bavila realizace kombinatorické úlohy Zvířecí delegace a hledání cest v Bludišti. Obě tyto úlohy označilo zároveň 20 žáků z 24 za lehké. Projevila se tedy jistá souvislost mezi obtížností a zajímavostí, resp. zábavností úloh. Naopak nejméně zábavná žákům připadala úloha Pizza. Její obtížnost hodnotili žáci různě (14 jako lehkou, 10 jako těžkou). Popis realizace všech úloh viz kapitola 3.2.2 Procvičení. Celkově hodnocení zábavnosti úloh předčilo má očekávání. Nejhůře hodnocená úloha s průměrnou známkou 3,13 není zase tak špatný výsledek. Průměrné hodnocení zábavnosti procvičených úloh ukazuje tabulka DOT2.

úloha	průměrná známka
Zvířecí delegace	1,62
Bludiště	1,62
Přípitek	1,67
Myš a sýr	1,76
Nástroje	2,0
Chlapci v kupé	2,0
Čtvercová síť	2,19
Člověče, nezlob se	2,19
Dárek M+T	2,19
Pohledy	2,91
Petr na kole	3,08
Pizza	3,13

Tab. DOT2: Hodnocení úloh z hlediska zábavnosti v 5.B

Shrnutí výsledků vyplývajících z dotazníku

- Žáci obou tříd se již setkali ve větší či menší míře s kombinatorickými úlohami. Většina z nich upřesňuje, že to bylo ve škole. Přístup učitelů k těmto úlohám ovlivňuje řešitelské strategie žáků (***podporuje to H1).***

- Žáci si uvědomují, že kombinatorické problémy se mohou objevovat v matematických soutěžích a různých testech (zejména pak v přijímacích zkouškách). Dále žáci vnímají fakt, že kombinatorika nás provází i v běžném životě. Patrnější je to u žáků 5.B, s nimiž jsem během šesti vyučovacích hodin kombinatorické problémy procvičovala.
- Dle odpovědí žáků jim největší problémy při řešení kombinatorických úloh činí pochopit samotné zadání úkolu, hledání všech řešení a udržení pozornosti. Naopak lehké žákům často připadá grafické znázornění problému (obrázek, barvy, tabulka).
- Reálné zobrazení situace usnadňuje žákům porozumění danému problému a přináší kladnější pojímání obtížnosti úlohy.
- Lze říci, že aktivizující činnosti, jež doplňují kombinatorické problémy, zvyšují motivaci a zájem žáků o danou problematiku.

3.3 Ověření hypotéz

Na počátku práce jsem si stanovila čtyři (resp. pět) hypotézy. K jejich ověření jsem využila tyto metody:

- přímé pozorování řešitelských strategií žáků,
- dotazník,
- rozhovor s učiteli,
- analýza učebnic matematiky pro 5. ročník ZŠ,
- analýza testů – vyhodnocení výsledků vstupního a kontrolního testu (a jejich porovnání), srovnání výsledků třídy s přímým působením (5.B) s výsledky třídy bez přímého působení (5.A).

Podrobné zpracování výsledků dotazníků, zadaných testů, stejně tak analýza učebnic a závěry z pozorování jsou popsány v předchozích kapitolách. V rámci těchto kapitol jsem se průběžně zaměřovala na jevy podporující hypotézy. V daných místech jsem pak uváděla přímo odkazy k jednotlivým hypotézám. Proto zde neopakuji znovu všechny závěry, pouze shrnuji, na jakých konkrétních místech se podařilo jednotlivé hypotézy ověřit.

H1: *Řešení úloh a jejich úspěšnost jsou ovlivněny zkušenostmi a zájmy žáků.*

Hypotézu se podařilo ověřit.

O základních zkušenostech žáků s kombinatorickými úlohami vypovídá analýza učebnic matematiky pro 5. ročník ZŠ (viz kap. 2.5, str. 27) a také odpovědi žáků v dotazníku (viz kap. 3.2.4, str. 121). Hypotéza je potvrzena řešitelskými strategiemi žáků ve vstupním testu, jež byly velkou měrou ovlivněny přístupem učitelů jednotlivých tříd k řešení úloh (viz kap. 3.2.1, podkapitola Vyhodnocení vstupního testu, str. 49). Dále byla H1 potvrzena větší úspěšností dívek při řešení 2. úlohy kontrolního testu (viz kap. 3.2.3, podkapitola Vyhodnocení kontrolního testu, str. 106). H1 podpořily i rozdílné řešitelské strategie tříd 5.A a 5.B ve 4. úloze kontrolního testu (viz kap. 3.2.3, podkapitola Vyhodnocení kontrolního testu, str. 115).

H2*: Řešení kombinatorických úloh rozvíjí schopnost žáků třídit, zaznamenávat a dále zpracovávat vstupní informace v zadání úlohy.*

Hypotézu se podařilo ověřit.

Hypotézu nejlépe potvrzuje větší úspěšnost třídy 5.B při řešení kontrolního testu, zejména pak 1. úloha (viz kap. 3.2.3, podkapitola Vyhodnocení kontrolního testu, str. 102).

H2a*: Utřídění vstupních informací pozitivně ovlivňuje úspěšnost žáka při řešení úlohy.*

Hypotézu se podařilo ověřit.

Hypotéza byla podpořena vyhodnocením vstupního testu, zejména pak výsledky druhé a třetí úlohy (viz kap. 3.2.1 Vstupní test, podkapitola Vyhodnocení vstupního testu, str. 49). Hypotézu podporuje také obr. VT17 na straně 64.

H3: *Při samostatném řešení kombinatorických úloh žáky převládá metoda spontánního hledání výsledku tipováním a náhodným zkoušením nad metodou systematického řešení.*

Hypotézu se podařilo ověřit.

K potvrzení pravdivosti hypotézy posloužily výsledky žáků ve vstupním testu, obzvlášť druhé úlohy VT (viz kap. 3.2.1 Vstupní test, podkapitola Vyhodnocení vstupního testu, str. 49). Hypotézu podpořilo také přímé sledování řešitelských strategií žáků 5.B během realizace experimentu. Konkrétně pak řešení úloh Zvířecí delegace (viz obr. RE10, RE11, str. 85), Přípitek (viz kap. 3.2.2 Procvičování, str. 90), Pizza (viz kap. 3.2.2 Procvičování, str. 93), Čtvercová síť (viz kap. 3.2.2 Procvičování, str. 93).

H4*: Využití obrázku a grafického znázornění ovlivňuje pozitivně úspěšnost řešení.*

Hypotézu se podařilo ověřit.

Hypotézu potvrzují řešitelské strategie žáků ve vstupním testu, konkrétně pak graf VT1 a řešitelské strategie žáků ve čtvrté úloze VT (viz kap. 3.2.1 Vstupní test, podkapitola Vyhodnocení vstupního testu, str. 49).

Shrnutí:

Všechny stanovené hypotézy *H1, H2,H2a, H3, H4* se podařilo ověřit.

IV. Závěr

V teoretické části diplomové práce jsem zachytila postavení matematiky v Rámcovém vzdělávacím programu základního vzdělávání a obecné pojetí matematiky na prvním stupni základních škol. Zabývala jsem se významem a využitím aktivizujících činností ve výuce. Popsala jsem stručně historický vývoj kombinatoriky a základní principy tohoto matematického odvětví. Zejména jsem se snažila nahlédnout na kombinatoriku z hlediska jejího využití na prvním stupni. Jak se ukázalo, kombinatorice se na základní škole, a na prvním stupni obzvláště, nevěnuje přílišná pozornost. Bylo mým záměrem alespoň malou měrou přispět ke zlepšení tohoto stavu.

Hlavním cílem diplomové práce bylo vypracování souboru aktivit včetně řešených problémů, který by sloužil k rozvoji kombinatorického myšlení žáků. Tomu jsem se věnovala v praktické části. V praxi jsem u žáků dvou pátých tříd otestovala vstupní úroveň řešení kombinatorických problémů. Dále jsem s jednou ze tříd realizovala experiment, kdy jsem se snažila u žáků pomocí navržených aktivit rozvíjet kombinatorické myšlení (viz kap. 3.2.2 Procvičování, str. 72). Hlavní důraz jsem kladla na osvojování různých řešitelských strategií, zejména pak těch grafických (obrázek, tabulka, graf). Vyhodnocením kontrolního testu a porovnáním s výsledky vstupního testu se ukázalo, že realizované aktivity a řešené kombinatorické problémy měly kladný vliv na rozvoj řešitelských strategií (s čímž souvisí i rozvoj systematičnosti řešení) a na zvýšení úspěšnosti žáků při řešení kombinatorických problémů (viz kap. 3.2.3 Kontrolní test, Vyhodnocení KT, str. 102). Účinnost navrženého souboru se tedy podařilo ověřit.

