

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

VYUŽITÍ JAPONSKÝCH HLAVOLAMŮ VE VÝUCE
MATEMATIKY NA 1. STUPNI ZÁKLADNÍ ŠKOLY

THE USE OF JAPANESE PUZZLES IN TEACHING
MATHEMATICS AT PRIMARY SCHOOL

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Jaroslava Kloboučková

Autor diplomové práce: Barbora Pěničková

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

Forma studia: prezenční

Diplomová práce dokončena: březen, 2012

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma využití japonských hlavolamů ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ vypracovala pod vedením vedoucí diplomové práce samostatně za použití uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato diplomová práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 7. 3. 2012

Podpis:

Abstrakt:

Tato diplomová práce se zabývá problematikou japonských hlavolamů a jejich využitím při výuce matematiky na prvním stupni základní školy. Jejím hlavním cílem je ověřit, zda je možné systematickým vedením, které využívá gradovanou sérii úloh, dovést žáky prvního stupně základní školy v luštění hlavolamu sudoku na úroveň srovnatelnou s úrovní starších žáků a dospělých luštitelů tohoto hlavolamu. Teoretická část je zaměřena na historii sudoku, strategie jeho řešení, několik dalších typů japonských hlavolamů a také na sudoku v kontextu školního využití. Praktická část popisuje sérii experimentů se žáky prvního, později druhého ročníku základní školy, které byly prováděny za účelem ověření hypotézy této diplomové práce.

Abstract:

This diploma thesis deals with Japanese puzzles and their use in teaching mathematics at primary school. Its main aim is to verify if it is possible for the pupils to achieve comparable results with older pupils and adult Sudoku solvers supposing that these learners are systematically guided through an escalating set of Sudoku puzzles. The theoretical part of the thesis is focused on the history of Sudoku, several strategies of its solving, other examples of Japanese puzzles and also on Sudoku in the context of its use at school. The practical part describes a series of experiments with pupils of the first, later second grade of a primary school, which were conducted in order to verify the hypothesis of this thesis.

Klíčová slova: japonské hlavolamy, sudoku, magický čtverec, strategie řešení, logické uvažování

Key words: Japanese puzzles, Sudoku, magic square, strategy of solving, logical thinking

Obsah

Úvod a cíle

1 Co je to sudoku	7
2 Historie sudoku	9
3 Alternativy sudoku a příbuzné hlavolamy	11
3.1 Alternativy sudoku.....	12
3.1.1 Sudoku-X.....	12
3.1.2 Odd Pair Sudoku	12
3.1.3 Consecutive Sudoku.....	13
3.1.4 Killer Sudoku	14
3.2 Příbuzné hlavolamy	16
3.2.1 Futoshiky	17
3.2.2 Kakuro	18
4 Kritéria obtížnosti různých úrovní sudoku	19
5 Strategie řešení sudoku	21
5.1 Hledání čísla pro dané pole	22
5.2 Hledání pole pro dané číslo	24
5.3 Umisťování čísel podle vnitřních čtverců	26
5.4 Hidden Subset	27
6 Tvoření sudoku	29
7 Podnětné prostředí.....	36

8 Dětské sudoku v publikacích.....	37
9 Metodologie výzkumu	41
10 Seznamování s problematikou sudoku	44
11 První sudoku 6x6	51
12 Prohlubování poznání o sudoku.....	56
13 Upevňování strategií řešení	58
14 Dosažení optimální úspěšnosti pro další úroveň.....	61
15 Osmá a devátá třída.....	64
16 Sudoku tradiční velikosti	69
17 Závěrečná úloha	74
18 Dospělí luštitelé.....	78
19 Jiná druhá třída	80
20 Závěr praktického výzkumu.....	82

Závěr

Literatura a informační zdroje

Přílohy

Úvod a cíle

Jak je uvedeno v názvu, tato práce se zabývá japonskými hlavolamy a jejich využitím při výuce matematiky na prvním stupni základní školy. Důvody pro výběr matematiky jako oblasti pro mou diplomovou práci vycházely především z mého kladného postoje, který k tomuto předmětu mám. Již v prvním semestru mého studia jsem v eseji o mém postoji k matematice uvedla, že je můj vztah k matematice už od první třídy základní školy příjemný, zejména co se týká aritmetiky, a proto pro mě matematika byla jasnou volbou.

Důvod pro výběr japonských hlavolamů, především hlavolamu sudoku, byl rovněž založen na mé pozitivní zkušenosti. Japonským hlavolamům se věnuji již několik let, a to nejen hlavolamu sudoku, ale i jeho alternativám a „příbuzným hlavolamům“, jako je například kakuro. Tyto hlavolamy mě poprvé oslovily, když jsem viděla svou kamarádku, jak luští sudoku, a protože jsem vždycky měla ráda nejrůznější křížovky a rébusy, zkusila jsem také jeden hlavolam vyluštit. Troufám si říci, že od té doby jsem vyluštila stovky, možná tisíce sudoku a mnoho dalších japonských hlavolamů. V současné době luštím sudoku přibližně dvakrát až třikrát do týdne v některé z publikací, které doma máme. Kromě mě totiž z mé rodiny luští sudoku také oba moji rodiče, zejména otec, s nímž si vzájemně vyměňujeme taková sudoku, která nám přišla něčím obzvláště obtížná či zajímavá.

Z této osobní zkušenosti vím, že sudoku rozvíjí logické uvažování, zejména při hledání strategií řešení, a částečně také kombinatoriku, a proto jej považuji za vhodné pro zařazení do výuky matematiky. Jak je v jedné z kapitol této práce uvedeno, jedná se o podnětné prostředí, které využívá matematické poznání a motivuje žáky pro jejich další poznávání matematiky.

Cílem této diplomové práce je především potvrdit skutečnost, že podnětné prostředí funguje i na příkladu tohoto hlavolamu, jenž je veřejností považován především za zábavu, jinými slovy ověřit hypotézu, že systematickým seznamováním se s prostředím prostřednictvím vhodně gradované kaskády úloh je možné dovést alespoň 70% žáků prvního stupně základní školy na úroveň srovnatelnou se staršími žáky, nebo dospělými

luštiteli. Dále si tato práce klade za cíl uvést základní informace o historii, strategiích řešení a pravidlech vybraných japonských hlavolamů a zároveň poskytnout učitelům prvního stupně základní školy materiály využitelné pro jejich vlastní školní praxi.

1 Co je to sudoku

V této kapitole je popsáno, jak vypadá hlavolam sudoku a jaká jsou základní pravidla, která při jeho řešení platí. Vše je zaznamenáno a formulováno na základě mých osobních zkušeností, které jsem během dlouhodobého luštění sudoku získala.

Sudoku je japonský hlavolam, jenž je obvykle tvořen čtvercovou mřížkou, která je rozdělená na menší vnitřní čtverce (nebo obdélníky), a ty jsou dále rozdělené na ještě menší pole. Úkolem luštitel je doplnit do jednotlivých polí čísla od jedné do čtyř, šesti, nebo devíti - podle velikosti hlavolamu - tak, aby se ve sloupcích, řádcích a vnitřních čtvercích (nebo obdélnících) nevyskytovalo žádné číslo dvakrát, přičemž v některých polích jsou již čísla na začátku doplněná.

Tradiční sudoku, se kterým je možné se běžně setkat v novinách nebo publikacích, jež se tomuto hlavolamu věnují, má velikost 9x9, tedy devět polí v jednom řádku a v jednom sloupci – jako je uvedeno na obrázku č. 1. V tomto zadání sudoku o velikosti 9x9 je celkem osmdesát jedna polí, přičemž jedním polem rozumíme nejmenší čtverec, například čtverec A1 nebo A2. Vnitřních čtverců má tato mřížka devět – jsou to čtverce složené z devíti polí, která jsou ohraničená silnější čarou, například skupina polí A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2 a C3. Dále je v této konkrétní mřížce předem zadáno čtyřicet pět polí, a je tedy potřeba doplnit zbylých třicet šest čísel od jedné do devíti. Jak již bylo řečeno, v každém z devíti řádků, sloupců a vnitřních čtverců se nesmí žádné číslo opakovat, tudíž součty čísel v jednotlivých řádcích, sloupcích a čtvercích jsou vždy čtyřicet pět.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		3		2		6	4	8	
2	9		2		7	8			3
3	6		4	3			2	9	
4		7	8			4			9
5		4		8		1	3	7	6
6	3		1		5	7		2	
7	4	9			8	3	7	5	
8	8		5	7	4			3	
9		1		5			9		8

Obr. č. 1, zadání sudoku (vlastní sudoku)

U sudoku menší velikosti, se kterou se nejčastěji setkávají děti a začínající luštitelé, platí analogicky stejná pravidla. Mřížka má čtyři (u sudoku velikosti 4x4), nebo šest (6x6) polí v každém řádku a sloupci. Do jednotlivých polí se doplňují čísla od jedné do čtyř (4x4), či od jedné do šesti (6x6). V případě sudoku velikosti 6x6 se potom setkáváme s vnitřními obdélníky namísto vnitřních čtverců, které se běžně vyskytují u sudoku 4x4, 9x9 či jiné velikosti, jejíž počet polí v řádku nebo sloupci je vyjádřen číslem, jenž představuje druhou mocninu některého jednociferného čísla (nejčastěji trojky, dvojky, eventuálně čtyřky).

Výše uvedený popis se týká tradičního sudoku, se kterým je možné se běžně setkat, avšak jsou i jiné modely různých velikostí, které například sdružují několik čtvercových mřížek dohromady, a vytváří tak nejrůznější tvary. Alternativou jsou také hlavolamy, pro které platí navíc ještě další pravidla, třeba že se čísla nesmí opakovat také v rámci jedné úhlopříčky, nebo pravidla, která blíže specifikují vztahy mezi sousedícími poli – například, že některá ze sousedících polí obsahují čísla lišící se od sebe rozdílem jedna, či dávající

po sečtení lichý výsledek. V neposlední řadě se také objevují sudoku využívající písmen, nebo nejružnějších symbolů namísto čísel. Taková sudoku, obzvláště ta se symboly, jsou potom vhodná zejména pro děti, které ještě neznají číslice. Některé z výše popsaných typů jsou uvedeny později ve třetí kapitole této diplomové práce.

2 Historie sudoku

Sudoku patří dnes k jednomu z nejpůvodnějších japonských hlavolamů, který denně vydávají mnohé noviny v rámci svých příloh, a luští jej tak miliony lidí po celém světě. Pro většinu luštitelů by však mohlo být překvapující, že ačkoliv je tento hlavolam považován za japonský, z japonštiny pochází pouze jeho název. Jeho původ je totiž zakořeněn v hlavolamu, který se poprvé objevil ve starověké Číně.

Za předchůdce sudoku bývá považována hra nazvaná magický čtverec, jež má původ právě v Číně. V této hře platí základní pravidlo, že v jednotlivých řádcích a sloupcích se vždy vyskytuje stejný součet (Preston, 2006). Do čtverce jsou doplněna po sobě jdoucí přirozená čísla, a to tak, že kromě řádků a sloupců je stejný součet také na obou úhlopříčkách. Nejstarší dochovaný magický čtverec nazvaný Lo Šu podle místa, odkud pochází, je složen z devíti polí ve čtverci 3x3, kde součet v řádku, sloupci a úhlopříčce se rovná patnácti (Mohelská, 2007). Tento magický čtverec je uveden na obrázku č. 2.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. č. 2, nejstarší magický čtverec Lo Šu (Mohelská, 2007)

V Evropě patří k nejstarším magickým čtvercům čtverec z roku 1514, který se objevuje ve slavné rytině malíře Albrechta Dürera s názvem *Melancholie* (obrázek č. 3). Tento magický čtverec má součet třicet čtyři

a je navíc výjimečný dvěma zvláštnostmi. Za prvé obsahuje ve dvou prostředních polích spodního řádku právě letopočet vzniku této rytiny a za druhé, a to je více podstatné, součet třicet čtyři se neshoduje pouze v jednotlivých řádcích, sloupcích a obou úhlopříčkách, nýbrž také ve všech čtyřech menších vnitřních čtvercích 2x2 (Mohelská, 2007).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. č. 3, magický čtverec z rytiny *Melancholie* od Albrechta Dürera (Mohelská, 2007)

Dalším významným Evropanem, jenž se zapsal do historie vzniku hlavolamu sudoku, je švýcarský vědec z 18. století Leonhard Euler. Jeho magický čtverec je znám spíše pod jménem Latinský čtverec, čímž je vystižena skutečnost, že Euler v tomto čtverci používal převážně písmena latinské abecedy, nebo jiné symboly. Platí zde však pravidlo, že v každém řádku a sloupci se může jednotlivé písmeno, či symbol vyskytovat pouze jednou (Mohelská, 2007). Stejné pravidlo nacházíme právě u hlavolamu sudoku.

Jak již bylo uvedeno, ačkoliv je sudoku nazýváno japonským hlavolamem, jeho původ japonský není. První hlavolam tohoto typu byl publikován v sedmdesátých letech 20. století ve Spojených státech amerických v časopise vydávaném společností Dell pod názvem „Number Place” („Místo pro číslo“). Přesto, že se dnes tento hlavolam těší velké popularitě právě v Americe a také v Evropě, neměl zde v této době prakticky žádný úspěch, pravděpodobně kvůli větší oblíbenosti rébusů slovních, tedy zejména křížovek (Preston, 2006).

Jiná situace však nastala v Japonsku, kde křížovky neměly a zřejmě ani nebudou mít příliš důležitou roli, neboť, jak bylo studentům prezentováno

na semináři PhDr. Kláry Matuchové, Ph.D. k předmětu Úvod do jazyka vyučovaného v zimním semestru akademického roku 2010/2011 na PedF UK, japonský systém písma využívá jednak čínské logosylabické znaky, tj. znaky reprezentující jednoslabičná slova či jejich část, jednak dvě sylabické formy písma, kde základní jednotkou je slabika, tedy nepoužívá systém fonetický, kde by jeden znak odpovídal jedné hlásce. Z tohoto důvodu je poměrně obtížné vytvářet křížovky pro japonské písmo. Tento problém se však u číselných rébusů vylučuje, a tudíž právě v Japonsku vyvolaly tyto hlavolamy obrovský zájem a následně získaly i své jméno. Posléze zde tento hlavolam začalo vydávat vydavatelství Nikoli, které ho uvádělo pod názvem „suuji wa dokushin ni kagiru“, což v překladu znamená přibližně „jednoduché číslo“, a tento název byl později zjednodušen na nám známé sudoku (Preston, 2006).

Do této doby ale byly jednotlivé hlavolamy vytvářeny ručně. Až když se novozélandský milovník nejrůznějších hlavolamů Wayne Gould setkal se sudoku, přišel na řadu počítač. Celých šest let Gould vyvíjel program, který by vytvářel jednotlivá zadání sudoku, aby nakonec uspěl a ukázal tento program šéfredaktorovi britského deníku *The Times*, čímž zajistil tomuto hlavolamu současnou popularitu, neboť od té doby sudoku vychází denně nejen v tomto, ale i v dalších denících po celém světě (Preston, 2006). Dokonce se také pořádá mistrovství světa v jeho luštění.

Tato masivní popularita sudoku je dána především díky tomu, že na rozdíl od rébusů slovních je sudoku, využívající čísla, hlavolamem mezinárodním. Oproti magickým čtvercům zde navíc ani není potřeba umět sčítat, stačí pouze logické uvažování, a proto je tento hlavolam vyřešitelný pro všechny věkové generace, ve zjednodušené formě i pro děti předškolního a mladšího školního věku.

3 Alternativy sudoku a příbuzné hlavolamy

Vedle tradičního sudoku, které bylo představeno v předcházejících kapitolách, je dále možné se setkat s jeho alternativami a příbuznými hlavolamy. Existuje velké množství takovýchto hlavolamů, avšak v této kapitole

je prezentováno jen několik z nich, a to takové hlavolamy, které využívají matematické poznání a při adekvátní obtížnosti by byly vhodné pro zařazení do výuky matematiky na prvním stupni základní školy. Jejich principy a pravidla jsou opět popsána na základě mé vlastní zkušenosti s těmito hlavolamy.

3.1 Alternativy sudoku

Za alternativu sudoku je v této práci považován takový hlavolam, který se se sudoku shoduje v jeho základních principech a pravidlech, tzn. má čtvercový tvar mřížky a každé číslo od jedné do devíti (při tradiční velikosti 9x9) se v jednom řádku, sloupci a vnitřním čtverci nesmí opakovat, ale navíc pro něj platí ještě nějaké další pravidlo. V této části jsou uvedeny čtyři takové hlavolamy: „Sudoku-X“, „Odd Pair Sudoku“, „Consecutive Sudoku“ a „Killer Sudoku“.

3.1.1 Sudoku-X

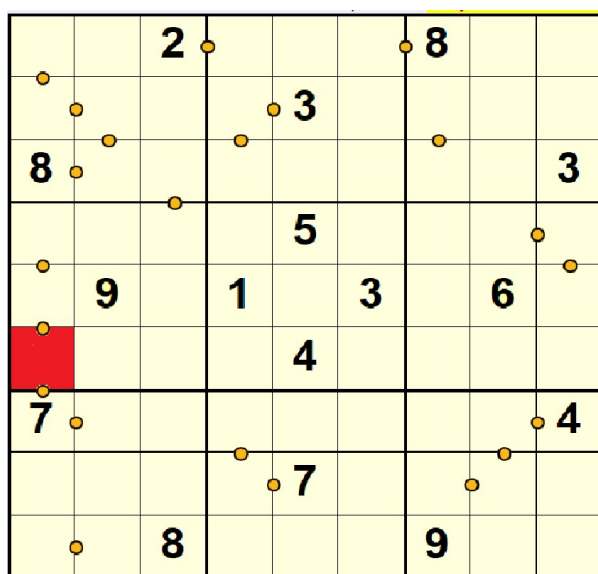
Sudoku-X je nejjednodušší obměnou tradičního sudoku. Pravidlo, které pro tento hlavolam platí, ale u tradičního sudoku ho nenacházíme, je, že kromě řádků, sloupců a vnitřních čtverců se jednotlivá čísla nesmí opakovat také uvnitř každé ze dvou úhlopříček mřížky. Tím může připomínat původní magický čtverec, ve kterém vedle řádků a sloupců měly i úhlopříčky stejnou roli, tj. shodný součet čísel. Zadání takového sudoku potom vypadá úplně stejně jako zadání sudoku tradičního, avšak na toto pravidlo musí být upozorněno, vzhledem k tomu, že je nad rámcem tradičního sudoku.

3.1.2 Odd Pair Sudoku

„Odd Pair Sudoku“ je dalším z alternativních hlavolamů, které vychází z tradičního sudoku. Jeho název znamená v překladu „lichá dvojice“ a týká se vztahu některých ze dvou sousedících polí v mřížce, jejichž součet dává dohromady liché číslo. Taková dvojice je v mřížce označena malým kolečkem umístěným na rozhraní příslušných polí (viz obrázek č. 4). Tento hlavolam tudíž využívá mimo logické dedukce uplatňované při řešení tradičního sudoku navíc ještě sčítání a poznání o lichých číslech.

Jak je z obrázku patrné na vyznačené pole je nutno doplnit takové číslo, aby dohromady se sedmičkou umístěnou pod ním dávalo lichý součet. Je tedy třeba doplnit některé ze sudých čísel z řady od jedné do devíti, tj. dvojku, čtyřku, šestku, nebo osmičku. Vyjdeme-li z pravidel tradičního sudoku, vyloučíme čísla čtyři a osm, neboť po jejich doplnění by se opakovaly dvě osmičky v prvním sloupci, nebo dvě čtyřky v šestém řádku.

Dále je ještě nezbytné podotknout to, že pokud na rozhraní některých sousedních polí kolečko umístěno není, ještě neznamená, že se v nich lichý součet objevit nemůže.



Obr. č. 4, Odd Pair Sudoku

(<http://www.puzzlemix.com/playgrid.php?demo=1&type=oddpair>)

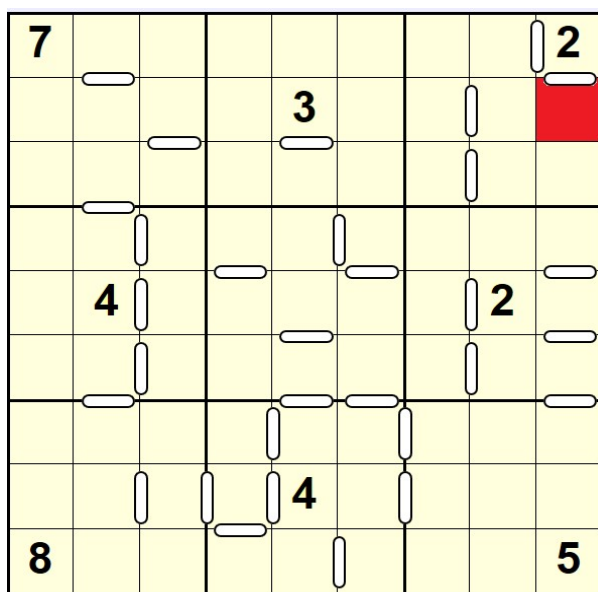
3.1.3 Consecutive Sudoku

„Consecutive Sudoku“ je relativně podobné, co se týká jeho přidaného pravidla, neboť se také vztahuje na dvě sousedící pole. Avšak v překladu název tohoto hlavolamu znamená „po sobě jdoucí“, z čehož je patrné, že sousedící pole, jejichž rozhraní je označeno, musí obsahovat dvě po sobě jdoucí čísla z řady od jedné do devíti (při velikosti 9x9).

