

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE PRO SOUTĚŽ SVOČ



Vojtěch Pekař

## Pravidelná a poloprávidelná tělesa ve vyšších dimenzích

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petra Surynková

Studijní program: Matematika

Studijní obor: matematika zaměřená na vzdělávání

Praha 2012

Mé poděkování patří všem, kteří mě při psaní práce podporovali, obzvláště mé vedoucí RNDr. Petře Surynkové za její dokonalý přístup.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne

Vojtěch Pekař

Název práce: Pravidelná a polopravidelná tělesa ve vyšších dimenzích

Autor: Vojtěch Pekař

Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petra Surynková, Katedra didaktiky matematiky

**Abstrakt:** Tato práce se věnuje vícedimenzionálním objektům, které jsou v běžném euklidovském prostoru známé jako Platónská a Archimédova tělesa. Ačkoli popisujeme především útvary čtyřrozměrné a jejich vztah k prvkům dimenze nižší, je text formulován tak, aby zahrnoval i dimenze jiné, pokud je to v daném případě možné. V zahraničí existují práce zabývající se podobnými tématy, většinou jsou však založené na znalostech vysokoškolské algebry alespoň na základní úrovni. Náš přístup používá metody podobající se těm běžně vyučovaným v deskriptivní geometrii, což vyžaduje nemalý počet ilustrací. Látka se tak stává přístupnou i pro studenty středních škol se zájmem obohatit svojí prostorovou představivost.

**Klíčová slova:** platónská tělesa, animace, čtyřrozměrný prostor

Title: Regular and semi-regular solids in higher dimensions

Author: Vojtěch Pekař

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Petra Surynková, Department of Mathematics Education

**Abstract:** This thesis deals with multidimensional objects, which are known as Platonic and Archimedean solids in common euclidean space. Although we describe especially four-dimensional figures and their relations with lesser grade, this text is formulated in such a way, that includes even different dimensions, if it is possible in particular instances. There exist a few works about this and similar topics in foreign, but usually they require a little basics of algebra teaching at university. Our approach uses methods similar to these, which are normally teaching in descriptive geometry and therefore includes a large number of pictures. The matter is therefore available to secondary school students, who want to increase their space imagination.

**Keywords:** platonic solids, animation, four-dimensional space

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1. Zobrazovací metody ve vyšších dimenzích</b>	<b>3</b>
1.1. Úvod do čtvrtého rozměru	3
1.2. Promítání z vícerozměrných prostorů	4
1.3. Síť čtyřrozměrných těles	6
<b>2. Pravidelná tělesa ve vyšší dimenzi</b>	<b>9</b>
2.1. Pravidelný mnohoúhelník	9
2.2. Pravidelný mnohostěn	10
2.3. Pravidelný mnohonadstěn	13
2.4. Dualita těles	25
2.5. Schläfliho symbol	28
<b>3. Polopravidelná tělesa ve vyšší dimenzi</b>	<b>29</b>
3.1. Polopravidelný mnohostěn	29
3.2. Polopravidelný mnohonadstěn	33
<b>Závěr</b>	<b>39</b>
<b>Seznam příloh</b>	<b>40</b>
<b>Literatura</b>	<b>41</b>

# Úvod

V mnoha matematických oblastech se setkáme s příklady týkajícími se útvarů více rozměrů než tři. To je zcela opodstatněné, neboť z algebraického pohledu není na prostorech dimenze tři nic speciálního a tak je pro důkladnější pochopení látky mnohdy potřebné řešit i úlohy, kde počet rozměrů bývá větší. V takových prostorech vnímáme kupříkladu bod jen jako uspořádanou  $n$ -tici hodnot a další útvary jako množiny bodů. Avšak představu o tom, jak celá situace vzhledově vypadá už nemáme a ani mít nemůžeme. Člověk je totiž biologicky vybaven pouze na to, aby mohl vnímat maximálně tři rozměry euklidovského prostoru najednou. Pokud se ale seznámíme s tím, jaké objekty vyšších rozměrů existují a jak je zakreslit i s pomocí prostředků, které máme k dispozici, vytvoříme si alespoň o něco bližší představu o tom, jaké mají dané prostory charakter.

Ideálním předmětem pro zkoumání vlastností a zobrazovacích metod vícedimenzionálních prostorů se stávají pravidelná tělesa. Víme totiž, jaké výsledky bychom měli očekávat, protože jsme schopni zcela přesně říci, jak takové objekty vypadají v prostorech s dimenzí nižší. V první kapitole se budeme věnovat základům zakreslování těles vyšší dimenze, kde veškeré metody předvedeme na jediném pravidelném tělese, které je ze všech nejpobulárnější a nejsnáze představitelné. Předpokládáme zde, že čtenář je obeznámen s pojmy krychle, čtverec, úsečka a bod. V dalších kapitolách se budeme zabývat již samotnými pravidelnými a polopravidelnými tělesy včetně jejich rozšiřování do vyšší dimenze.

Ačkoli zde vycházíme z principů užívaných v deskriptivní geometrii, její hlubší znalosti nejsou podmínkou pro pochopení tématu. Dokonce by měla tato práce posloužit i jako propagace přístupů deskriptivní geometrie a poukázat na to, že tento obor neslouží jen k řešení úzké škály problémů, které navíc máme tendenci opomíjet s tím, že je za nás vyřeší počítač. Zde si budeme vysvětlovat i otázky takové, které by mnohé z nás nenapadlo s deskriptivní geometrií vůbec spojovat. Z toho plyne i fakt, že lze text využít jako rozšiřující materiál pro studenty středních škol se zájmem o geometrii.

S tématem vyšší dimenze se setkáme i ve fyzice. Nemalý počet lidí si při zmínce o čtvrté dimenzi představí myšlenku o časoprostoru, kde jako dodatečná dimenze vystupuje čas. To, co vidíme během jednoho okamžiku, je pak jeden z nekonečného množství průřezů časoprostoru prostorem trojrozměrným. Vše, o čem pojednává tato práce, se však bude odehrávat pouze v prostoru euklidovském (značíme  $E_n$ ), což si zjednodušeně vysvětlíme tak, že pokud daný prostor existuje, jsme schopni každou vzdálenost změřit za pomoci pravítka.

Seznamme se podrobněji se způsobem, jakým je práce koncipována. Celý obsah je rozdělen do tří kapitol. Jak již bylo naznačeno, v první kapitole si objasníme pravidla o zobrazování vícerozměrných útvarů a základní vlastnosti a zároveň si

představíme první těleso s obecným počtem rozměrů, na kterém objasníme veškerou teorii. V  $E_3$  toto těleso známe pod názvem krychle. Zvládnutí první kapitoly nám zpřístupní kapitolu druhou, kde se podrobně zabýváme celou skupinou těles (sem patří i krychle), kterým se obecně říká pravidelná. Podle našeho mínění to je právě ta nejznámější skupina těles, která se rozšiřuje do čtvrté dimenze. Třetí kapitolu věnujeme tělesům poloprávidelným, což ukazuje jeden z možných směrů, kterým se může problematika rozšiřovat.

Během všech tří kapitol je látka průběžně doplněna ilustracemi pro snadnější pochopení textu. Výkresy byly vytvářeny především za pomoci softwaru Blender, primárně sloužící na modelování 3D scén. Další úpravy byly prováděny v programu GIMP, který se používá pro zpracování bitmapové grafiky. Pro doplňující geometrické náčrtky byla použita aplikace GeoGebra. K výpočtům některých údajů byl použit programovací jazyk Python, který byl zvolen pro svou kompatibilitu s modelovacím nástrojem Blender. Veškerý použitý software je volně šiřitelný a relativně snadno ovladatelný.

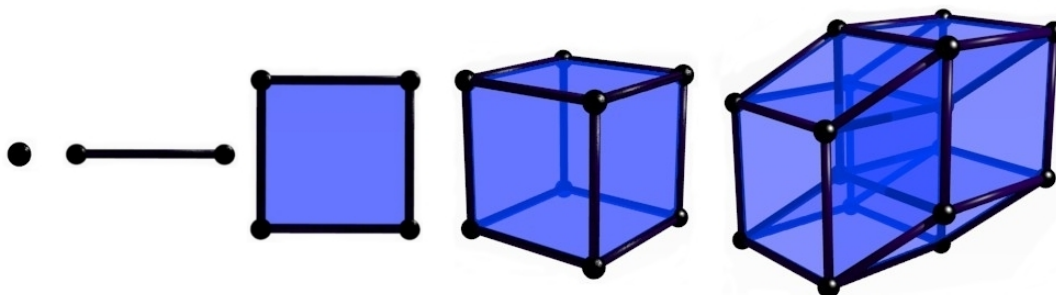
Nejcennější literaturou při vypracování naší práce byla Coxeter [2], což pojednává o pravidelných tělesech obecné dimenze, ty mají v angličtině souhrnný název *regular polytopes*. Nemalá část textu je v ní ale založená na vysokoškolské matematice. Naš přínos tak nespočívá pouze v tom, že literatura na téma těles obecné dimenze je zahraniční, ale i ve zjednodušení teorie pro širší okruh čtenářů.

# Kapitola 1

## Zobrazovací metody ve vyšších dimenzích

### 1.1 Úvod do čtvrtého rozměru

Chceme-li pochopit vztah mezi čtyřrozměrným a trojrozměrným prostorem, považuje se za nejuvhodnější cestu postupovat analogicky, jako je tomu u nižších dimenzí. Téměř celá deskriptivní geometrie se zabývá jedním stěžejním úkolem, tj. jak co nejlépe znázornit 3D objekty. Je to úloha celkem oprávněná, protože 3D prostor je ten, který běžně vnímáme, ale k jeho znázornění máme často k dispozici jen 2D rovinu, jako je papír nebo počítač. Dokonce, ač si to občas neuvědomujeme, je i obraz na sítnici v lidském oku pouze 2D. Takže to, co běžně vnímáme jako prostor, jsou ve skutečnosti dvojrozměrné obrazy. Přesto jsme však schopni utvořit si dobrou představu, jak vypadá například krychle. Je tomu tak nejen proto, že si můžeme její model osahat nebo prohlédnout z více stran, ale i proto, že víme, jaké by měla mít vlastnosti, aby to byla trojrozměrná obdoba čtverce. Intuitivně můžeme říct, že krychle je jakési vytažení čtverce do prostoru. Stejně tak čtverec získáme vytažením úsečky do roviny a úsečku vytažením bodu do přímky. Dostaneme tak intuitivní pravidlo, jak od bodu, který nemá žádný rozměr, postupně přejít až k trojrozměrné krychli (Obr.1). Přechod je znázorněn také v animaci na příloženém CD pod názvem *hyperkrychle.avi*.



Obr. 1:  $n$ -rozměrná krychle (hyperkrychle)

Pokračujme však ještě dále. Analogicky si můžeme představit, jaké vlastnosti by měl mít útvar, který vznikne vytažením krychle do čtvrtého rozměru. Takový objekt by měl mít dvakrát více vrcholů než krychle a z každého vrcholu by měly vést čtyři navzájem na sebe kolmé hrany. Takové vlastnosti nemůže mít žádný prvek v našich podmínkách, na Obr.1 vpravo se nám ho však přesto podařilo vykreslit. 4D obdobě krychle se jinak říká *tesseract*, jako souhrnný název pro rozšíření krychle do dalších směrů se používá pojem *hyperkrychle* (*hypercube*).



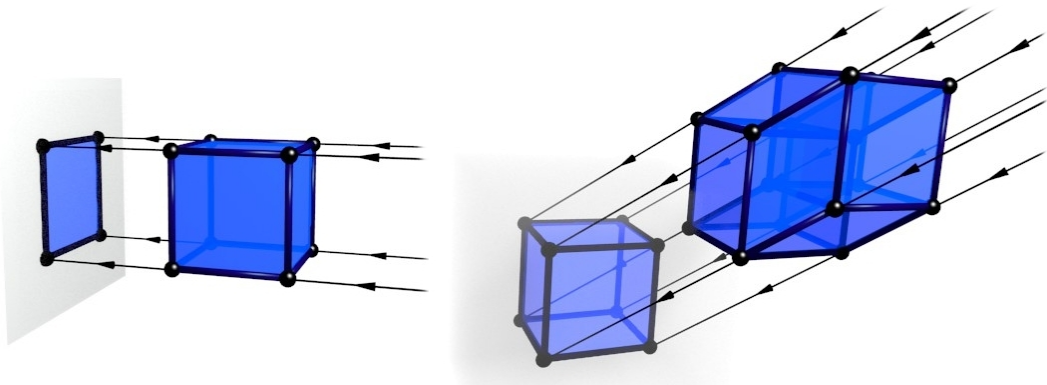
## 1.2 Promítání z vícerozměrných prostorů

Existuje řada způsobů, jak popsat prvky ve 4D prostoru. V této práci k tomu budeme používat takové zobrazovací metody, které už v určité formě známe z deskriptivní geometrie.

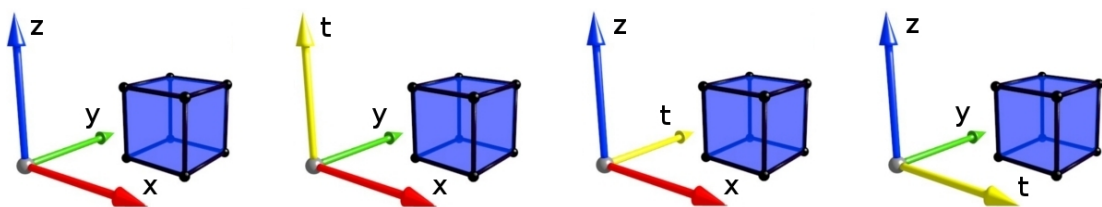
**Definice:** Pravoúhlé promítání z prostoru  $E_n$  do prostoru  $E_{n-1} \subset E_n$  je takové zobrazení, které přiřadí každému bodu  $X \in E_n$  bod  $X_0 \in E_{n-1}$  tak, že platí jedna z možností:

- $X = X_0$ .
- Přímka  $XX_0$  je kolmá na prostor  $E_{n-1}$ .

Takové zobrazení běžně užíváme například v Mongeově promítání. Zjednodušeně řečeno to znamená, že jeden rozměr vynecháme a všechny ostatní necháme stejné. Tím se samozřejmě vypustí nějaká informace a obraz se stane nejednoznačným. V Mongeově promítání se to řeší tak, že do jednoho výkresu narýsuje více pohledů, jako je nárys, půdorys a někdy bokorys. U 4D prostoru můžeme postupovat podobně tak, že vytvoříme průmět z 4D do 3D prostoru (Obr.2). Stejně tak budeme promítat z více pohledů, abychom nahradili ztracenou informaci. Například výše zmiňovaný tesseract se promítne na čtyři krychle, zvolíme-li vhodně jeho polohu (Obr.3).