S realizovaným souborem aktivit rozvíjejících kombinatorické myšlení úzce souvisí hypotézy, jež jsem si stanovila na počátku práce (viz kap. 3.1 Stanovení hypotéz, str. 36). Soustředila jsem se v nich na tři významné oblasti ovlivňující úspěšnost žáků při řešení kombinatorických problémů: zkušenosti žáků, práce s informacemi a řešitelské strategie. Všechny stanovené hypotézy se podařilo různými metodami ověřit (viz kap. 3.3 Ověření hypotéz, str. 127). Na základě zmiňovaných skutečností (ověření hypotéz a účinnosti navrženého souboru aktivit) si dovoluji tvrdit, že cíl diplomové práce byl splněn.

Problematika využití kombinatoriky na prvním stupni mě během psaní diplomové práce velmi zaujala a nyní již více spatřuji její význam. Domnívám se, že zejména na prvním stupni by se měli učitelé snažit rozvíjet co nejvíce řešitelských strategií. Při řešení standardních slovních úloh se jistě nabízí mnohé řešitelské metody. Častějším zapojením netradičních, tedy i kombinatorických úloh do výuky by se však toto spektrum řešitelských strategií mohlo výrazně rozšířit, což by přineslo žákům nové matematické „zážitky“ a snad i kladnější vztah k matematice jako takové. Právě snahu učinit matematiku hravou a pro žáky zábavnější považuji za jeden z nejdůležitějších faktorů vypovídajících o kvalitách učitele.

Věřím, že vypracovaný soubor aktivit pro rozvoj kombinatorického myšlení bude přínosem zejména pro učitele v praxi. Je zpracován formou volné přílohy – brožury – a nabízí různé možnosti využití kombinatorických problémů (nejen) na prvním stupni základních škol. Jednotlivé úlohy jsou zpracovány z hlediska cílů, motivace, metod a různých řešitelských strategií. Snažila jsem se ke každé úloze navrhnout takové aktivity, které by u žáků zvýšily zájem o řešení daného problému a zároveň podporovaly rozvoj jejich tvořivosti. Jistou nadstavbou souboru úloh jsou řešitelské metody využívající základních kombinatorických pravidel a principů. Předpokládám, že osvojené řešitelské dovednosti žáků v oblasti kombinatoriky by se mohly dále rozvíjet na druhém stupni, kde se již nabízí postupné zavádění zmiňovaných kombinatorických vztahů.

Do budoucna počítám s dalším využitím a rozšiřováním souboru aktivit rozvíjejících kombinatorické a logické myšlení. Těším se, až budu využívat vlastní náměty v praxi a získám tak další cennou zpětnou vazbu jak od samotných žáků, tak od budoucích kolegů.

Seznam literatury:

BLAŽKOVÁ, J. a kol. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. Vyd. 1. Brno: Didaktis, 2011. ISBN 978-80-7358-180-0.

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M. *Kapitoly z didaktiky matematiky*: *slovní úlohy, projekty*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007, ISBN 80-210-3022-4.

CALDA, E., DUPAČ, V. *Matematika pro gymnázia*: *kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-147-5.

CIRJAK, M. *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh*. 1. vyd. Prešov: Essox, 2000. ISBN 80-968369-0-0.

DOLEJŠÍ, P. *Přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia: Matematika*. 1. vyd. Humpolec: Pavel Dolejší, 2006. ISBN 80-864-8070-4.

FUCHS, E., HOŠPESOVÁ, A., LIŠKOVÁ, H. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu Základní vzdělávání*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-326-7.

GÁBOR, O., KOPANEV, O., KRIŽALKOVIČ, K.. *Teória vyučovania matematiky: pre študentov matematiky učiteľského štúdia na univerzitách a pedagogických fakultách.* 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989. ISBN 80-080-0285-9.

GEROVÁ, L. *Príprava žiakov se záujmom o matematiku na 1. stupni základnej školy*. 1.vyd. Banská Bystrica: Pedagogická fakulta UMB Banská Bystrica, Občanské združenie Pedagóg, 2007. ISBN 978-80-8083-470-8.

HECHT, T., BERO, P., ČERNEK, P. *Matematika pro 1. ročník gymnázií a SOŠ*: *Kombinatorika*. 1. vyd. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 1996. ISBN 80-7158-138-0.

HEJNÝ, Milan a kol. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-966-7.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*: *konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009. Pedagogická praxe. ISBN 978-80-7367-397-0.

HORÁK, J. *Tvořivost ve vyučování*. Vyd. 1. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2009. ISBN 978-80-7372-476-4.

HUSAR, P. *Matematika: příprava k přijímacím zkouškám na osmiletá gymnázia*. 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. ISBN 80-7200-731-9.

HUSAR, P. *Matematikou krok za krokem k přijímacím zkouškám: kalendář řešených písemek pro 5. ročník ZŠ*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2002, ISBN 80-719-6250-3.

JUSTOVÁ, J. *Matematika pro 5. ročník základních škol*: *Učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Havlíčkův Brod: Alter, 2009. ISBN 978-80-7245-154-8.

KOTRBA, T., LACINA L. *Praktické využití aktivizačních metod ve výuce*. Vyd. 1. Brno: Společnost pro odbornou literaturu, 2007. ISBN 978-80-87029-12-1.

LOKŠOVÁ, I., LOKŠA J. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Vyd. 1. Překlad Jakub Dobal. Praha: Portál, 1999, 199 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8205-X.

LOKŠOVÁ, I., LOKŠA, J. *Tvořivé vyučování*. Vyd. 1. Překlad Anna Fejglová. Praha: Grada, 2003, ISBN 80-247-0374-2.

MAČÁK, K. *Počátky počtu pravděpodobnosti*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997, Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 9. ISBN 80-7196-089-6.

MENZELOVÁ, E., KUNTOVÁ, I. *Přijímací zkoušky z matematiky: příklady a testy pro přípravu žáků 5. ročníků ZŠ ke studiu na osmiletých gymnáziích*. 2., upr. vyd., Ve Fortuně 1. Praha, 1998, ISBN 80-7168-520-8.

MOLNÁR, J., MIKULENKOVÁ, H. *Matematika a její aplikace: 5. ročník, 1. díl*. Olomouc: Prodos, 2008. Modrá řada. ISBN 978-80-7230-208-6.

MOLNÁR, J., MIKULENKOVÁ, H. *Matematika a její aplikace: 5. ročník, 2. díl*. Olomouc: Prodos, 2008. Modrá řada. ISBN 978-80-7230-209-3.

MOLNÁR, J., MIKULENKOVÁ, H. *Matematika a její aplikace, 5. ročník*: *3. díl*. Olomouc: Prodos, 2008. Modrá řada. ISBN 978-80-7230-210-9.

PAVLOVIČOVÁ, G. Rôzne metódy riešenia vybraných slovných úloh. In: *Matematika - škola - IKT: Zborník vedeckých prác zo seminára, konaného 27. marca 2009 na KM FPV UKF v Nitre*. ŠEDIVÝ, O. a D. VALLO. Nitra: UKF, 2009, str. 75 - 80. ISBN 978-80-8094-518-3.

PAVLOVIČOVÁ, G., VASKOVÁ, V. Motivujeme žiakov k riešeniu slovných úloh. In: *Učme aplikovať matematiku: Zborník z vedeckého seminára Učme aplikovať matematiku organizovaného Katedrou matematiky dňa 17. októbra 2007.* ŠEDIVÝ, O., VALLO, D. Nitra: UKF, 2008, str. 67 – 72. ISBN 978-80-9094-290-8.

PERNÝ, J. *Kapitoly z elementární aritmetiky I.* Vyd. 1. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2010. ISBN 978-80-7372-698-0.

PŁOCKI, A. *Pravdepodobnosť okolo nás*: *Stochastika v úlohách a problémoch*. 2. upravené a rozšířené vyd. Ružomberok: Katolícka univerzita v Ružomberku, 2007. ISBN 978-80-8084-260-4.

PŘÍHONSKÁ, J. *Úvod do kombinatoriky*. Liberec, 2008. ISBN 978-80-7399-456-3.

PŘÍHONSKÁ, J., VILIMOVSKÁ, L. Kombinatorické úlohy na prvním stupni základní školy. In: *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Facultas Pedagogica 2012*. MATHEMATICA VIII. V tisku.