Z hlavolamu, který je uveden na obrázku č. 5, můžeme usuzovat, že na vyznačené pole pod dvojkou, může být doplněno číslo, které v číselné řadě od jedné do devíti přechází dvojce, nebo ji následuje, tedy buď jednička,

nebo trojka. Vzhledem k tomu, že zde stále platí pravidla tradičního sudoku, není možné na označené pole doplnit trojku, jelikož by se ve druhém řádku vyskytovala dvakrát, a tak jedinou možností je zde jednička.

Na rozdíl od předchozího hlavolamu však tady neplatí, že i na neoznačených sousedících polích se může tento jev vyskytnout. U „Consecutive Sudoku“ se po sobě jdoucí čísla vyskytují pouze na těch sousedících polích, jejichž rozhraní je označeno.



Obr. č. 5, Consecutive Sudoku

(<http://www.puzzlemix.com/playgrid.php?demo=1&type=consecutive>)

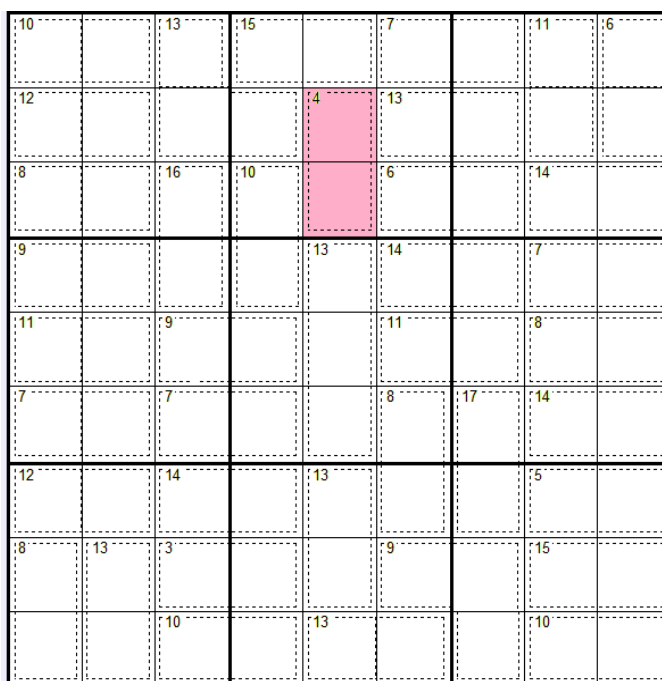
3.1.4 Killer Sudoku

U tzv. „Killer Sudoku“ se setkáváme s další alternativou sudoku. Jednotlivá pravidla tradičního sudoku jsou opět dodržována, avšak výjimkou je zde skutečnost, že v zadání nebývají předem doplněná čísla. Mřížka je tedy úplně prázdná, ale jednotlivá pole jsou ohraničena v menších uskupeních, která musí splňovat hlavní pravidlo tohoto typu sudoku – musí dohromady dávat součet, jenž je uvedený v každém takovém uskupení.

Tento hlavolam tedy na rozdíl od tradičního sudoku využívá navíc matematickou operaci sčítání. Je však nutné při případném zadávání žákům na prvním stupni úlohu přizpůsobit jejich úrovni, například prostřednictvím

doplnění alespoň některých čísel do mřížky, nebo volbou hlavolamu menší velikosti, neboť „Killer Sudoku“ je již jedna z obtížnějších alternativ z toho důvodu, že na většinu polí lze umístit více čísel, která by daný součet vytvořila.

Základní pravidlo lze blíže ilustrovat na obrázku č. 6a, kde ve vyznačených dvou polích má být součet čtyři. Vydeme-li z toho, že v jednom sloupci (zde zároveň vnitřním čtverci), se čísla nesmí opakovat, je patrné, že čtyřku nelze rozložit jinak než na jedničku a trojku. Vzhledem k tomu, že v zadání nejsou předem doplněná čísla, není zatím evidentní, do kterého pole umístit které číslo. Proto usuzují, že pro žáky prvního stupně je potřeba tento hlavolam nějakým způsobem upravit.



Obr. č. 6a, Killer Sudoku

(<http://www.puzzlemix.com/playgrid.php?demo=1&type=killer>)

Stejně jako u tradičního sudoku i u „Killer Sudoku“ je možné se setkat s alternativní variantou „Killer Sudoku-X“, která (jako u „Sudoku-X“) zahrnuje také pravidlo zákazu opakovaného výskytu čísel na jednotlivých úhlopříčkách. Jinou alternativou je také „Killer Sudoku Pro“ (viz obrázek č. 6b), které by při adekvátním uzpůsobení obtížnosti bylo zvláště přínosné

pro zařazení do výuky matematiky na prvním stupni základní školy, neboť vedle sčítání také využívá matematických operací odčítání, násobení a dělení.

9+		360×	630×			32×		
3-				23+			2-	
5-				1728×	210×	3+		22+
	480×		17+			2×		
14+						672×		
	28×							7+
	42×				25+			
40×		5-			19+		24×	
12+							5-	

Obr. č. 6b, Killer Sudoku Pro

(<http://www.puzzlemix.com/playgrid.php?demo=1&type=killerpro>)

Opět je zde ale nutné dodat, že je více než vhodné zadání modifikovat tak, aby velkou možností, jak daný součet, rozdíl, součin nebo podíl vytvořit, žáky neodradilo od řešení – například již výše zmíněným zmenšením mřížky, umístěním některých čísel do zadané mřížky předem, nebo také použitím nižších čísel pro uvedené součty, rozdíly, součiny a podíly.

3.2 Příbuzné hlavolamy

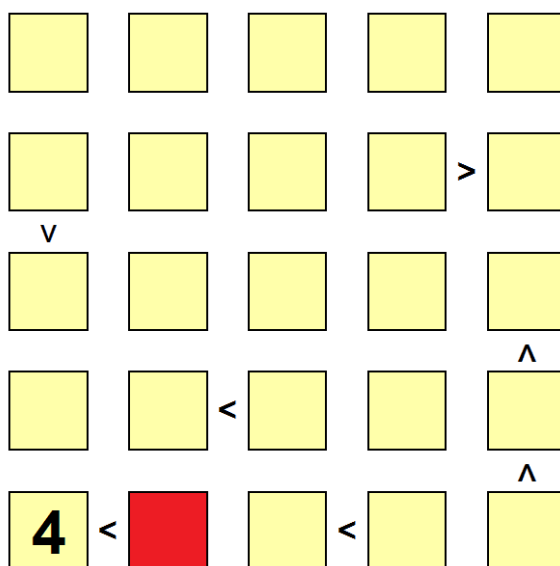
Označení „příbuzné hlavolamy“ je v této práci použito pro takové hlavolamy, které již s tradičním sudoku nesouvisí tolik, jako výše uvedené alternativy, neboť nemají přesné uspořádání mřížky typické pro tradiční sudoku, ale stále je možné mezi těmito hlavolamy a hlavolamem sudoku nalézt některé společné prvky a pravidla. V této kapitole je pozornost zaměřena na dva z nich,

„Futoshiky“ a „Kakuro“, jež oba využívají matematické poznání a mohly by být přínosným zpestřením výuky na prvním stupni.

3.2.1 Futoshiky

Futoshiky se podobá tradičnímu sudoku svou čtvercovou mřížkou a pravidlem, že se v řádcích a sloupcích nesmějí vyskytovat čísla dvakrát, avšak nejsou zde již žádné vnitřní čtverce. Co představuje hlavní rozdíl, jsou znaménka nerovnosti umístěná mezi některými z polí, která značí vztah mezi sousedícími dvěma poli. Jak je viditelné na obrázku č. 7, na vyznačené pole je třeba doplnit číslo větší než čtyři. Vzhledem k tomu, že se v této úloze jedná o mřížku velikosti 5x5, umisťují se do jednotlivých polí čísla od jedné do pěti, a tudíž není možné do označeného pole doplnit nic jiného než číslo pět.

Je opět žádoucí zde podotknout, že by úlohy měly být zadávány v takové podobě, která by byla v optimální úrovni zvládnutelné pro žáky, tedy například by obsahovala více zadaných čísel, než úloha na obrázku.



Obr. č. 7, Futoshiky

(<http://www.puzzlemix.com/playgrid.php?demo=1&type=futoshiki>)

3.2.2 Kakuro

Kakuro je hlavolamem, který je ze všech uvedených hlavolamů v této kapitole zřejmě nejvíce odlišný od samotného sudoku. Jeho mřížka je nepravidelná a tradičnímu sudoku se podobá pouze v tom, že se v jednotlivých řádcích a sloupcích nesmí opakovat stejná čísla (vždy od jedné do devíti bez ohledu na velikost mřížky). Matematické poznání, které je v tomto hlavolamu využíváno, se týká rozkladu čísel, neboť u každého uskupení polí je uvedeno číslo, jehož rozklad musí být tvořen tolika čísly, kolik je v daném uskupení polí, a zároveň lze použít pouze čísla od jedné do devíti, navíc tak, aby se v „řádku“ a „sloupci“ neopakovala (zde nemůžeme hovořit o řádku a sloupci v pravém slova smyslu, neboť jednotlivé řádky a sloupce bývají rozděleny na několik částí, v nichž je právě pravidlo zakazující opakování čísel uplatňováno).

Na obrázku č. 8 lze vidět, že do vyznačených dvou polí je třeba rozložit číslo čtyři. Vzhledem k tomu, že se zde nesmí opakovat stejná čísla, není možné čtyřku rozložit jinak než na jedna a tři.

Obr. č. 8, Kakuro

(<http://www.puzzlemix.com/playgrid.php?demo=1&type=kakuro>)

Aby bylo možné určit, do kterého pole patří které číslo, je nutné se podívat na příslušnou část řádku, zde zejména na tu, jejíž součástí je horní z označených polí. Do této části řádku tvořené dvěma poli je potřeba rozložit číslo tři, které nabízí pouze možnost rozkladu na jedna a dvě, tudíž je logické, že do horního označeného pole se doplní jednička (aby v poli po jeho levé straně mohla být dvojka, což dá dohromady zadané číslo tři) a do dolního označeného pole se doplní trojka.

4 Kritéria obtížnosti různých úrovní sudoku

Určení obtížnosti sudoku by se mohlo zdát jednoduché a objektivní, opak je ale pravdou. Ve hře je několik faktorů, jejichž kombinace ovlivňuje obtížnost jednotlivých úloh. Tyto faktory, které jsou uvedeny a formulovány na základě mé osobní dlouhodobé zkušenosti s luštěním sudoku, jsou dále popsány v této kapitole, nicméně ani tak není možné jednoduše říci, podle čeho se úroveň „začátečnick“ liší od úrovně „specialista“. V novinách, či jiných publikacích, které se sudoku věnují, lze nalézt taková sudoku, kde úroveň „začátečnick“, může být vyřešena s chybami a mnohem pomaleji, než úroveň „pokročilý“, neboť i sami autoři mají svá subjektivní kritéria, podle nichž úroveň označují.

Člověk zběhlý v luštění sudoku by si jistě všiml, že jednodušší hlavolamy mají méně prázdných polí v zadání než hlavolamy složitější. Logicky – čím méně polí k doplnění, tím méně prostoru pro omyl, tedy větší počet vynechaných polí v zadání by měl odpovídat vyššímu stupni obtížnosti. Počet vynechaných polí rozhodně hraje důležitou roli a je jedním z faktorů obtížnosti sudoku, avšak ne faktorem stoprocentně jednoznačným. Lze totiž najít takové dvojice úloh, kde obtížnější varianta má předem doplněno paradoxně více polí než varianta jednodušší, jak je například uvedeno na obrázku č. 9, kde jsou zobrazeny dvě úlohy vydané v MF Dnes ze dne 9. února 2011, které byly prezentovány na internetových stránkách tohoto deníku.

Pokročilý

7	8	2						
		6			3			8
		5						7
9				5				3
	2		6	4	7			5
5				1				4
2						3		
1			8			6		
						4	8	2

Expert

			3					
9	5						7	
4		1	7	5		8		
	8				3	5		
	2	5		8		3	6	
		7	5				8	
		8		6	7	2		3
		3					4	8
						1		

Obr. č. 9, zadaná sudoku v MF Dnes 9. února 2011

(Středeční sudoku, 9. 2. 2011)

Jak je z obrázku patrné, počet vynechaných polí z celkových osmdesáti jedna polí v mřížce je v úrovni „pokročilý“ padesát čtyři, kdežto v uvedené obtížnější úrovni „expert“ je tento počet nižší, konkrétně padesát dva. Podle toho kritéria by tedy úloha obtížnosti „expert“ byla jednodušší než úloha obtížnosti „pokročilý“. Je tedy evidentní, že počet vynechaných polí v zadání není stoprocentně objektivním kritériem obtížnosti úlohy.

Dále lze zkoumat počet vynechaných polí v jednotlivých řádcích, sloupcích a čtvercích. I zde existuje souvislost mezi nízkým počtem prázdných políček a nižší obtížností. Ale stejně jako u předchozího kritéria ani toto neplatí vždy.

Roli hraje také počet polí, na kterých je možné začít hlavolam luštit. Čím více takových polí, tím více možností pro zahájení, tedy jednodušší start.

Pochopitelně je jedním z kritérií obtížnosti sudoku také velikost zadané úlohy. Tradiční sudoku, které bývá uváděno v novinách a publikacích, jež se těmto hlavolamům věnují, mívá velikost 9x9, avšak existují také úlohy menší, například o velikosti 6x6 a 4x4, které jsou jednodušší, a tedy i vhodnější pro luštitel „začátečníky“, či pro děti. Na druhou stranu také existují úlohy větší, než je tradiční formát, například 16x16, které již vyžadují předchozí zkušenost s luštěním, a jsou tím pádem určeny pro pokročilejší luštitel.

Co ale lidské oko nevidí dřív, než se pustí do luštění, jsou strategie řešení. Zde leží hlavní bod pro určení obtížnosti. Někdy je možné správné číslo pro dané políčko poměrně snadno nalézt, jindy je potřeba využít delších myšlenkových pochodů, mnohokrát i pomocných čísel, která slouží luštiteli pro označení možné varianty doplnění políčka do doby, než je pro příslušnost čísla, které do pole opravdu patří, nalezen důkaz. Mimo to, každý člověk luští sudoku svým způsobem a preferuje jemu blízké strategie, proto ani po vyluštění nemusí mezi dvěma luštiteli dojít ke shodě názorů ohledně obtížnosti úlohy. Úlohy, které jeden člověk označí za obtížné, mohou být pro jiného člověka, ač s přibližně stejnou mírou zkušeností s luštěním sudoku, poměrně snadné.

Význam volby strategií pro stanovení obtížnosti úlohy nelze popřít, avšak obecně platné určení obtížnosti možné není vzhledem k tomu, že strategie řešení jsou založeny na individuálních zvláštích každého řešitele, které mohou souviset s jeho vlastní zkušeností. Tento aspekt by byl zajisté podnětný pro výzkum v jiných vědních oborech, například v psychologii, není však předmětem výzkumu v rámci této práce.

Dále jsou proto v této diplomové práci použita pro posouzení obtížnosti úlohu tři hlavní kritéria: velikost sudoku, počet vynechaných polí v zadání a počet polí, na kterých je úlohu možné začít řešit.

5 Strategie řešení sudoku

V této kapitole je prezentováno několik ze základních strategií, které mohou být při procesu řešení sudoku uplatňovány. Pozornost je věnována zejména těm strategiím, o kterých je předpokládáno, že by se mohly vyskytnout při řešení u žáků prvního stupně základní školy. Uvedené strategie vycházejí především z mé osobní dlouhodobé zkušenosti s luštěním tohoto hlavolamu, a jejich volba při řešení je tedy převážně subjektivní.

5.1 Hledání čísla pro dané pole

Při zahájení řešení sudoku je výhodné nejprve vyzkoušet, zda se v úloze vyskytuje nějaký řádek, sloupec nebo vnitřní čtverec, ve kterém je vynecháno co nejméně polí.

V zadání, které je uvedeno na obrázku č. 10a, by bylo podle této metody vhodné začít například druhým, nebo osmým řádkem, kde jsou z devíti polí vynechána jenom čtyři; naopak velice obtížné by bylo začít s pátým řádkem, kde je vynecháno polí osm.

Pokud bychom uvážili jednotlivé sloupce, byly by pro začátek nejvhodnější sloupce A, B, D, F, H nebo I, které obsahují ze všech sloupců nejméně vynechaných polí – pět, avšak to je více než polovina, a tak by zde bylo vhodnější začít například s řádky, jak je uvedeno výše. Nejtěžší by potom byly sloupce C a G, kde jsou pouze dvě předem doplněná pole.

Stejně tak lze pohlížet ještě na vnitřní čtverce, kde by nejvýhodnější byly ty rohové se čtyřmi vynechanými poli, a nejtěžší pochopitelně dva vnitřní čtverce v prostřední linii, kde není doplněné ani jedno pole.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	3			5		9			2
2		5	8		6		4	1	
3	1	9						3	7
4				4		6			
5					8				
6				7		1			
7	6	8						9	5
8		1	4		2		6	7	
9	9			6		3			4

Obr. č. 10a, zadání sudoku (Mepham, 2005, s. 21)

Po vybrání vhodného řádku, sloupce nebo vnitřního čtverce je dále efektivní zjistit, která čísla od jedné do devíti (v případě sudoku velikosti 9x9) v něm chybí, a na základě vztahů s již umístěními čísly v příslušných řádcích, sloupcích a vnitřních čtvercích tato chybějící čísla do polí doplnit.

Pokud bychom tedy začali například osmým řádkem (viz obrázek č. 10b), zjistili bychom, že jsou v něm vynechaná čísla tři, pět, osm a devět. Na pole A8 není možné z těchto čtyř čísel umístit trojku a devítku, neboť by se potom objevily dvě trojky či devítky ve sloupci A, a tím by bylo porušeno základní pravidlo pro řešení sudoku, že se nesmí vyskytnout stejná čísla dvakrát v jedné sloupci, řádku a vnitřním čtverci (obdélníku). A zároveň do tohoto pole není možné umístit také osmičku, protože potom by byly dvě osmičky v levém dolním vnitřním čtverci, a tak by opět bylo základní pravidlo porušeno. Na pole A8 je tedy možné doplnit pouze číslo pět.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	3			5		9			2
2		5	8		6		4	1	
3	1	9						3	7
4				4		6			
5					8				
6				7		1			
7	6	8						9	5
8		1	4		2		6	7	
9	9			6		3			4

Obr. č. 10b, náznak strategie hledající číslo pro dané pole (Mepham, 2005, s. 21)

Při pokračování v tomto postupu u tohoto řádku lze dále vyzorovat, že na pole F8 lze ze zbývajících tří čísel (tři, osm a devět) doplnit pouze osmičku z důvodu předem umístěné trojky a devítky ve sloupci F. Na pole D8 a I8 tak zbývá pouze trojka a devítka, přičemž příslušné vnitřní čtverce těchto polí dále vyloučí vždy jedno ze dvou chybějících čísel (konkrétně trojka na poli F9 a devítka na poli H7), takže konečné umístění trojky je potom na poli I8 a devítky na poli D8 (viz obrázek č. 10c).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7	6	8						9	5
8	5	1	4	9	2	8	6	7	3
9	9			6		3			4

Obr. č. 10c, dílčí výsledek strategie hledající číslo pro dané pole (Mephram, 2005, s. 21)

Stejným způsobem lze postupovat po sloupcích a vnitřních čtvercích, vždy s ohledem na příslušné okolní řádky, sloupce a vnitřní čtverce. Jinými slovy pro dané pole hledáme jediné možné vhodné číslo. Tato strategie nemusí být nutně zvolena pouze při zahajování, je možné ji uplatňovat i v průběhu řešení.

5.2 Hledání pole pro dané číslo

Opačnou strategií je hledání jediného možného vhodného pole pro některé číslo. V tomto případě je výhodné vyzorovat, které z předem zadaných čísel se v mřížce vyskytuje nejčastěji, a s tímto číslem začít, neboť čím vícekrát je v mřížce již umístěno, tím více polí je vyloučeno pro jeho další doplnění, a vazby s příslušnými sloupci, řádky a vnitřními čtverci jsou navíc markantnější. Ve výše uvedeném zadání (obrázek č. 10a) je z toho hlediska nejvýhodnější číslo šest, neboť se v zadání objevuje pětkrát, a je tedy potřeba jej doplnit do mřížky už jen na čtyři pole (vzhledem k tomu, že se mřížka 9x9

skládá z devíti vnitřních čtverců, kde se pokaždé jedno číslo může objevit pouze jednou, je výskyt každého čísla v mřížce vyjádřen počtem devět).