Obr. 2: Znárodnění pravoúhlého promítání



Obr. 3: Čtyři různé průměty terresactu tak, aby se zobrazil na krychli

Na tomto principu je založeno Mongeovo promítání pro čtyřrozměrný prostor, které je podrobněji popsáno v literatuře Kadeřávek, Klíma, Kounovský [3]. Tam se prvky z 4D prostoru postupně zobrazí do roviny podle určitého systému.

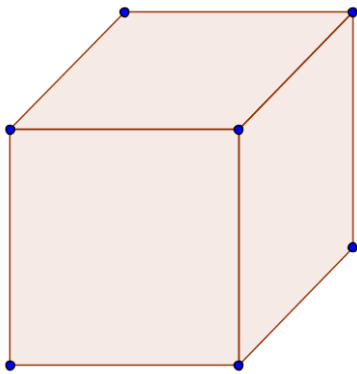
Nevýhoda pravoúhlého promítání je jeho špatná názornost. V deskriptivní geometrii jsou známé i takové metody, které mají za úkol více podpořit lidskou představu. Za tím účelem se používá kosoúhlé rovnoběžné promítání nebo také středové promítání. Podobně tomu je i u čtvrté dimenze. Na Obr.2 se nám ve všech zvolených pohledech zobrazil tesseract na krychli. Přitom víme, že tesseract má vrcholů šestnáct a z každého vedou čtyři hrany. Pravoúhlé promítání tak působí v tomto směru málo názorně.

**Definice:** *Kosoúhlé promítání z prostoru  $E_n$  do prostoru  $E_{n-1} \subset E_n$  se směrem  $s \subset E_n$ , kde  $s \notin E_{n-1}$  je takové zobrazení, které přiřadí každému bodu  $X \in E_n$  bod  $X_0 \in E_{n-1}$  tak, že platí jedna z možností:*

- $X = X_0$ .
- Přímka  $XX_0$  je rovnoběžná se směrem  $s$ .

Abychom vyloučili možnost, že pravoúhlé promítání je speciálním případem kosoúhlého, budeme předpokládat, že daný směr navíc není kolmý na  $E_{n-1}$ .

Pravoúhlé a kosoúhlé promítání budeme souhrnně nazývat *rovnoběžné promítání*.



Kosoúhlé promítání z 3D do 2D se často používá při výuce stereometrie, kde se typicky předvádí prostorové úlohy na průmětu krychle (Obr.4). Tato metoda je totiž vhodný kompromis mezi názorností a jednoduchostí. Budeme ji proto využívat i ke znázorňování čtyřrozměrných útvarů. Kosoúhlého promítání z 4D do 3D bylo již použito ke znázornění tesseractu na Obr. 1 vpravo. Některá pravidla si popíšeme blíže.

Obr. 4: Krychle v kosoúhlém promítání

**Platí:**

- V kosoúhlém promítání se zakreslí pouze jedna ze základních os. Zbylé osy se totiž volí rovnoběžné s průmětnou.
- Rovnoběžné promítání zachovává rovnoběžnost.
- Dvojice rovnoběžných úseček o stejné délce se zobrazí opět na dvojici úseček o stejné délce.

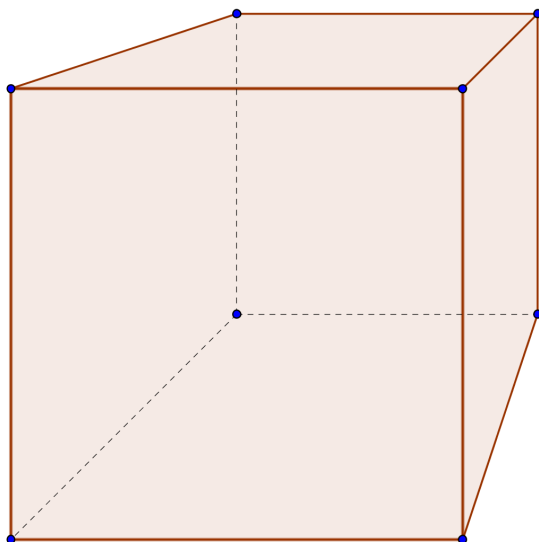
Existuje ještě třetí promítání, které se v deskriptivní geometrii často uvádí. Jedná se o promítání středové. Zachází se s ním podstatně složitěji, než s metodami popsány výše, pro úplnost ho ale zmíníme také.

**Definice:** *Středové promítání z prostoru  $E_n$  do prostoru  $E_{n-1} \subset E_n$  se středem  $S \in E_n$ , kde  $S \notin E_{n-1}$  je takové zobrazení, které přiřadí každému bodu  $X \in E_n$  bod  $X_0 \in E_{n-1}$  tak, že platí jedna z možností:*

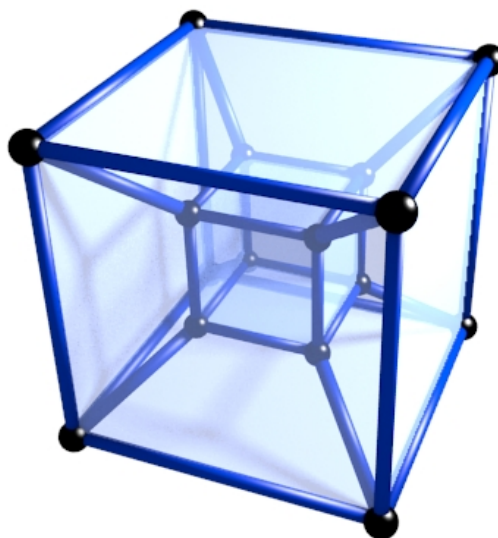
- $X = X_0$ .
- Přímka  $XX_0$  prochází středem  $S$ .

V běžném prostoru se středové promítání užívá za účelem najít co nejvěrohodnější přiblížení se lidskému vidění, kde střed zastupuje umístění pozorovatele a polohu průmětny (tj. rovina, na kterou se promítá) volíme tak, aby výsledek vypadal co možno nejvíce přirozeně.

Na rozdíl od rovnoběžného promítání zde platí, že čím je objekt vzdálenější od středu, tím se zkruslí na menší obraz. Tato vlastnost je vidět na Obr.5. Dvě ze stěn krychle se zobrazily na čtverce (krychle byla totiž zvolena v průčelné poloze), ovšem ta vzdálenější má po promítnutí menší rozměry.



Obr. 5: Krychle ve středovém promítání

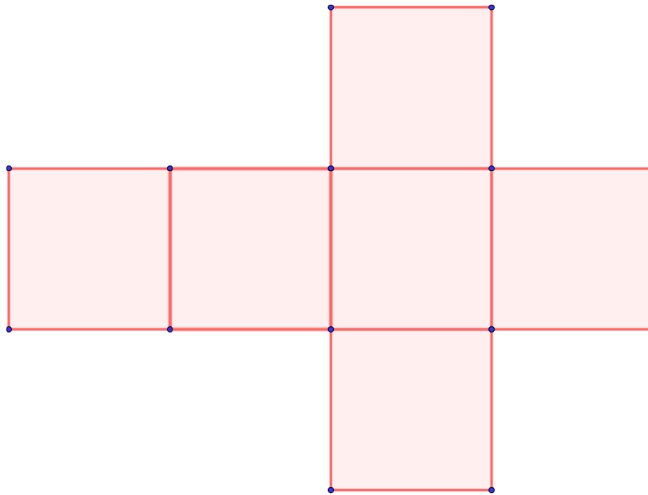


Obr. 6: Tesseract ve středovém promítání

Takto můžeme postupovat i pro objekty ve čtyřrozměrném prostoru. Onen čtvrtý rozměr nahradíme tím, že některé prvky zobrazíme na menší než jiné, ačkoli by ve skutečnosti měli velikost stejnou. Tesseract by se tak zobrazil na útvar znázorněný na Obr.6. Malá krychle uvnitř má ve skutečnosti stejné rozměry jako ta vnější, je pouze v jiné vzdálenosti od středu promítání.

### 1.3 Sítě čtyřrozměrných těles

Dalším významným nástrojem, jak si uvědomit strukturu trojrozměrných těles, je rozvinutí do roviny. To je možno chápat jako rozdělení tělesa na jednotlivé rovinné útvary a jejich následné zakreslení do společné roviny, ale i jako zobrazení, které ovšem není prosté. Krychle se tak může rozložit například do obrazce na Obr.7. Takto rozvinutý útvar nazveme síť. Veškeré prvky zde mají nezkruslené rozměry. Ze sítě je pak lépe vidět, že stěny krychle jsou čtverce, je jich šest a všechny mají stejnou velikost strany.

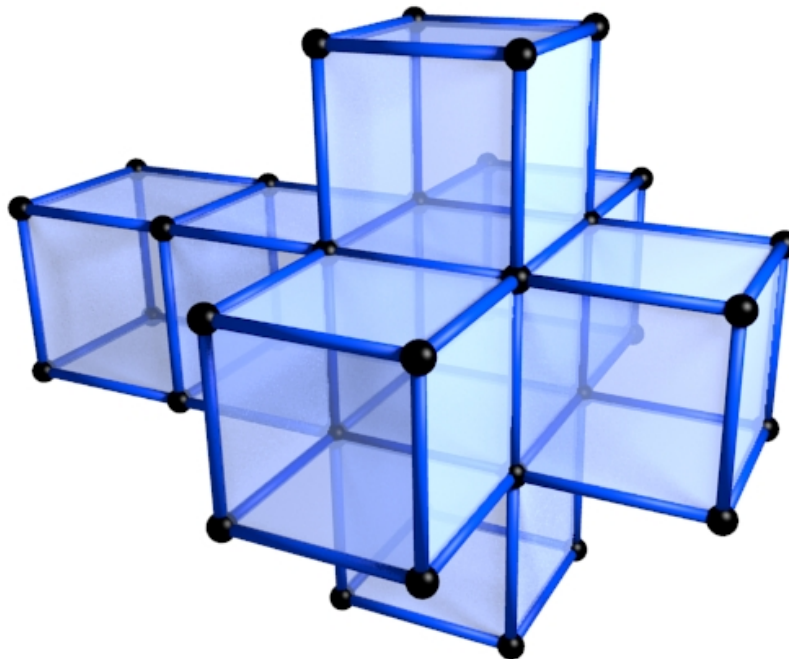


*Obr. 7: Síť krychle*

I tento princip můžeme zobecnit do vyšší dimenze. Tesseract za pomoci toho rozvineme do 3D sítě na Obr.8. Z obrázku jsou nyní zřejmé i takové vlastnosti, které jsme si předtím nemuseli uvědomit. Tak, jako je povrch krychle složen z šesti čtverců, je 3D povrch tesseractu složen z osmi krychlí. Přitom v objektech, které vznikly promítnutím do prostoru, bychom všech osm krychlí hledali mnohem obtížněji. Je tomu tak proto, že ne každá krychle se po

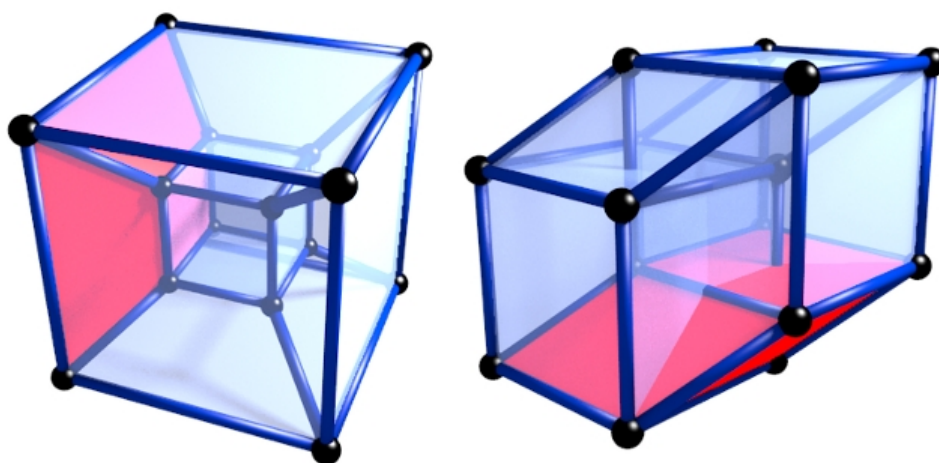
promítnutí zobrazila opět na krychli. Například při pravoúhlém promítání, se tesseract zobrazil na jedinou krychli tím způsobem, že dvě z osmi krychlí se zobrazily na krychli totožnou s celým obrazem a zbylých šest se zobrazilo na její stěny. Na Obr.9 je červeně naznačeno, na jaké další tvary se také může krychle zkusit při kosoúhlém a středovém promítání.

Manipulace se sítí tesseractu nás přivede k jedné zajímavé vlastnosti 4D prostoru. Při skládání sítě zpět na celek totiž nepřehýbáme okolo společných stran čtverců jako tomu bylo u sítě krychle, ale okolo společných stěn jednotlivých krychlí. Z toho pozorujeme, že ve 4D prostoru otáčení probíhá kolem roviny tak, jako se ve 3D prostoru otáčí okolo přímky zvané osa a ve 2D rovině okolo bodu

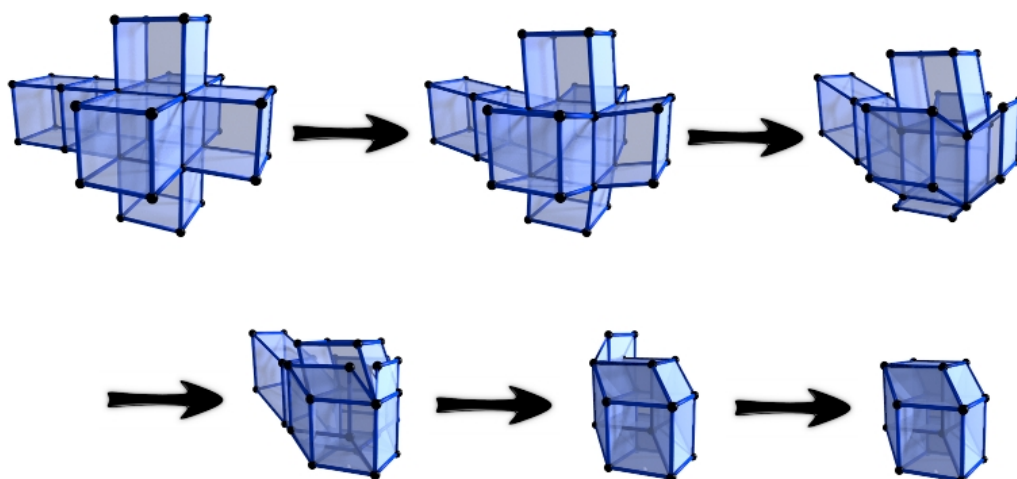


*Obr. 8: Síť tesseractu*

zvaném střed. Celý proces složení sítě otáčením jednotlivých prostorových prvků tak může být obtížný na představu, na Obr.10. je to znázorněné v kosoúhlém promítání, celá animace je dostupná na příloženém CD pod názvem *sít' tesseractu.avi*.