ROSECKÁ, Z., RŮŽIČKA, J. *Uvažuj, odhaduj, počítej*: *Učebnice matematiky pro 5. ročník*. Brno: Nová škola, 2010. ISBN 978-80-7289-180-1.

VACKOVÁ, I., FAJFRLÍKOVÁ, L., UZLOVÁ, Z. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN, 2010. ISBN 978-80-7235-471-9.

Internetové zdroje:

FARSKÁ, J. *Kombinatorika.* [online]. 2006 [cit. 2012-04-13]. Dostupné z: http://carolina.mff.cuni.cz/~jana/kombinatorika/

HOUSKA, Jan. Netradiční úlohy ve výuce matematiky. *Metodický portál: Články* [online]. 18. 02. 2009, [cit. 2012-04-13]. Dostupný z WWW: <http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/3002/NETRADICNI-ULOHY-VE-VYUCE-MATEMATIKY.html>. ISSN 1802-4785.

Jiráskovo gymnázium: Přijímací řízení - Ukázky přijímacích zkoušek. [online]. [cit. 2012-01-09]. Dostupné z: http://www.gymnachod.cz/index.php?stranka=ukazky-prijimacich-zkousek.

Příprava na přijímací zkoušky pro žáky 5. tříd - Zkoušky nanečisto. [online]. [cit. 2012-01-09]. Dostupné z: http://www.zkouskynanecisto.cz/modules.php?name=News&file=article&sid=15&menuzvol=pata.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. [cit. 2012-04-07]. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf.

Scio - Přijímací zkoušky Scio - Popis testů Scio pro přijímací zkoušky. [online]. [cit. 2012-01-22]. Dostupné z: http://www.scio.cz/in/2ss/pzscio/popis.asp.

SCHOLTZOVÁ, Iveta. *Inovačné trendy vo vyučovaní matematiky na 1. stupni základnej školy*: *Rozvíjanie kombinatorického myslenia* [online]. Metodicko-pedagogické centrum v Prešove, 2003 [cit. 2012-01-31]. Dostupné z: http://www.mcpo.edu.sk/modules/umpdownloads/viewcat.php?cid=36.

Základní škola Liberec: *Aloisina výšina* [online]. 2010 [cit. 2012-04-14]. Dostupné z: www.zs-aloisinavysina.cz.

ZÝKOVÁ, Kristýna. Logika, statistika a kombinatorika na 1. stupni základní školy. *Metodický portál: Články* [online]. 22. 07. 2011, [cit. 2012-04-13]. Dostupný z WWW:<http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVB/10477/LOGIKA-STATISTIKA-A-KOMBINATORIKA-NA-1-STUPNI-ZAKLADNI-SKOLY.html>. ISSN 1802-4785.

Přílohy

P1 - 1 až 16	Podklady pro vyhodnocení vstupního testu (tabulky)
P2 - 1 až 2	Ukázka vyplněného vstupního testu
P3 - 1 až 16	Podklady pro vyhodnocení kontrolního testu (tabulky)
P4 - 1 až 2	Ukázka vyplněného kontrolního testu
P5 - 1	Ukázka vyplněného dotazníku
P6 - 1	Souhlas s fotodokumentací (kopie)
P7	Soubor řešených úloh (volně vložená příloha)
P8	vložené CD

Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení
žáků 1. stupně ZŠ

Lucie Vilimovská

2012

Příloha 1:

Podklady pro vyhodnocení vstupního testu (tabulky)

P1 - 1 až 16

P1: tabulka, 1. úloha VT – 5.A

chlapci	správné řeš.	špatné řeš.	barvy	spojuje body či týmy	komb. pravidlo součtu	tabulka	výčet dvojic	5.4=20	5.5=25
1.	x		x	x	4+3+2+1				
2.	x		x	x					
3.	x						x		
4.	x		x	x					
5.	x					x			
6.		x		špatně spočítal spoje					
7.		x						x	
	5	2	3	4	1	1	1	1	0

dívky	správné řeš.	špatné řeš.	barvy	spojuje body či týmy	komb. pravidlo součtu	tabulka	výčet dvojic	5.4=20	5.5=25
1.	x		x	x	4+3+2+1				
2.	x			x					
3.	x		x				x		
4.	ale šp.postup		x						
5.	x		x		x		x		
6.	x		x	x					
7.	x						x		
8.	x		x	x	x				
9.	x		x	x	x				
10.		x						x	
11.		x						x	
12.		x	x	x				x	
13.		x						x	
14.		x	x						x
15.		x							x
	9	6	9	6	4	0	3	4	2
22	**14**	**8**	**12**	**10**	**5**	**1**	**4**	**5**	**2**
	63,6%	36,4%	54,5%	45,5%	22,7%	4,5%	18,2%	23,0%	9,1%

P1: tabulka, 1. úloha VT – 5.B

chlapci	správné řeš.	špatné řešení	barvy	spojuje body či týmy	kombin. prav. součtu	tabulka	výčet dvojic	5.4=20	5.5=25
1.	x					x			
2.	x					x			
3.	x					x	x		
4.		x	zapomněl na 1 tým - řešil správně (6)			x			
5.		x				x		x	
6.		x				x		x	
7.		x				x		x	
8.		x							x
9.		x	5+4+3+2+1=15						
	3	6		0		7	1	3	1

dívky	správné řeš.	špatné řešení	barvy	spojuje body či týmy	komb.pravidlo součtu	tabulka	výčet dvojic	5.4=20	5.5=25
1.	x					x			
2.	x					x			
3.	x					x			
4.	x						x		
5.	x						x		
6.	x						x		
7.	x						x		
8.	x		x	x	x				
9.	x		x		x		x		
10.	x								
11.		x	jeden zápas zapomněla				x		
12.		x				x		x	
13.		x				x	týmy hrály i samy se sebou - 15		
14.		x						x	
	10	4	2	1	2	5	6	2	

23	**13**	**10**	**2**	**1**	**2**	**12**	**7**	**5**	**1**
	56,5%	43,5%	8,7%	4,3%	8,7%	52,2%	30,4%	21,7%	4,3%

P1: tabulka, 1. úloha VT - chlapci

chlapci	správné řeš.	špatné řešení	barvy	spojuje body či týmy	komb. pravidlo součtu	tabulka	výčet dvojic	5.4=20	5.5=25
1. 5.A	x		x	x	**4+3+2+1**				
2.	x		x	x					
3.	x						x		
4.	x		x	x					
5.	x					x			
6.		x		špatně spočítal spoje					
7.		x						x	
1. 5.B	x					x			
2.	x					x			
3.	x					x	x		
4.		x	zapomněl na 1 tým - řešil správně (6)			x			
5.		x				x		x	
6.		x				x		x	
7.		x				x		x	
8.		x							x
9.		x	5+4+3+2+1=15						
16	**8**	**8**	**3**	**4**	**1**	**8**	**2**	**4**	**1**
	50,0%	50,0%	18,8%	25,0%	6,3%	50,0%	12,5%	25,0%	6,3%

P1: tabulka, 1. úloha VT - dívky

dívky	správné řeš.	špatné řeš.	barvy	spojuje body či týmy	kom.pr.součtu	tabulka	výčet dvojic	5.4=20	5.5=25
1. 5.A	x		x	x	**4+3+2+1**				
2.	x			x					
3.	x		x				x		
4.	ale šp.postup		x						
5.	x		x		x		x		
6.	x		x	x					
7.	x						x		
8.	x		x	x	x				
9.	x		x	x	x				
10.		x						x	
11.		x						x	
12.		x	x	x				x	
13.		x						x	
14.		x	x						x
15.		x							x
1. 5.B	x					x			
2.	x					x			
3.	x					x			
4.	x						x		
5.	x						x		
6.	x						x		
7.	x						x		
8.	x		x	x	x				
9.	x		x		x		x		
10.	x								
11.		x	jeden zápas zapomněla				x		
12.		x				x		x	
13.		x				x	týmy hrály i samy se sebou - 15		
14.		x						x	
29	**19**	**10**	**11**	**7**	**6**	**5**	**9**	**6**	**2**
	65,5%	34,5%	37,9%	24,1%	20,7%	17,2%	31,0%	21,0%	6,9%