Vezmeme-li v úvahu tedy číslo šest (obrázek č. 10d), je možné vypožorovat, že zbývá doplnit toto číslo ještě do prvního, třetího, pátého a šestého řádku, jelikož v ostatních řádcích se již šestka vyskytuje.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	3			5		9			2
2		5	8		6		4	1	
3	1	9						3	7
4				4		6			
5					8				
6				7		1			
7	6	8						9	5
8		1	4		2		6	7	
9	9			6		3			4

Obr. č. 10d, náznak strategie hledající pole pro dané číslo (Mepham, 2005, s. 21)

V prvním, pátém a šestém řádku zatím nelze šestku jednoznačně umístit, avšak podíváme-li se na řádek třetí, je možné vyloučit všechna tři pole prostředního vnitřního čtverce, tj. pole D3, E3 a F3, neboť je šestka v tomto čtverci předem zadaná (na poli E2). Zbývají tedy pouze pole C3 a G3, avšak šestka na poli G8 znemožňuje umístit toto číslo na pole G3, neboť pak by byly dvě šestky v jednom sloupci, a tudíž by se opět porušilo základní pravidlo řešení sudoku. Jedinou možností v tomto řádku je tedy umístit šestku na pole C3.

Stejným způsobem je dále možné postupovat s jinými čísly. I tuto strategii je pochopitelně možné použít kdykoliv během procesu řešení, nemusí být nutně uplatňována pouze při jeho zahájení.

5.3 Umisťování čísel podle vnitřních čtverců

Obdobná strategie, která byla shledána efektivní, vychází z výše popsané metody. Při jejím uplatnění se záměrně prochází postupně jednotlivá čísla od jedné do devíti, přičemž pozornost je zaměřena hlavně na tři sousedící vnitřní čtverce v jedné linii, a to jak horizontální, tak vertikální – tedy například na vnitřní čtverce, které jsou tvořeny sloupci A, B a C, nebo prvními třemi řádky.

Začneme-li u téhož zadání (obrázek č. 10a) tedy s jedničkou, lze pozorovat, že v první horizontální linii vnitřních čtverců (obrázek č. 10e), chybí jednička v prostředním z nich. Při bližším pohledu je potom patrné, že jedničky umístěné v levém a pravém vnitřním čtverci znemožňují její doplnění do polí D2, F2, D3, E3 a F3. Jedničku je tedy možné v tomto vnitřním čtverci umístit pouze na pole E1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	3			5		9			2
2		5	8		6		4	1	
3	1	9						3	7

Obr. č. 10 e, náznak strategie využívající vnitřních čtverců (Mepham, 2005, s. 21)

Po doplnění jedničky na pole E1 (obrázek č.10f), je dále možné pokračovat stejným způsobem s prostřední vertikální linií čtverců (sloupce D, E a F), kde jednička nyní chybí jen ve spodním z nich. Předem umístěná jednička v prostředním vnitřním čtverci (pole F6) a jednička doplněná v předchozím kroku (pole E1) teď vylučují možnost umístit jedničku do spodního čtverce na pole E7, E9, F7 a F8. Zbývají tedy dvě možnosti pro tento čtverec, kam jedničku umístit – pole D7, nebo D8. Zde je potřeba již trochu komplexnějšího pohledu a přihlídnout ještě k osmému řádku, kde pole B8 znemožňuje doplnit jedničku na pole D8, a tedy zaručuje opět jedinou správnou možnost pro osmičku – pole D7.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	3			5	1	9			2
2		5	8		6		4	1	
3	1	9						3	7
4				4		6			
5					8				
6				7		1			
7	6	8						9	5
8		1	4		2		6	7	
9				6		3			4

Obr. č. 10f, dílčí výsledek a další postup v rámci strategie využívající vnitřních čtverců (Mepham, 2005, s. 21)

Při pokračování v této strategii je dále možné doplnit jedničku ještě na pole G9 (zaměřením se na spodní horizontální linii vnitřních čtverců). Dále již není možné tuto strategii uplatnit pro další umístění jedničky, ale je výhodné stejným způsobem postupovat s dvojkou a dalšími čísly až do devítky. Touto metodou lze hned na začátku řešení doplnit dvanáct z jednatřiceti vynechaných polí a po jejím zopakování ještě dalších devět (někdy je však třeba přihlídnout ještě k příslušným řádkům, či sloupcům).

5.4 Hidden Subset

Jak je výše uvedeno, výčet základních strategií je v této kapitole soustředěn převážně na takové strategie, které by se mohly objevit během procesu řešení u žáků prvního stupně základní školy. Přesto je zde vhodné zmínit, například jako návod pro pokročilejší luštitelé, také metody, které se osvědčily zejména při řešení obtížnějších sudoku, avšak mohou být využity i při jednodušších úlohách. Především to jsou pomocná čísla, která je vhodné

vpisovat obyčejnou tužkou do jednotlivých polí, například v případě, kdy lze na některé pole umístit dvě nebo více čísel, ale v danou chvíli nelze jednoznačně určit které. Takováto pomocná čísla mohou být totiž využita například při strategii, která bývá někdy označována jako „Hidden Subset“, ve volném překladu „Skrytá podmnožina“. Tato metoda vychází ze skutečnosti, že v některém z řádků, sloupců, nebo vnitřních čtverců chybí taková potenciální čísla, která nemohou být doplněna do jiných polí daného řádku, sloupce, či čtverce, a zároveň je jejich počet shodný s počtem polí, do kterých by v tomto řádku, sloupci, nebo čtverci mohla být umístěna. Potom jsou z těchto polí vyloučena všechna ostatní čísla (Sudoku: Techniques, 2012). Pokud se například v jednom řádku objeví tři čísla, která mohou být umístěna pouze do třech z volných polí, všechna ostatní chybějící čísla tohoto řádku musí být umístěna jinde.

Vzhledem k tomu, že nejjednodušší je tato strategie v případě pouze dvou potenciálních čísel, je obrázek č. 11 uveden jako ilustrace této strategie pro takovou dvojici.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	5				2	6	7		4
2	4		3		8	5		6	
3		7		4			8	5	
4		3	2		5 6	1		4	
5	1		5	8	7	2	6		3
6		6		3	5 6		1	8	
7				5		7	9		6
8				2	3		4		8
9	9	2	7		4		3	1	

Obr. č. 11, náznak strategie Hidden Subset (vlastní sudoku)

Na obrázku lze vidět, že ve sloupci E chybí čtyři čísla: jedna, pět, šest a devět. Dvě z nich, pětka a šestka, mohou být pouze na dvou polích z tohoto sloupce – E4 a E6 (pole E3 vylučuje šestka na poli F1 a pětka na poli F2 nebo H3, pole E7 je vyloučeno pětkou a šestkou v sedmém řádku). Vzhledem k tomu, že pro tyto dvě čísla jsou pouze dvě možná pole, zbylá chybějící čísla tohoto sloupce (jednička a devítka) musí být umístěna jinde, tedy na polích E3 a E7, přičemž devítka na poli G7 znemožňuje umístit na pole E7 další devítku, tudíž jedinou možností (a tedy výsledkem této strategie) je doplnit na pole E7 jedničku. Stejným způsobem funguje tato strategie i s větším množstvím potenciálních čísel, avšak používají ji spíše pokročilejší luštitelé.

Mimo všech výše uvedených metod existuje samozřejmě velké množství dalších strategií, které lze během procesu řešení uplatňovat, avšak většina z nich slouží především pro luštění složitých hlavolamů sudoku. Vzhledem k tomu, že se tato diplomová práce zabývá sudoku v rámci prvního stupně základní školy, nejsou tyto strategie jejím předmětem, a tudíž nejsou v této kapitole popisovány.

6 Tvoření sudoku

V rámci této práce byl prováděn výzkum, jenž je podrobně popsán dále v praktické části a během nějž byla žákům druhého ročníku základní školy předkládána gradovaná kaskáda úloh sestavená z jednotlivých sudoku, která nebyla čerpána z žádné publikace zabývající se tímto hlavolamem, nýbrž byla vytvořena jako sudoku vlastní, a takto jsou také v textu práce označena. Nicméně vzhledem k záplavě publikací, jež se sudoku věnují, nelze říci, zda se některé z těchto vlastních sudoku v nějaké publikaci neobjevilo.

Samotnému tvoření úloh předcházelo dlouhodobé luštění mnoha sudoku a také osobní záznam procesu luštění, který posloužil pro odhalení jednak strategií používaných při řešení, jednak kritérií, které se podílejí na obtížnosti úlohy. V této kapitole je podrobně popsán proces tvoření mé první úlohy (velikosti 9x9), která byla následně použita během prvního experimentu se žáky

ZŠ Tábořská, kdy byla předložena těm žákům, kteří byli rychleji hotovi s úlohou menší velikosti, jež řešili při samostatné práci.

Nejprve bylo zapotřebí vytvořit celou mřížku zaplněnou čísly od jedné do devíti tak, aby se v žádném řádku, sloupci a vnitřním čtverci některé číslo nevyskytovalo dvakrát, jinými slovy sestavit takovou podobu, kterou úloha má při jejím správném vyřešení. V první fázi byla do prvního, druhého a třetího řádku mřížky náhodně doplňována čísla od jedné do devíti tak, aby se v žádném řádku a nakonec také vnitřním čtverci některé z čísel neopakovalo. Po dokončení této fáze tak mřížka vypadala tak, jak je zobrazeno na obrázku č. 12a.

2	8	4	6	1	7	3	9	5
1	5	9	2	4	3	8	6	7
3	7	6	5	8	9	4	1	2

Obr. č. 12a, první fáze vytváření mřížky 9x9 (vlastní sudoku)

V dalším kroku byla pozornost soustředěna postupně na jednotlivá čísla od jedné do devíti, přičemž tato čísla byla vždy doplněna do vnitřních čtverců tak, aby se v žádném z nich a také v žádném sloupci a řádku nevyskytovala dvakrát. Pořadí čtverců, ve kterém do nich byla jednotlivá čísla umisťována, bylo následující: čtvrtý, sedmý, pátý, osmý, šestý a devátý, kdy čtverce jsou číslovány zleva doprava vždy nejprve horní linie (první, druhý, třetí), poté

prostřední linie (čtvrtý, pátý, šestý) a na závěr spodní linie (sedmý, osmý, devátý). Podoba mřížky po umístění jedniček je zobrazena na obrázku č. 12b.

2	8	4	6	1	7	3	9	5
1	5	9	2	4	3	8	6	7
3	7	6	5	8	9	4	1	2
			1					
	1							
						1		
		1						
								1
					1			

Obr. č. 12b, vytvářená mřížka po doplnění dalších polí (vlastní sudoku)

Takto byla umisťována postupně všechna čísla, vždy s ohledem na to, aby se žádné číslo neobjevilo v jednom řádku, sloupci, nebo vnitřním čtverci dvakrát. Při doplňování dolní linie čtverců přitom bylo potřeba udělat drobné úpravy v prostředních čtvercích tak, aby nakonec opravdu ve všech řádcích, sloupcích a čtvercích bylo každé číslo od jedné do devíti umístěné pouze jedenkrát. Výsledná podoba mřížky, a tedy i správného řešení, je zobrazena na obrázku č. 12c.

2	8	4	6	1	7	3	9	5
1	5	9	2	4	3	8	6	7
3	7	6	5	8	9	4	1	2
4	9	7	1	2	6	5	8	3
5	1	2	4	3	8	6	7	9
6	3	8	7	9	5	1	2	4
7	2	1	3	6	4	9	5	8
8	6	3	9	5	2	7	4	1
9	4	5	8	7	1	2	3	6

Obr. č. 12c, první vytvořená mřížka (vlastní sudoku)

Po vytvoření finální podoby mřížky bylo následujícím krokem postupné ubírání zadaných čísel, a to tak, aby vždy bylo možné dané číslo zpět jednoznačně umístit.

V první fázi vymazávání čísel bylo z celkových jednaosmdesáti polí vynecháno devět. Těchto devět polí bylo vybíráno tak, že každé z čísel od jedné do devíti bylo odebráno právě jednou a v každém vnitřním čtverci přitom zůstalo osm čísel umístěných, jak je uvedeno na obrázku č. 13a.

V následujícím kroku byla odebrána náhodně další čtyři čísla tak, aby v každém z řádků a sloupců bylo alespoň jedno pole volné (viz obrázek č. 13b). Vynecháno tedy bylo v tuto chvíli celkem třináct čísel, z celkových jednaosmdesáti v mřížce, což bylo stále poměrně málo, i pro velmi lehké zadání.

2	8	4	6	1	7	3	9	
1	5			4	3	8	6	7
3	7	6	5	8	9	4	1	2
4	9	7	1	2	6	5	8	3
5	1	2	4	3		6	7	9
	3	8	7	9	5		2	4
7	2	1	3	6		9	5	8
8	6		9	5	2		4	1
9	4	5	8	7	1	2	3	6

Obr. č. 13a, postupné odebírání čísel – 1. krok (vlastní sudoku)

2	8	4	6	1	7	3	9	
1	5			4	3	8	6	7
3	7	6	5	8	9	4		2
4		7	1		6	5	8	3
5	1	2	4	3		6	7	9
	3	8	7	9	5		2	4
7	2	1	3	6		9	5	8
8	6		9	5	2		4	1
9	4	5		7	1	2	3	6

Obr. č. 13b, postupné odebírání čísel – 2. krok (vlastní sudoku)

V dalším kroku bylo vymazáno dalších pět čísel, přičemž tato čísla byla odstraněna tak, že po jejich vyjmutí zůstala v každém z devíti vnitřních čtverců právě dvě prázdná pole. Výsledek této fáze je ilustrován na obrázku č. 13c. Po tomto kroku tak bylo celkem osmnáct z jednaosmdesáti polí vynechaných, což stále nepředstavovalo dostatečné množství ani pro nejjednodušší úroveň.

2		4	6	1		3	9	
1	5			4	3	8	6	7
3	7	6	5	8	9	4		2
4		7	1		6	5	8	
5	1	2	4	3		6	7	9
	3	8	7	9	5		2	4
7	2	1	3	6		9		8
8	6		9	5	2		4	1
9		5		7	1	2	3	6

Obr. č. 13c, postupné odebrání čísel – 3. krok (vlastní sudoku)

V následující fázi byla pozornost upřena opět na sloupce a řádky, takže byla odebrána další tři čísla tak, že se v každém sloupci a řádku (mimo řádku pátého) vyskytovala alespoň dvě vynechaná pole (viz obrázek č. 13d).

V poslední fázi bylo odebráno ještě dalších šest čísel s ohledem na vnitřní čtverce – v každém čtverci byla ve výsledku právě tři pole vynechaná, jak je ukázáno na obrázku č. 13e.

Výsledkem tohoto procesu tvoření sudoku bylo zadání, jež obsahovalo dohromady dvacet sedm vynechaných polí z celkových jednaosmdesáti, což bylo považováno za adekvátní pro předložení těm žákům, kteří byli následně při prvním experimentu dříve hotovi s řešením úlohy menší velikosti, a mohli si tak vyzkoušet prvně tradiční velikost.

2		4	6	1		3	9	
1	5			4	3	8	6	7
3	7	6	5	8		4		2
4		7	1		6	5	8	
5	1	2	4	3		6	7	9
	3	8	7	9	5		2	4
	2	1	3	6		9		8
8	6		9		2		4	1
9		5		7	1	2	3	6

Obr. č. 13d, postupné odebírání čísel – 4. krok (vlastní sudoku)

2		4	6	1		3	9	
1	5			4	3		6	7
	7	6	5	8		4		2
4			1		6	5	8	
5	1	2	4	3		6	7	9
	3	8	7	9			2	
	2	1	3	6		9		8
8	6		9		2		4	1
9		5		7	1	2		6

Obr. č. 13e, výsledné první zadání úlohy (vlastní sudoku)

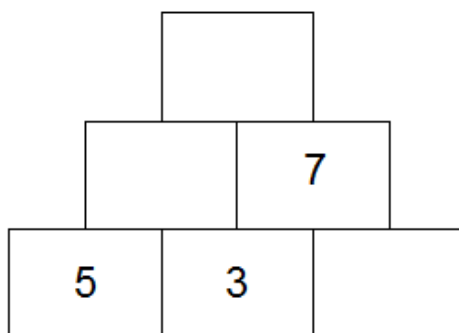
7 Podnětné prostředí

Jak již bylo v této práci několikrát zmíněno, sudoku a jeho alternativy využívají matematické poznání, a tak lze tento hlavolam považovat za přínosný a vhodný pro zařazování do hodin matematiky ve školní praxi. Autorka se domnívá, že je tedy možné jej zařadit mezi podnětná matematická prostředí.

Jak uvádí Stehlíková (2007) „podnětným prostředím může být problém, projekt nebo série úloh, které mají žáka motivovat k vlastnímu poznávání matematiky a jejichž řešení má vést ke konstrukci nového matematického poznání.“ Na základě výzkumu, který byl prováděn v rámci této diplomové práce, lze souhlasit s tím, že prostředí sudoku je ve smyslu této definice prostředím podnětným, neboť zahrnovalo kaskádu úloh, která většinu žáků ze třídy, v níž experimenty probíhaly, motivovala a vždy byli nadšeni, že budou řešit tento hlavolam. Jeho luštěním také prohlubovali matematické poznání, zejména v oblasti logického a kombinatorického uvažování.

Sudoku jako podnětné prostředí je v této práci dále chápáno jako prostředí, jež splňuje určitá kritéria. Za prvé má jasně dané objekty, tedy zadané mřížky sudoku. Za druhé má nástroje, které žáci při řešení využívají, což je zde již zmíněná logická dedukce a elementární kombinatorika. Za třetí má toto prostředí jazyk, kterým žáci při řešení komunikují, jež zde představují především čísla. A v neposlední řadě využívá matematického poznání, a to zejména strategií řešení, které je konstruováno a prohlubováno.

Jako takové je tedy přínosné zařazovat toto prostředí do výuky, neboť v běžné školní praxi se žáci základní školy setkávají s nejrůznějšími podnětnými prostředími a není důvod, proč by sudoku nemohlo být jedním z nich. Pro srovnání lze uvést například prostředí součtových trojúhelníků (viz obrázek č. 14), jež je možné stejně jako sudoku gradovat jako série úloh, které by žáky motivovaly a rozvíjely jejich matematické poznání, zde konkrétně operaci sčítání (prostřednictvím sčítání sousedních dvou polí a zapsání součtu do společného pole nad nimi – v horním poli by tedy bylo výsledné číslo patnáct).



Obr. č. 14, součtový trojúhelník (vlastní úloha)

8 Dětské sudoku v publikacích

V předchozí kapitole bylo sudoku označeno jako podnětné prostředí, avšak na rozdíl od mnohých jiných prostředí mu v učebnicích pro základní školy, zejména pro první stupeň, pozornost není věnována téměř žádná. Není proto překvapivé, že se s ním většina žáků, se kterými byl prováděn výzkum v rámci této diplomové práce, setkala prostřednictvím tohoto výzkumu poprvé. Přesto však, ač velice ojediněle, se sudoku v učebnici pro první stupeň vyskytuje, jak je dále uvedeno v této kapitole.

Většina řad tradičních učebnic ve svém obsahu sudoku nezahrnuje, nicméně v prvním díle relativně nové učebnice vydané nakladatelstvím SPN *Matematika pro 2. ročník základní školy*, která odpovídá požadavkům RVP, lze narazit na dvě úlohy sudoku (obrázky č. 15a a č. 15b). V porovnání s úlohami, které řešili žáci 2. ročníku ZŠ Táborská v rámci výzkumu k této diplomové práci, jsou obě uvedené úlohy jednodušší. Jedná se sice o stejnou velikost mřížky, tedy tradiční úlohu velikosti 9x9, avšak počet vynechaných polí je zde značně nižší a počet polí, na nichž je možné úlohu začít řešit, naopak mnohem vyšší, tedy o úlohy nižší obtížnosti.

Tři ze čtyř úloh (včetně úlohy závěrečné), jež byly předkládány žákům 2. ročníku ZŠ Táborská obsahovaly v zadání třicet jedna vynechaných polí (v jedné úloze to bylo dvacet sedm), což je v porovnání s těmito dvěma úlohami z učebnice téměř dvojnásobný počet. Úloha na obrázku č. 15a obsahuje

sedmnáct volných polí z celkových jednaosmdesáti, úloha na obrázku č. 15b jich má osmnáct.

8	7	6	3	9	5	2		4
3		5	8	4	1		7	6
4	9		7	6		8	5	3
1	5		6		8	4	9	7
6	8	7	9	3		5		1
	4	2		5	7	6	3	8
2	6	8		1	3	7	4	
5		9	4	7		1	8	2
7	1		2	8	9	3	6	

Obr. č. 15a, sudoku z učebnice pro 2. ročník, I (*Matematika pro 2. ročník*, 2010)

5	1	3	6	4			7	2
9	7	4	1	3	2		5	8
2		8		9		4	1	3
6	9	2	5	7	3	8		1
7		1	8	2	9		6	5
3	8	5	4		6	7		9
4	5	9	2		7	1	3	
	3	6	9	5		2	8	7
	2	7	3	6	1	5		

Obr. č. 15b, sudoku z učebnice pro 2. ročník, II (*Matematika pro 2. ročník*, 2010)

Co se týká polí, na nichž je možné úlohu začít řešit, jsou obě úlohy z učebnice opět jednodušší v porovnání s úlohami z experimentů. V úloze na obrázku č. 15a jsou pouze dvě pole ze sedmnácti vynechaných, na které nelze jednoznačně umístit číslo při zahájení řešení (bez použití nějaké složitější strategie), na obrázku č. 15b je z celkových osmnácti vynechaných takové pole jen jedno. V úlohách z experimentů byl tento počet nepatrně vyšší a pohyboval se v rozmezí mezi pěti a devíti poli ze jedenácti vynechaných, tj. dvaadvacet až šestadvacet polí bylo vhodných pro zahájení procesu řešení.