*Obr. 9: Vždy jedna z osmi krychlí označená červeně*



*Obr. 10: Složení sítě tesseractu v kosoúhlém promítání*

Tímto jsme dokončili veškeré způsoby zakreslování těles, které budeme používat ve druhé a třetí kapitole. Tam se zaměříme už na konkrétní skupiny objektů.

## Kapitola 2

### Pravidelná tělesa ve vyšší dimenzi

#### 2.1 Pravidelný mnohoúhelník

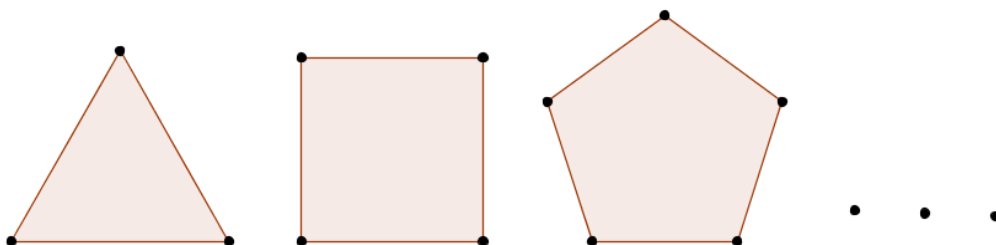
Začneme zkoumáním pravidelných útvarů v rovině. V různých zdrojích se mohou pojmy a definice lišit, podle toho se různé útvary mohou a nemusí považovat za pravidelné mnohoúhelníky. Předpokládáme zde, že známe základní pojmy jako bod, úsečka, lomená čára, úhel dvou přímek.

**Definice:** *Mnohoúhelník* je část roviny, která je ohraničena uzavřenou neprotínající se lomenou čarou. Pokud jsou navíc všechny strany i vnitřní úhly shodné, řekneme, že mnohoúhelník je *pravidelný*. (Obr.11)

Definice je formulována tak, abychom nemohli za pravidelné považovat např. různé mnohostěny hvězdicovitého tvaru. Pro zjednodušení předpokládáme, že každý pravidelný mnohoúhelník má stranu délky 1.

**Platí:**

- Každý takto definovaný pravidelný mnohoúhelník je *konvexní*, tj. všechny jeho vnitřní úhly jsou menší než  $180^\circ$ .
- Každý mnohoúhelník má nejméně 3 *vrcholy* a 3 *strany*, tj. body a úsečky, které jsou součástí dané lomené čáry. Počet vrcholů je vždy roven počtu stran. V závislosti na počtu stran a vrcholů existuje nekonečně mnoho pravidelných mnohoúhelníků.
- Pro každý pravidelný  $n$ -úhelník a  $n+1$ -úhelník platí, že velikost vnitřního úhlu  $n+1$ -úhelníku je větší než  $n$ -úhelníku.
- Každému pravidelnému mnohoúhelníku lze *opsat i vepsat kružnici*, tj. sestavit kružnici, která prochází každým vrcholem, resp. dotýká se každé strany. Tyto kružnice mají stejný střed, lze ho tedy nazvat *středem pravidelného mnohoúhelníku*.



Obr. 11: Pravidelné mnohoúhelníky

## 2.2 Pravidelný mnohostěn

Útvary v prostoru si definujeme obdobným způsobem jako v rovině.

**Definice:** *Mnohostěn* je část prostoru, ohraničená uzavřeným neprotínajícím se povrchem, skládající se z mnohoúhelníkových stěn. Stranám mnohoúhelníku říkáme *hrany* mnohostěnu. Mnohostěn nazveme *pravidelný*, je-li splněno:

- Všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky.
- Všechna *okolí* vrcholů jsou stejná, tj. ke každému vrcholu náleží stejný počet hran a stejných stěn.

**Poznámka:** V různých definicích mnohostěnu se často také uvádí, že žádné dvě stěny neleží v téže rovině. V naší práci ale není nezbytně nutné se tímto zabývat.

**Platí:**

- Každému pravidelnému mnohostěnu lze *vepsat i opsat kulovou plochu*, tj. najít takovou kulovou plochu, která prochází každým vrcholem, resp. dotýká se každé stěny. Obě kulové plochy mají stejný střed, nazveme ho *středem pravidelného mnohostěnu*.
- Pravidelný mnohostěn je určen jedním svým okolím vrcholu. To znamená, že existuje právě tolik pravidelných mnohostěňů, kolik existuje různých okolí vrcholů, kterým náleží shodné pravidelné mnohoúhelníky.
- Každému okolí vrcholu náleží minimálně 3 stěny. Součet úhlů náležící vrcholu je vždy menší než  $360^\circ$  (úhel náležící vrcholu zde znamená vnitřní úhel daného mnohoúhelníka u daného vrcholu).

V prostoru se pravidelné mnohostěny také nazývají Platónská tělesa. Od své rovinné obdoby se tato tělesa liší především tím, že je jich konečný počet. Je to způsobeno větším množstvím podmínek v definici. Nebude-li uvedeno, že mnohostěn je obecný, budeme předpokládat, že je pravidelný, např. pojmem čtyřstěn budeme rozumět pravidelný čtyřstěn.

**Věta:** Existuje právě 5 takto definovaných pravidelných mnohostěňů.

**Důkaz:**

Dle uvedených vlastností nám stačí najít pět různých okolí vrcholu a dokázat, že jiné už neexistují.

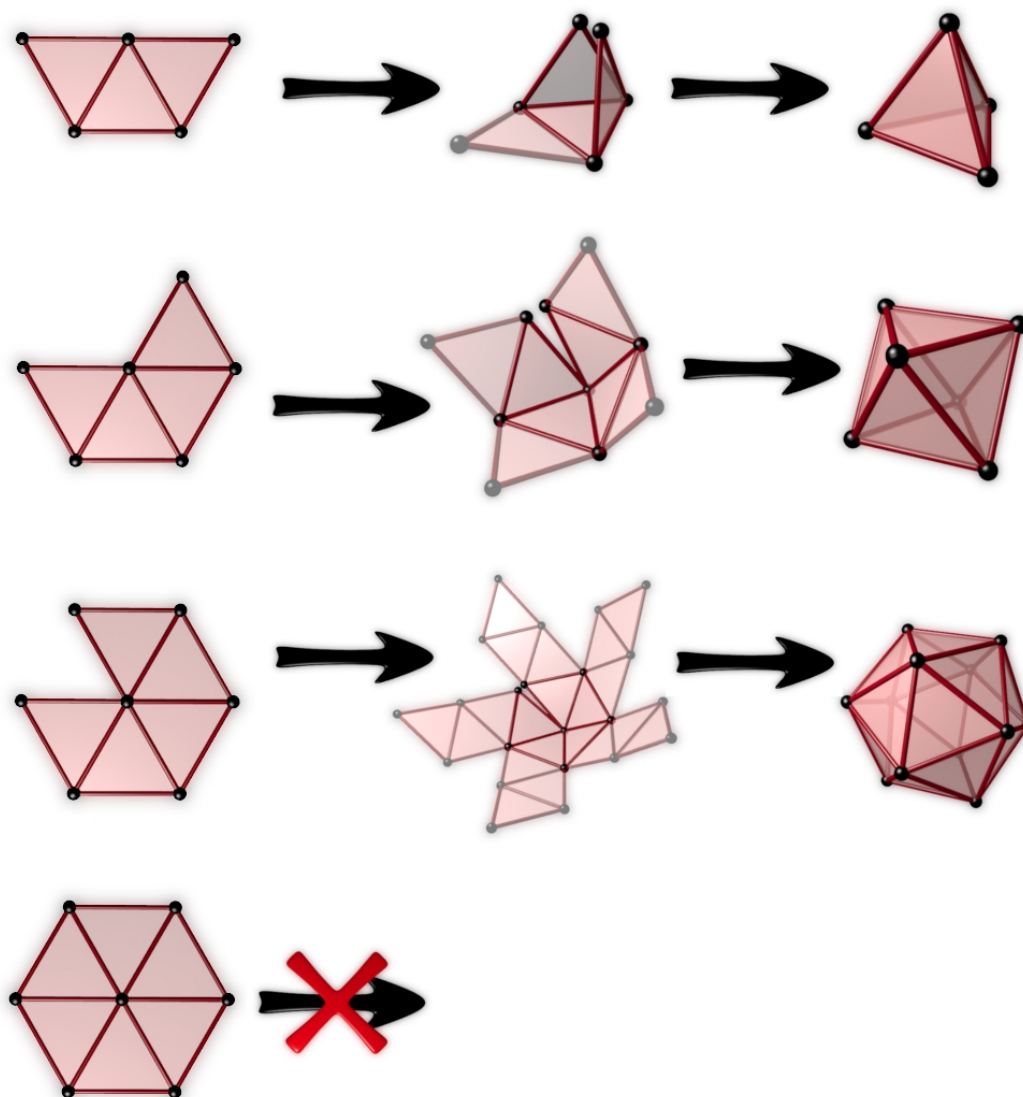
Začneme případem, kdy vrcholu náleží rovnostranný trojúhelník (Obr.12). První okolí vrcholu má 3 trojúhelníky, protože to je minimum. Příslušné těleso má 4 stěny, nazveme ho *čtyřstěn (tetrahedron)*. Druhé okolí má 4 trojúhelníky, příslušné těleso je *osmistěn (octahedron)*. Třetí okolí má 5 trojúhelníků, příslušné těleso je *dvacetistěn (icosahedron)*. Více trojúhelníků nemůže v jednom okolí být, protože vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníku je  $60^\circ$  a pro  $n > 5$  platí, že  $n \cdot 60^\circ \geq 360^\circ$ . To je spor s uvedenými vlastnostmi.

Dále uvažujme případ, kdy vrcholu náleží čtverce (Obr.13). Minimum u vrcholu je opět 3, příslušné těleso je *krychle (cube)* neboli šestistěn. Větší počet čtverců nemůže v okolí vrcholu být, protože vnitřní úhel čtverce je  $90^\circ$  a pro  $n > 3$  platí, že  $n \cdot 90^\circ \geq 360^\circ$ . Opět dostaneme spor.

Další možný případ je, že vrcholu náleží pravidelné pětiúhelníky (Obr.14). Minimální počet je 3, příslušné těleso je *dvanáctistěn (dodecahedron)*. Vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníku nabývá  $108^\circ$ , takže opět nemůže jednomu vrcholu náležet více pětiúhelníků než 3.

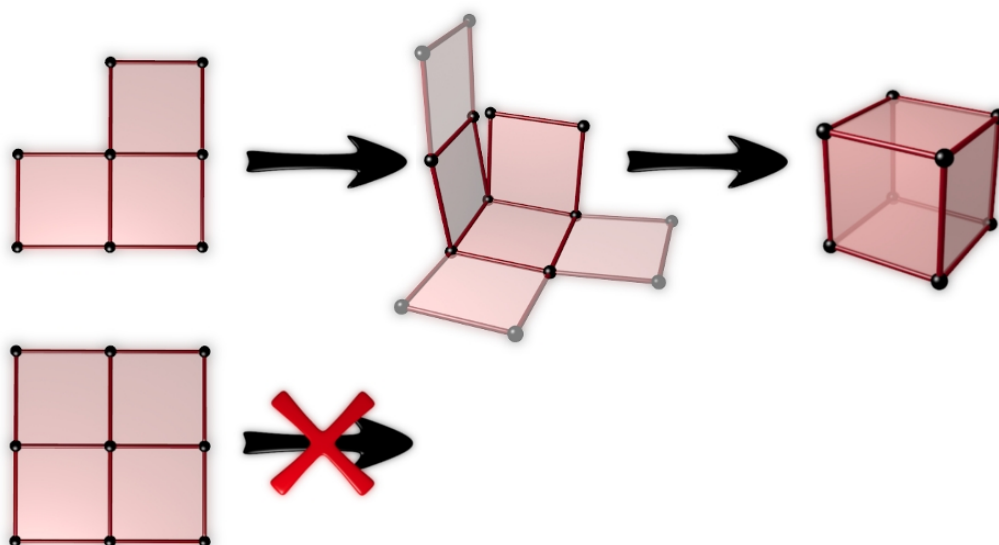
Předpokládejme, že okolí vrcholu má pravidelné šestiúhelníky. Šestiúhelník má vnitřní úhel  $120^\circ$  a pro každé  $n > 2$  platí, že  $n \cdot 120^\circ \geq 360^\circ$ . Šestiúhelníků tedy musí být méně než 3, což je spor s jejich minimálním počtem.

Víme, že každý další pravidelný mnohoúhelník má vnitřní úhly větší než  $120^\circ$ , takže u nich nastane stejný případ jako u šestiúhelníků. Našli jsme tak pět různých okolí vrcholu splňující všechny podmínky a víme, že jiné už najít nemůžeme.