P1: tabulka, 2. úloha VT – 5.A

5.A **chlapci**	nepochopil, odp.: *Může použít všechny*	hledá různé způs.	počet způsobů z 11	nákres mincí	příklady	barvy	nemá odpověď
1.		x	2	x			
2.	x	*Takhle to může zaplatit.*	3	x			
3.	x	x	4	x			
4.	x		1	x	x		
5.	x	x	3	x			
6.	x	x	4	x			
7.		x	5		x		x
	5	6	3,14	6	2		1

dívky	nepochopil, odp.: *Může použít všechny*	hledá různé způs.	počet způsobů z 11	nákres mincí	příklady	barvy	nemá odpověď
1.	x		1	x			
2.	x	x	4	x	x	x	
3.	x		1	x			
4.	x	x	2	x		x	
5.	x	x	3	x	x		
6.			1	x	x	x	
7.			1	x			
8.		x	4	x		x	
9.		náznak systému	6	x			
10.			1	x	x		
11.		x	6	x			
12.			1	x			x
13.		x	4	x	x		x
14.		x	3	x			x
15.		x	5	x	x		x
	5	13	2,87	15	6	4	4

22	**10**	**19**	**3,00**	**21**	**8**	**4**	**5**
	45,5%	86,4%		95,5%	36,4%	18,2%	22,7%

P1: tabulka, 2. úloha VT – 5.B

5.B **chlapci**	nepochopil, odp.: *Může použít všechny*	hledá různé způsoby	počet způsobů z 11:	graficky	příklady	barvy	nemá odpověď
1.	x	náznak systému	10		x		
2.		x	9		x		
3.		x	5 (7 mění poř.)		x		
4.		x	7		x		
5.		x	7		x		
6.		systematičnost	10		x		
7.		x	6		x		33 způsobů
8.		x	7 (10 mění poř.)		x		x
9.		x	8	systém značek			x
	1	9	7,67	1	8	0	2

dívky	nepochopil, odp.: *Může použít všechny*	hledá různé způsoby	počet způsobů z 11:	graf.: mince, výpis, čárky	příklady	barvy	nemá odpověď
1.		x	7	výpis			
2.		x	5 (6 mění poř.)		x		
3.	x	x	6		x		
4.		x	8 (17 - pořadí)		x		
5.	x	x	6 (7 - pořadí)	výpis			
6.		x	7	čárky		x	
7.		x	8	čárky		x	
8.		x	7		x		
9.		x	8 (9 - pořadí)	výpis			
10.		x	7 (9 - pořadí)		x		
11.		x	6	mince			
12.		x	10		x		
13.		x	7		x		
14.		x	9 (10)		x		
	2	14	7,21	6	8	2	0
23	**3**	**23**	**7,44**	**7**	**16**	**2**	**2**
	13,0%	100,0%		30,4%	69,6%	8,7%	8,7%

P1: tabulka, 2. úloha VT – chlapci

	nepochopil odp.: *Může použít všechny*	hledá různé způs.	počet způsobů z 11	nákres mincí	příklady	nemá odpověď
1. 5.A		x	2	x		
2.	x	*Takhle to může zapl.*	3	x		
3.	x	x	4	x		
4.	x		1	x	x	
5.	x	x	3	x		
6.	x	x	4	x		
7.		x	5		x	x
7	5	6	3,14	6	2	1

1. 5.B	x	náznak systému	10		x	
2.		x	9		x	
3.		x	5 (7 mění poř.)		x	
4.		x	7		x	
5.		x	7		x	
6.		systematičnost	10		x	
7.		x	6		x	*32 způsobů*
8.		x	7 (10 mění poř.)		x	x
9.		x	8	systém značek		x
9	1	9	7,67	1	8	2

16	**6**	**15**	**5,41**	**7**	**10**	**3**
100%	37,5%	93,8%		43,8%	62,5%	18,8%

P1: tabulka, 2. úloha VT – dívky

	nepochopil, odp.: *Může použít všechny.*	hledá různé způs.	počet způsobů z 11	nákres mincí	příklady	barvy	nemá odp.
1. 5.A	x		1	x			
2.	x	x	4	x	x	x	
3.	x		1	x			
4.	x	x	2	x		x	
5.	x	x	3	x	x		
6.			1	x	x	x	
7.			1	x			
8.		x	4	x		x	
9.		náznak systému	6	x			
10.			1	x	x		
11.		x	6	x			
12.			1	x			x
13.		x	4	x	x		x
14.		x	3	x			x
15.		x	5	x	x		x
	5	13	2,87	15	6	4	4
1.		x	7	výpis			
2.		x	5 (6 mění poř.)		x		
3.	x	x	6		x		
4.		x	8 (17 - pořadí)		x		
5.	x	x	6 (7 - pořadí)	výpis			
6.		x	7	čárky		x	
7.		x	8	čárky		x	
8.		x	7		x		
9.		x	8 (9 - pořadí)	výpis			
10.		x	7 (9 - pořadí)		x		
11.		x	6	mince			
12.		x	10		x		
13.		x	7		x		
14.		x	9 (10)		x		
	2	14	7,21	6	8	2	0
29	**7**	**27**	**5,04**	**21**	**14**	**6**	**4**
	24,1%	93,1%		72,4%	48,3%	20,7%	13,8%

P1: tabulka, 3. úloha VT – 5.A

chlapci	správně = 6	chybně	tabulka	výpis předmětů	barvy	tipování bez znázornění
1.	x		x		x	
2.	x		x			
3.		3x3x3=27		úvaha: do 3 okének - 3 předměty		
4.		7		dva shodné		
5.		3x3=9				x
6.		25				x
7.		5	x			
	2	**5**	**4**	**1**	**1**	**2**

dívky	správně = 6	chybně	tabulka	výpis předmětů	barvy	tipování bez znázornění
1.	x			x		
2.	x				b. značky	
3.	x		x			
4.	x		x			
5.		7	x	chaotické přeškrtávání		
6.		7	x	jeden 2x		
7.		3		x	x	chaos v barvách
8.		5	x	jeden chybí		
9.		3	x	bez odpovědi		
10.		3		x	x	
11.		3	x			
12.		3		x		
13.		3	x			
14.		3	x			
15.			Odp.: P. uč. může sestavit 5 hodin.			
	4	**11**	**9**	**4**	**3**	**0**

22	**6**	**16**	**13**	**5**	**4**	**2**
100%	27%	73%	59%	23%	18%	9%

P1: tabulka, 3. úloha VT – 5.B

chlapci	správně = 6	chybně	tabulka	výpis předmětů	barvy	tipování bez znázornění
1.	x		x			
2.	x		x			
3.	x		x			
4.	x		x			
5.	x		x			
6.		3		x		
7.		3		x		
8.		5	x	nedodržel podmínky Aj, TV		
9.		odp. 9	x	ale znázornil jen 5		
	5	**4**	**7**	**2**	**0**	**0**

dívky	správně = 6	chybně	tabulka	výpis předmětů	barvy	tipování bez znázornění
1.	x		x			
2.	x			x		
3.	x		x	x		
4.	x		x			
5.		3		x	Neobmění…	
6.		3	x			
7.		3		x		
8.		3	x	Neobmění dva předměty		
9.		3	x			
10.		3	x			
11.		3	x			
12.		5	x			
13.		5	x			
14.		4	x			
	4	**10**	**11**	**4**	**0**	**0**

23	**9**	**14**	**18**	**6**	**0**	**0**
100%	39,1%	60,9%	78,3%	26,1%		

P1: tabulka, 3. úloha VT – chlapci

chlapci	správně = 6	chybně	tabulka	výpis předmětů	barvy	tipování bez znázornění
1. **5.A**	x		x		x	
2.	x		x			
3.		3x3x3=27		úvaha: do 3 okének - 3 předměty		
4.		7		dva shodné		
5.		3x3=9				x
6.		25				x
7.		5	x			
	2	**5**	**4**	**1**	**1**	**2**

1. 5.B	x		x			
2.	x		x			
3.	x		x			
4.	x		x			
5.	x		x			
6.		3		x		
7.		3		x		
8.		5	x	nedodržel podmínky Aj, TV		
9.		9	x	ale znázornil jen 5		
	5	**4**	**7**	**2**	**0**	**0**

16	**7**	**9**	**11**	**3**	**1**	**2**
100%	43,8%	56,3%	68,8%	18,8%	6,3%	12,5%

P1: tabulka, 3. úloha VT – dívky

dívky	správně = 6	chybně	tabulka	výpis předmětů	barvy	tipování bez znázornění
1. 5.A	x			x		
2.	x				b. značky	
3.	x		x			
4.	x		x			
5.		7	x	chaotické přeškrtávání		
6.		7	x	jeden 2x		
7.		3		x	x	chaos v barvách
8.		5	x	jeden chybí		
9.		3	x	bez odpovědi		
10.		3		x	x	
11.		3	x			
12.		3		x		
13.		3	x			
14.		3	x			
15.			Odp.: P. uč. může sestavit 5 hodin.			
15	**4**	**11**	**9**	**4**	**3**	**0**