O trochu častěji se sudoku vyskytuje v učebnicích pro druhý stupeň základní školy, i když je to stále v relativně nízké frekvenci. Na obrázku č. 16 je uvedena jedna ze dvou úloh z pracovního sešitu učebnice *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia* z nakladatelství FRAUS.

9				6				3
1		5		9	3	2		6
	4			5				9
8						4	7	1
		4	8	7				
7		2	6		1			8
2								
5				3	2		9	4
	8	7		1	6	3	5	

Obr. č. 16, sudoku z učebnice pro 6. ročník (*Matematika 6*, 2007)

Již na první pohled je patrné, že se jedná o obtížnější sudoku, než výše uvedené úlohy pro 2. ročník, neboť je zde vynechaných celých čtyřicet pět polí z jednaosmdesáti, tedy více než polovina (v druhé úloze z téže publikace to bylo dokonce padesát tři volných polí). Tato vyšší obtížnost pochopitelně odpovídá věku žáků.

Dále se žáci druhého stupně mohou se sudoku setkat například v prvním díle pracovního sešitu nakladatelství Prodos *Matematické ...minutovky 7. ročník*, v němž jsou zařazeny celkem čtyři úlohy sudoku – dvě o velikosti 6x6 a dvě tradiční, tj. 9x9. Tyto úlohy jsou uvedeny v praktické části této diplomové práce (obrázky č. 25a, č. 26a, č. 27a a č. 28a), neboť byly použity pro dílčí experiment celého výzkumu (viz patnáctá kapitola).

Mimo učebnic a pracovních sešitů je sudoku pro děti věnována větší pozornost v přílohách souborů sudoku pro dospělé nebo přímo v dětských publikacích, které se tímto hlavolamem zabývají. Za zmínku stojí například šestnáctistránková dětská příloha měsíčníku *Rodinné výherní Su-do-ku* (Turpress), která nabízí systematicky ztěžující se série úloh, nebo tituly *SUDOKU pro děti* (Portál), *Zábavné sudoku pro děti* (JUNIOR) či *Sudoku pro děti od 10 let* (Fragment). Zajímavými publikacemi jsou potom knihy *Zvířátka – dětské sudoku* a *Příšerky – dětské sudoku* (Rebo), které jsou vhodné zejména pro předškolní děti a žáky mladšího školního věku, neboť místo čísel se do mřížky doplňují obrázky zvířátek, či příšerek, které jsou navíc vytvořené jako magnety a je tedy možné s nimi manipulovat.

Lze tedy obecně říci, že ačkoliv v učebnicích bývá sudoku uvedeno pouze zřídka, existuje relativně velké množství materiálů, které jsou učitelům k dispozici, pokud by se rozhodli sudoku do výuky matematiky zařadit. V neposlední řadě je také možné vytvářet sudoku vlastní, a tím reagovat na konkrétní potřeby žáků, přičemž jedna série takto vytvořených úloh je uvedena v příloze č. VIII, kde jsou seřazeny jednotlivé úlohy, jež byly použity v rámci výzkumné části této diplomové práce.

9 Metodologie výzkumu

V této kapitole je popsána metodologie výzkumu, jenž byl prováděn v rámci praktické části této diplomové práce. Výzkum byl složen ze série sedmi experimentů, které na sebe navazovaly a byly uskutečněny na Základní škole Tábořská, Praha 4 – Nusle ve třídě 1. B (posléze, po letních prázdninách, 2. B).

Subjektem výzkumu byly všechny děti, jež byly zapsané do této třídy bez jakéhokoliv předchozího výběru. K 1. září 2010 bylo ve třídě zapsáno dvacet pět žáků, z nichž jedna žákyně byla s rodiči dlouhodobě v zahraničí a byla přeřazena do programu homeschooling, a jedna žákyně se k 1. únoru 2011 odhlásila z důvodu přestěhování rodiny. V 1. ročníku, kdy byla část tohoto výzkumu prováděna, tak bylo ve třídě dvacet tři dětí (dvanáct dívek a jedenáct chlapců). Z těchto třadvaceti žáků jsou ve třídě zařazeni dva chlapci, kteří vyžadují zvláštní péči a v průběhu prvního pololetí jim byl schválen individuální vzdělávací program ve všech předmětech, tedy i v matematice, v jejichž hodinách tento výzkum probíhal. Tito dva žáci se zúčastnili pouze prvních dvou experimentů. V dalších hodinách, ve kterých byl tento výzkum realizován, se ho již neúčastnili, ačkoliv byli ve třídě. V průběhu výuky s nimi totiž nepravidelně pracují studenti v rámci asistentské praxe a plní s nimi zvláštní úkoly na individuální úrovni. Do druhého ročníku jeden z chlapců vyžadující zvláštní péči nepostoupil, na žádost rodičů opakuje 1. ročník. Druhý z těchto dvou žáků se stále vzdělává podle individuálního vzdělávacího plánu. Další tři děti se odstěhovaly a přestoupily do škol v blízkosti svého bydliště. Ve druhém ročníku tedy bylo zapsáno devatenáct žáků, z nichž se výuky matematiky, a tím i tohoto výzkumu, účastnilo osmnáct z nich (deset děvčat a osm chlapců).

Jména žáků, která jsou v této diplomové práci na základě písemného souhlasu uvedena, byla z důvodu ochrany osobních údajů pozměněna.

Výzkum probíhal od února do listopadu 2011, přičemž v každém měsíci mimo letních prázdnin a zářijové adaptace žáků na školní prostředí proběhl jeden ze sedmi experimentů, vždy při hodině matematiky, kterou žáci měli rozvrženou během jedné z prvních čtyř dopoledních vyučovacích hodin.

Výjimku tvořil pátý experiment, který byl se žáky proveden zprostředkovaně v době, kdy byli na škole v přírodě. Pro každý experiment kromě experimentu zprostředkovaného byl připraven scénář hodiny, nebo její části, v níž výzkum probíhal. Dále byl z každého experimentu (opět s výjimkou toho, který byl proveden na škole v přírodě) pořízen videozáznam, reflexe průběhu experimentu a písemné materiály žáků. Všechny materiály byly následně analyzovány, vyhodnoceny a jsou podrobně popsány v následujících kapitolách.

Jak již bylo uvedeno, výzkumu se celkově zúčastnilo třiadvacet dětí, avšak ani při jednom z experimentů nebyla přítomná celá třída a počty žáků v průběhu celého výzkumu poměrně kolísaly. Prvního experimentu se účastnilo dvacet žáků, druhého však pouze šestnáct. Největší účast byla zaznamenána při třetím setkání, kdy chyběla pouze jedna žákyně a výzkumu se tak zúčastnilo dvacet žáků z jednadvaceti – od této chvíle se totiž dva výše zmínění žáci úlohám, jež byly předkládané v rámci těchto experimentů, nevěnovali. Na čtvrtém experimentu bylo přítomno devatenáct žáků a na škole v přírodě, kde probíhalo páté setkání žáků s prostředím sudoku, řešilo předloženou úlohu sedmnáct dětí. Nejmenší počet žáků se vyskytl při šestém experimentu, kdy bylo na hodině jenom čtrnáct dětí, avšak na závěr se účast opět trochu zvedla a finální úlohu tak řešilo celkem sedmnáct žáků.

Vzhledem k tomu, že se počty žáků během jednotlivých experimentů měnily, je patrné, že i počet jejich setkání se sudoku v rámci tohoto výzkumu se lišil. Z celkových osmnácti dětí, které byly na konci celého výzkumu žáky 2. B, nebyly zařazené do programu homeschooling a neměly individuální vzdělávací program, se dohromady šest dětí zúčastnilo všech sedmi experimentů. Pět žáků bylo přítomno šestkrát a sedm žáků pětkrát. Pouze jeden žák se zúčastnil jen čtyř experimentů.

Jednotlivé experimenty probíhaly v souladu se základními zásadami konstruktivistického přístupu a postupně uváděly žáky do prostředí hlavolamu sudoku prostřednictvím gradované kaskády úloh, jež byly žákům předkládány k samostatnému řešení. Celá třída tak při každém experimentu řešila jednu

úlohu sudoku, jejíž velikosti (4x4, 6x6 nebo 9x9) a obtížnost se během série úloh postupně zvyšovala.

Během prvního experimentu žáci vyřešili dvě úlohy sudoku o velikosti 4x4, z nichž první byla řešena kolektivně pod vedením experimentátorky, a žáci si při ní osvojili základní znalosti, které jsou potřebné pro řešení sudoku, jednak na základě předchozích zkušeností některých žáků s tímto prostředím, jednak díky společné diskuzi a otázkám, jež byly žákům při řešení kladeny.

Od druhého experimentu byla pozornost soustředěna na sudoku velikosti 6x6, a to až do té doby, než byla úspěšnost žáků shledána optimální pro další postup. Tato situace nastala během pátého experimentu, po kterém výsledky žáků již byly vyhovující pro přikročení k další úrovni, tj. sudoku velikosti 9x9, které bylo následně žákům předloženo dvakrát, při šestém experimentu a při závěrečné úloze výzkumu v sedmém experimentu.

Rychleji hotoví žáci navíc měli již během prvních čtyř experimentů možnost zkoušet řešit úlohu tradiční velikosti (9x9), která se objevuje v novinách a publikacích, jež se tímto hlavolamem zabývají, a tím jim bylo umožněno, aby v rámci svých individuálních potřeb dále získávali zkušenosti s tímto prostředím a rozvíjeli strategie, které při řešení uplatňovali.

Součástí výzkumu k praktické části této diplomové práce byly ještě další tři dílčí experimenty: jeden se žáky osmé a deváté třídy ZŠ Tábořská, druhý s dospělými luštiteli sudoku a třetí se žáky druhé třídy ZŠ Ledec nad Sázavou. Žákům osmé a deváté třídy byl předložen pracovní list se čtyřmi úlohami a jejich výsledky posloužili pro určení obtížnosti závěrečné úlohy hlavní části výzkumu. Dospělí luštitelé a žáci ZŠ Ledec nad Sázavou řešili stejnou úlohu, která byla předložena žákům ZŠ Tábořská jako závěrečná z celé série, avšak bez předcházející kaskády úloh jednodušších. Ze všech těchto tří experimentů byly pořízeny písemné materiály zúčastněných, jež jsou také vyhodnoceny v následujících kapitolách.

10 Seznamování s problematikou sudoku

V této kapitole je představen první ze série experimentů, které byly prováděny v rámci výzkumu k této diplomové práci. Je zde popsáno první setkání žáků s prostředím sudoku, které se uskutečnilo 9. února 2011 během pětáctyřicetiminutové vyučovací hodiny, přičemž celý experiment trval přibližně dvacet pět minut.

Zúčastnilo se ho dvacet žáků (deset dívek a deset chlapců). Nástrojem experimentu byly dvě úlohy sudoku velikosti 4x4 (obrázky č. 17a a 18a) a jedna velikosti 9x9 (obrázek č. 19a).

První úloha byla žákům předložena s úmyslem zjistit, zda se již někteří z nich se sudoku setkali, a pokud ano, tak do jaké míry. Druhým cílem bylo objasnit tři základní pravidla, která pro toto prostředí platí: v mřížce se nesmí vyskytovat stejná čísla uvnitř jednoho řádku, jednoho sloupce, nebo jednoho vnitřního čtverce (eventuálně obdélníku – například v úloze velikosti 6x6). O celé úloze experimentátorka se žáky diskutovala a žáci ji řešili kolektivně. Zadávané sudoku bylo připravené na balicím papíře ve velkém formátu o rozměrech 1m x 70cm a chybějící čísla byla napsaná na tvrdých kartičkách, se kterými žáci mohli při řešení manipulovat. Řešení probíhalo společně v kruhu na koberci a po celou dobu bylo zadání i kartičky s chybějícími čísly pro všechny žáky dobře viditelné. Žáci byli experimentátorkou vyzýváni, aby se pokusili postupně doplnit chybějící čísla zpět do mřížky.

	A	B	C	D
1	3			2
2	2	4		
3		2		1
4	1			

Obr. č. 17a, zadání pro společné hledání pravidel sudoku (vlastní sudoku)

Nejprve byla žákům ukázána mřížka se zadanými čísly (obrázek č. 17a) a oni sami odhalili, že se jedná o sudoku, neboť někteří z nich se s tímto hlavolamem již předtím setkali. V souladu s hlavní myšlenkou celého výzkumu, která vychází ze zásad konstruktivistického vyučování, dětem nebyl předkládán návod, jak mají při řešení postupovat, ale byla jim dána možnost, aby se samy pokusily objevovat zákonitosti tohoto prostředí. Žáci byli vyzváni experimentátorkou, aby zkusili některé z chybějících čísel vrátit zpět do svého domečku, tj. na příslušné pole v mřížce. Jako první zazněl z úst Johanky názor, že do pole B1 patří jednička, a to proto, aby v levém horním vnitřním čtverci byla všechna čísla od jedné do čtyř (viz obrázek č. 17b).

	A	B	C	D
1	3	1		2
2	2	4		
3		2		1
4	1			

Obr. č. 17b, sudoku pro společné hledání pravidel sudoku po doplnění prvního pole (vlastní sudoku)

Po doplnění tohoto pole se ozval Jáchym, že je číslo umístěné špatně, protože (cituji) „v jednom řádku nebo sloupci nemůže být nějaké číslo dvakrát“. Sám tak ostatní obeznámil se dvěma principy, které pro prostředí sudoku platí, ale paradoxně v situaci, které se to netýká, neboť jednička byla umístěna správně a tato dvě pravidla neporušovala. K tomu také žáci na základě otázek experimentátorky dospěli. Jednou z otázek bylo, zda jednička porušuje ta pravidla, která Jáchym před chvílí uvedl, tedy zda je v patřičném řádku nebo sloupci nějaké číslo dvakrát. Většina žáků uvedla, že není, načež se objevilo ještě třetí pravidlo, že se nesmí stejná čísla objevit také ve vnitřním čtverci, které prezentoval Vašík – evidentně se se sudoku také dříve setkal. Na základě otázek experimentátorky, zda se v jednotlivých sloupcích, řádcích a vnitřních čtvercích nějaké číslo neopakuje, a vlastních odpovědí, došli žáci

k závěru, že číslo bylo umístěno správně. Objevila se ještě myšlenka, že čísla ve vnitřním čtverci „nejdou dokola po sobě“, a tak bylo žákům sděleno, že to v tomto hlavolamu nevádí. Všechna tři pravidla tímto byla představena.

Hned v následujícím kroku si děti pravidla ověřily, když Vojta doplnil do pole A3 trojku. Při umisťování čísla do mřížky chvíli váhal mezi poli A3 a B4, ale nakonec trojku položil na pole A3, a objevily se tak dvě stejná čísla ve sloupci A, jak je ukázáno na obrázku č. 17c.

	A	B	C	D
1	3	1		2
2	2	4		
3	3	2		1
4	1			

Obr. č. 17c, sudoku pro společné hledání pravidel po doplnění prvního chybného pole (vlastní sudoku)

Okamžitě na to zareagoval Vašík, který si tohoto problému všimnul a správně zargumentoval, že na poli A3 nemůže být umístěná trojka, neboť v poli A1 se již jedna trojka nachází, a tak se ve sloupci A toto číslo vyskytuje dvakrát. Na základě Vašíkova upozornění Vojta přesunul trojku správně na pole B4, jak je zobrazeno na obrázku č. 17d.

	A	B	C	D
1	3	1		2
2	2	4		
3		2		1
4	1	3		

Obr. č. 17d, sudoku pro společné hledání pravidel po opravení první chyby (vlastní sudoku)

Ve stejném duchu žáci společně celou úlohu úspěšně vyřešili. Jak objevování pravidel dále probíhalo, je ilustrované v přepisu části hodiny v příloze č. I. Celý proces řešení žákům trval přibližně šest minut, během nichž našli správné řešení, které je uvedeno na obrázku č. 17e.

3	1	4	2
2	4	1	3
4	2	3	1
1	3	2	4

Obr. č. 17e, společně nalezené správné řešení sudoku (vlastní sudoku)

Při řešení tohoto prvního sudoku se všichni žáci do procesu zapojovali, přestože někteří z nich, zejména ti, kteří měli o sudoku již nějaké povědomí, byli více aktivní. Některá děvčata byla sice nesmělá, avšak po vyzvání experimentátorkou úspěšně do zadané mřížky čísla doplnila. Žáci se na společném řešení s chutí podíleli a velmi je neznámé prostředí zajímalo. Toto sudoku tak pro ně mělo silnou motivační funkci. Správným vyřešením úlohy také dokázali, že její cíl byl naplněn, a sice že tři základní pravidla sudoku byla objasněna. V souvislosti s tím se také ukázalo, že několik z nich, ač menšina, mělo se sudoku již nějakou předchozí zkušenost, a zároveň těm žákům, pro které to bylo setkání se sudoku první, byla tato základní pravidla představena.

Následujícím krokem byla samostatná práce, pro kterou bylo připravené zadání uvedené na obrázku č.18a.

		1	3
3	1	4	
1			4
	3		1

Obr. č. 18a, zadání pro první samostatnou práci 9. 2. 2011 (vlastní sudoku)

Na základě kritérií obtížnosti, která byla uvedena v dřívější části této práce, byla tato úloha v porovnání s tou, jež žáci řešili společně, trochu jednodušší. Obě úlohy měly stejnou velikost. Co se týká volných polí v zadání úlohy, jejich počet byl oproti předchozí úloze snížen, neboť to byla první úloha, kterou žáci řešili samostatně - v předchozí úloze bylo volných devět polí ze šestnácti, zde pouze sedm ze šestnácti. Počet polí, na kterých se dalo začít úlohu řešit, zůstal téměř stejný: ve společně řešené úloze se vyskytovala čtyři pole z celkových devíti vynechaných, na nichž mohli žáci zahájit řešení, zde taková pole byla tři ze sedmi vynechaných.

Z dvaceti přítomných žáků úlohu správně vyřešilo a všech sedm polí bezchybně doplnilo dvanáct z nich. Jedna žákyně měla jednu chybu, dvě chyby se objevily také jednou. Dva žáci měli chyby tři, jedna žákyně čtyři chyby a jeden žák chyboval pětkrát. U dvou žáků se objevilo šest špatně doplněných polí z celkových sedmi polí volných. Každému se ale povedlo doplnit alespoň jedno číslo správně. Celková úspěšnost třídy vyjádřená podílem správně doplněných polí a polí na začátku volných byla 78%, z čehož usuzuji, že žáci objevená pravidla tohoto prostředí pochopili a správně aplikovali při svém samostatném řešení.

Poté, co byla od žáků vyřešená sudoku vybrána, byla tatáž úloha společně zkontrolována. Zadání bylo napsané na tabuli a krok po kroku žáci doplňovali čísla do polí a své odpovědi zdůvodňovali. Neměli však již svá individuální řešení před sebou. Účelem tohoto opakovaného řešení nebyla pouze kontrola správného výsledku, ale především měla tato činnost znovu demonstrovat jednotlivá pravidla pro řešení tohoto hlavolamu, jelikož tím, že žáci znovu zdůvodňovali, proč jednotlivá čísla umístili právě na daná pole, došlo k jejich upevňování. Dále bylo během této společné kontroly poukázáno na některé úspěšné strategie řešení, které žáci během procesu použili. Vše je ilustrováno v části přepisu záznamu hodiny v příloze č. II. U většiny žáků šlo především o doplnění pole, které bylo jako poslední volné v některém z řádků, sloupců nebo vnitřních čtverců, přičemž argumenty, které žáci uváděli, odkazovaly na chybějící číslo z řady od jedné do čtyř právě v určitém řádku, sloupci nebo vnitřním čtverci, a tudíž i jeho nemožném umístění někde jinde.

Někteří žáci však překvapivě již nyní prokázali komplexnější porozumění prostředí – konkrétně Vašík, který umístil na pole C4 dvojku (jak je uvedeno na obrázku č. 18b) a odůvodnil to tak, že ve sloupci C ještě dvojka není, přičemž nemůže být na poli C3, protože potom by na poli C4 musela být trojka (aby se žádné číslo ve sloupci C neopakovalo), ale tím pádem by ve čtvrtém řádku byly trojky dvě.