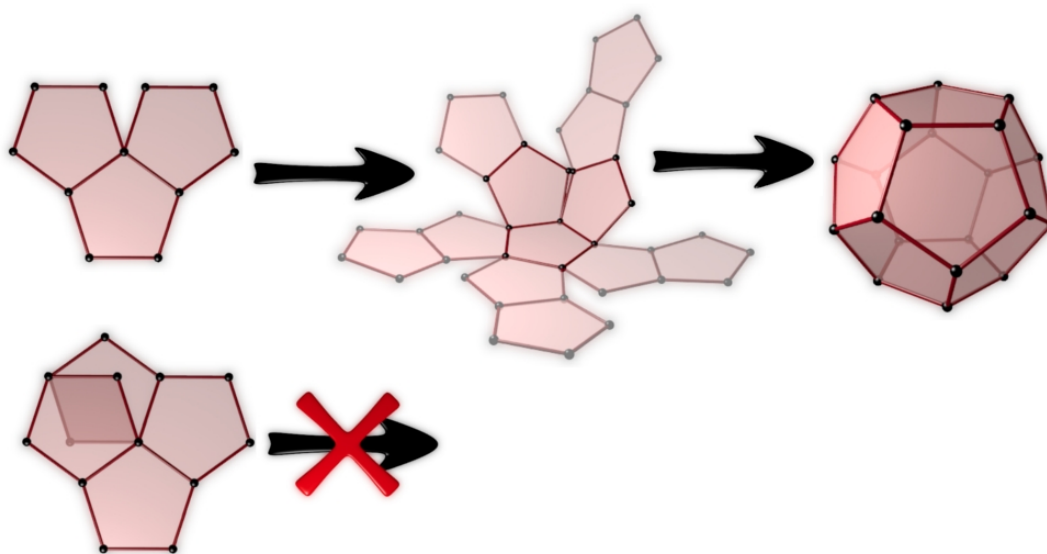


Obr. 12: Stěny z trojúhelníků





Obr. 13: Stěny ze čtverců



Obr. 14: Stěny z pětiúhelníků

Dokázali jsme si existenci právě pěti Platónských těles (důkaz je naznačen i animací v příloze pod názvem *5 platónských těles.avi*). Na středních školách se dají použít jako vhodný předmět například pro procvičení počtů metrických vlastností nebo pro rýsování v deskriptivní geometrii.

Cílem následující podkapitoly bude právě jejich rozšíření do vyšších dimenzí způsobem, který zachovává analogii přechodu od pravidelných mnohoúhelníků k pravidelným mnohostěnům.

## 2.3 Pravidelný mnohonadstěn

**Definice:** *Mnohonadstěn* je část čtyřrozměrného prostoru, ohraničená uzavřeným neprotínajícím se třídimensionálním povrchem, skládající se z mnohostěňů. Jednotlivé mnohostěny zde budeme nazývat *nadstěny*. Mnohonadstěn nazveme *pravidelný*, je-li splněno:

- Všechny nadstěny jsou shodné pravidelné mnohostěny.
- Všechna okolí vrcholů jsou stejná, tj. každému vrcholu náleží stejný počet hran, stěn i nadstěn.

**Poznámka:** Mnohonadstěn přebírá i všechny prvky mnohostěnu, tzn. i tady budeme používat pojmy vrchol, hrana, stěna a každý z nich bude mít stejný počet rozměrů, jako měl v případě mnohostěnu. Nadstěna je tak prvkem s dimenzí o jednu větší než stěna.

**Platí:**

- Každému pravidelnému mnohonadstěnu lze opsat i vepsat čtyřdimensionální sféru.
- Pravidelný mnohonadstěn je jednoznačně určen jedním svým okolím vrcholu.
- Každé hraně v pravidelném mnohonadstěnu náleží stejný počet stěn a nadstěn. Pravidelný mnohonadstěn je jednoznačně určen jedním svým okolím hrany.
- Každé hraně náleží minimálně tři nadstěny. Součet všech vnitřních úhlů, které svírají příslušné stěny každé nadstěny náležící hraně je menší než  $360^\circ$ .

Vlastnosti jsou zcela obdobné, jako tomu bylo u pravidelných mnohostěňů. K podmínkám týkajících se okolí vrcholu jsme přidali podmínky o okolí hran. Ty se totiž snáze využijí při zjišťování počtu všech pravidelných mnohonadstěňů.

**Věta:** Existuje právě 6 takto definovaných pravidelných mnohonadstěňů.

**Důkaz:**

Postup je analogický k důkazu o počtu pravidelných mnohostěňů ve 3D. Nalezneme šest různých okolí hran a dokážeme že jiné už neexistují.

Nejprve budeme předpokládat, že mnohonadstěn je tvořen ze čtyřstěňů. Podle vlastností mohou být v okolí jedné hrany nejméně tři. Zároveň jich musí být tolik, aby součet vnitřních úhlů přilehlých stěn byl menší než  $360^\circ$ . Dá se vypočítat, že odchylka stěn ve čtyřstěnu je přibližně  $70^\circ 32'$  (nám bude stačit, že je větší než  $70^\circ$ ). Jedné hraně tak náleží méně než šest čtyřstěňů, protože pro každé  $n \geq 6$  platí, že  $n \cdot 70^\circ > 360^\circ$ . Zbylé možnosti pro počet čtyřstěňů v okolí hrany jsou tři, čtyři a pět. To odpovídá nadtělesům *5-nadstěn*, *16-nadstěn* a *600-nadstěn* (*5-cell*, *16-cell*, *600-cell*, Obr.15).

Jako další Platónské těleso vezmeme krychli. Kolem jedné hrany leží právě tři krychle, protože stěny krychle svírají  $90^\circ$  a pro  $n \geq 4$  platí, že  $n \cdot 90^\circ \geq 360^\circ$ . Odpovídající nadtěleso je *8-nadstěn* neboli tesseract (Obr.16).

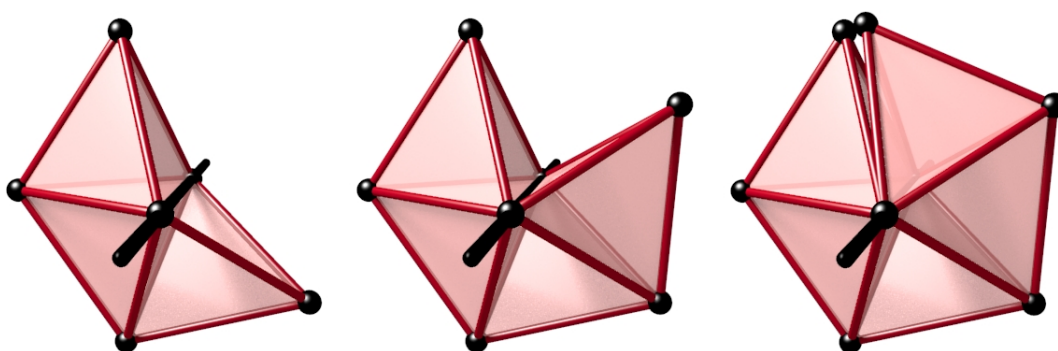
Předpokládejme, že mnohonadstěn je tvořen z osmistěňů. Existuje právě jediný možný případ – v okolí hrany se nachází právě tři osmistěny. V takovém případě vznikne *24-nadstěn* (*24-cell*, Obr.17). Odchylka stěn v osmistěnu je přibližně

$109^{\circ}28'$  (tj. více než  $109^{\circ}$ ), pro  $n \geq 4$  platí, že  $n \cdot 109^{\circ} > 360^{\circ}$ .

Pokud je dané těleso dvanáctistěn, opět nastává právě jeden případ, kde v okolí jsou dvanáctistěny tři. Odchylka stěn je přibližně  $116^{\circ}34'$  (tj. více než  $116^{\circ}$ ). Pro  $n \geq 4$  platí, že  $n \cdot 116^{\circ} > 360^{\circ}$ . Z takového okolí vznikne *120-nadstěn* (120-cell, Obr.18).

Zbýlé pravidelné těleso je dvacetistěn, z toho ale nelze složit pravidelný mnohonadstěn (Obr.19). Stěny zde svírají úhel přibližně  $138^{\circ}11'$  (tj. více než  $138^{\circ}$ ),  $n \geq 3$  platí  $n \cdot 138^{\circ} > 360^{\circ}$ . Kdyby počet dvacetistěnu byl menší než tři, porušila by se tím jedna ze základních vlastností. Vidíme, že žádný vyhovující mnohonadstěn neexistuje.

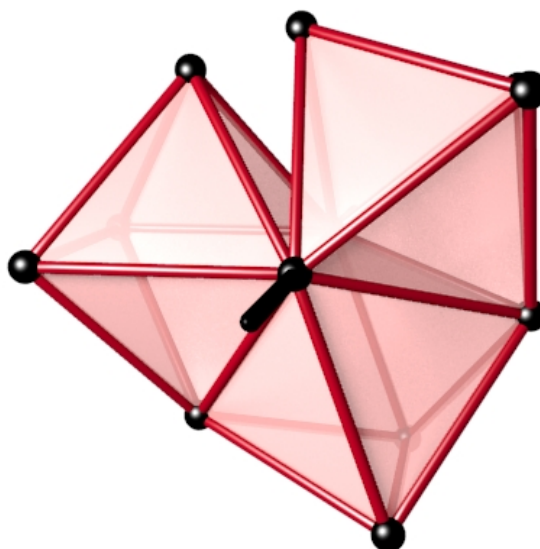
Zvážili jsme veškeré situace a našli právě šest okolí hran, která splňovala všechny podmínky. Věta tím byla dokázána.



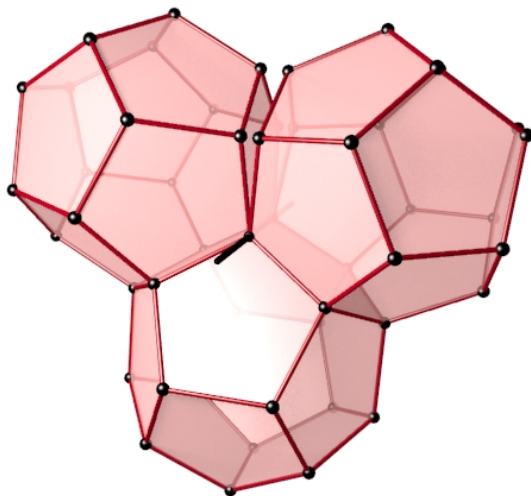
Obr. 15: Okolí hrany pro 5-nadstěn, 16-nadstěn a 600-nadstěn



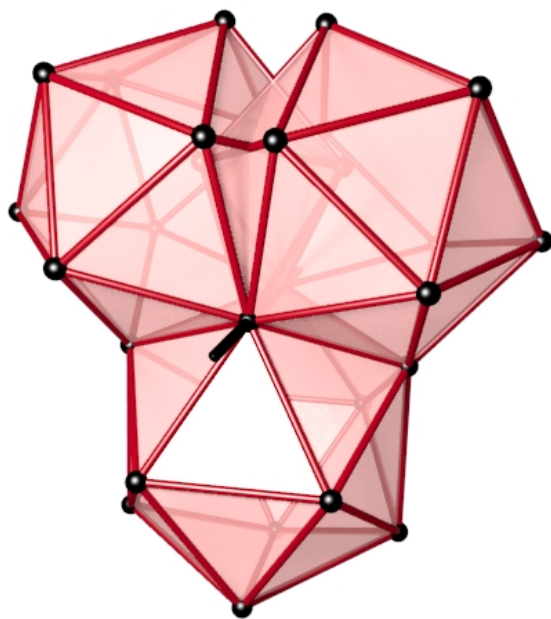
Obr. 16: Okolí hrany pro tesseract



Obr. 17: Okolí hrany pro 24-nadstěn

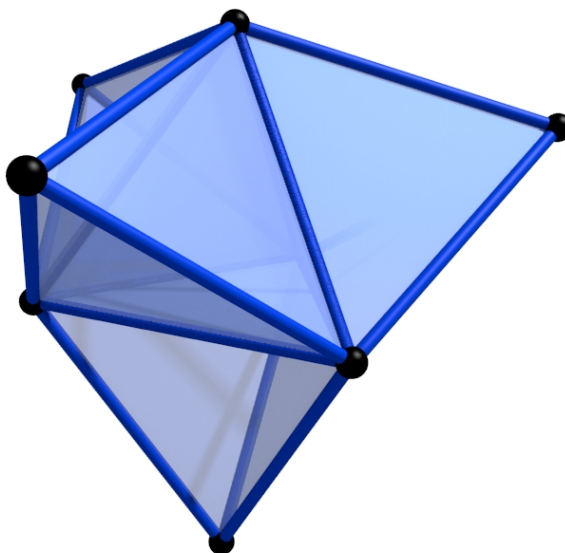


*Obr. 18: Okolí hrany pro 120-nadstěn*

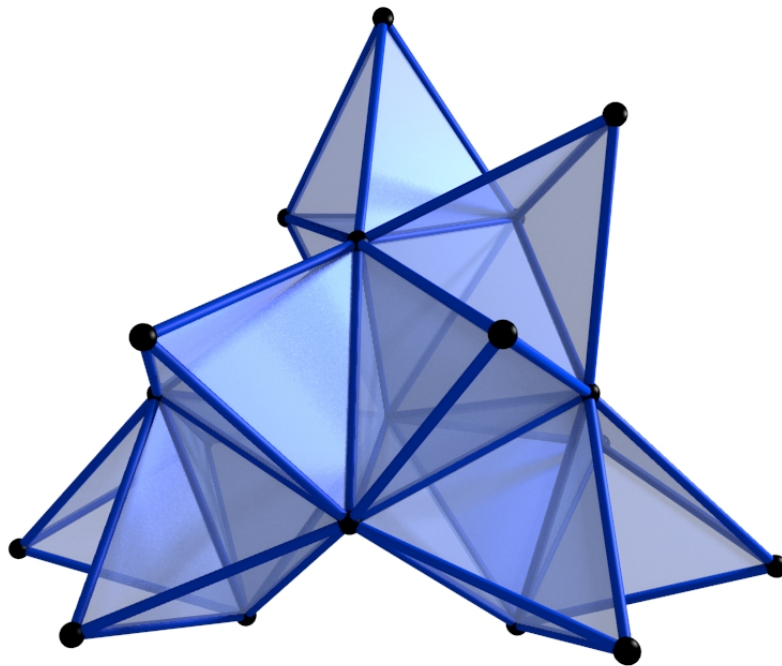


*Obr. 19: Tři dvacetistěny náležící jedné hraně (překrývají se)*

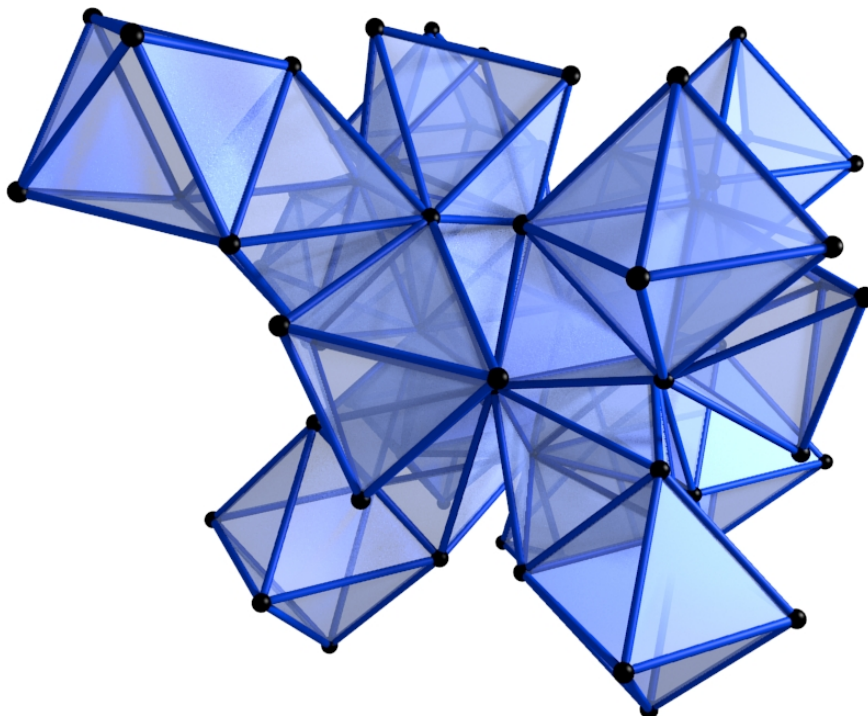
Známe-li okolí všech hran, je možné dokončit prostorové sítě stejným způsobem, jako jsme tak už učinili s tesseractem na Obr.9. Sítě všech zbylých pravidelných mnohonadstěňů jsou vykresleny na následujících stranách (Obr.20-24, seřazeny podle počtu nadstěňů).