1. 5.B	x		x			
2.	x			x		
3.	x		x	x		
4.	x		x			
5.		3		x	Neobmění...	
6.		3	x			
7.		3		x		
8.		3	x	Neobmění dva předměty		
9.		3	x			
10.		3	x			
11.		3	x			
12.		5	x			
13.		5	x			
14.		4	x			
14	**4**	**10**	**11**	**4**	**0**	**0**
29	**8**	**21**	**20**	**8**	**3**	**0**
100%	27,6%	72,4%	69,0%	27,6%	10,3%	0,0%

P1: tabulka, bonusová úloha VT – 5.A

chlapci	obrázek	různé komb.	ano	ne	odpověď:
1.			x		Ano, má jistotu, že drží jeden pár ponožek.
2.			x		Ano.
3.	x	1	x		Ano, může si být jistý.
4.			x		Ano, má jistotu.
5.			x		Ano má.
6.	x	páry		x	Ne nemá, jeden pár jsou dvě ponožky.
7.	x	1	x		Vždy, protože buď budou 2 modré, nebo 2 červené.
	3		6	1	

dívky	obrázek	různé komb.	ano	ne	odpověď:
1.			x		Ano.
2.	x	1	x		Ano, může mít jistotu, jestliže jsou v šuplíku 2 páry ponožek jiné barvy.
3.	x	1	x		Šimon může mít jistotu, že drží pár stejných ponožek.
4.	x	1	x		Šimon drží 1 pár ponožek.
5.	x	2	x		Šimon může mít dva páry.
6.	x	2	x		Ano.
7.	x	1	x		Ano, jsou jenom dvě barvy.
8.	x	1	x		Ano má.
9.	x	1		x	Ne, vytáhl dvě modré a jednu červenou ponožku.
10.		4 pon.		x	Ne.
11.	x			x	Šimon vytáhl 3, ale jen 2 mohou být v páru.
12.				x	Šimon jistotu nemá.
13.			x	x	Nevím
14.			x	x	-
15.			x	x	-
	9		8	4	

celkem	**12**		**14**	**5**	**3 neví** (či neřešili)
22	54,5%		63,6%	22,7%	13,6%

P1: tabulka, bonusová úloha VT – 5.B

chlapci	obrázek	různé komb.	ano	ne	odpověď:
1.	x	2	x		Ano, má Šimon jistotu, že má pár stejných ponožek.
2.	x		x		Šimon má jistotu, že drží pár stejných ponožek.
3.			x		Ano má 75%, že vytáhne 2 stejné ponožky.
4.			x		Šimon má jistotu, že drží v ruce pár stejných ponožek.
5.	x	2	x		Ano, má.
6.	x	2	x		Ano.
7.			x		Ano, má.
8.				x	Ne, může vytáhnout tři červené, nebo modré.
9.			x	x	Je to 50 na 50.
	4		7	1	

dívky	obrázek	různé komb.	ano	ne	odpověď:
1.	x	2	x		Šimon má jistotu, že drží pár ponožek.
2.			x		Má jistotu.
3.			x		Ano.
4.			x		Ano, pokaždé musí mít aspoň 2 stejné ponožky.
5.	x	2	x		Šimon má jistotu, že vytáhne pár stejných ponožek.
6.	x	4	x		Ano, má Šimon alespoň 1 pár ponožek.
7.	x	2	x		Šimon má jistotu, že drží v ruce pár ponožek.
8.	x	4	x		Šimon má jistotu.
9.	x	4	x		Ano má jistotu, že drží stejný pár ponožek.
10.	x	1	x		Ano má jistotu.
11.	x	2	x		Ano, Šimon má jistotu, že vytáhne pár ponožek.
12.	x	2	x		Drží v ruce pár stejných ponožek.
13.	x	4	x	x	Šimon mohl mít pár a nemusel.
14.	x	1	x		Má jeden pár a jednu ponožku.
	11		13		

celkem	**15**		**20**	**1**	**2** neví
23	65,2%		87,0%	4,3%	8,7%

P1: tabulka, bonusová úloha VT – chlapci

chlapci	obrázek	různé komb.	ano	ne	odpověď:
1. 5.A			x		Ano, má jistotu, že drží jeden pár ponožek.
2.			x		Ano.
3.	x	1	x		Ano, může si být jistý.
4.			x		Ano, má jistotu.
5.			x		Ano má.
6.	x	páry		x	Ne nemá, jeden pár jsou dvě ponožky.
7.	x	1	x		Vždy, protože buď budou 2 modré, nebo 2 červené.
	3		6	1	
1. 5.B	x	2	x		Ano, má Šimon jistotu, že má pár stejných ponožek.
2.	x		x		Šimon má jistotu, že drží pár stejných ponožek.
3.			x		Ano má 75%, že vytáhne 2 stejné ponožky.
4.			x		Šimon má jistotu, že drží v ruce pár stejných ponožek.
5.	x	2	x		Ano, má.
6.	x	2	x		Ano.
7.			x		Ano, má.
8.				x	Ne, může vytáhnout tři červené, nebo modré.
9.			x	x	Je to 50 na 50.
	4		7	1	
16	**7**		**13**	**2**	**neví: 1**
	43,8%		81,3%	12,5%	6,3%

P1: tabulka, bonusová úloha VT – dívky

dívky	obrázek	různé komb.	ano	ne	odpověď:
1. 5.A			x		Ano.
2.	x	1	x		Ano, může mít jistotu, jestliže jsou v šuplíku 2 páry ponožek jiné barvy.
3.	x	1	x		Šimon může mít jistotu, že drží pár stejných ponožek.
4.	x	1	x		Šimon drží 1 pár ponožek.
5.	x	2	x		Šimon může mít dva páry.
6.	x	2	x		Ano.
7.	x	1	x		Ano, jsou jenom dvě barvy.
8.	x	1	x		Ano má.
9.	x	1		x	Ne, vytáhl dvě modré a jednu červenou ponožku.
10.		4 pon.		x	Ne.
11.	x			x	Šimon vytáhl 3, ale jen 2 mohou být v páru.
12.				x	Šimon jistotu nemá.
13.			x	x	Nevím
14.			x	x	-
15.			x	x	-
	9		8	4	

1. 5.B	x	2	x		Šimon má jistotu, že drží pár ponožek.
2.			x		Má jistotu.
3.			x		Ano.
4.	x	1	x		Má jeden pár a jednu ponožku.
5.			x		Ano, pokaždé musí mít aspoň 2 stejné ponožky.
6.	x	2	x		Šimon má jistotu, že vytáhne pár stejných ponožek.
7.	x	4	x		Ano, má Šimon alespoň 1 pár ponožek.
8.	x	2	x		Šimon má jistotu, že drží v ruce pár ponožek.
9.	x	4	x		Šimon má jistotu.
10.	x	4	x		Ano má jistotu, že drží stejný pár ponožek.
11.	x	1	x		Ano má jistotu.
12.	x	2	x		Ano, Šimon má jistotu, že vytáhne pár ponožek.
13.	x	2	x		Drží v ruce pár stejných ponožek.
14.	x	4	x	x	Šimon mohl mít pár a nemusel.
	11		13		

29	**20**		**21**	**4**	**neví: 4**
	69,0%		72,4%	13,8%	13,8%

Příloha 2:

Ukázka vyplněného vstupního testu

(dívka, 5.B)

P2 - 1 až 2

VSTUPNÍ TEST PRO ŽÁKY 5. TŘÍD ZŠ

Výsledky testu budou sloužit jako podklad pro zpracování praktické části DIPLOMOVÉ PRÁCE
„Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně".

Vypracovala: Lucie Vilimovská, 5. NŠ, PF TUL, říjen 2011

ZAŠKRTNI: **Jsem dívka.** ☒ **Jsem chlapec.** ☐ **třída:** 5.B.

ZKUS VYŘEŠIT NÁSLEDUJÍCÍ ÚLOHY. MŮŽEŠ SI POMOCI OBRÁZKEM, TABULKOU, BARVAMI,...

JE TO JEN NA TOBĚ!

1. Ve škole se koná florbalový turnaj. Přihlásilo se do něj **pět družstev**: TUČŇÁCI, MISTŘI, PARTIČKA, SPRÁVNÁ PĚTKA a NEBOJSOVÉ. V turnaji si zahrají všechny týmy navzájem (každý s každým jednou). **Kolik bude celkem zápasů?**

T	✓	X	X	X	X
M	✓	✓	X	X	X
P	✓	✓	✓	X	X
S	✓	✓	✓	✓	X
N	✓	✓	✓	✓	✓

Odehraje se celkem 15 zápasů.