	A	B	C	D
1			1	3
2	3	1	4	
3	1			4
4		3	2	1

Obr. č. 18b, Vašíkem doplněné první pole v zadání pro samostatnou práci (vlastní sudoku)

Překvapivá je tato myšlenka také proto, že Vašík nedoplnil jako první pole D2, které bylo nejjednodušší pro začátek řešení, a tudíž se dalo očekávat, že jej bude mít většina žáků správně (z dvaceti žáků na toto pole doplnilo správné číslo osmnáct z nich), ale začal právě polem C4, které vyžadovalo již složitější strategický postup.

Společnou kontrolu žáci docílili správného výsledku, který je zobrazen na obrázku č. 18c.

2	4	1	3
3	1	4	2
1	2	3	4
4	3	2	1

Obr. č. 18c, správné řešení sudoku zadaného pro první samostatnou práci (vlastní sudoku)

Samostatná práce, během níž žáci řešili výše uvedené sudoku, trvala celkem osm minut, přičemž ti žáci, kteří úlohu vyřešili rychleji, si mohli navíc vyzkoušet sudoku ve velikosti, která se objevuje v literatuře nejčastěji, tedy 9x9. Zadání této úlohy je uvedeno na obrázku č. 19.

2		4	6	1		3	9	
1	5			4	3		6	7
	7	6	5	8		4		2
4			1		6	5	8	
5	1	2	4	3		6	7	9
	3	8	7	9			2	
	2	1	3	6		9		8
8	6		9		2		4	1
9		5		7	1	2		6

Obr. č. 19, sudoku zadané rychleji hotovým žákům 9. 2. 2011 (vlastní sudoku)

Úlohu 9x9 začali v této hodině řešit čtyři žáci (Johan, Marta, Pepa a Vojta), ale na řešení nebyl dostatek času. Z celkových dvaceti sedmi vynechaných polí stihli Johan, Marta a Vojta doplnit devět polí, Pepa šest, přičemž Pepa správně doplnil všech šest polí, Marta tři a Johan s Vojtou dvě. Nedořešená sudoku byla vybrána a přinesena vždy do dalších hodin, nicméně pouze Vojta se k této své úloze později vrátil a celou ji dořešil (při čtvrtém experimentu, jenž probíhal dne 17. května 2011), avšak z již zmíněných dvaceti sedmi volných polí doplnil správně pouze šest. Správné řešení této úlohy je uvedeno v příloze č. III.

V této počáteční fázi bylo takto velké sudoku pro děti příliš obtížné, nicméně sudoku 9x9 bylo rychlejším žákům předkládáno i dále během následujících experimentů. Záměrem tohoto počínání bylo podpořit kaskádovitě

odstupňované úlohy ještě o další způsob, který by žáky vedl k úspěšnému vyřešení finální úlohy tohoto výzkumu, jež měla tradiční velikost 9x9.

11 První sudoku 6x6

V této kapitole je popsán průběh druhého experimentu, který proběhl 3. března 2011 a v otvírání prostředí sudoku navazoval na experiment předchozí. Tentokrát žáci pracovali s úlohou velikosti 6x6 (obrázek č. 20a); rychlejší žáci poté i se sudoku o velikosti 9x9 (obrázek č. 21). Experimentu se zúčastnilo šestnáct žáků (deset dívek a šest chlapů), z nichž patnáct bylo přítomno minule, a tudíž mělo se sudoku společnou počáteční zkušenost, a pouze jedna dívka se s tímto prostředím setkala zde poprvé. Celý experiment se opět odehrál během jedné vyučovací hodiny a trval přibližně třicet minut.

Vzhledem k tomu, že od předchozího experimentu uběhl téměř měsíc, byla žákům na začátek položena otázka, zda si pamatují, co sudoku je a jak vypadá (během toho jim byla vrácena zkontrolovaná a opravená úloha, kterou řešili minule). Zaznělo několik zajímavých odpovědí, z nichž je možné usoudit, že si žáci toto prostředí a jeho principy alespoň částečně pamatovali. Mezi odpověďmi žáků byly zaznamenány například tyto reakce:

Vašík: „Je to taková hra, kde si můžeš procvičit mozek...“

Stella: „Jsou tam takový čárky a čísla...“

Johan: „Je to takhle,“ prstem maluje na lavici mřížku, „je to v takovém čtverci a je to rozdělený na čtyři nebo sedm čtverečků a v těch jednotlivých čtverečkách jsou vždycky čísla a někdy tam chyběj. A nesmí být stejný vedle sebe.“

Jak již bylo uvedeno, pouze jedna žákyně, Terežka, v předchozí hodině se sudoku nebyla přítomna, neměla tedy takovou možnost se se sudoku seznámit, jako měli ostatní žáci minule. Byl jí proto alespoň zadán úkol najít sudoku v časopise, který do hodiny experimentátorka přinesla. Na základě toho, co o tomto hlavolamu před okamžikem od některých spolužáků slyšela, a toho, že u sousedících žáků mohla vidět, jak vypadala úloha, kterou posledně řešili, Terežka po chvíli sudoku v časopise úspěšně objevila.

Ještě před tím, než se přistoupilo k samotnému luštění, se žáci na vyzvání experimentátorky pokusili o shrnutí třech hlavních pravidel pro řešení sudoku, se kterými se seznámili během minulého experimentu. Jednou z otázek položených žákům bylo, zda si vzpomenou, na co musí při luštění sudoku dávat pozor. Johan si vzpomněl na to, že stejná čísla nesmí být vedle sebe, Šimon poté jeho odpověď doplnil o to, že nesmí být stejná čísla v řádku. Pravidla, že nesmí být stejná čísla ještě v jednom sloupečku a vnitřním čtverci (zde ve vnitřním obdélníku) byla uvedena experimentátorkou, neboť ze strany žáků nezazněla.

Při rozdávání nastala neplánovaná situace, kdy žákům nebylo sděleno, že toto sudoku se liší od toho minulého svou velikostí a tudíž i čísly, která do něj mají doplnit – minule (u sudoku 4x4 – obrázky č. 17a a č. 18a) žáci doplňovali pouze čísla od jedné do čtyř, avšak v této úloze (6x6 – obrázek 20a) měli doplnit čísla od jedné až do šesti. Naštěstí si toho všimla Karolínka, sdělila to sousedce a na vyzvání poté i celé třídě. Svou správnou úvahu ještě patřičně odůvodnila tím, že toto sudoku je větší, a proto musí doplnit více čísel. Zadaná úloha je uvedena na obrázku č. 20a.

	3			2	
4		1	3	6	
		4		3	1
1	6		5		2
3		2	4		6
	4	5		1	

Obr. č. 20a, zadání pro samostatnou práci 3. 3. 2011 (vlastní sudoku)

Pokud zvážíme jednotlivé faktory obtížnosti, byla tato úloha pouze nepatrně těžší, než úloha zadaná v předchozí hodině. Vzhledem k tomu, že se jednalo o úlohu větší velikosti, byla proti minulé o trochu obtížnější. Avšak podíl vynechaných polí a celkového počtu polí v úloze byl přibližně stejný

(téměř polovina mřížky) - minule bylo vynecháno sedm polí ze šestnácti, tady šestnáct polí ze třiceti šesti. Tato úloha byla navíc jednodušší co do počtu polí, na kterých bylo možné sudoku začít řešit, neboť zde takových polí bylo více, než v úloze, kterou žáci samostatně řešili v předchozím experimentu: předtím to byla tři pole ze sedmi vynechaných, nyní dvanáct ze šestnácti vynechaných. Toto dílčí zjednodušení bylo považováno za žádoucí, vzhledem k tomu, že se jednalo o sudoku ve větší velikosti, než se kterou žáci měli dosavadní zkušenost. Zohledněn tím byl také měsíční interval mezi jednotlivými experimenty, během něhož žáci sudoku neřešili, a tím pro ně mohlo být obtížné odhalit nebo znovu objevit některé své strategie používané při řešení.

Úloha tedy byla žákům zadána a každý z nich ji řešil samostatně. Časový limit, který žáci na řešení měli, nebyl (stejně jako při minulém experimentu) předem stanovený. Doba věnovaná řešení se odvíjela od potřeb žáků. Když byla většina žáků hotova s řešením, byla úloha vybrána. Celkem tuto úlohu správně vyřešilo sedm žáků z osmnácti. Navíc ještě Viky umístila všechna čísla, co stihla doplnit (jedenáct ze šestnácti), správně, avšak úlohu nestihla dořešit celou. Celková úspěšnost třídy vyjádřená podílem správně doplněných polí a polí na začátku volných byla 75%, což lze považovat za adekvátní tomu, že úloha byla větší a o trochu těžší než ta, kterou žáci řešili v minulém experimentu.

Po tom, co byla řešení žáků vybrána, následovala opět společná kontrola na tabuli. Stejně jako u předchozího experimentu zde měla posloužit především pro upevnění pravidel, která při řešení sudoku platí, a objevování strategií, jež žáci během procesu řešení úlohy používají. Žáci byli i tentokrát vyzváni, aby doplnili některé číslo do mřížky a svou odpověď zdůvodnili. Obecně mezi žáky převládala strategie, která vychází z toho, že se určité číslo dosud nevyskytuje v příslušném řádku, sloupci nebo vnitřním obdélníku. Například, jak je ilustrováno na obrázku č. 20b, že na pole B2 patří dvojka, protože ještě není žádná dvojka ani ve druhém řádku, ani ve sloupci B a ani v příslušném vnitřním obdélníku.

	A	B	C	D	E	F
1		3			2	
2	4	X	1	3	6	
3			4		3	1
4	1	6		5		2
5	3		2	4		6
6		4	5		1	

Obr. č. 20b, umístění čísla ilustrující převládající strategii řešení ve třídě (vlastní sudoku)

Co zde však chybělo, bylo zohlednění ostatních polí – například nemožnost umístit dvojku na pole A1 nebo C1 vzhledem k umístěné dvojce v prvním řádku na poli E1. Proto byly žákům kladeny ještě doplňující otázky, jež směřovaly k tomu, aby byly vyloučeny i tyto možnosti, neboť v některých případech by takováto úvaha mohla být nedostačující (např. kdyby tímto způsobem žáci umístiti dvojku na pole B3, avšak dvojka v tomto vnitřním obdélníku patří na pole A3 – viz správné řešení úlohy uvedené na obrázku č. 20c).

5	3	6	1	2	4
4	2	1	3	6	5
2	5	4	6	3	1
1	6	3	5	4	2
3	1	2	4	5	6
6	4	5	2	1	3

Obr. č. 20c, správné řešení sudoku řešeného při samostatné práci 3. 3. 2011 (vlastní sudoku)

Řešení žákům celkově trvalo přibližně třináct minut. Šest žáků (Alžběta, Karolínka, Pepa, Sára, Šimon a Vašík) bylo s řešením úlohy hotovo rychle, a dostalo proto možnost vyzkoušet ještě sudoku o velikosti 9x9, jehož zadání je zobrazeno na obrázku č. 21.

7	1				8	4		6
2		9	4		5		3	8
4	3		2	6		5	7	
3	4			8	7	9	5	
	5	2	1		9		6	4
		7	5	4			1	3
5		6	8	1				7
1	7		9		3	6		
9		3		5		2	4	1

Obr. č. 21, sudoku zadané rychleji hotovým žákům 3. 3. 2011 (vlastní sudoku)

Tato úloha byla nepatrně obtížnější v porovnání s úlohou 9x9 (obrázek č. 19), která byla žákům předložena při minulém experimentu. Obsahovala více vynechaných polí (třicet jedna proti předchozím dvaceti sedmi z celkových jednaosmdesáti polí v mřížce). I počet polí, na kterých bylo možné řešení začít, byl nepatrně menší – oproti minulým dvaceti čtyřem jich zde bylo dvacet tři, což ale při vyšším počtu vynechaných polí představovalo určitý rozdíl. Z těchto šesti žáků pouze Pepa řešil úlohu 9x9 (obrázek č. 19) i při minulém experimentu, avšak k této rozpracované úloze se nevrátil. Řešil jako zbylých pět žáků úlohu na obrázku č. 21 a právě on ji dokázal vyřešit celou bez jediné chyby (správné řešení této úlohy je uvedeno v příloze č. IV). Z krátkého rozhovoru s ním jsem zjistila, že se sudoku již trochu zkušenost má, neboť

jej má jako hru na svém mobilním telefonu. Ostatním pěti žákům se však podařilo doplnit pouze několik čísel, nicméně všichni z nich se k této rozpracované úloze ještě vrátili při jednom z dvou následujících experimentů a jejich úspěšnost již byla větší. Přesto ale se na této úloze ukázalo, že sudoku o velikosti 9x9 je pro žáky ještě poměrně obtížné.

12 Prohlubování poznání o sudoku

V následující kapitole je popsáno třetí setkání žáků 1. B se sudoku, které proběhlo 27. dubna 2011, tedy více než měsíc a půl po minulém experimentu. Z kaskády úloh vytvořené pro tento výzkum bylo proto žákům představeno opět sudoku velikosti 6x6 (obrázek č. 22a). Přítomno bylo dvacet žáků (jedenáct dívek a devět chlapců), z nichž dvanáct se účastnilo obou dvou předchozích experimentů. Pět žáků mělo zkušenost se sudoku v rámci těchto experimentů pouze jednou (Tereška nebyla přítomna na prvním, Anna, David, Jáchym, Jirka a Vojta na druhém experimentu). Pro dva žáky, Janičku a Vaska, to však bylo úplně první setkání s tímto prostředím

Experiment tentokrát probíhal jako součást vyučovací hodiny, která byla vedena experimentátorkou v rámci předmětu Didaktika matematiky s praxí III. Sudoku bylo zařazeno až na samotný konec hodiny, což byla pro žáky změna, neboť oba předchozí experimenty probíhaly v první části hodiny - žáci tak měli poprvé omezený čas na řešení úlohy, a to konkrétně deset minut.

Vzhledem k tomu, že mezi tímto a předchozím experimentem byl opět značně velký časový interval a že se navíc dva žáci se sudoku dosud nesešli, byli žáci nejprve vyzváni, aby zkusili připomenout již několikrát zmíněná tři pravidla pro řešení sudoku (nesmí se opakovat stejná čísla v jednom řádku, sloupci, či vnitřním čtverci nebo obdélníku). Na jejich odpovědích se ukázalo, že žáci si již tato pravidla dobře pamatují, když byli schopni všechna tři pravidla správně formulovat, a že pro ně prostředí přestává být nové. Přesto raději byla jedna žákyně znovu vyzvána, aby řekla, jaká čísla mají do tohoto sudoku doplňovat (od jedné do šesti) – byla to opět Karolínka, která v minulém

experimentu objevila a zargumentovala, proč bylo třeba do mřížky doplnit více čísel.

Sudoku, které bylo žákům zadáno, je uvedeno na obrázku č. 22a.

				4	
3	2		6	1	
1		6	5		4
	5	2		3	
2		5	3		1
	1			5	

Obr. č. 22a, zadání pro samostatnou práci 27. 4. 2011 (vlastní sudoku)

Tato úloha byla opět nepatrně obtížnější než ta, kterou žáci řešili v rámci předchozího experimentu - obsahovala osmnáct volných polí z celkových třiceti šesti polí v mřížce, tedy o dvě více než minulá úloha. Polí, na kterých bylo možné úlohu začít řešit, bylo sice oproti úloze zadané při předchozím experimentu o jedno více (zde třináct proti předchozím dvanácti), avšak vzhledem k většímu počtu vynechaných polí se zde jedná o nepatrný pokles (třináct možných polí z osmnácti, oproti předchozím dvanácti možným polím z celkových šestnácti volných), a tudíž o obtížnější úlohu.

Žáci úlohu opět řešili individuálně, a jak již bylo uvedeno, měli omezený časový limit, deset minut, který však nebyl pro žáky dostačující, což je možné usuzovat podle jejich výsledků. Celou úlohu stihlo dořešit pouze deset žáků, z nichž jenom čtyři zcela správně – dokázali tedy sudoku dokončit v takové podobě, jako je zobrazeno na obrázku č. 22b. Celková úspěšnost třídy vyjádřená podílem správně doplněných polí a polí na začátku volných byla 57%, což představovalo poměrně značný propad v porovnání s výsledky obou dvou předchozích experimentů. Příčinu lze přisuzovat kromě zvýšené obtížnosti úlohy zejména právě kratšímu časovému limitu, který žáci měli pro řešení úlohy,

a také již zmíněnému delšímu intervalu, jenž uběhl od posledního setkání žáků se sudoku.

5	6	1	2	4	3
3	2	4	6	1	5
1	3	6	5	2	4
4	5	2	1	3	6
2	4	5	3	6	1
6	1	3	4	5	2

Obr. č. 22b, správné řešení sudoku řešeného při samostatné práci 27. 4. 2011 (vlastní sudoku)

I v této hodině byl prostor pro žáky, kteří byli s řešením úlohy hotoví dříve, luštit sudoku velikosti 9x9, avšak této možnosti využili pouze dva: Sára a Vašík. Oba pokračovali v řešení úlohy, kterou začali luštit během předchozího experimentu. Sára měla po této hodině doplněno dvacet tři polí, z nichž celkem dvacet bylo správně. Vašík stihl rozpracované sudoku dokončit celé, a to se sedmdesátiprocentní úspěšností (správně doplnil dvacet dva polí z jednatřiceti vynechaných). Vzhledem k tomu, že oba tito žáci po proběhlých třech experimentech patří k nadprůměrně úspěšným (oba vyřešili dvě ze tří úloh zcela správně), a s ohledem na celkovou úspěšnost třídy při řešení úlohy zadané při tomto experimentu, se ukázalo, že před úlohou 9x9 je stále ještě potřeba žákům předložit sudoku menší, které by jim umožnilo dále rozvinout jejich strategie řešení a zvýšit tak jejich úspěšnost.

13 Upevňování strategií řešení

Obsahem této kapitoly je popis v pořadí již čtvrtého ze série experimentů prováděných v rámci tohoto výzkumu. Vzhledem k tomu, že interval měsíce a půl mezi druhým a třetím setkáním se žáky na ně působil poměrně nepříznivě, proběhl tento experiment již tři týdny po tom předchozím, tedy

17. května 2011, opět v rámci hodiny matematiky. Experimentu se ten den zúčastnilo devatenáct žáků (deset dívek a devět chlapců). Deset z nich přitom bylo přítomno na všech čtyřech dosavadních hodinách, během nichž tento výzkum probíhal, pro sedm žáků to bylo třetí setkání se sudoku a pro dva žáky setkání druhé.

Objektem toho experimentu byla opět úloha sudoku velikosti 6x6 (obrázek č. 23a). Již potřetí tedy byla žáků předložena úloha této velikosti, v tomto případě zejména proto, že při minulém experimentu byla úspěšnost žáků značně nižší v porovnání s tím, který mu předcházel, a to pravděpodobně kvůli malému časovému limitu, jenž žáci měli na vyřešení úlohy. Z toho důvodu byla žákům při této hodině předložena úloha podobné obtížnosti jako ta, kterou řešili při posledním setkání, tedy 27. dubna 2011. Kromě totožné velikosti mřížky byl shodný u obou zadání také padesátiprocentní podíl vynechaných polí (tj. osmnáct polí ze třiceti šesti). Poslední kritérium, tedy počet polí, na kterých bylo možné začít úlohu řešit, byl pouze o jedno pole nižší: z celkových osmnácti vynechaných polí zde bylo dvanáct polí vhodných pro zahájení řešení oproti minulým třinácti. Zadaná úloha je uvedena na obrázku č. 23a.

4		2		5	
	3			2	4
2			5		
	5	4			3
5			6		2
3	2	6		1	

Obr. č. 23a, zadání pro samostatnou práci 17. 5. 2011 (vlastní sudoku)

Záměrně zde poprvé nebyla připomenuta tři základní pravidla pro řešení sudoku, ani nebylo zmíněno, že žáci mají doplňovat čísla od jedné do šesti. Vzhledem k tomu, že se u nikoho neobjevilo číslo větší než sedm

a že již v předchozí hodině žáci pravidla bez váhání vykřikovali, je možné usuzovat, že s tímto prostředím umí všichni žáci pracovat tak, že jsou schopni alespoň část mřížky doplnit.

Dalším předpokladem bylo, že i předchozí úloha, ačkoliv neměla příliš vysokou úspěšnost, napomohla žákům rozvinout jejich vlastní strategie řešení, a proto byl časový limit pro řešení úlohy ponechán stejný jako v minulé hodině, tedy deset minut. Limit se tentokrát ukázal jako dostačující, neboť pouze čtyři žáci úlohu nestihli dořešit. Z patnácti, kteří to stihli, mělo celou úlohu správně šest žáků (Alžběta, Johan, Johanka, Šimon, Tereзка a Vašík) – doplnili všechna pole tak, jako je uvedeno na obrázku č. 23b. Dva další žáci (Karolínka a Jirka) potom obsadili pouze jedno pole špatným číslem. Zajímavé bylo, že u obou žáků to bylo stejné pole, F1 (viz přílohy č. V a č. VI). Jejich omyl lze přisuzovat nepozornosti, neboť zde není žádný důvod pro umístění čtyřky na toto pole, zvláště když byla čtyřka umístěna v zadání na poli F2. Karolínka navíc během dosavadních úloh prokázala, že tomuto prostředí a jeho principům rozumí – úlohy z prvního a druhého experimentu vyřešila bez chyby, ve třetím experimentu úlohu nestihla dořešit celou, avšak vše co doplnila, bylo správně.