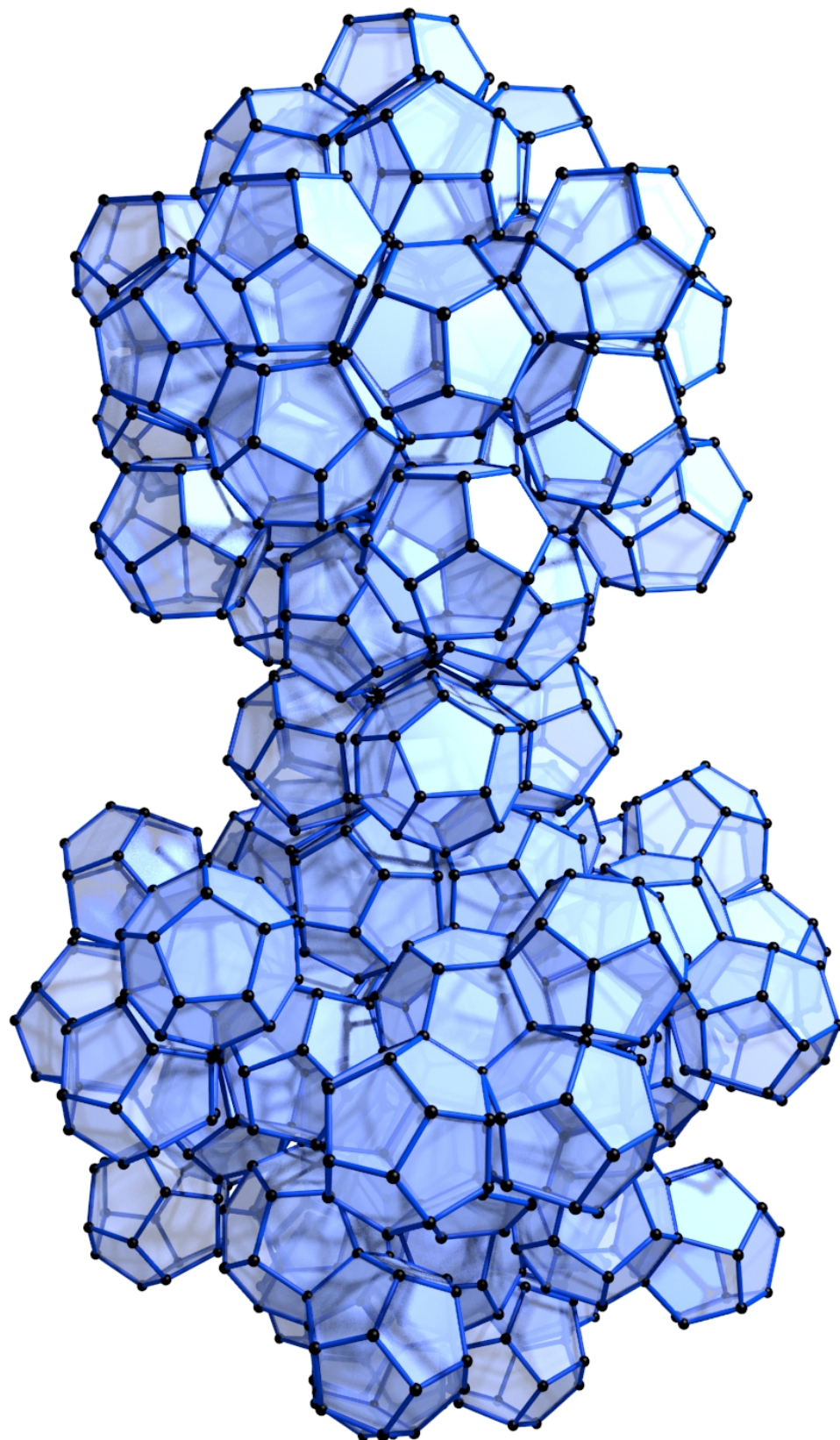
*Obr. 20: Síť 5-nadstěňů*



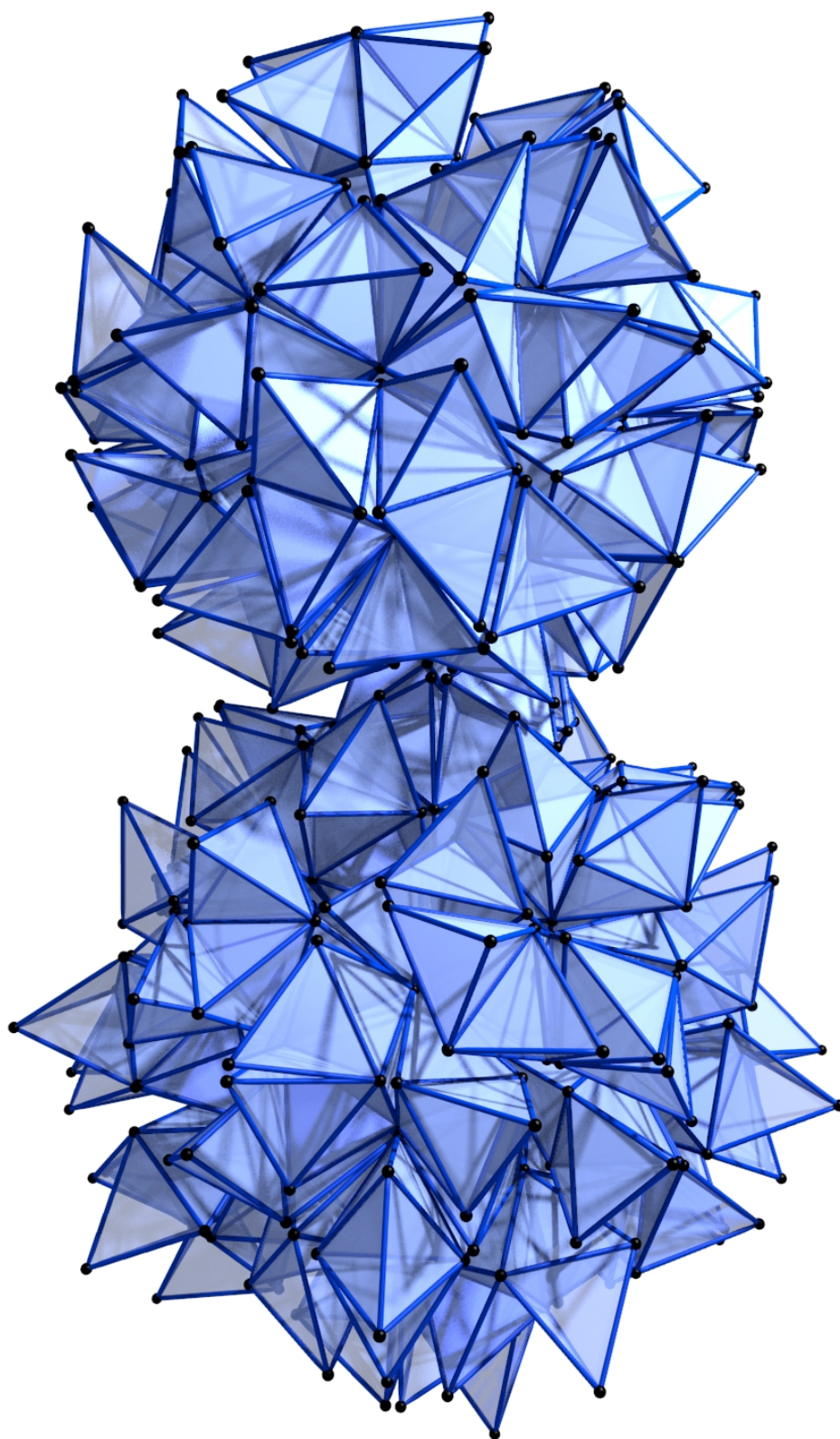
*Obr. 21: Síť 16-nadstěnu*



*Obr. 22: Síť 24-nadstěnu*



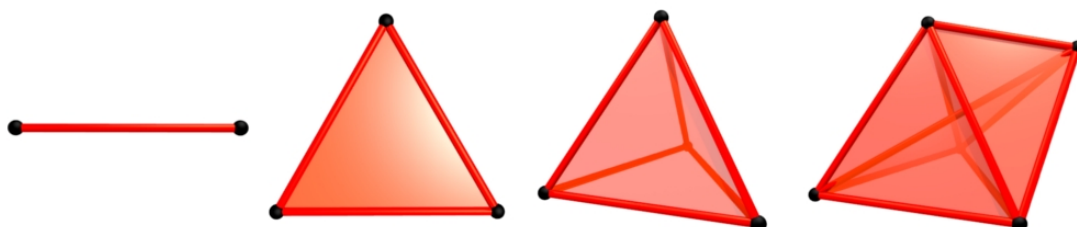
*Obr. 23: Síť 120-nadstěnu*



*Obr. 24: Síť 600-nadstěnu*

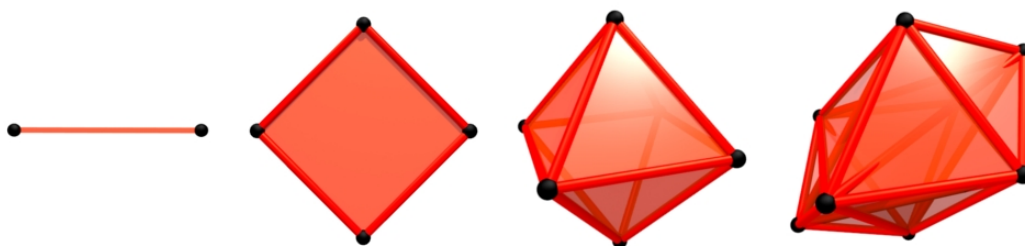
Jedno z pravidelných mnohonadstěňů jsme si popisovali již dříve. Tesseract nám posloužil jako vzor, díky kterému jsme se seznámili se čtvrtým rozměrem. Brali jsme ho jako rozšíření krychle do nového rozměru. U té příležitosti jsme se seznámili s postupem, jak z  $n$ -dimenzionální hyperkrychle odvodit hyperkrychli  $n+1$ -dimenzionální. Představme si nyní i další pravidelná tělesa pomocí tohoto přístupu, to znamená jako obdobu Platónských těles.

Pětinaďstěn je považován za čtyřrozměrný *simplex*. Už z názvu je patrné, že se jedná z hlediska počtu prvků (tj. vrcholů, hran atd.) o to nejjednodušší těleso daného prostoru. V trojrozměrném prostoru zaujímal tuto pozici čtyřstěn, ve dvojrozměrném trojúhelník, v jednorozměrném úsečka. K tomu, abychom zhotovili  $n+1$ -dimenzionální simplex, najdeme nový bod a ten pospojujeme se všemi prvky simplexu  $n$ -dimenzionálního (Obr.25). Bod musí být zvolen tak, aby zůstalo splněno, že každé dva body nově vzniklého simplexu mají od sebe stejnou vzdálenost.



Obr. 25:  $n$ -rozměrný simplex

Podobným způsobem jsou zavedena tělesa, která se v jednotlivých dimenzích nazývají *ortoplex*. Patří sem úsečka, čtverec, osmistěn. Následuje ortoplex čtyřrozměrný, což je šestnáctistěn. Tak, jako se u vyššího simplexu přidal jeden nový bod, je v tomto případě nutné přidat body dva. Oba pak spojíme se všemi prvky  $n$ -dimenzionálního ortoplexu (nikoli však jeden s druhým) a tím získáme jeho  $n+1$ -dimenzionální obdobu (Obr.26).



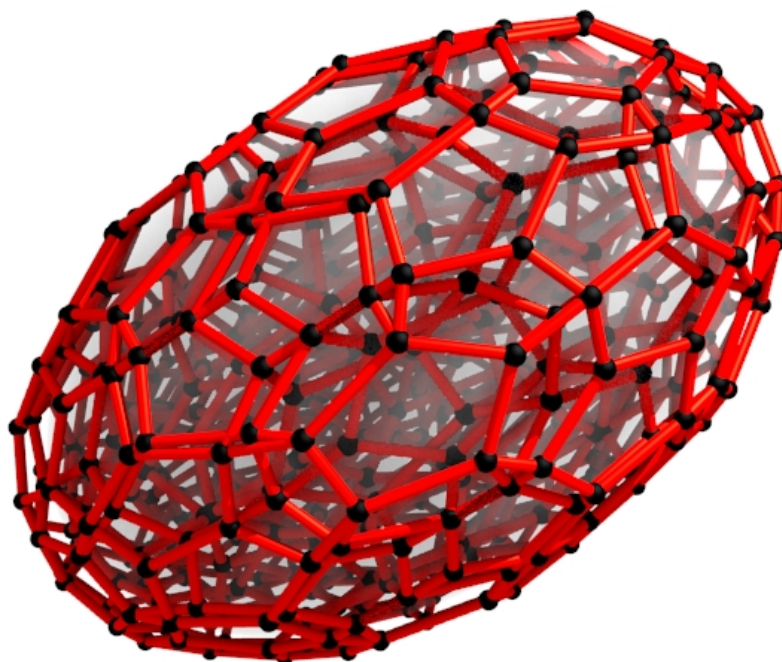
Obr. 26:  $n$ -rozměrný ortoplex

U ostatních pravidelných nadtěles neexistuje takto jednoduchý způsob, jak je odvodit rozšířením těles Platónských. Přesto se považuje 120-nadstěn (Obr.27) za čtyřrozměrnou obdobu dvanáctistěnu a 600-nadstěn (Obr.28) za obdobu dvacetistěnu. To je dáno především jejich podobajícími se vlastnostmi.