2. Maruška má zaplatit 11 Kč. **Jak může složit přesnou částku, když má v kapse PĚTIKORUNY, DVOUKORUNY a KORUNY?** Může použít všechny druhy mincí, nebo jen některé.

5+5+1
1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
2+2+2+2+2+1
2+1+5+2+1
5+2+2+2
1+2+5+1+2

Muže složit přesnou částku 6 způsoby.

3. Paní učitelka připravuje rozvrh na pondělí. Žáci budou mít tyto předměty: ČESKÝ JAZYK, MATEMATIKU, TĚLESNOU VÝCHOVU, ANGLICKÝ JAZYK a HUDEBNÍ VÝCHOVU. Pan ředitel rozhodl, že ANGLICKÝ JAZYK musí být druhou hodinu a TĚLESNÁ VÝCHOVA pátou hodinu. **KOLIK RŮZNÝCH ROZVRHŮ na pondělí může paní učitelka sestavit?**

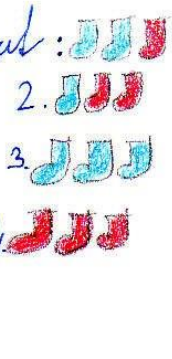
1.	Hv	AJ	M	ČJ	TV
2.	ČJ	AJ	HV	M	TV
3.	M	AJ	ČJ	HV	TV

Na pondělí de sestavit 3 různé rozvrhy.

BONUSOVÁ ÚLOHA NA ZÁVĚR:

Šimon má v šuplíku MODRÉ a ČERVENÉ ponožky. NÁHODNĚ ze šuplíku vytáhl TŘI ponožky. **Má Šimon jistotu, že drží v ruce PÁR STEJNÝCH PONOŽEK?**

mohl vytáhnout :



Šimon mohl mít pár a nemusel.

Děkuji Ti za vypracování testu!

Příloha 3:

Podklady pro vyhodnocení kontrolního testu (tabulky)

P3 - 1 až 16

P3: tabulka, 1. úloha KT – 5.A

chlapci	správně (16)	špatně	znázornění	barvy	překreslil motýla	zjednodušeně	systém
1.	x		x	x		x	x
2.		24					
3.		14	x	x	x		x
4.		14					
5.		14	x	x	x		x
6.		8		x			
7.		6	x	x	x		
	1	6	4	5	3	1	3

dívky	správně (16)	špatně	znázornění	barvy	překreslil motýla	zjednodušeně	systém	příklad
1.	x		x	x	x			
2.		14	x	x		x		
3.		12		x				
4.		8		x				
5.		8	x	x	x		x	
6.		8		x				
7.		8	x	x	x		x	4 . 2 = 8
8.		8	x	x		x	x	
9.		6	x	x	x		x	
10.		6	x	x	x			
11.		6		x				
12.		6	x	x	x			
13.		5	x	x	x			
14.		4	x	x	x			
15.		3		x				
	1	14	10	15	8	2	4	1

22	**2**	**20**	**14**	**20**	**11**	**3**	**7**	**1**
	9,1%	90,9%	63,6%	90,9%	50,0%	13,6%	31,8%	4,5%

P3: tabulka, 1. úloha KT – 5.B

chlapci	správně (16)	špatně	znázornění	barvy	překreslil motýla	zjednodušeně	systém
1.	x		x	x		x	x
2.	x		x	x		x	x
3.	x		x	x		x	x
4.	x		x	x		x	x
5.		14					
6.		12		x			
7.		9	x	x	x	x	
8.		8	x	x		x	
9.		6		x			
10.		4					
	4	6	6	8	1	6	4

dívky	správně (16)	špatně	znázornění	barvy	překreslil motýla	zjednodušeně	systém
1.	x		x	x	x		x
2.	x		x	x		x	x
3.	x		x	x		x	x
4.	x		x	x		x	x
5.	x		x	x		x	x
6.	x		x	x		x	x
7.	x		x	x	x		x
8.		16	x	x		x	
9.	x		x	x	x		
10.		17	x	x	x		
11.		?	x	x		x	
12.		?	x	x		x	
13.		10		x			
14.		8		x			
	8	6	12	14	4	8	7
24	**12**	**12**	**18**	**22**	**5**	**14**	**11**
	50,0%	50,0%	75,0%	91,7%	20,8%	58,3%	45,8%

P3: tabulka, 1. úloha KT – chlapci

chlapci	správně (16)	špatně	znázornění	barvy	překreslil motýla	zjednodušeně	systém
1. 5.A	x		x	x		x	x
2.		24					
3.		14	x	x	x		x
4.		14					
5.		14	x	x	x		x
6.		8		x			
7.		6	x	x	x		
	1	6	4	5	3	1	3
1. 5.B	x		x	x		x	x
2.	x		x	x		x	x
3.	x		x	x		x	x
4.	x		x	x		x	x
5.		14					
6.		12		x			
7.		9	x	x	x	x	
8.		8	x	x		x	
9.		6		x			
10.		4					
	4	6	6	8	1	6	4
17	**5**	**12**	**10**	**13**	**4**	**7**	**7**
	29,4%	70,6%	58,8%	76,5%	23,5%	41,2%	41,2%

P3: tabulka, 1. úloha KT – dívky

dívky	správně (16)	špatně	znázornění	barvy	překreslil motýla	zjednodušeně	systém	příklad
1.	x		x	x	x			
2.		14	x	x		x		
3.		12		x				
4.		8		x				
5.		8	x	x	x		x	
6.		8		x				
7.		8	x	x	x		x	4 . 2 = 8
8.		8	x	x		x	x	
9.		6	x	x	x		x	
10.		6	x	x	x			
11.		6		x				
12.		6	x	x	x			
13.		5	x	x	x			
14.		4	x	x	x			
15.		3		x				
	1	14	10	15	8	2	4	1

1.	x		x	x	x		x
2.	x		x	x		x	x
3.	x		x	x		x	x
4.	x		x	x		x	x
5.	x		x	x		x	x
6.	x		x	x		x	x
7.	x		x	x	x		x
8.		16	x	x		x	
9.	x		x	x	x		
10.		17	x	x	x		
11.		?	x	x		x	
12.		?	x	x		x	
13.		10		x			
14.		8		x			
	8	6	12	14	4	8	7

29	**9**	**20**	**22**	**29**	**12**	**10**	**11**	**1**
	31,0%	69,0%	75,9%	100,0%	41,4%	34,5%	37,9%	3,4%

P3: tabulka, 2. úloha KT – 5.A

chlapci	správně (12)	špatně	barvy	nákres oblečení	systém	zkratky (T, S, K)	výčet možností	dvojice značek (písmen)	spojování bodů (oblečení)	tabulka
1.	x			x	x			x		
2.	x		x	x	x				x	
3.		16	x	x	x	dvoje kalhoty - ok			x	
4.		15			x	pět triček - ok				x
5.		5		x						
6.		4		x						
7.		2		x						
	2	5	2	6	4	0	0	1	2	1

dívky	správně (12)	špatně	barvy	nákres oblečení	systém	zkratky (T, S, K)	výčet možností	dvojice značek (písmen)	spojování bodů (oblečení)	příklad 4 . 3 = 12	kreslí vš. možnosti
1.	x			x	x						x
2.	x		x	x	x				x	x	
3.	x		x	x	x				x	x	
4.	x		x	x					x		
5.	x		x	x	x				x		
6.	x		x	x	x				x		
7.	x		x	x	x				x	x	
8.	x		x	x	x				x		x
9.		16	x	x	x	Přičetla navíc samotná trička					
10.		15	x	x		chaos ve spojování			x		
11.		9	x	x	x	zapomněla 1 tričko			x		
12.		8	x	x	x	opomíjela jednu sukni			x		
13.		7	x	x		spočítala jen dané kusy - nekombinuje					
14.		-	x	x	Odp.: S. si vezme kalhoty.				x		
15.		-	x	x	Odp.: Tričko si vezme a kalhoty.				x		
	8	7	14	15	10	0	0	0	12	3	2
22	**10**	**12**	**16**	**21**	**14**	**0**	**0**	**1**	**14**		**2**
	45,5%	54,5%	72,7%	95,5%	63,6%			4,5%	63,6%		9,1%