4	1	2	3	5	6
6	3	5	1	2	4
2	6	3	5	4	1
1	5	4	2	6	3
5	4	1	6	3	2
3	2	6	4	1	5

Obr. č. 23b, správné řešení sudoku řešeného při samostatné práci 17. 5. 2011 (vlastní sudoku)

Všech těchto osm žáků stihlo úlohu vyřešit rychleji než za stanovených deset minut, šest z nich potom řešilo ještě úlohu 9x9 (obrázek č. 24). Celková úspěšnost třídy vyjádřená podílem správně doplněných polí a polí na začátku

volných byla 65%, což proti předchozím 57% byl jistý pokrok, avšak bylo očekáváno, že žáci překročí hranici 70%, která by byla optimální pro pokročení k další fázi v rámci sestavené kaskády, a to ke sudoku velikosti 9x9, které by bylo zadáno již celé třídě, ne pouze jednotlivcům, kteří jsou v řešení úloh menších rozměrů rychlejší. Proto bylo rozhodnuto do příštího experimentu znovu ještě zařadit úlohu velikosti 6x6, která by žákům pomohla upevnit jejich strategie řešení a získat další zkušenosti s tímto prostředím, které by mohli poté využít při řešení úlohy tradiční velikosti (9x9).

Co se týče úlohy 9x9, v této hodině ji řešilo deset rychlejších žáků. Čtyři žáci měli rozpracovanou některou ze dvou dříve zadaných úloh (obrázky č. 19 a č. 21), zbylých šest žáků začalo řešit náhodně jednu z nich. Sudoku velikosti 9x9, které řešili pouze rychlejší žáci, bylo v této hodině předloženo naposledy. Další setkání s takto velkou úlohou proběhlo již v rámci hlavní kaskády úloh. Řešila ji tedy již celá třída během pozdějšího experimentu. Dosud se tak o vyřešení sudoku 9x9 pokusilo patnáct žáků z celkových jednadvaceti. Nejúspěšnější byl Pepa, který správně doplnil všech třicet jedna vynechaných polí v úloze zadané 3. března 2011 (obrázek č. 21). Nejméně úspěšná byla Janička, která do téže úlohy stihla během jednoho setkání doplnit pouze sedm polí, z nichž ani jedno nebylo správně.

14 Dosažení optimální úspěšnosti pro další úroveň

V této kapitole je popsáno páté setkání žáků se sudoku z kaskády úloh sestavené v rámci výzkumu k této diplomové práci, které proběhlo 2. června 2011, tedy čtrnáct dní po experimentu předchozím. Zúčastnilo se ho sedmnáct žáků (deset dívek a sedm chlapců). Deset z nich do této chvíle absolvovalo všechny hodiny, během nichž byly úlohy k tomuto výzkumu prezentovány. Pět žáků se tímto setkala se sudoku počtvrté, dva žáci potřetí. Co však tento experiment odlišovalo od ostatních, byla skutečnost, že se jednalo o experiment zprostředkovaný – proběhl během pobytu žáků na škole v přírodě a žákům ho zadal jejich třídní učitel.

Žáci řešili již počtvrté úlohu sudoku velikosti 6x6, neboť podle výsledků z posledního setkání (s úspěšností 65%) tato úroveň stále nebyla považována za optimálně zvládnutou. Zadané sudoku však, vzhledem k jeho pozici v kaskádě úloh, bylo oproti tomu minulému opět o trochu ztížené. Velikost sice zůstala stejná, ale byl zde zvýšen počet vynechaných polí o dvě. Proti předchozím osmnácti bylo v této úloze vynecháno dvacet polí z celkových třiceti šesti. Počet polí, na kterých bylo možné úlohu začít řešit, byl ponechán stejný jako u úlohy minulé, avšak uvážíme-li větší počet vynechaných polí, byl podíl polí vhodných pro zahájení řešení a polí vynechaných nižší než v předchozí úloze: v minulé úloze bylo dvanáct polí vhodných pro zahájení řešení z celkových osmnácti vynechaných, zde to bylo dvanáct polí z celkových dvaceti vynechaných. Z hlediska tohoto kritéria tak byla zadaná úloha nepatrně obtížnější.

Sudoku, které žáci během tohoto experimentu řešili, je ukázáno na obrázku č. 24a.

2				4	
1		3	5		2
6		4	1		
	3			2	4
	1			5	
	6		2		

Obr. č. 24a, zadání pro samostatnou práci 15. 6. 2011 (vlastní sudoku)

Změnou oproti dosavadním čtyřem experimentům zde byla možnost řešit úlohu tak dlouho, jak každý žák chtěl. Čas byl evidován a různil se od dvou minut a padesáti pěti vteřin až po necelých sedmnáct minut. Tato možnost pracovat zcela individuálním tempem se ukázala, jak lze očekávat, velmi přínosná, neboť celkem čtrnáct žáků ze sedmnácti dokázalo úlohu vyřešit alespoň s padesáti procentní úspěšností (tedy minimálně s deseti správně doplněnými poli).

Úspěšnosti alespoň 75% (patnáct správně doplněných polí) dosáhlo osm žáků, přičemž šest z nich dokázalo úlohu vyřešit správně celou. Jejich řešení vypadalo tak, jak je zobrazeno na obrázku č. 24b. Časy těchto žáků se přitom pohybovaly od tří do deseti minut (u jedné žákyně se bohužel nepodařilo čas zaznamenat).

2	5	6	3	4	1
1	4	3	5	6	2
6	2	4	1	3	5
5	3	1	6	2	4
3	1	2	4	5	6
4	6	5	2	1	3

Obr. č. 24b, správné řešení sudoku ze dne 15. 6. 2011 (vlastní sudoku)

Celková úspěšnost třídy vyjádřená podílem správně doplněných polí a polí na začátku volných byla 71% procent a jevila se jako optimální pro postup o krok dále v kaskádě úloh, tedy k sudoku o velikosti 9x9 zadanému již celé třídě. To bylo žákům předloženo při následujícím setkání.

Tento experiment byl poslední, který byl uskutečněn v době, kdy žáci byli v prvním ročníku. V rámci celého výzkumu je ověřováno, že když jsou dodržovány zásady konstruktivismu a žákům jsou předkládány vhodně odstupňované úlohy, na jejichž řešení mají dostatečný čas, je většina z nich schopna tyto úlohy řešit úspěšně a postupně zlepšovat své výsledky i v obtížnějších úlohách. Na základě těchto pěti setkání během prvního ročníku lze konstatovat, že tento předpoklad se zatím úspěšně potvrzoval, neboť již po dosavadních experimentech se někteří žáci jeví jako adepti na úspěšné vyřešení závěrečné úlohy z kaskády.

15 Osmá a devátá třída

Kromě pravidelných setkání se žáky prvního ročníku byl proveden také dílčí experiment se žáky druhého stupně, který posloužil jako opora pro určení úrovně závěrečné úlohy hlavní části výzkumu. Byl proveden zprostředkovaně se žáky dvou tříd Základní školy Tábořská, Praha 4 – Nusle, 8. B a 9. A (školního roku 2010/2011). Experimentu se zúčastnilo celkem třicet čtyři žáků (osmnáct děvčat a šestnáct chlapců) a odehrál se během části vyučovací hodiny matematiky v jednotlivých třídách.

Bylo předpokládáno, že žáci v tomto věku znají sudoku, nebo alespoň tuší, jak hlavolam vypadá, přesto jim byla na začátku sdělena základní pravidla pro jeho řešení (tj. jaká čísla mají do mřížky být doplněna a že se v jednom řádku, sloupci a vnitřním čtverci, či obdélníku nesmí vyskytovat stejné číslo dvakrát). Žákům byl poté předložen pracovní list se čtyřmi úlohami různé velikosti a obtížnosti, jak je uvedeno na obrázcích č. 25a, 26a, 27a a 28a. Vzhledem k tomu, že cílem tohoto experimentu bylo jednak získat informace o tom, jak obtížné úrovně si tito žáci vybírají, a jednak jak jsou při jejich řešení úspěšní, byl na celý experiment stanoven časový limit deset minut. Během toho limitu měli žáci za úkol vyřešit tolik úloh, kolik stihnou, přičemž pořadí, ve kterém jednotlivá sudoku budou řešit, záleží pouze na nich samotných.

Sudoku, která byla žákům zadána, byla přejata z pracovního sešitu nakladatelství Prodos *Matematické ...minutovky 7. ročník*. Úlohy velikosti 6x6 (obrázky č. 25a a č. 26a) byly jen nepatrně obtížnější než úloha, která byla zadána žákům 2. B při pátém ze série experimentů (obrázek č. 24a). Obě dvě úlohy obsahovaly z celkových třiceti šesti polí v mřížce dvacet dva polí vynechaných, přičemž úloha, již řešili žáci 2. B, měla vynechaných polí dvacet. Co se týče polí, na nichž bylo možné sudoku začít řešit, úlohy pro výše uvedenou osmou a devátou třídu umožňovaly zahájit řešení na čtrnácti (obrázek č. 25a) a dvanácti (obrázek č. 26a) z dvaadvaceti vynechaných polí. Úloha pro 2. B měla takových polí dvanáct (z dvaceti vynechaných) a z hlediska tohoto kritéria obtížnosti byla téměř stejně těžká jako úloha na obrázku č. 25a.

		1			6
	6		2		3
		2	1		
3		5			4
		3		6	
4				5	

Obr. č. 25a zadání sudoku 6x6 pro experiment s osmou a devátou třídou, I
(*Matematické...minutovky*, 2009)

3				1	
5					
		3	4	2	
	4	2	6		
	6	1			5
	3				4

Obr. č. 26a, zadání sudoku 6x6 pro experiment s osmou a devátou třídou II
(*Matematické...minutovky*, 2009)

Druhé dvě úlohy z pracovního listu (obrázky č. 27a a č. 28a) měly velikost 9x9 a byly v porovnání s úlohami 9x9, které řešili žáci 2. B, rozhodně obtížnější. Obě dvě zadání obsahovala z celkových jednaosmdesáti polí v mřížce třicet sedm polí volných, kdežto úlohy 9x9, jež byly předkládány žákům 2. B, měly vynechaných polí nejvýše třicet jedna. Z těchto třiceti sedmi volných polí bylo v úlohách pro osmou a devátou třídu možné v obou případech začít pouze na deseti z nich. U žáků 2. B byl počet polí umožňujících zahájení řešení v rozmezí od dvaceti dvou do dvaceti šesti (z vynechaných jednatřiceti), a tím byla zaručena nižší obtížnost.

	5	7			9	1		
		2	7	3	5		4	
	4				8	2	7	
	1		2	9	3		5	6
5	9		8		7		2	
2		6			1			7
		1			4	9	6	
4	2			7	6	5	3	8
		5	9		2	7		4

Obr. č. 27a zadání sudoku 9x9 pro experiment s osmou a devátou třídou, I
(*Matematické...minutovky*, 2009)

5	7	6	8	3	1	9	2	4
		8			5	7	6	1
2	4		6					
			9	5	6	4		
7	9	2	1		3		5	
6	5				2	1	9	
3		7		1		6		9
	8	5		6	9	2		7
							1	

Obr. č. 28a zadání sudoku 9x9 pro experiment s osmou a devátou třídou, II
(*Matematické...minutovky*, 2009)

Jak bylo výše uvedeno, jedním z cílů tohoto experimentu bylo získat informace o volbě úrovně sudoku. Zde se ukázalo, že žáci postupovali převážně systematicky – většina volila nejprve úlohy menší velikosti a teprve poté, pokud jim zbýval ještě čas, přešli k úlohám větším. První úlohu (obrázek č. 25a) tak řešilo z třiceti čtyř žáků dvacet čtyři, druhou (obrázek č. 26a) dvacet dva žáků, třetí úlohu (obrázek č. 27a) sedmnáct a čtvrtou (obrázek č. 28a) pouze deset žáků. Vyskytli se zde však čtyři žáci, kteří menší úlohy přeskočili a řešili rovnou sudoku 9x9.

Druhý cíl se týkal úspěšnosti řešení těchto žáků, což bylo později zohledněno při stanovování obtížnosti závěrečné úlohy, která sloužila pro porovnání žáků, již byli systematicky vedeni, s dospělými luštiteli. Výsledky žáků osmé a deváté třídy byly velice rozličné a pokrývaly prakticky celou škálu od žádného správně umístěného čísla až po všechny úlohy vyřešené správně.

Nejúspěšnější byli žáci při řešení první úlohy, kde správného výsledku (obrázek č. 25b), tj. všech dvaadvaceti správně doplněných polí, dosáhlo šestnáct z dvaceti čtyř žáků, kteří tuto úlohu řešili. Výsledky zbylých osmi žáků se pohybovaly mezi dvěma a osmnácti správně umístěnými čísly.

2	3	1	5	4	6
5	6	4	2	1	3
6	4	2	1	3	5
3	1	5	6	2	4
1	5	3	4	6	2
4	2	6	3	5	1

3	2	4	5	1	6
5	1	6	3	4	2
6	5	3	4	2	1
1	4	2	6	5	3
4	6	1	2	3	5
2	3	5	1	6	4

Obr. č. 25b a 26b, správné řešení sudoku 6x6 z experimentu s osmou a devátou třídou, I a II (*Matematické...minutovky*, 2009)

Druhou úlohu volilo dvaadvacet žáků a správně ji vyřešilo (viz obrázek č. 26b) čtrnáct z nich. Ostatních osm žáků úspěšně doplnilo od dvou do dvaceti z celkem dvaceti dvou vynechaných polí.

U úloh 9x9 se vyskytlo dohromady šest žáků, kteří měli správné řešení alespoň u jedné z nich. Dva žáci správně vyřešili první z těchto úloh (obrázek č. 27b), dva žáci druhou úlohu (obrázek č. 28b) a dvěma žákyním se podařilo úspěšně vyluštit obě dvě.

6	5	7	4	2	9	1	8	3
1	8	2	7	3	5	6	4	9
9	4	3	6	1	8	2	7	5
7	1	8	2	9	3	4	5	6
5	9	4	8	6	7	3	2	1
2	3	6	5	4	1	8	9	7
8	7	1	3	5	4	9	6	2
4	2	9	1	7	6	5	3	8
3	6	5	9	8	2	7	1	4

Obr. č. 27b, správné řešení sudoku 9x9 z experimentu s osmou a devátou třídou, I (*Matematické...minutovky*, 2009)

5	7	6	8	3	1	9	2	4
9	3	8	4	2	5	7	6	1
2	4	1	6	9	7	5	3	8
8	1	3	9	5	6	4	7	2
7	9	2	1	4	3	8	5	6
6	5	4	7	8	2	1	9	3
3	2	7	5	1	4	6	8	9
1	8	5	3	6	9	2	4	7
4	6	9	2	7	8	3	1	5

Obr. č. 28b, správné řešení sudoku 9x9 z experimentu s osmou a devátou třídou, II (*Matematické...minutovky*, 2009)

Jak již bylo řečeno, výsledky tohoto dílčího experimentu, jež ukázaly relativně vysokou nejistotu a ne příliš velkou úspěšnost při řešení sudoku 9x9, následně posloužily při rozhodování o míře obtížnosti závěrečné úlohy hlavní části výzkumu, jež byla posléze řešena žáky 2. B ZŠ Táborská, žáky druhé třídy ZŠ Ledec nad Sázavou a dospělými luštiteli.

16 Sudoku tradiční velikosti

V této kapitole je popsána další hodina, ve které probíhal experiment v rámci výzkumu k této práci. Jednalo se o šesté setkání, kterého se zúčastnilo čtrnáct žáků (devět dívek a pět chlapců) v té době již 2. B Základní školy Táborská. Šest z nich bylo přítomno doposud pokaždé, čtyři žáci jednou chyběli a čtyři chyběli dvakrát. Na základě výsledků a úspěšnosti žáků v minulé úloze bylo tentokrát poprvé zadáno sudoku velikosti 9x9 (obrázek č. 29a) celé třídě.

Tento experiment proběhl 25. října 2011, tedy více než čtyři měsíce po experimentu předchozím, z důvodu letních prázdnin a také kvůli tradiční

zářijové adaptaci žáků na školní prostředí. Po tak dlouhém intervalu mezi oběma experimenty bylo zřejmé, že je potřeba zopakovat se žáky hlavní principy, které v prostředí sudoku platí. Před samotným řešením byli proto žáci vyzváni, aby si zkusili vzpomenout, jaká pravidla zde platí. Očekávání, že si je žáci budou pamatovat, se potvrdilo, když všechna tři pravidla, která byla téměř při každém dosavadním setkání opakována, dokázali zformulovat a také věděli, že do sudoku velikosti 9x9 budou doplňovat čísla od jedné do devíti.

Zadání sudoku, které žáci řešili, je uvedeno na obrázku č.29a.

	8		2	3		4	9	5
4		3		6		1		7
9	2	7		5	1			8
1		9		8	2			4
5	4				6	8		3
		6	1	4	5		7	2
3	1		9	2		7		6
7	6		5	1		2	8	
	9	5			8	3	4	

Obr. č. 29a, zadání pro samostatnou práci 25. 10. 2011 (vlastní sudoku)

Toto sudoku mělo být závěrem celé kaskády úloh, avšak vzhledem k okolnostem popsáným dále v textu, se nakonec jednalo o předposlední ze série experimentů. V porovnání se dvěma předchozími sudoku této velikosti (obrázek č. 19 a č. 21), jež jsem během uplynulých setkání zadávala žákům, kteří byli s řešením úlohy menší velikosti hotovi dříve, bylo toto sudoku relativně stejně obtížné. Velikost byla stejná ve všech případech a počet vynechaných polí zde byl shodný s počtem vynechaných polí v úloze z 3. března (obrázek č. 21) - z celkových jednaosmdesáti polí bylo vynecháno třicet jedna. Úloha z 9. února obsahovala volných polí méně, konkrétně dvacet sedm, a byla tedy

o trochu jednodušší. Na druhou stranu počet polí, na kterých bylo možné tuto úlohu začít řešit, byl dvacet dva, což je nepatrně méně, než u obou dvou úloh předchozích, kde počet těchto polí byl dvacet čtyři z dvaceti sedmi vynechaných (obrázek č. 19) a dvacet tři polí z jednatřiceti vynechaných (obrázek č. 21), čímž byla z hlediska tohoto kritéria zadávaná úloha zase nepatrně těžší.

Srovnávali-li bychom tuto úlohu s úlohou, kterou celá třída řešila během posledního experimentu (obrázek č. 24a), byla tato úloha značně jednodušší co do počtu vynechaných polí i počtu polí, na kterých ji bylo možné začít řešit (vzhledem k počtu polí vynechaných). Jak je popsáno výše, v tomto sudoku bylo vynecháno třicet jedna z celkových jednaosmdesáti polí, kdežto v minulé úloze to bylo dvacet polí z třiceti šesti, tedy více než polovina mřížky. Polí vhodných pro zahájení řešení bylo v této úloze dvacet dva z jednatřiceti vynechaných oproti dvanácti takovým polím z celkových dvaceti vynechaných, jak tomu bylo u předchozího experimentu. Přesto lze tuto úlohu celkově považovat za těžší, zejména z toho důvodu, že velikost sudoku zde byla větší.

Žáci toto sudoku řešili jako vždy individuálně. Jak již bylo řečeno, od předchozího experimentu uběhly čtyři měsíce, a proto byla předem očekávaná trochu nižší úspěšnost, také vzhledem k tomu, že se jednalo o úlohu větší velikosti, než na kterou byla většina žáků doposud zvyklá. Co však tomuto experimentu zřejmě nejvíce uškodilo, byl nedostatek času, který žáci měli na řešení. Úloze se totiž věnovali až v závěru vyučovací hodiny, přičemž na celý proces zbylo jen necelých deset minut, což zdaleka nebylo dostačující. Celou úlohu tak stihli dořešit pouze tři žáci (Karolínka, Šimon a Vojta), avšak ne zcela správně - z jednatřiceti vynechaných polí Šimon doplnil správně dvacet devět, Karolínka dvacet sedm a Vojta deset. Šimon i Karolínka již během předchozích experimentů prokázali značný pokrok - Šimon doposud všechny úlohy vyřešil správně, Karolínka také, pouze jednou nestihla doplnit celou mřížku, ale všechna čísla, která do polí umístila, byla správně. Proto je možné soudit, že úloha nebyla nezvládnutelná, ale žáci by potřebovali na její řešení více času. Správné řešení, ke kterému se řešení Karolínky i Šimon blížilo, je uvedeno na obrázku č. 29b.

Celková úspěšnost třídy vyjádřená podílem správně doplněných polí a polí na začátku volných byla tedy pouze 40%. Pokud by byl zohledňován pouze celkový počet polí, která žáci stihli doplnit, byla by úspěšnost celé třídy 71%. Zúčastnilo se čtrnáct žáků a každý doplňoval třicet jedna polí, tedy celkem bylo volných čtyři sta třicet čtyři polí. Žáci obsadili dvě stě čtyřicet jedna z nich, přičemž sto sedmdesát dva obsahovalo správné číslo, tedy 71% z toho, co žáci stihli doplnit, bylo správně. Tento výsledek dokazuje, že neúspěšnost žáků pramenila právě z nedostatečného časového limitu pro řešení.