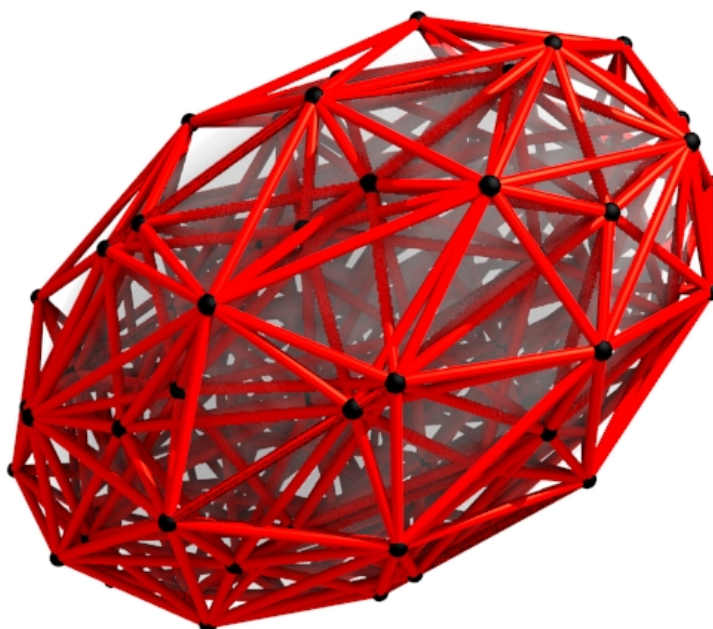
Posledním pravidelným nadtělesem je 24-nadstěn (Obr.29). Považuje se za unikát čtvrté dimenze, v žádném jiném prostoru nemá obdobu.



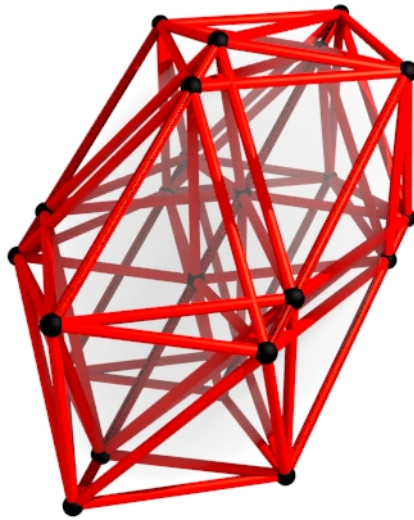
**Poznámka:** V prostorech dimenze vyšší než čtyři zastupují pravidelná tělesa pouze simplex, ortoplex a hyperkrychle.  $E_4$  je tak v jistém směru tím nejpestřejším z euklidovských prostorů.



*Obr. 27: 120-nadstěn v kosouhlém promítání*



*Obr. 28: 600-nadstěn v kosouhlém promítání*



Obr. 29: 24-nadstěn v kosoúhlém promítání

Pro lepší poznání struktury čtyřrozměrných těles se seznámíme s některými způsoby, jak je sestrotit.

**Konstrukce:** Pro simplex, ortoplex a hyperkrychli byla naznačena konstrukce odkázáním na těleso nižší dimenze. O něco složitější je však sestrotit zbylé tři. Jako první použijeme tzv. *Gossetovu konstrukci 24-nadstěnu* (Obr.30):

1. Je dán tesseract. Protože se jedná o pravidelný mnohonadstěn, známe i jeho střed.
2. Daný tesseract rozdělíme na osm *jehlanů s krychlovou podstavou* (tj. mnohonadstěn, který je 4D obdobou jehlanu se čtvercovou podstavou). Každý z jehlanů má jako podstavu jednu z nadstěn tesseractu a jako vrchol střed tesseractu. Znamená to, že střed je pro všech osm jehlanů společným vrcholem.
3. Každý z jehlanů přesuneme tak, aby se jeho podstava nacházela na místě, kde měl podstavu jehlan protilehlý. Vrcholy všech jehlanů už nebudou splývat se středem, všechny se totiž dostanou ven z tesseractu.
4. Ony vyčnívající vrcholy osmi jehlanů tvoří s původními vrcholy tesseractu všechny vrcholy 24-nadstěny. Všech šest nadstěn každého jehlanu tvoří polovinu osmistěny, což je nadstěna právě sestrotjeného 24-nadstěny.

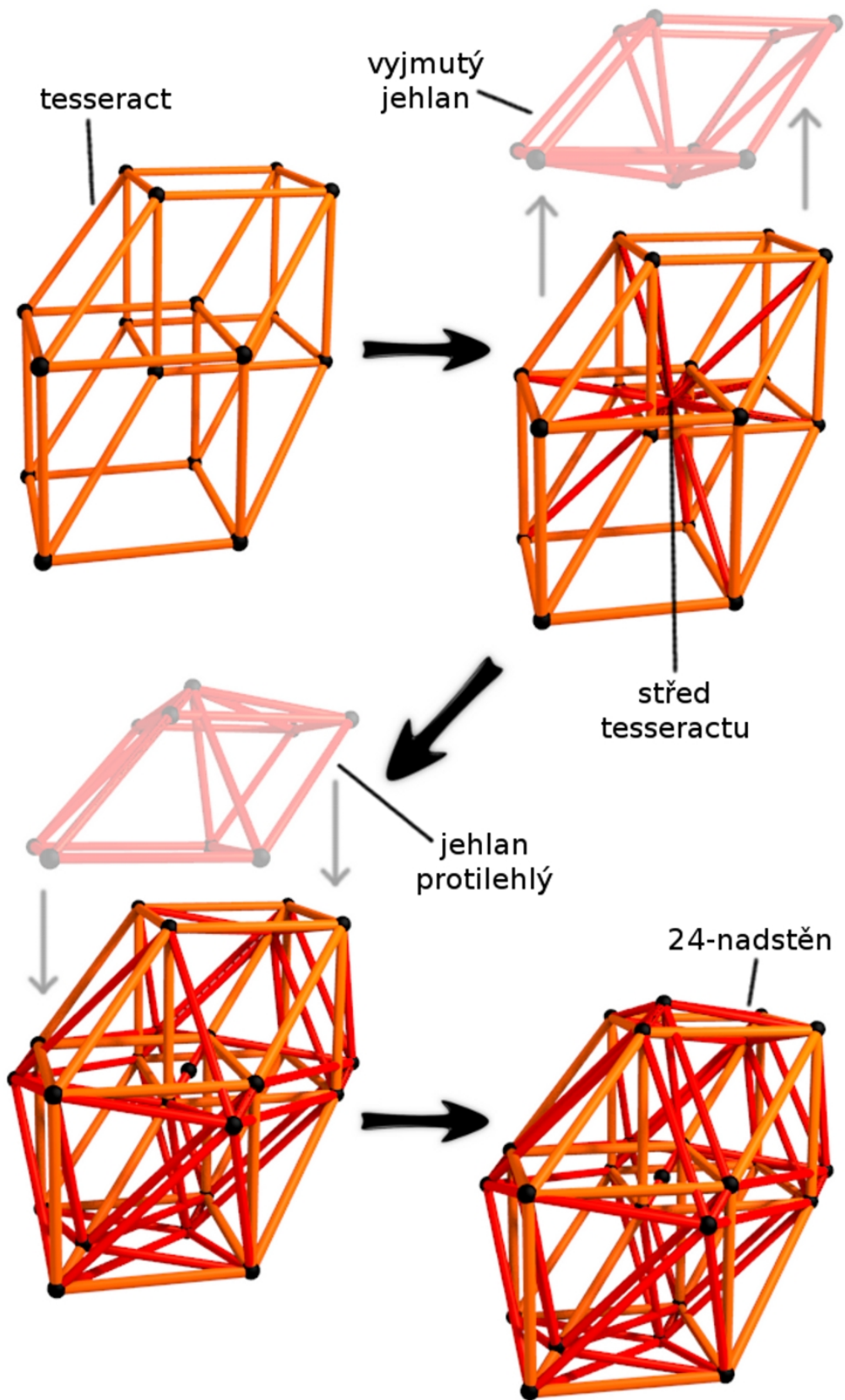
Za pomoci zadání v kartézské soustavě souřadnic snadno ukážeme, že výsledný 24-nadstěn je skutečně pravidelný (zbývá ukázat, že všechny hrany jsou stejně dlouhé). Považujme za zřejmé, že souřadnice vrcholů tesseractu o hraně délky 2 můžeme zvolit takto:

$$[1, 1, 1, 1], [-1, 1, 1, 1], [-1, -1, 1, 1], [-1, -1, -1, 1], [-1, -1, -1, -1],$$

$$[-1, -1, 1, -1], [-1, 1, -1, 1], [-1, 1, -1, -1], [-1, 1, 1, -1], \dots$$

Zkráceně budeme zapisovat:

$$[\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1].$$



Obr. 30: Gossetova konstrukce 24-nadstěnu

Střed tesseractu je zřejmě:

$$[0, 0, 0, 0].$$

Euklidovskou vzdálenost dvou bodů v  $E_4$  vypočteme podle vzorce:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2},$$

v našem případě dosadíme střed a libovolný vrchol tesseractu:

$$l = \sqrt{(\pm 1 - 0)^2 + (\pm 1 - 0)^2 + (\pm 1 - 0)^2 + (\pm 1 - 0)^2} = 2,$$

z čehož vidíme, že délky bočních hran jehlanů, jsou rovny hranám tesseractu.

Pro úplnost uvedeme zbylých osm vrcholů 24-nadstěny, tzn. Vrcholy jehlanů po jejich správném posunutí:

$$[2, 0, 0, 0], [-2, 0, 0, 0], [0, 2, 0, 0], [0, -2, 0, 0], [0, 0, -2, 0], \dots$$

Zkráceně budeme říkat, že jde o všechny možné permutace (neboli uspořádání) souřadnic:

$$[\pm 2, 0, 0, 0].$$

Postup, kterým budeme pokračovat, se nazývá *Gossetova konstrukce 600-nadstěny*. Zde bude popis méně detailní, obě Gossetovy konstrukce včetně určení souřadnic jsou podrobněji rozebrány v literatuře Coxeter [2]:

1. Podle výše uvedeného návodu sestrojíme 24-nadstěn.
2. Daný 24-nadstěn má 96 hran. Na každou z nich umístíme vrchol tak, aby každé dva z nové sady 96 vrcholů měli od sebe stejnou vzdálenost. Dá se vypočítat, že každý nově umístěný vrchol dělí příslušnou hranu v poměru  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Hodnota se nazývá *zlaté číslo*, označme ho  $\varphi$ .
3. Vrcholy z nové sady tvoří tzv. *snub 24-nadstěn* (*snub 24-cell*, jde o poloprávdelný mnohonadstěn, o kterých pojednává třetí kapitola). Je složen ze 120 čtyřstěňů a 24 dvacetistěňů.
4. Sestrojíme 4D jehlan, jehož podstavou bude dvacetistěn a všechny délky hran pláště budou rovny délce hrany dvacetistěny.
5. Jehlan umístíme tak, aby jeho podstava splývala s dvacetistěnnou nadstěnou sestrojeného snub 24-nadstěny.
6. Kroky 4. a 5. zopakujeme i pro ostatní dvacetistěnné nadstěny snub 24-nadstěny.
7. Vrcholy 24 jehlanů tvoří společně s 96 vrcholy snub 24-nadstěny všech 120 vrcholů 600-nadstěny.

Za pomoci této konstrukce jsme schopni určit i souřadnice, které rozdělíme do dvou skupin. V té první budou vrcholy snub 24-nadstěny:

$$[\pm\varphi, \pm 1, \pm\varphi^{-1}, 0], [\pm 1, \pm\varphi, 0, \pm\varphi^{-1}], [\pm 1, \pm\varphi^{-1}, \pm\varphi, 0], \dots$$

Zkráceně budeme říkat, že to jsou všechny sudé permutace (to zjednodušeně řečeno znamená každé druhé uspořádání) souřadnic:

$$[\pm\varphi, \pm 1, \pm\varphi^{-1}, 0].$$

Do druhé skupiny zařadíme zbylých 24 vrcholů, ty budou odpovídat souřadnicím 24-nadstěny z první konstrukce, to znamená:

$$[\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1],$$

společně se všemi permutacemi:

$$[\pm 2, 0, 0, 0].$$

Zbývá už jen konstrukce 120-nadstěny, ten však jednoduše sestojíme jakožto mnohonadstěn duální k 600-nadstěny (dualitou těles se zabývá podkapitola 2.3 této práce) . Uvedeme si pouze jeden možný zápis jeho souřadnic, což jsou všechny permutace čtveřic:

$$\begin{aligned} & [\pm 2, \pm 2, 0, 0], \\ & [\pm 2, \pm 2, 0, 0], \\ & [\pm \sqrt{5}, \pm 1, \pm 1, \pm 1], \\ & [\pm\varphi, \pm\varphi, \pm\varphi, \pm\varphi^{-2}], \\ & [\pm\varphi^2, \pm\varphi^{-1}, \pm\varphi^{-1}, \pm\varphi^{-1}], \end{aligned}$$

společně se všemi sudými permutacemi:

$$\begin{aligned} & [\pm\varphi^2, \pm\varphi^{-2}, \pm 1, 0], \\ & [\pm \sqrt{5}, \pm\varphi^{-1}, \pm\varphi, 0], \\ & [\pm 2, \pm 1, \pm\varphi, \pm\varphi^{-1}]. \end{aligned}$$

Ke zhotovení přiložených obrázků (Obr.21, Obr.22, Obr.23) bylo potřeba sepsat program, který všechny permutace rozepsal a souřadnice každého vrcholu zvlášť přepočítal na tříprvkové souřadnice po aplikování vhodně zvoleného kosoúhlého promítání. Například u 600-nadstěny bylo třeba vypsát jednotlivé souřadnice:

$[-1, -1, -1, -1], [-1, -1, -1, 1], [-1, -1, 1, -1], [-1, -1, 1, 1], [-1, 1, -1, -1], [-1, 1, -1, 1], [-1, 1, 1, -1], [-1, 1, 1, 1], [1, -1, -1, -1], [1, -1, -1, 1], [1, -1, 1, -1], [1, -1, 1, 1], [1, 1, -1, -1], [1, 1, -1, 1], [1, 1, 1, -1], [1, 1, 1, 1], [-2, 0, 0, 0], [2, 0, 0, 0], [0, -2, 0, 0], [0, 2, 0, 0], [0, 0, -2, 0], [0, 0, 2, 0], [0, 0, 0, -2], [0, 0, 0, 2], [-1.618, -1, -0.618, 0], [-1.618, -1, 0.618, 0], [-1.618, 1, -0.618, 0], [-1.618, 1, 0.618, 0], [1.618, -1, -0.618, 0], [1.618, -1, 0.618, 0], [1.618, 1, -0.618, 0], [1.618, 1, 0.618, 0], [-1.618, -0.618, 0, -1], [-1.618, -0.618, 0, 1], [-1.618, 0.618, 0, -1], [-1.618, 0.618, 0, 1], [1.618, -0.618, 0, -1], [1.618, -0.618, 0, 1], [1.618, 0.618, 0, -1], [1.618, 0.618, 0, 1], [-1.618, 0, -1, -0.618], [-1.618, 0, -1, 0.618], [-1.618, 0, 1, -0.618], [-1.618, 0, 1, 0.618], [1.618, 0, -1, -0.618], [1.618, 0, -1, 0.618], [1.618, 0, 1, -0.618], [1.618, 0, 1, 0.618], [-1, -1.618, 0, -0.618], [-1, -1.618, 0, 0.618], [-1, 1.618, 0, -0.618], [-1, 1.618, 0, 0.618], [1, -1.618, 0, -0.618], [1, -1.618, 0, 0.618], [1, 1.618, 0, -0.618], ...$

a poté je převést na souřadnice trojmístné:

[-1.7, -1.7, -1.7], [-0.3, -0.3, -0.3], [-1.7, -1.7, 0.3], [-0.3, -0.3, 1.7], [-1.7, 0.3, -1.7], [-0.3, 1.7, -0.3], [-1.7, 0.3, 0.3], [-0.3, 1.7, 1.7], [0.3, -1.7, -1.7], [1.7, -0.3, -0.3], [0.3, -1.7, 0.3], [1.7, -0.3, 1.7], [0.3, 0.3, -1.7], [1.7, 1.7, -0.3], [0.3, 0.3, 0.3], [1.7, 1.7, 1.7], [-2.0, 0.0, 0.0], [2.0, 0.0, 0.0], [0.0, -2.0, 0.0], [0.0, 2.0, 0.0], [0.0, 0.0, -2.0], [0.0, 0.0, 2.0], [-1.4, -1.4, -1.4], [1.4, 1.4, 1.4], [-1.618, -1.0, -0.618], [-1.618, -1.0, 0.618], [-1.618, 1.0, -0.618], [-1.618, 1.0, 0.618], [1.618, -1.0, -0.618], [1.618, -1.0, 0.618], [1.618, 1.0, -0.618], [1.618, 1.0, 0.618], [-2.318, -1.318, -0.7], [-0.918, 0.082, 0.7], [-2.318, -0.082, -0.7], [-0.918, 1.318, 0.7], [0.918, -1.318, -0.7], [2.318, 0.082, 0.7], [0.918, -0.082, -0.7], [2.318, 1.318, 0.7], [-2.051, -0.433, -1.433], [-1.185, 0.433, -0.567], [-2.051, -0.433, 0.567], [-1.185, 0.433, 1.433], [1.185, -0.433, -1.433], [2.051, 0.433, -0.567], [1.185, -0.433, 0.567], [2.051, 0.433, 1.433], [-1.433, -2.051, -0.433], [-0.567, -1.185, 0.433], [-1.433, 1.185, -0.433], [-0.567, 2.051, 0.433], [0.567, -2.051, -0.433], ...

Dále bylo nutné zjistit, které dvojice vrcholů se mají propojit hranou, k tomu napomohl vzorec pro výpočet eulidovské vzdálenosti. Vždy se spojily takové dva vrcholy, které měli vzdálenost nejmenší.

Následně byla data přenesena do 3D softwaru, který posloužil ke zpracování, úpravě a vykreslování samotných obrázků. Program pro nalezení potřebných údajů pro 120-nadstěn je součástí přílohy (*120 nadstěn.py*, psáno v jazyce Python).

## 2.4 Dualita těles

Vraťme se do  $E_3$ , kde si vysvětlíme další jev týkající se pravidelných těles.

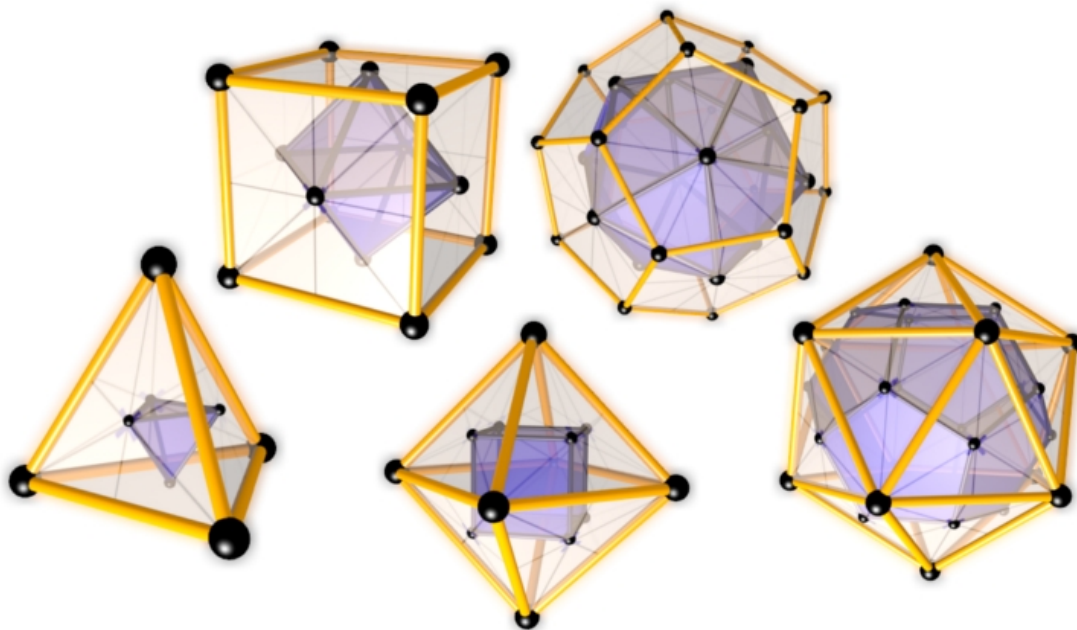
**Definice:** Pravidelný mnohostěn je *duální* k pravidelnému mnohostěnu právě tehdy, když vrcholy jednoho jsou středy sněn druhého (Obr.31).

Pomocí duality si lze utvořit dobrou představu o tom, jak jednotlivá tělesa vypadají a jaké mají vlastnosti. Tuto vlastnost lze zobecnit i do jiných těles než pravidelných, někdy je ale obtížné určit, co znamená střed stěny, pokud se nejedná o pravidelný mnohoúhelník.

Na Obr.25 je znázorněn způsob, jak nalézt těleso duální podle naší definice. Tenkou čarou je na stěnách vyznačeno, jak sestrotit střed stěn. Na nich jsou pak upevněny vrcholy těles duálních.

**Platí:**

- Počet vrcholů daného mnohostěnu se rovná počtu stěn mnohostěnu, který je k němu duální.
- Počet hran duálního mnohostěnu je roven počtu hran daného mnohostěnu.



Obr. 31: Dualita Platónských těles

Z uvedených vlastností můžeme odvodit následující tabulku, která se vyjadřuje ke každému z Platónských těles (Tabulka 1). Máme dva páry duálních těles a jedno, které je duální samo se sebou.

Mnohostěn	Vrcholy	Hrany	Stěny	Mnohostěn duální
Čtyřstěn	4	6	4	Čtyřstěn
Krychle	8	12	6	Osmistěn
Osmistěn	6	12	8	Krychle
Dvanáctistěn	12	30	20	Dvacetistěn
Dvacetistěn	20	30	12	Dvanáctistěn

Tabulka 1: Dualita Platónských těles

Obecně dualita mnohostěňů, resp. jejich rozšíření do prostoru  $E_n$  znamená, že zaměníme všechny prvky dimenze  $n - k$  se všemi prvky dimenze  $k - 1$  pro všechna přirozená čísla  $k$ , kde  $0 < k < (n + 1)$ . S tímto přístupem budeme pokračovat definicí pro pravidelné mnohonadstěny.

**Definice:** Pravidelný mnohonadstěn je *duální* k pravidelnému mnohonadstěnu právě tehdy, když vrcholy jednoho jsou středy nadstěn druhého.

**Platí:**

- Počet vrcholů daného mnohonadstěnu se rovná počtu nadstěn mnohonadstěnu, který je k němu duální.
- Počet hran duálního mnohonadstěnu je roven počtu stěn daného mnohonadstěnu.

Stejně jako v  $E_3$  i zde je duální hyperkrychle s ortoplexem a simplex je duální sám se sebou. Tyto tři tělesa totiž zachovávají duální vztahy v každé dimenzi. Další pár duálních mnohonadstěňů je 120-nadstěn a 600-nadstěn, což patří mezi vlastnosti, které naznačují, že se jedná o obdobu dvanáctistěnu a dvacetistěnu. Zbývá už jen 24-nadstěn, ten je duální sám se sebou podobně jako 5-nadstěn. Dualita pravidelných mnohonadstěňů je shrnuta v Tabulce 2.

Mnohonadstěn	Vrcholy	Hrany	Stěny	Nadstěny	Mnohonadstěn duální
<b>5-nadstěn</b>	5	10	10	5	5-nadstěn
<b>tesseract</b>	16	32	24	8	16-nadstěn
<b>16-nadstěn</b>	8	24	32	16	tesseract
<b>24-nadstěn</b>	24	96	96	24	24-nadstěn
<b>120-nadstěn</b>	600	600	720	120	600-nadstěn
<b>600-nadstěn</b>	120	720	600	600	120-nadstěn

*Tabulka 2: Dualita pravidelných mnohonadstěňů*

Vidíme, že těleso duální ke každému z pravidelných těles je opět pravidelné což u jiných skupin těles zdaleka nemusí být samozřejmost. Právě díky tomu jsme mohli v našem případě dualitu vysvětlit tak snadno.

Než opustíme téma pravidelných těles, seznámme se alespoň v základech, jak se dají snadno značit pomocí systému čísel.



## 2.5 Schläfliho symbol

V některé literatuře se k popisu pravidelných těles používá tzv. *Schläfliho symbol*. V prostoru  $E_n$  jde o  $(n-1)$ -tici  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$  (v našem případě jsou všechna  $p_i$  přirozená a větší než 1), kterou je pravidelné těleso jednoznačně určeno. Hodnota  $p_1$  udává, kolik hran náleží jedné stěně. Jinými slovy, každá stěna je  $p_1$ -úhelník. Druhý údaj vypovídá, že každá nadstěna má v okolí vrcholu  $p_2$  shodných stěn. Dále pak každé  $p_i$  značí, kolik  $i$ -rozměrných prvků bylo zapotřebí v okolí  $i-2$ -rozměrného prvku ke zhotovení  $i+1$ -rozměrného prvku.

Schläfliho symbol je vhodný prostředek pro shrnutí všech těles z této kapitoly (Tabulka 3). Všimněme si, že symbol daného tělesa má stejné prvky jako symbol tělesa duálního, jsou ale uspořádány v opačném pořadí.

$E_2$		$E_3$	
{3}	trojúhelník	{3, 3}	čtyřstěn
{4}	čtverec	{4, 3}	krychle
...	...	{3, 4}	osmistěn
		{5, 3}	dvanáctistěn
		{3, 5}	dvacetistěn
$E_4$		$E_n, n > 4$	
{3, 3, 3}	5-nadstěn	{3, ..., 3}	simplex
{4, 3, 3}	tesseract	{4, 3, ..., 3}	hyperkrychle
{3, 3, 4}	16-nadstěn	{3, ..., 3, 4}	ortoplex
{3, 4, 3}	24-nadstěn		
{5, 3, 3}	120-nadstěn		
{3, 3, 5}	600-nadstěn		

*Tabulka 3: Schläfliho symbol*

Touto krátkou podkapitolou zakončíme bádání těles pravidelných a představíme si tělesa jiná. Účelem toho bude poukázat na skutečnost, že prostor  $E_4$  obsahuje mnohem širší škálu mnohonadstěňů, než bychom si mohli představovat, kdybychom zůstali pouze u těch pravidelných.

## Kapitola 3

### Polopráveidelná tělesa ve vyšší dimenzi

#### 3.1 Polopráveidelný mnohostěn

Jedním z možných rozšíření pravidelných těles jsou tělesa polopráveidelná. Definice mají v daných dimenzích podobné, rovněž se jedná o objekty různě souměrné a do určité míry aproximující sféru. V prostoru to jsou především tělesa Archimédova. Známy je například *truncated icosahedron*, který se v praxi používá jako vzor pro fotbalový míč (Obr.32).



Obr. 32: Vzor pro fotbalový míč

**Definice:** Mnohostěn nazveme *polopráveidelný*, je-li splněno:

- Všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky dvou nebo více typů.
- Všechna okolí vrcholů jsou stejná.

**Poznámka:** Více než tři typy pravidelných mnohoúhelníků nelze přiřadit jednomu vrcholu, neboť by součet příslušných vnitřních úhlů přesáhl  $360^\circ$ . Stěny jsou tudíž vždy pouze dvou nebo tří typů.

Polopráveidelných mnohostěnů existuje nekonečně mnoho (je neomezené množství hranolů a antihranolů), pouze třináct z nich se považuje za Archimédova tělesa. Pro ně platí, že jsou přímo odvozené z těles Platónských za pomoci procesu, který by se dal intuitivně popsat jako *odříznutí vrcholů*, případně *zkosení* nebo *zaoblení*. Například již zmíněný *truncated icosahedron* vznikne odříznutím vrcholů dvacetistěnu.