P3: tabulka, 2. úloha KT – 5.B

chlapci	správně (12)	špatně	barvy	nákres oblečení	systém	zkratky (T, S, K)	výčet možností	dvojice značek (písmen)	spojování bodů (oblečení)
1.	x				x	x		x	
2.	x				x	x		x	
3.	x		x		x	x		x	
4.		9	zapomněl 1 tričko		x	x		x	
5.		6	x	x	zapomněl 2 trička				
6.		6		x			x	zajímavá úvaha	
7.		2					x		
8.		1				x			
9.		neřešil							
10.		nerešil							
	3	5	2	2	4	5	2	4	0

dívky	správně	špatně	barvy	nákres oblečení	systém	zkratky (T, S, K)	výčet možností	dvojice značek (písmen)	spojování bodů (oblečení)
1.	x		x	x	x			x	
2.	x		x		x	x		x	
3.	x		x		x	x		x	
4.	x		x	x	x				x
5.	x		x	x	x				x
6.	x		x	x	x			x	
7.	x				x		x		
8.	x		x		x			x	
9.	x		x	x	x			x	
10.	x		x	x	x			x	
11.		16	x		x	ok - dvoje kalhoty		x	
12.		18	x	x	x	špatná odp., jinak ok		x	
13.		3		x					
14.		3		x					
	10	4	11	9	12	2	1	9	2
24	**13**	**9**	**13**	**11**	**16**	**7**	**3**	**13**	**2**
	54,2%	37,5%	54,2%	45,8%	66,7%	29,2%	12,5%	54,2%	8,3%

P3: tabulka, 2. úloha KT – chlapci

chlapci	správně (12)	špatně	barvy	nákres oblečení	systém	zkratky (T, S, K)	výčet možností	dvojice značek (písmen)	spojování bodů (oblečení)	tabulka
1. 5.A	x			x	x			x		
2.	x		x	x	x				x	
3.		16	x	x	x	dvoje kalhoty - ok			x	
4.		15			x	pět triček - ok				x
5.		5		x						
6.		4		x						
7.		2		x						
	2	5	2	6	4	0	0	1	2	1

1. 5.B	x				x	x		x	
2.	x				x	x		x	
3.	x		x		x	x		x	
4.		9	zapomněl 1 tričko		x	x		x	
5.		6	x	x	zapomněl 2 trička				
6.		6		x			x	zajímavá úvaha	
7.		2					x		
8.		1				x			
9.		neřešil							
10.		nerešil							
	3	5	2	2	4	5	2	4	0

17	**5**	**10**	**4**	**8**	**8**	**5**	**2**	**5**	**2**	**1**
	29,4%	58,8%	23,5%	47,1%	47,1%	29,4%	11,8%	29,4%	11,8%	5,9%

P3: tabulka, 2. úloha KT – dívky

dívky	správně (12)	špatně	barvy	nákres oblečení	systém	zkratky (T, S, K)	výčet možností	dvojice značek (písmen)	spojování bodů (oblečení)	příklad 4 . 3 = 12	kreslí vš. možnosti
1. 5.A	x			x	x						x
2.	x		x	x	x				x	x	
3.	x		x	x	x				x	x	
4.	x		x	x					x		
5.	x		x	x	x				x		
6.	x		x	x	x				x		
7.	x		x	x	x				x	x	
8.	x		x	x	x				x		x
9.		16	x	x	x	Přičetla navíc samotná trička					
10.		15	x	x		chaos ve spojování			x		
11.		9	x	x	x	zapomněla 1 tričko			x		
12.		8	x	x	x	opomíjela jednu sukni			x		
13.		7	x	x		spočítala jen dané kusy - nekombinuje					
14.		-	x	x	Odp.: S. si vezme kalhoty.				x		
15.		-	x	x	Odp.: Tričko si vezme a kalhoty.				x		
	8	7	14	15	10	0	0	0	12	3	2

1. 5.B	x		x	x	x			x	
2.	x		x		x	x		x	
3.	x		x		x	x		x	
4.	x		x	x	x				x
5.	x		x	x	x				x
6.	x		x	x	x			x	
7.	x				x		x		
8.	x		x		x			x	
9.	x		x	x	x			x	
10.	x		x	x	x			x	
11.		16	x		x	dvoje kalhoty		x	
12.		18	x	x	x	špatná odp.		x	
13.		3		x					
14.		3		x					
	10	4	11	9	12	2	1	9	2

29	**18**	**11**	**25**	**24**	**22**	**2**	**1**	**9**	**14**	**3**	**2**
	62,1%	37,9%	86,2%	82,8%	75,9%	6,9%	3,4%	31,0%	48,3%	10,3%	6,9%

P3: tabulka, 3. úloha KT – 5.A

chlapci	správně (9)	špatně	barvy	spojuje body	tabulka	3 . 3 = 9
1.	x			x		
2.	x		x	x		
3.	x		x	x		
4.	x			x		
5.	x			x		
6.		15		x		
7.		3		x		
	5	2	2	7		

dívky	správně (9)	špatně	barvy	spojuje body	tabulka	3 . 3 = 9
1.	x		x	x		x
2.	x		x	x		x
3.	x		x			
4.	x					
5.	x		x	x		x
6.	x					x
7.	x		x	x		
8.	x		x	x	ale znáz. 3 týmy	
9.	x		x	x		
10.	x		x	x		
11.	x		x	x		
12.	x		x	x		
13.		18	x	x		6 . 3 = 18
14.		18	x	x		
15.		x	x	Každý člen si zahrál 6 záp. piškvorek.		
	12	3	13	11		4

22	**17**	**5**	**15**	**18**	**0**	**4**
	77,3%	22,7%	68,2%	81,8%		18,2%

P3: tabulka, 3. úloha KT – 5.B

chlapci	správně (9)	špatně	barvy	spojuje body	tabulka	3 . 3 = 9	dvojice značek
1.	x			x			
2.	x		x	x	x		
3.	x						
4.	x			x	x		
5.	x					x	
6.	x						
7.	x		x				x
8.	x			x			
9.	x			x			
10.		6				3 . 2 = 6	
	9	1	2	5	2	1	1

dívky	správně (9)	špatně	barvy	spojuje body	tabulka	3 . 3 = 9	dvojice značek
1.	x		x	x			
2.	x			x			
3.	x						
4.	x		x				x
5.	x		x				x
6.	x		x				x
7.	x					x	
8.	x			x		x	
9.	x				x		
10.	x		x	x			
11.	x		x	x			
12.		15			x		
13.		15			x		
14.		18	x				x
	11	3	7	5	3	2	4

24	**20**	**4**	**9**	**10**	**5**	**3**	**5**
	83,3%	16,7%	37,5%	41,7%	20,8%	12,5%	20,8%

P3: tabulka, 3. úloha KT – chlapci

chlapci	správně (9)	špatně	barvy	spojuje body	tabulka	3 . 3 = 9	dvojice značek
1. 5.A	x			x			
2.	x		x	x			
3.	x		x	x			
4.	x			x			
5.	x			x			
6.		15		x			
7.		3		x			
	5	2	2	7	0	0	0

1. 5.B	x			x			
2.	x		x	x	x		
3.	x						
4.	x			x	x		
5.	x					x	
6.	x						
7.	x		x				x
8.	x			x			
9.	x			x			
10.		6				3 . 2 = 6	
	9	1	2	5	2	1	1
17	**14**	**3**	**4**	**12**	**2**	**1**	**1**
	82,4%	17,6%	23,5%	70,6%	11,8%	5,9%	5,9%

P3: tabulka, 3. úloha KT – dívky

dívky	správně (9)	špatně	barvy	spojuje body	tabulka	3 . 3 = 9	dvojice značek
1. 5.A	x		x	x		x	
2.	x		x	x		x	
3.	x		x				
4.	x						
5.	x		x	x		x	
6.	x					x	
7.	x		x	x			
8.	x		x	x	ale znázor. 3 týmy		
9.	x		x	x			
10.	x		x	x			
11.	x		x	x			
12.	x		x	x			
13.		18	x	x		6 . 3 = 18	
14.		18	x	x			
15.		x	x	Každý člen si zahrál 6 záp. piškvorek.			
	12	3	13	11	0	4	0

1. 5.B	x		x	x			
2.	x			x			
3.	x						
4.	x		x				x
5.	x		x				x
6.	x		x				x
7.	x					x	
8.	x			x		x	
9.	x				x		
10.	x		x	x			
11.	x		x	x			
12.		15			x		
13.		15			x		
14.		18	x				x
	11	3	7	5	3	2	4
29	**23**	**6**	**20**	**16**	**3**	**6**	**4**
	79,3%	20,7%	69,0%	55,2%	10,3%	20,7%	13,8%