6	8	1	2	3	7	4	9	5
4	5	3	8	6	9	1	2	7
9	2	7	4	5	1	6	3	8
1	7	9	3	8	2	5	6	4
5	4	2	7	9	6	8	1	3
8	3	6	1	4	5	9	7	2
3	1	8	9	2	4	7	5	6
7	6	4	5	1	3	2	8	9
2	9	5	6	7	8	3	4	1

Obr. č. 29b, správné řešení sudoku ze dne 25. 10. 2011 (vlastní sudoku)

V rámci tohoto experimentu byla pozornost zaměřena na jednoho z nadprůměrně úspěšných žáků s cílem vyzorovat jeho strategii řešení. Vybrán byl Šimon, který v průběhu dosavadního výzkumu vyřešil všechny úlohy správně. Při pozorování bylo zjištěno, že postupuje zleva doprava po jednotlivých sloupcích, vždy prochází postupně čísla od jedné do devíti a doplňuje ta, která v příslušném sloupci chybí. Zohledňuje přitom zároveň čísla, která jsou umístěna v řádcích, do kterých je třeba určité číslo umístit. Bohužel však u prvního sloupečku tuto kontrolu zapomněl provést, a tak do polí

A6 a A9 umístil špatná čísla (obrázek č. 29c), která ale naštěstí nezpůsobila další chyby. Kdyby zde zkontroloval ještě vnitřní čtverce (po jejich zaplnění), určitě by zjistil, že se mu v nich tato čísla opakují a jsou tedy umístěna špatně. Nutno je však podotknout, že během všech experimentů (i toho následujícího), tato dvě pole byla jediná, ve kterých tento žák chyboval (viz příloha č. VII).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	6	8		2	3		4	9	5
2	4		3		6		1		7
3	9	2	7		5	1			8
4	1		9		8	2			4
5	5	4				6	8		3
6	2		6	1	4	5		7	2
7	3	1		9	2		7		6
8	7	6		5	1		2	8	
9	8	9	5			8	3	4	

Obr. č. 29c, nástin Šimonovy strategie řešení (vlastní sudoku)

Jak již bylo řečeno, podmínky, které žáci měli, nebyly optimální, proto bylo závěrem z této hodiny rozhodnutí v rámci tohoto výzkumu zařadit do kaskády úloh ještě jedno sudoku velikosti 9x9, které by bylo přibližně stejně obtížné jako toto a na jehož řešení by žáci měli pro ně dostatečný časový limit.

17 Závěrečná úloha

Obsahem této kapitoly je popis posledního experimentu se žáky ZŠ Táborská. Přítomno bylo sedmnáct žáků (deset dívek a sedm chlapců), přičemž šest z nich se dosud zúčastnilo všech hodin, na kterých bylo sudoku pro tento výzkum zadáváno, pět žáků chybělo jednou, dalších pět dvakrát a jeden žák se nezúčastnil celkem třikrát, jak je uvedeno v tabulce č. 1.

	9.2.	3.3.	27.4.	17.5.	2.6.	25.10.	7.11.	celkem
Agátka (AG)	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano	7x
Alžběta (AL)	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano	7x
Anna (AN)	ano	ne	ano	ano	ano	ne	ano	5x
David (DA)	ano	ne	ano	ano	ne	ne	ano	4x
Gusta (GU)	ano	ano	XX	XX	XX	XX	XX	2x
Janička (JA)	ne	ne	ano	ano	ano	ano	ano	5x
Jáchym (JÁ)	ano	ne	ano	ano	ano	ano	ano	6x
Jirka (JI)	ano	ne	ano	ano	ne	XX	XX	3x
Johan (JO)	ano	ano	ano	ano	ano	ne	ano	6x
Johanka (JH)	ano	ano	ano	ano	ano	XX	XX	5x
Karolínka (KA)	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano	7x
Marek (MK)	ano	ano	XX	XX	XX	XX	XX	2x
Marta (MA)	ano	ano	ne	ano	ano	ano	ano	6x
Natálka (NA)	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano	7x
Pepa (PE)	ano	ano	ano	ano	ano	ne	ne	5x
Sára (SÁ)	ano	ano	ano	ano	ano	XX	XX	5x
Stella (ST)	ano	ano	ano	ne	ne	ano	ano	5x
Šimon (ŠI)	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano	7x
Terežka (TE)	ne	ano	ano	ano	ano	ano	ano	6x
Vasko (VS)	ne	ne	ano	ano	ano	ano	ano	5x
Vašík (VA)	ano	ano	ano	ano	ano	ano	ano	7x
Viky (VI)	ano	ano	ano	ne	ne	ano	ano	5x
Vojta (VO)	ano	ne	ano	ano	ano	ano	ano	6x
Celkem	20	16	20	19	17	14	17	

Tab. č. 1, evidence žáků účastnících se jednotlivých experimentů

Experiment byl proveden 7. listopadu 2011, tedy necelé dva týdny po setkání předchozím, což bylo záměrné, vzhledem k tomu, že již minulá úloha měla být původně poslední z kaskády. Kvůli nepříznivým okolnostem však většina žáků neměla možnost minulou úlohu dořešit celou, a tak se přistoupilo ještě k tomuto poslednímu setkání, pro nějž bylo vytvořeno sudoku (obrázek č. 30a) přibližně stejné obtížnosti jako bylo to, které žáci řešili 25. října.

	1		2	5		9	3	7
6		9		1	8		2	
	7	5		3	4		8	6
9		6	4		3		5	1
7	4		6			2		
	2	3	1		7	8		4
3	5		8		9		1	
8		2		7		5	4	9
1		4	5	6	2	3		

Obr. č. 30a, zadání pro poslední samostatnou práci (vlastní sudoku)

Úloha měla tím pádem stejný počet vynechaných polí, jako v předcházejícím experimentu - třicet jedna z celkových jednaosmdesáti polí. Avšak počet polí, na kterých bylo možné úlohu začít řešit, byl o trochu větší: minule bylo možné začít z jednatřiceti volných polí na dvaceti dvou, nyní takových polí bylo dvacet šest.

Aby se předešlo situaci, která při minulém setkání zabránila žákům dořešit sudoku až do konce, byla tato úloha zařazena na začátek vyučovací hodiny a každý žák měl navíc neomezený časový limit (čas omezovala pouze délka vyučovací hodiny, tj. čtyřicet pět minut, ale nepředpokládalo se, že by některému ze žáků řešení trvalo tak dlouho). Celou úlohu správně

vyřešilo pět žáků (Agátka, Janička, Johan, Tereзка a Viky), ale oproti dosavadním experimentům se zde objevilo také velké množství těch, kteří měli pouze jedno, dvě, nebo tři pole špatně doplněné. Minimálně dvacet osm polí z volných jednatřiceti tak doplnilo celkem dvanáct žáků. Šimon a Vašík měli jedno pole špatně (v Šimonově případě toto jedno pole zůstalo volné), Anna, Natálka a Vasko udělali dvě chyby a Alžběta a Karolínka doplnily tři pole nesprávně. Celková úspěšnost třídy vyjádřená podílem správně doplněných polí a polí na začátku volných byla 80%, což lze považovat za velice úspěšný výsledek.

Časy žáků byly evidovány a pohybovaly se v rozmezí od necelých čtyř minut, až po téměř dvacet devět minut. Nejrychleji bylo celé sudoku správně vyřešeno za osm minut a čtyřicet pět vteřin (Tereзка), nicméně průměrná doba řešení žáků se správně doplněnými všemi poli, tj. výše uvedených pěti žáků, byla přibližně sedmnáct a půl minuty. V širším pohledu, pokud bychom brali v úvahu všech dvanáct žáků, kteří měli minimálně dvacet osm polí správně doplněných, by byla průměrná doba řešení přibližně patnáct a tři čtvrtě minuty.

Jak bylo dříve uvedeno, byly některým žákům předkládány úlohy sudoku velikosti 9x9 již ve fázi, kdy celá třída řešila úlohy velikosti 6x6. Těchto žáků bylo dohromady patnáct z celkově původních jednadvaceti, přičemž jedenáct z nich se zúčastnilo tohoto posledního experimentu. Nelze objektivně říci, že by skutečnost, že tito žáci byli úloze větší velikosti vystaveni, u všech znamenala stoprocentní úspěšnost při řešení této finální úlohy, neboť z těchto patnácti žáků při řešení závěrečné úlohy uspělo osm (opět při zohlednění jedné až tří chyb). Tři žáci (Jáchym, Marta a Vojta) z patnácti, kteří měli z předchozích experimentů zkušenost se sudoku velikosti 9x9, finální úlohu nevyřešili úspěšně: z jednatřiceti vynechaných polí Jáchym doplnil správně osmnáct, Marta patnáct a Vojta sedm. Na druhou stranu ale u těchto tří žáků byly průběžné výsledky většinou podprůměrné. Z těchto výsledků je možné usoudit, že vystavování rychlejších žáků úlohám velikosti 9x9 mělo smysl pro ty z nich, kteří průběžně prokazovali nadprůměrné výsledky, avšak nutně nepodmiňovalo úspěšnost při řešení závěrečné úlohy, jelikož dva žáci tuto úlohu vyřešili celou správně, aniž by předtím jako většina třídy průběžně řešili některou ze dvou

úloh 9x9, jež byly předkládané rychleji hotovým žákům. Dále ještě další dva žáci bez této zkušenosti závěrečnou úlohu vyřešili pouze se dvěma špatně doplněnými poli. Správné řešení, kterého dosáhlo již zmíněných pět žáků, je uvedeno na obrázku č.30b.

4	1	8	2	5	6	9	3	7
6	3	9	7	1	8	4	2	5
2	7	5	9	3	4	1	8	6
9	8	6	4	2	3	7	5	1
7	4	1	6	8	5	2	9	3
5	2	3	1	9	7	8	6	4
3	5	7	8	4	9	6	1	2
8	6	2	3	7	1	5	4	9
1	9	4	5	6	2	3	7	8

Obr. č. 30b, správné řešení sudoku řešeného při poslední samostatné práci
(vlastní sudoku)

Stejně jako u předchozího experimentu bylo i zde dílčím cílem vyzorovat náznak strategií řešení, které se mezi žáky objevují. Pozornost byla tentokrát soustředěna na Karolínku, která se vedle Šimona projevila jako nadprůměrně úspěšná při řešení jednotlivých sudoku z kaskády. Její strategie byla podobná té Šimonově, avšak dalo by se říci, že byla dovedená ještě o něco dále. Karolínka postupovala po vnitřních čtvercích (zleva doprava a shora dolů) a stejně jako to dělal Šimon u sloupečků, procházela čísla od jedné do devíti a hledala, které číslo v daném čtverci chybí. Poté umisťovala chybějící čísla do jednotlivých polí ve čtverci s ohledem na jejich přítomnost

či nepřítomnost v příslušných sloupcích a řádcích. Naneštěstí se jí během tohoto experimentu nepodařilo doplnit všechna pole správně, nicméně její úspěšnost byla i přesto nadprůměrná (doplnila z jednatřiceti polí dvacet osm správně).

Tato úloha byla poslední ze série, která byla žákům předkládána. Vzhledem k tomu, že na základě kaskády šesti úloh, většina žáků dokázala vyluštit tuto sedmou úlohu (ať už celou správně, nebo s minimem chyb), kterou lze označit za tradiční a s níž je možné se běžně setkat v novinách či publikacích obsahujících sudoku, lze konstatovat, že si žáci osvojili hlavní principy a strategie tohoto prostředí do takové míry, že jsou schopni nyní řešit jednodušší úlohy, které řeší dospělí luštitelé. Pro potvrzení této domněnky byl proveden ještě experiment se vzorkem dospělých luštitelů, který je popsán v následující části.

18 Dospělí luštitelé

Tato kapitola je věnována experimentu, který byl prováděn se vzorkem luštitelů sudoku starších osmnácti let za účelem potvrzení domněnky, že žáci, kteří se zúčastnili výše popsané několikaměsíční série experimentů, dosáhli v prostředí sudoku úrovně, jež je v určitých hlediscích srovnatelná s úrovní dospělých luštitelů. Vzorek tvořilo šedesát pět lidí různého věku a vzdělání, s odlišnou úrovní sudoku, kterou luští, a frekvencí, s níž se se sudoku setkávají.

Co se týče věku a vzdělání, převažovala zde skupina studentů vysokých škol ve věku mezi dvaceti a dvaceti šesti lety, která obsahovala čtyřicet sedm zástupců. Dále se experimentu zúčastnilo šest studentů střední nebo vysoké školy ve věku od osmnácti do dvaceti let, dva studenti konzervatoře a deset lidí ve věku mezi dvaceti sedmi a sedmdesáti třemi lety (většina z nich také s vysokoškolským vzděláním). Pro tento výzkum je však důležitější, jak často a jak obtížné sudoku tito luštitelé luští.

Každý zúčastněný se zařadil do jedné ze šesti skupin, které byly rozděleny podle toho, jakou úroveň sudoku si obvykle volí z možných úrovní jedna až pět (plus kategorie začátečník), kde jednička označovala sudoku

nejjednodušší a pětka sudoku nejobtížnější. Jak je v teoretické části této diplomové práce popsáno, obtížnost jednotlivých úloh sudoku nelze vždy zcela objektivně určit, proto je i zde volená úroveň chápána spíše subjektivně. Závěrečnou úlohu, která byla zadávána žákům a zároveň těmto dospělým (obrázek č. 30a), by bylo možné označit úrovní dvě – ne zcela začátečnická, spíše blížíci se průměrné obtížnosti.

Dále všichni také uvedli, jak často přibližně sudoku v současné době luští. Vzhledem k tomu, že se jednalo o relativně jednoduchou úlohu, téměř většina zúčastněných ji vyluštila celou správně (tedy jako na obrázku č. 30b), pouze u dvou lidí se objevily chyby - u jednoho zúčastněného bylo jedno pole špatně doplněné, pravděpodobně z nepozornosti, u druhého byl výsledek horší, neboť správně doplněných bylo pouze šestnáct polí z celkových jednatřiceti, což bylo nejspíše způsobené skutečností, že se daná osoba se sudoku setkala zde poprvé.

Úroveň pět, tedy nejtěžší sudoku (někdy také označované jako ďábelské) vyhledávají z celého vzorku pouze dva lidé. Jeden z nich luští sudoku každý den, druhý velmi často. Oba vyluštili celé sudoku správně s časy čtyři minuty a tři minuty a šestnáct vteřin (průměrný čas této kategorie tedy byl tři minuty a třicet osm vteřin).

Čtvrtou úroveň, tedy nadprůměrnou obtížnost, by volilo patnáct zúčastněných. Frekvence, se kterou tento hlavolam luští, se u nich velice lišila: od jedné úlohy týdně až po jednu za měsíc. Také celá tato skupina vyřešila toto sudoku zcela bez chyby a většina z nich během méně než pěti minut. Pouze jeden z nich se přiblížil osmi minutám, nicméně průměrný čas této skupiny byl tři a půl minuty. Je tedy patrné, že rozdíl mezi úrovní pět a úrovní čtyři se zde stírá.

Úroveň tři, a tedy průměrně obtížné sudoku, by zvolilo dvacet devět lidí. V této skupině se frekvence odlišovala nejvíce – někteří luštitelé se se sudoku setkávají dvakrát týdně, jiní jedenkrát za půl roku. Úspěšnost této skupiny byla téměř stoprocentní (pouze jedno špatně doplněné pole jednoho z účastníků). Průměrná doba, po kterou lidé v této kategorii zadanou úlohu řešili, byla pět minut.

Druhá úroveň, tedy ta, na které byla zadávaná úloha, je vyhledávána devíti ze zúčastněných. Většina z nich luští sudoku občas v novinách, případně ho nevyhledávají vůbec. I v této skupině úlohu správně vyřešili všichni a jejich průměrný čas byl pět a půl minuty.

První úroveň, jež by byla vhodná pro luštitelů, kteří vyluštili přibližně mezi dvěma a deseti úlohami, se ohodnotily čtyři osoby. Tři z nich sudoku neluští, čtvrtý se s ním setkává obvykle jednou za rok, avšak jejich úspěšnost byla stoprocentní. Jejich průměrný čas luštění byl devět minut, přičemž jeden účastník úlohu řešil dokonce dvanáct minut, což je srovnatelné s časy rychleji hotových žáků ZŠ Tábořská (Vašík, Terežka, Agátka, Karolínka a Viky).

Do skupiny začátečníků byli zařazeni všichni, kteří se se sudoku nikdy předtím nesetkali. Tvořilo ji tedy šest lidí a kromě jednoho z nich úlohu všichni zdárně vyřešili bez chyby. Pochopitelně potřebovali na řešení více času, a tak se jejich doba luštění pohybovala od pěti minut a třiceti vteřin až po třicet pět minut. Průměrný čas této skupiny byl přitom osmnáct minut.

Jak bylo z výsledků patrné, výkony žáků, kteří začínali na začátečnické úrovni, byli prostřednictvím výše popsané série experimentů systematicky vedeni a setkávali se tak postupně s obtížnějšími úlohami, jsou srovnatelné s výsledky dospělých luštitelů. Jediným rozdílem, pomíneme-li strategie řešení, které nebyly dostatečně zkoumány v rámci tohoto výzkumu, byla pouze doba, po kterou toto sudoku luštili. Je očekávatelné, že děti ve věku šesti až sedmi let, potřebují na dokončení úlohy více času než luštitelé dospělí, nicméně se ukázalo, že někteří rychlejší žáci i přesto předčili několik dospělých účastníků tohoto výzkumu.

19 Jiná druhá třída

V této kapitole je popsán experiment, který byl proveden se žáky druhého ročníku Základní školy Ledec nad Sázavou, aby byl pokrok žáků ZŠ Tábořská viditelnější. Jednalo se o zprostředkovaný experiment, jenž byl provedený třídní učitelkou dané třídy dne 15. února 2012. Zúčastnilo se ho celkem patnáct žáků, z nichž dva již měli předchozí zkušenost s tímto

hlavolamem, neboť ho luští doma s rodiči, avšak setkali se zatím pouze se sudoku v menší velikosti, než je 9x9, obsahujícím místo čísel symboly. Pro ostatní žáky to bylo první setkání s tímto prostředím. Všichni tito žáci však postrádali předchozích několik odstupňovaných úloh, které byly systematicky předkládány žákům ZŠ Tábořská během několikaměsíční série experimentů.

Aby bylo možné zjistit, jaký význam mělo vedení žáků ZŠ Tábořská při odkrývání principů prostředí sudoku a jaký učinili pokrok, byla žákům ZŠ Ledec nad Sázavou předložena závěrečná úloha ze série, tedy ta, jež byla zadána žákům ZŠ Tábořská 7. listopadu 2011 a kterou luštili i dospělí luštitelé (obrázek č.30a), avšak bez předcházející kaskády úloh. Žákům bylo pouze sděleno, že jejich úkolem je doplnit do jednotlivých polí čísla od jedné do devíti tak, aby se v každém sloupci, řádku a vnitřním čtverci 3x3 žádné číslo neopakovalo. Zároveň byla, vzhledem k jejich věku a prakticky nulové předchozí znalosti o sudoku, provedena názorná ukázka toho, jak vypadá, když se čísla v některém sloupci, řádku nebo vnitřním čtverci opakují. Jak mají žáci při řešení úlohy postupovat a jaké volit strategie, již však bylo na nich samotných.

Co se týče časového limitu, měli žáci pro řešení stejné podmínky, tedy neomezenou dobu, po kterou mohli dané sudoku řešit (omezení byli pouze čtyřiceti pěti minutovou délkou hodiny). Nicméně po dvaceti minutách řešení byl experiment ukončen, neboť většina žáků ztratila o hlavolam zájem a nechtěla ho dále řešit. Tato úroveň sudoku pro ně byla, zcela logicky, příliš obtížná vzhledem k tomu, že předtím neprošli postupným sledem jednodušších úloh, jako tomu bylo u žáků ZŠ Tábořská.

Jak již bylo řečeno, žákům byla zadána závěrečná úloha z kaskády, která byla předložena žákům ZŠ Tábořská. Z celkových jednaosmdesáti polí tedy obsahovala jednatřicet polí volných, z nichž dvacet šest umožňovalo začátek řešení.

Celou úlohu zde stihlo vyřešit pět žáků, avšak žádný úspěšně. Výsledky některých z nich se blížily průměru – dva žáci doplnili správně dvanáct polí z jednatřiceti vynechaných, jeden žák jedenáct a dva žáci osm polí (u jednoho to bylo zároveň právě osm polí, které doplnil). Ostatní žáci doplnili mezi pěti

a třiatvaceti polí, v průměru přibližně dvanáct polí na žáka (v rámci celé třídy potom průměrně osmnáct polí). Nejlepšího výsledku dosáhl žák, který umístil do mřížky celkem šestnáct čísel, z nichž patnáct bylo správně. Jeho úspěšnost v rámci celé mřížky byla tedy téměř poloviční. Úspěšnost celé třídy vyjádřená podílem správně doplněných polí a polí na začátku volných byla 26%. Pokud bychom vzali v úvahu pouze počet polí, která žáci stihli doplnit, namísto celkového počtu volných polí, byla by jejich úspěšnost 43%. Z těchto výsledků je patrné, že sudoku velikosti 9x9 je pro žáky bez předchozí zkušenost nezvládnutelné.