P3: tabulka, 4. úloha KT – 5.A

chlapci	barvy	překreslil bludiště	vše do původního	počet cest
1.		3x		8
2.	x		x	8 (11)
3.	x		x	8
4.		3x		8
5.	x		x	6
6.	x		x	3
7.	x	1x		5
8.	x		x	5
9.	x		x	6
10.	x		x	4
	8	3	7	pr. 6,1

dívky	barvy	překreslil bludiště	vše do původního	počet cest
1.	x	1x		5
2.	x	4x		8 (10)
3.	x	4x		8 (10)
4.	x	1x		6
5.	x	1x		6
6.	x		x	4
7.	x		x	4
8.	x		x	4
9.	x		x	6
10.	x		x	6
11.	x		x	6
12.	x		x	4
13.	x		x	5
14.	x		x	6
	14	5	9	5,57
24	**22**	**8**	**16**	**5,835**
	91,7%	33,3%	66,7%	

P3: tabulka, 4. úloha KT – 5.B

chlapci	barvy	překreslil bludiště	vše do původního	počet cest
1.		3x		8
2.	x		x	8 (11)
3.	x		x	8
4.		3x		8
5.	x		x	6
6.	x		x	3
7.	x	1x		5
8.	x		x	5
9.	x		x	6
10.	x		x	4
	8	3	7	pr. 6,1

dívky	barvy	překreslil bludiště	vše do původního	počet cest
1.	x	1x		5
2.	x	4x		8 (10)
3.	x	4x		8 (10)
4.	x	1x		6
5.	x	1x		6
6.	x		x	4
7.	x		x	4
8.	x		x	4
9.	x		x	6
10.	x		x	6
11.	x		x	6
12.	x		x	4
13.	x		x	5
14.	x		x	6
	14	5	9	5,57
24	**22**	**8**	**16**	**5,835**
	91,7%	33,3%	66,7%	

P3: tabulka, 4. úloha KT – chlapci

chlapci	barvy	překreslil bludiště	vše do původního	počet cest
1. 5.A	x		x	7
2.	x		x	3
3.			x	4
4.	x		x	5 (6)
5.	x	1x		5 (4)
6.	x		x	4
7.	x		x	4
	6	1	6	4,57

1. 5.B		3x		8
2.	x		x	8 (11)
3.	x		x	8
4.		3x		8
5.	x		x	6
6.	x		x	3
7.	x	1x		5
8.	x		x	5
9.	x		x	6
10.	x		x	4
	8	3	7	pr. 6,1

17	**14**	**4**	**13**	**5,335**
	82,4%	23,5%	76,5%	

P3: tabulka, 4. úloha KT – dívky

dívky	barvy	překreslil bludiště	vše do původního	počet cest
1. 5.A	x		x	3
2.	x		x	5
3.	x		x	5
4.	x		x	5
5.	x		x	8 (10)
6.	x		x	5
7.	x		x	6
8.	x		x	4
9.	x		x	3
10.	x		x	7
11.	x	1x		4
12.	x		x	4
13.	x		x	4
14.	x		x	2
15.	x		x	4
	15	1	14	4,6

1. 5.B	x	1x		5
2.	x	4x		8 (10)
3.	x	4x		8 (10)
4.	x	1x		6
5.	x	1x		6
6.	x		x	4
7.	x		x	4
8.	x		x	4
9.	x		x	6
10.	x		x	6
11.	x		x	6
12.	x		x	4
13.	x		x	5
14.	x		x	6
	14	5	9	5,57
29	**29**	**6**	**23**	**5,085**
	100,0%	20,7%	79,3%	

Příloha 4:

Ukázka vyplněného kontrolního testu

(chlapec, 5.A)

P4 - 1 až 2

KONTROLNÍ TEST PRO ŽÁKY 5. TŘÍD ZŠ

Výsledky testu budou sloužit jako podklad pro zpracování praktické části DIPLOMOVÉ PRÁCE
„Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně“.

Vypracovala: Lucie Vilimovská, 5. NŠ, PF TUL, leden 2012

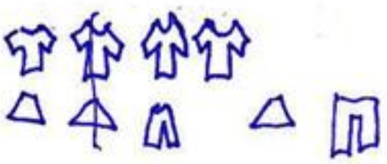
ZAŠKRTNI: **Jsem dívka.** ☐ **Jsem chlapec.** ☑ 5.A

ZKUS VYŘEŠIT NÁSLEDUJÍCÍ ÚLOHY:

1. **Kolika způsoby lze vybarvit motýla na obrázku, pokud můžeš použít jen červenou a žlutou barvu?** Barvy mohou být uspořádány jakkoliv.

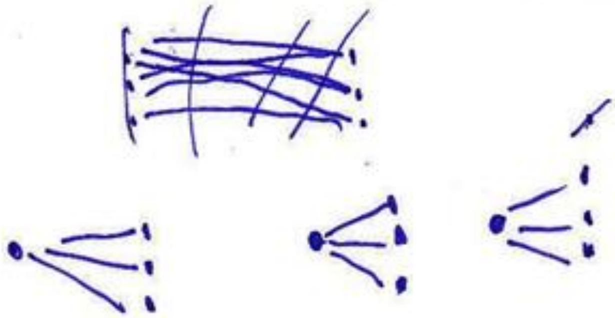
Lze vybarvit 16 způsoby.

2. Sára se rozhoduje, co si vezme na sebe. Vyndala ze skříně čtyři trička, dvě sukně a jedny kalhoty. **Jak se může Sára obléknout?** Vezme si buď jen kalhoty, nebo jen sukni, ne obojí!



může se obléknout 5 různými způsoby.

3. V turnaji piškvorek se proti sobě utkaly dva trojčlenné týmy. Každý člen z jednoho týmu si zahrál se všemi členy druhého týmu. **Kolik bylo celkem odehraných zápasů?**



Celkem bylo 9 odehraných zápasů

4. **Kolika způsoby se dostane červená kulička ven z bludiště?**
Nikdy neprojde dvakrát stejnou cestou!

dostane se 6 různými způsoby ven.

Děkuji Ti za vyplnění testu!

Příloha 5:

Ukázka vyplněného dotazníku

(dívka, 5.B)

DOTAZNÍK PRO ŽÁKY 5. TŘÍD ZŠ

Odpovědi žáků budou sloužit jako podklad pro zpracování praktické části DIPLOMOVÉ PRÁCE **„Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně".**

Vypracovala: Lucie Vilimovská, 5. NŠ, PF TUL, únor 2012

ZAŠKRTNI: ☑ **Jsem dívka.** ☐ **Jsem chlapec.** **třída:** V. B.

1. Setkal(a) ses už někdy s podobnými úlohami?

☐ NE ☑ ANO → **kde to bylo?** ☑ ve škole ☐ doma ☐ venku jinde:

2. Co ti dělalo při řešení úloh PROBLÉMY?

Zapisování.

3. Co pro tebe bylo při řešení úloh SNADNÉ?

Ve skupině.

4. Úlohy, které se ti zdály LEHKÉ – ZAKROUŽKUJ!

Úlohy, které se ti zdály TĚŽKÉ – ŠKRTNI ČAROU!

Dárek M + T	Čtvercová síť	Pizza (druhy)
Chlapci v kupé	~~Nástroje~~	Petr na kole (mapka)
Zvířecí delegace	Člověče, nezlob se	Bludiště
Přípitek	~~Posílání pohledů~~	Myš běží k sýru

5. Oznámkuj úlohy podle toho, jak tě BAVILY:

(známka **1** = úloha mě hodně bavila; známka **5** = úloha mě vůbec nebavila)

Dárek M + T 1	Čtvercová síť	Pizza (druhy) 3
Chlapci v kupé 1	Nástroje 5	Petr na kole (mapka) 1
Zvířecí delegace 1	Člověče, nezlob se 1	Bludiště 2
Přípitek 1	Posílání pohledů 3	Myš běží k sýru 4

6. Kde si myslíš, že se podobné úlohy mohou objevovat?

V prvních třídách. Lehčí ve škole.

Děkuji Ti za spolupráci!

Příloha 6:

Souhlas pořizováním fotodokumentace během realizace experimentu (kopie)

Vážení rodiče,

ve dnech 6. 2. – 10. 2. 2012 navštíví třídy 5.A a 5.B studentka pedagogické fakulty TUL Lucie Vilimovská, aby s žáky vyzkoušela matematické činnosti, které má připraveny v rámci praktické části své diplomové práce. Realizaci potřebuje zdokumentovat. Proto Vás žádáme o souhlas s pořízením fotodokumentace žáků během činností a s případným prezentováním vybraných snímků.

JMÉNO ŽÁKA: ....

Souhlasím s pořizováním fotodokumentace během realizace činností pro DP a s případnou prezentací fotografií.

V Liberci dne .... Podpis zákonného zástupce:.......................................