Přestože úspěšnost této druhé třídy byla poměrně nízká, projevil se tento experiment jako motivační, neboť na základě této úlohy se paní učitelce v této třídě, ale také dalším učitelkám v jiných třídách prvního stupně téže školy, sudoku zalíbilo a pokračují v konstruování poznání prostřednictvím tohoto prostředí.

20 Závěr praktického výzkumu

Experimenty se žáky na ZŠ Tábořská, které je vystavovaly prostředí sudoku prostřednictvím gradované kaskády úloh, umožňovaly jim objevovat jeho principy a rozvíjet strategie řešení během jednotlivých úloh, se tímto ukázaly jako smysluplné. V porovnání se žáky, pro které toto prostředí bylo nové, prokázali, že ačkoliv jim nebylo nijak naznačeno, jak mají při řešení postupovat, a pouze věděli, jaká pravidla u sudoku platí, dokázali se tito žáci prostřednictvím kaskády úloh dostat až k tradičnímu formátu sudoku a většina z nich ho také úspěšně vyřešila.

Ve srovnání s dospělými luštiteli žáci ZŠ Tábořská také dokázali, že systematickým vedením založeným na zásadách konstruktivistického vyučování, dosáhli u úrovně téměř průměrné obtížnosti výsledků srovnatelných s dospělými, co se týká správného umístění čísel do mřížky. Výsledky několika žáků navíc byly srovnatelné s některými výsledky dospělých i po stránce časové.

Závěr

Jak bylo v úvodu této diplomové práce stanoveno, hlavním cílem bylo ověřit hypotézu, že při systematickém seznamování se s prostředím prostřednictvím vhodně gradované kaskády úloh lze dovést alespoň 70% žáků prvního stupně základní školy na úroveň srovnatelnou se staršími žáky, nebo dospělými luštiteli. Tato hypotéza byla ověřována především závěrečnou úlohou z kaskády sudoku, kterou řešilo sedmnáct žáků 2. ročníku Základní školy Tábořská a kterou zároveň šedesát tři ze šedesáti pěti dospělých luštitelů vyřešilo správně.

70% z tohoto počtu přítomných znamenalo dvanáct žáků úspěšných při řešení, přičemž jak ukazují výsledky výzkumu, řešení právě dvanácti z těchto sedmnácti žáků lze považovat za úspěšné (s minimální úspěšností 90%). Celková úspěšnost třídy při řešení byla 80%. Lze tedy říci, že stanovená hypotéza byla potvrzena.

Dále byly pro tuto diplomovou práci formulovány ještě dva dílčí cíle. Za prvé poskytnout dostatečné informace týkající se historie, základních strategií řešení a pravidel japonských hlavolamů, což je podrobně popsáno v teoretické části práce. Za druhé potom prezentovat úlohy, které by mohly být využity učiteli prvního stupně základní školy při výuce matematiky. Tento cíl je jednak realizován v průběhu celé práce, jednak je plněn prostřednictvím kaskády úloh, jež je celá uvedena v přílohách této diplomové práce.

Na základě těchto tvrzení je tedy možné konstatovat, že tato diplomová práce splnila všechny cíle, které byly v rámci ní stanoveny.

Literatura a informační zdroje

BITTNEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia: Aritmetika*. Plzeň: FRAUS, 2007. ISBN 978-80-7238-654-3.

BODYCOMBE, D. *Sudoku na celý rok*. Praha: Ikar, 2006. ISBN 80-249-0818-2.

ČÍŽKOVÁ, M. *Matematika pro 2. ročník základní školy: 1. díl*. Praha: SPN, 2010. ISBN 80-7235-370-5.

DONATI, G., PEISERTOVÁ, A. *Zábavné sudoku pro děti*. Říčany: JUNIOR, 2005. ISBN 80-7267-207-X.

FLONEROVÁ, K. *Sudoku pro děti od 8 let*. Praha: Fragment, 2006. ISBN 80-253-0329-2.

FLONEROVÁ, K. *Sudoku pro děti od 10 let*. Praha: Fragment, 2006. ISBN 80-253-0330-6.

GOULD, W. *Su Doku*. London: Times Books, 2005. ISBN 0-00-720732-8.

HRIZC, M. *Matematické...minutovky 7.ročník: 1. díl*. Olomouc: Prodos, 2009. ISBN 978-80-7230-250-5.

MATUCHOVÁ, K. cvičení k předmětu Úvod do jazyka (OB2301004), ZS 2010/2011, PedF UK, Praha

MEPHAM, M. *Sudoku 2. Velké přilepy*: Lucka, 2005. ISBN 80-86325-06-7.

MOHELSKÁ, E. *Využití magických čtverců, hlavolamů sudoku a číselných schémat ve vyučování matematiky a v zájmové matematice na 1. stupni základní školy*. Brno, 2007. Diplomová práce. Masarykova univerzita.

PRESTON, T. *Jediné opravdu původní japonské sudoku*. Praha: Ottovo nakladatelství, s.r.o., 2006. ISBN 80-7360-413-2.

Příšerky: dětské sudoku. Čestlice: Rebo, 2007. ISBN 80-7234-723-3.

RIOS, M. *Sudoku pro děti.* Praha: Portál, 2006. ISBN 80-7367-114-X.

STEHLÍKOVÁ, N. Charakteristika kultury vyučování matematice z pohledu činnosti učitele. In HOŠPESOVÁ, A., STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice.* České Budějovice: Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 20. ISBN 978-80-7394-052-2.

Zvířátka: dětské sudoku. Čestlice: Rebo, 2007. ISBN 80-7234-723-3.

MOORE, G. *Puzzlemix* [online]. © 2005-2011 [cit. 2012-03-03]. Dostupné na WWW: <<http://www.puzzlemix.com/index.php>>

Středechní sudoku. *IDNES.cz* [online]. 9. 2. 2011 [cit. 2012-03-04]. Dostupné na WWW: <http://hobby.idnes.cz/stredecni-sudoku-0eb-/hobby-domov.aspx?c=A11_0209_10130_2_hobby-domov_bma>

Přílohy

Příloha I, přepis části hodiny, v níž probíhalo seznamování žáků s problematikou sudoku

Příloha II, přepis části hodiny, v níž probíhala společná kontrola prvního sudoku řešeného samostatnou prací

Příloha III, správné řešení sudoku 9x9 z 9. 2. 2011

Příloha IV, správné řešení sudoku 9x9 z 3. 3. 2011

Příloha V, Jirkovo řešení ze dne 17. 5. 2011

Příloha VI, Karolínčino řešení ze dne 17. 5. 2011

Příloha VII, Šimonovo řešení ze dne 25. 10. 2011

Příloha VIII, pracovní listy pro učitele na 1. stupni ZŠ

Příloha I, přepis části hodiny, v níž probíhalo seznamování žáků s problematikou sudoku

Zkratky:

UC – učitelka (experimentátorka)

Ostatní zkratky korespondují se zkratkami jmen žáků, které jsou uvedeny v tabulce č. 1 na straně 74.

10:52	KA 01	Já bych sem dala čtyřku. <i>(dá čtyřku na A3)</i>
11:02	UC 30	Je to dobře? <i>(žáci tleskají = je to dobře)</i>
11:13	UC 31	Co v tomhle tom sloupečku, není něco dvakrát? <i>(ukazuje na sloupec A)</i>
11:15	VS 07	Ne.
11:16	UC 32	A co v tomhle čtverečku, není něco dvakrát? <i>(ukazuje na čtverec III)</i>
11:18	VS 08	Ne.
11:19	UC 33	Tak to vypadá dobře.
11:22	AN 03	Jojo, v tomhle čtverečku jsou dva. <i>(ukazuje na políčka z dvou různých čtverců – A2, B3)</i>
11:39	UC 34	Tady v tomhle čtverečku je něco dvakrát? <i>(ukazuje na čtverec I)</i>
11:42	VS 09	Ne.
11:43	UC 35	Tady v tomhle čtverečku taky ne.
11:51	UC 36	Tak Vašík, co by dal dál?
12:00	VA 05	<i>(vezme trojku)</i> Třeba sem. <i>(dá trojku na pole D2)</i>
12:06	UC 37	A to sis dal jenom tak, jenom že se ti tam líbí? Nebo jsi na to nějak přišel?
12:22	UC 38	Ta trojka, můžeme si ji tam zatím nechat, nevadí nám tam nějak?
12:25	VA 06	Ne, nevadí.

12:31	UC 39	Stella. <i>(Stella vezme čtyřku, přemýšlí a dá ji na C1)</i>
12:43	ST 01	Sem čtyřku.
12:44	UC 40	Sem čtyřku? A proč?
12:45	ST 02	Protože čísla jsou takhle... takhle po sobě jako jedna, dva, tři, čtyři takhle křížem. <i>(ukazuje na první dva čtverce, které jsou shodou okolností souměrné)</i>
12:59	UC 41	A myslíš, že kdybych sem dala takhle trojku <i>(dá trojku na C1)</i> , tak by to bylo taky dobře?
13:02	ST 03	Ne.
13:03	UC 42	Proč?
13:03	ST 04	Protože tam jsou dvě.
13:05	UC 43	Tam už jsou dvě trojky. Tak co kdybych tam dala dvojku? <i>(dá dvojku na C1)</i>
13:08	ST 05	Tam už jsou taky dvě.
13:10	UC 44	Taky dvě už tam jsou. Tak co kdybych tam dala jedničku? <i>(dá jedničku na C1)</i>
13:14	ST 06	Ta patří sem. <i>(ukáže na C2)</i>
13:16	UC 45	Takže ta čtyřka tam takhle zůstane. <i>(nechá na C1 čtyřku)</i>
13:22	UC 46	Andulka.
		<i>(Andulka vezme jedničku a dá ji na C2)</i>
13:31	UC 47	Sem. Tam ještě chybí jednička, výborně.
13:36	UC 48	A už toho moc nezbyvá.
13:38	UC 49	Johane.
		<i>(Johan dá čtyřku na D4)</i>
13:43	UC 50	Aha a proč čtyřku?
13:45	JO 01	Aby bylo jedna, dva, tři, čtyři. <i>(ukazuje na sloupec D)</i>
13:48	UC 51	Aby bylo ve sloupečku.
13:52	UC 52	Ještě dvě. Tak Pepa?
13:57	PE 01	<i>(vezme dvojku)</i> Dvojku dám sem. <i>(dá ji na C3)</i>
14:00	PE 02	Ne. <i>(dá ji na C4)</i>
14:01	VS 10	Ne.

14:03	UC 53	A proč ne sem? <i>(dá ji na C3)</i>
14:04	PE 03	Protože tam už je.
14:06	UC 54	Tam už je, jasně, takže ji dáme...
14:08	PE 04	Sem. <i>(dá dvojku na C4)</i>
14:10	UC 55	A co bude asi poslední? Natálko?
		<i>(Natálka vezme trojku a dá ji na C3)</i>
14:19	UC 56	Tak, ale máme všichni ještě důležitěj úkol, musíme to zkontrolovat.
14:25	UC 57	Tak se podíváme.
14:31	UC 58	Podíváme se na tenhle sloupeček, je tam něco dvakrát? <i>(ukazuje na sloupec A)</i>
14:34	VS 11	Ne.
14:36	UC 59	Co tenhle sloupeček? <i>(ukazuje na sloupec B)</i>
14:37	VS 12	Ne
14:38	UC 60	Co tenhle sloupeček? <i>(ukazuje na sloupec C)</i>
14:39	VS 13	Ne .
14:40	UC 61	A tenhle? <i>(ukazuje na sloupec D)</i>
14:41	VS 14	Ne.
14:42	UC 62	A co tenhle řádek? <i>(ukazuje na řádek 1)</i>
14:43	VS 15	Ne.
14:44	UC 63	A co poslední řádek? <i>(ukazuje na řádek 4)</i>
14:45	VS 16	Ne.
14:47	UC 64	A tenhle řádek? <i>(ukazuje na řádek 2)</i>
14:48	VS 17	Ne.
14:49	UC 65	A tenhle řádek? <i>(ukazuje na řádek 3)</i>
14:50	VS 18	Ne.
14:51	UC 66	A co v tomhle čtverečku? <i>(ukazuje na čtverec I)</i>
14:53	VS 19	Ne.
14:54	UC 67	A v tomhle čtverečku? <i>(ukazuje na čtverec II)</i>
14:55	VS 20	Ne.
14:57	UC 68	A tady? <i>(ukazuje na čtverec III)</i>

14:58	VS 21	Ne.
14:59	UC 69	A tady? (ukazuje na čtverec IV)
15:00	VS 22	Ne.
15:01	UC 70	Takže jsme to co?
15:02	VA 07	Zvládli.
15:03	ST 07	Ale ještě jsme zapomněli takhle. <i>(ukazuje ve směru úhlopříčky)</i>
15:06	UC 71	Takhle, z rohu do rohu? To tady u týchle hry nemusíme mít z rohu do rohu. Takže jsme to, jak to říkal Vašík...ty jsi říkal, že jsme to zvládli?
15:20	VA 08	Jo, zvládli.
15:21	UC 72	A já s tebou naprosto souhlasím.
15:22	PE 05	Ale tady jsou tři najednou takhle. <i>(ukazuje křížem přes celou mřížku)</i>
15:25	UC 73	To vůbec nevadí...říkali jsme, bavili jsme se tady, že musíme mít ve sloupečku jenom každý číslo jednou, v řádku a ve čtverečku. Křížem to vůbec nevadí.

Příloha II, přepis části hodiny, v níž probíhala společná kontrola prvního sudoku řešeného samostatnou prací

Zkratky:

JK– Mgr. Jaroslava Kloboučková, učitelka matematiky v této třídě

Ostatní zkratky korespondují se zkratkami jmen žáků, které jsou uvedeny v tabulce č. 1 na straně 74.

24:21	JK 01	Máme tady stejný sudoku jako jste před chvílíčkou řešili. Teďka si to zkontrolujeme, jak to mělo být a které číslo se dá doplnit jako první, aby to vyšlo celé správně. Takže, Vašíku, které číslo jsi doplnil jako první a proč?
24:38	VA 09	Doplní se ta dvojka sem
24:42	JK 02	Pojď (<i>Vašík jde k tabuli</i>)
24:48	VA 10	Ta dvojka se doplní sem (<i>C4</i>)
24:50	JK 03	Proč?
24:51	VA 11	Protože, kdyby byla tady (<i>C3</i>) dvojka, tak by to nešlo, protože tady (<i>C4</i>) by musela být trojka, ale tady (<i>řádek 4</i>) by byla už trojka, tak by to nešlo.
25:03	JK 04	Dobře, pěkný argument.
25:10	JK 05	Dobře, takže Vašík vysvětlil, které číslo a proč tam patří. Další Pepa.
25:24	JK 06	Které číslo doplníš?
25:28	PE 06	Doplním sem (<i>B3</i>) dvojku.
25:30	JK 07	Sem dvojku, tak ji tam doplň a vysvětlí proč.
25:51	PE 07	Protože kdyby byla tady (<i>A4</i>), tak by (<i>řádek 4</i>) byly dvě.
25:54	JK 08	Tak by tam byly dvě, dobře.
25:56	JK 09	Andulko...co teďka doplníš?
26:04	AN 04	Tady (<i>A4</i>) patří čtyřka
26:05	JK 10	Proč tam patří čtyřka?
26:07	AN 05	Protože sem (<i>A4</i>) se potom dá nějaký jiný číslo, tak by to

		bylo špatně, protože by tam (<i>čtverec III</i>) bylo číslo dvakrát.
26:14	JK 11	Tak ji tam doplň
26:19	JK 12	Natálko, pojd' už se připravit
26:30	JK 13	Které číslo doplníš?
26:35	NA 01	Sem (<i>B1</i>) čtyřku.
26:36	JK 14	Sem čtyřku. Proč tam čtyřku?
	NA 02	??? (<i>není slyšet zdůvodnění</i>)
27:04	JK 15	Ano, tady (<i>sloupec 2</i>) je jedna, tři, dva a tady chybí čtyři, jo? Dobře.
27:08	JK 16	Johane
27:27	JO 02	Sem (<i>A1</i>) bych dal dvojku
27:28	JK 17	Proč, Johane?
27:29	JO 03	Protože kdybych jí dal třeba sem (<i>C3</i>), tak by tu byly dvě dvojky a kdybych zas třeba sem (<i>A1</i>) dal trojku, tak by tu zase byly dvě
27:39	JK 18	Tak ji tam dopiš
27:46	JK 19	Viki
28:08	VI 01	Tady (<i>D2</i>) bych doplnila dvojku, protože v tomhle čtverečku (<i>čtverec II</i>) není
28:14	JK 20	Dobře.
28:17	JK 21	A David poslední číslo
28:27	JK 22	Co nám tam (<i>C3</i>) chybí?
28:30	JK 23	Proč trojka?
28:32	DA 01	Protože aby to bylo jedna, dva, tři, čtyři (<i>řádek 3</i>)
28:34	JK 24	Tam to dokonce vyšlo popořadě, vid'?
28:37	JK 25	Výborně, takže máme teď krásně doplněný sudoku. Souhlasíme, že je dobře, všichni?
28:46	JK 26	Takže, skončili jsme u Davida, takže sudoku teď chvíli opustíme...

Příloha III, správné řešení sudoku 9x9 z 9. 2. 2011

2	8	4	6	1	7	3	9	5
1	5	9	2	4	3	8	6	7
3	7	6	5	8	9	4	1	2
4	9	7	1	2	6	5	8	3
5	1	2	4	3	8	6	7	9
6	3	8	7	9	5	1	2	4
7	2	1	3	6	4	9	5	8
8	6	3	9	5	2	7	4	1
9	4	5	8	7	1	2	3	6

Příloha IV, správné řešení sudoku 9x9 z 3. 3. 2011

7	1	5	3	9	8	4	2	6
2	6	9	4	7	5	1	3	8
4	3	8	2	6	1	5	7	9
3	4	1	6	8	7	9	5	2
8	5	2	1	3	9	7	6	4
6	9	7	5	4	2	8	1	3
5	2	6	8	1	4	3	9	7
1	7	4	9	2	3	6	8	5
9	8	3	7	5	6	2	4	1

Příloha V, Jirkovo řešení ze dne 17. 5. 2011

175.

4	1	2	3	5	4 _x
6	3	5	7	2	4
2	6	3	5	4	1
1	5	4	2	6	3
5	4	1	6	3	2
3	2	6	4	1	5

Příloha VI, Karolínčino řešení ze dne 17. 5. 2011

4	1	2	3	5	4 _x
6	3	5	1	2	4
2	6	3	5	4	1
1	5	4	2	6	3
5	4	1	6	3	2
3	2	6	4	1	5

Příloha VII, Šimonovo řešení ze dne 25. 10. 2011

6	8	1	2	3	7	4	9	5
4	5	3	8	6	9	1	2	7
9	2	7	4	5	1	6	3	8
1	7	9	3	8	2	5	6	4
5	4	1	7	9	6	8	1	3
2	3	6	1	4	5	9	7	2
3	1	8	9	2	4	7	5	6
7	6	4	5	1	3	2	8	9
8	9	5	6	7	8	3	4	1

9.50

29/31

Příloha VIII, pracovní listy pro učitele na 1. stupni ZŠ

3			2
2	4		
	2		1
1			

		1	3
3	1	4	
1			4
	3		1

	3			2	
4		1	3	6	
		4		3	1
1	6		5		2
3		2	4		6
	4	5		1	

				4	
3	2		6	1	
1		6	5		4
	5	2		3	
2		5	3		1
	1			5	

4		2		5	
	3			2	4
2			5		
	5	4			3
5			6		2
3	2	6		1	

2				4	
1		3	5		2
6		4	1		
	3			2	4
	1			5	
	6		2		

2		4	6	1		3	9	
1	5			4	3		6	7
	7	6	5	8		4		2
4			1		6	5	8	
5	1	2	4	3		6	7	9
	3	8	7	9			2	
	2	1	3	6		9		8
8	6		9		2		4	1
9		5		7	1	2		6

7	1				8	4		6
2		9	4		5		3	8
4	3		2	6		5	7	
3	4			8	7	9	5	
	5	2	1		9		6	4
		7	5	4			1	3
5		6	8	1				7
1	7		9		3	6		
9		3		5		2	4	1

	8		2	3		4	9	5
4		3		6		1		7
9	2	7		5	1			8
1		9		8	2			4
5	4				6	8		3
		6	1	4	5		7	2
3	1		9	2		7		6
7	6		5	1		2	8	
	9	5			8	3	4	

	1		2	5		9	3	7
6		9		1	8		2	
	7	5		3	4		8	6
9		6	4		3		5	1
7	4		6			2		
	2	3	1		7	8		4
3	5		8		9		1	
8		2		7		5	4	9
1		4	5	6	2	3		