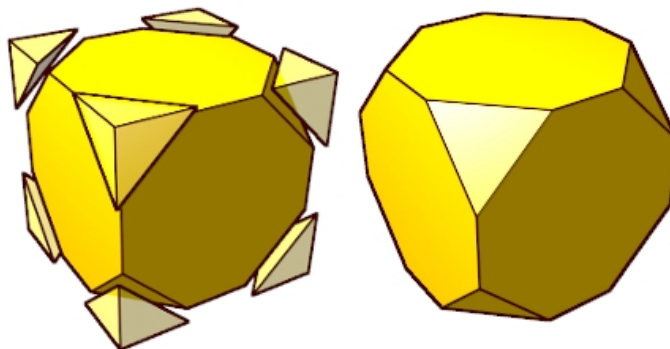
**Platí:**

- Každému polopráveidelnému mnohostěnu lze opsat kulovou plochu.
- Každému Archimédovu tělesu lze opsat těleso Platónské, tj. najít takové Platónské těleso, na jehož povrchu leží všechny hrany a vrcholy daného mnohostěnu.

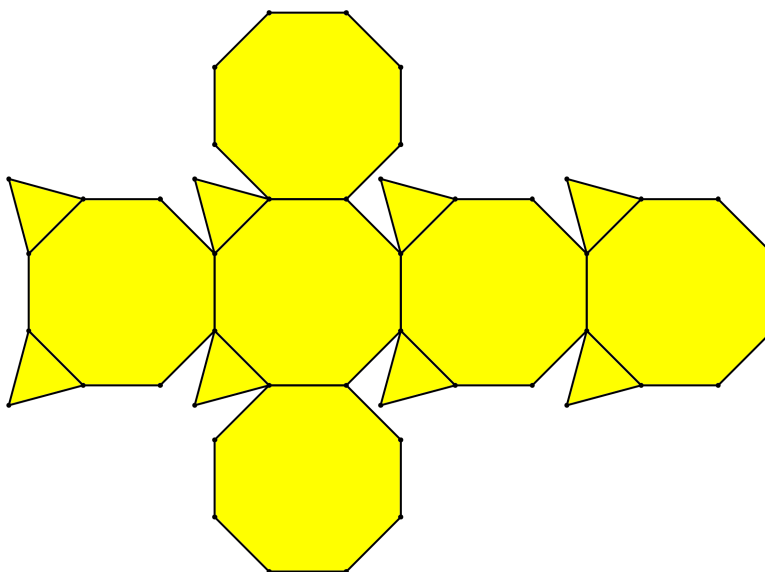
Jako vzorový příklad pro lepší pochopení struktury a odvození Archimédových těles poslouží *truncated cube* (název ve volném překladu znamená krychle s odříznutými vrcholy). Jeho vzhled zdánlivě připomíná krychli, díky čemuž patří k nejsnáze představitelnému z polopráveidelných těles. Na Obr.33 znázorníme vznik *truncated cube* z krychle, na Obr.34 je zakreslena síť této krychle po oříznutí všech vrcholů.

### Srovnání krychle a truncated cube:

- Krychle má 6 stěn. Truncated cube má 6 stěn tvaru osmiúhelníku.
- Krychle má 8 vrcholů. Truncated cube má 8 stěn tvaru šestiúhelníku, vrcholů má 24, což je  $8 \cdot 3$  (počet vrcholů trojúhelníku).
- Krychle má 12 hran. Truncated cube má 36 hran, což je  $12 + 24$  (součet stran všech stěn tvaru trojúhelníku).



Obr. 33: Truncated cube

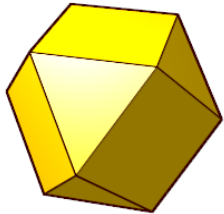
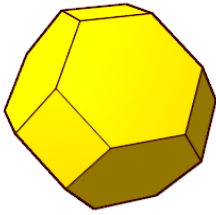
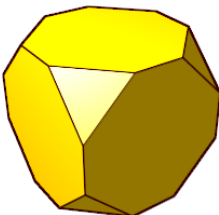
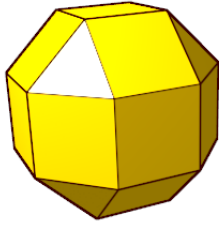
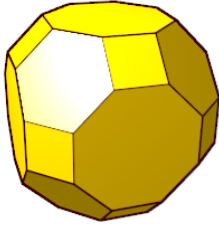



Obr. 34: Síť truncated cube

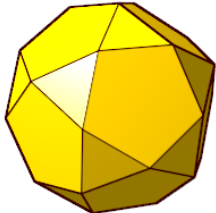
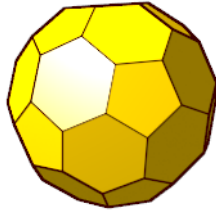
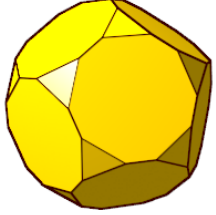
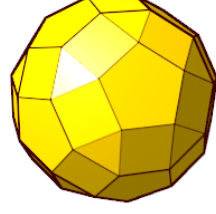
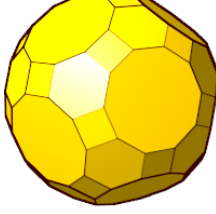
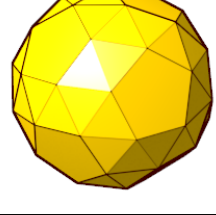
Přehled Archimédových těles uvedeme do tří tabulek rozdělených podle Platónských těles, ze kterých byla odvozena (Tabulka 4-6). Většinu vyplněných údajů snadno spočítáme obdobným způsobem, jako bylo naznačeno u truncated cube. K těmto výpočtům, případně ke kontrole výsledků je možné použít také Eulerův vzorec:

$$\text{počet vrcholů} - \text{počet hran} + \text{počet stěn} = 2.$$

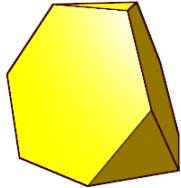
Tento vztah platí pro všechny zde zmíněné mnohostěny, důkaz nalezneme například v literatuře Cromwell [1], ze které jsou rovněž převzaty názvy jednotlivých Archimédových těles (do češtiny se většinou nepřekládají).

Mnohostěn	Vrcholy	Hrany	Stěny	Obrázek
<b>Cub-octahedron</b>	12	24	8 trojúhelníků, 6 čtverců	
<b>Truncated octahedron</b>	24	36	6 čtverců, 8 šestiúhelníků	
<b>Truncated cube</b>	24	36	8 trojúhelníků, 6 osmiúhelníků	
<b>Rhomb-cub-octahedron</b>	24	48	8 trojúhelníků, 18 čtverců	
<b>Great rhomb-cub-octahedron</b>	48	72	12 čtverců, 8 šestiúhelníků, 6 osmiúhelníků	
<b>Snub cube</b>	24	42	32 trojúhelníků, 6 čtverců	

*Tabulka 4: Archimédova tělesa odvozená z krychle a osmistěnu*

Mnohostěn	Vrcholy	Hrany	Stěny	Obrázek
<b>Icosi-dodecahedron</b>	30	20	20 trojúhelníků, 12 pětiúhelníků	
<b>Truncated icosahedron</b>	60	90	12 pětiúhelníků, 20 šestiúhelníků	
<b>Truncated dodecahedron</b>	60	90	20 trojúhelníků, 12 desetiúhelníků	
<b>Rhomb-icosi-dodecahedron</b>	60	120	20 trojúhelníků, 30 čtverců, 12 pětiúhelníků	
<b>Great rhomb-icosi-dodecahedron</b>	120	180	30 čtverců 20 šestiúhelníků, 12 dvanáctiúhelníků	
<b>Snub dodecahedron</b>	60	150	80 trojúhelníků, 12 pětiúhelníků	

Tabulka 5: Archimédova tělesa odvozená z dvanáctistěnu a dvacetistěnu

Mnohostěn	Vrcholy	Hrany	Stěny	Obrázek
Truncated tetrahedron	12	18	4 trojúhelníky, 4 šestiúhelníky	

*Tabulka 6: Archimédovo těleso odvozené ze čtyřstěnu*

### 3.2 Polopráveidelný mnohonadstěn

V  $E_4$  definujeme polopráveidelná tělesa podobně jako v  $E_3$ .

**Definice:** Mnohonadstěn nazveme *polopráveidelný*, je-li splněno:

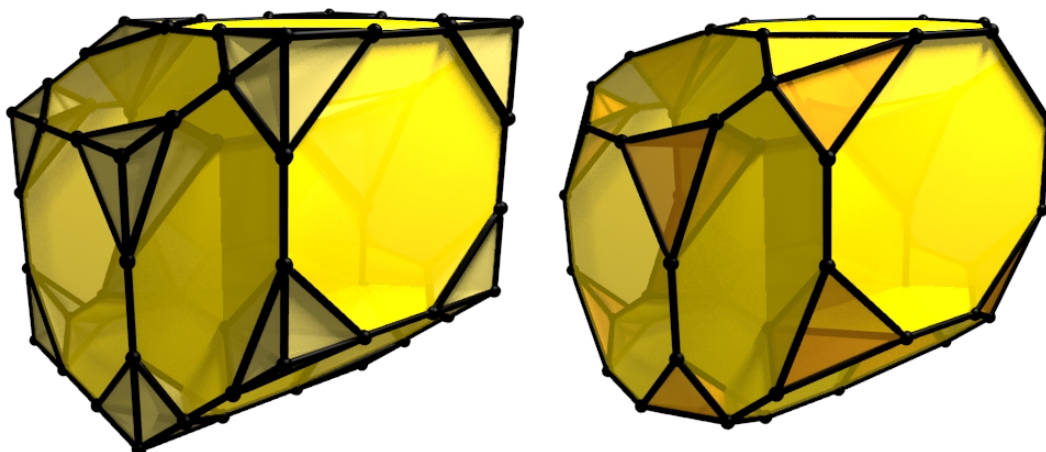
- Všechny nadstěny jsou pravidelné nebo polopráveidelné mnohostěny dvou nebo více typů.
- Všechna okolí vrcholů jsou stejná.

Opět jich existuje nekonečně mnoho, protože i v  $E_4$  se vyskytuje obdoba hranolu a antihranolu. Čtyřrozměrných hranolů, které mají podstavu tvaru Platónského nebo Archimédova tělesa je 17, ty zbylé jsou složeny z trojrozměrných hranolů a antihranolů. Dále sem patří 41 těles, které budeme považovat za obdobu těles Archimédových.

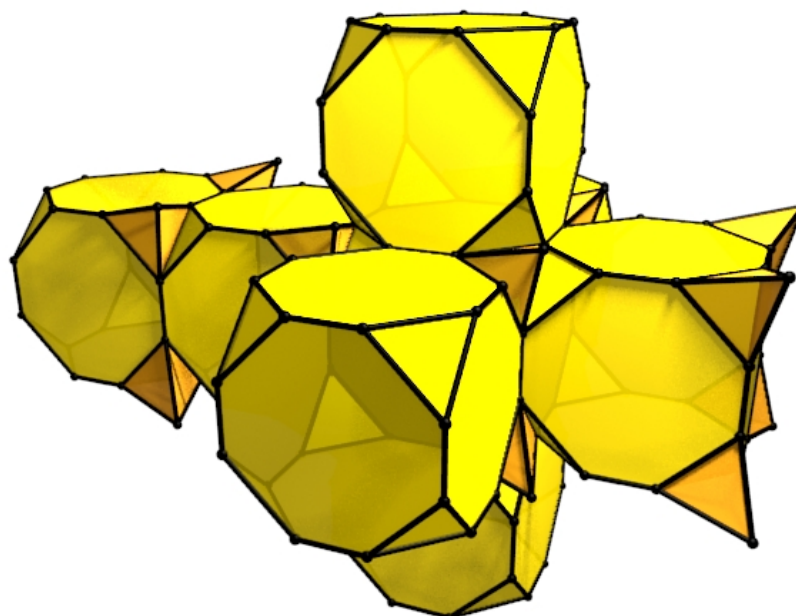
Abychom si nemuseli popisovat každé těleso zvlášť, vezměme si jako vzorový příklad *truncated tesseract*. Z tesseractu vznikne odříznutím určitých částí tak, jako u truncated cube z předešlé podkapitoly. Nejedná se však o řez mnohostěnu rovinou, ale o řez mnohonadstěnu prostorem. Tvar řezu pak není mnohoúhelník, ale mnohostěn. Znovu se tak setkáváme s procesem, který je nesnadné si představit, neboť je v  $E_3$  neuskutečnitelný. Na Obr.35 je naznačeno vyřiznutí šestnácti pětinaďstěnnů z tesseractu za účelem sestrojení truncated tesseractu. Tím se pochopitelně změnil i nadstěny objektu. Jeho síť nalezneme na Obr.36.

**Srovnání tesseractu a truncated tesseractu:**

- Tesseract má 8 nadstěn. Truncated tesseract má 8 nadstěn tvaru truncated cube.
- Tesseract má 16 vrcholů. Truncated tesseract má 16 nadstěn tvaru čtyřstěnu. Vrcholů má 64 čtyři, což je  $16 \cdot 4$  (počet vrcholů čtyřstěnu).
- Tesseract má 24 stěn. Truncated tesseract má 88 stěn, což je  $24 + 64$  (počet stěn všech čtyřstěnnů).
- Tesseract má 32 hran. Truncated tesseract má 128 hran, což je  $32 + 96$  (počet hran všech čtyřstěnnů).



*Obr. 35: Truncated tesseract*



*Obr. 36: Síť truncated tesseractu*

Způsobů, jak pozměnit pravidelný mnohonadstěn za účelem získání tělesa nového je mnohem větší množství, než jsme měli v případě pravidelných mnohostěnů. Z toho vyplývá i více výpočtů potřebných ke zjištění počtu jednotlivých prvků, což je navíc náročnější na představu. I zde však poslouží 4D obdoba Eulerova vzorce:

$$\text{počet vrcholů} - \text{počet hran} + \text{počet stěn} - \text{počet nadstěn} = 0.$$

Důkaz a další rozšíření vztahu nalezneme v literatuře Coxeter [2]. Jednotlivé mnohonadstěny, které považujeme za obdobu Archimédových těles jsou vypsány v následujících tabulkách (Tabulka 7-10), opět rozříděné podle příslušného

pravidelného mnohonadstěnu. Průběžně jsou také vykreslena vybraná tělesa (Obr.37-39). Těmito výsledky zakončíme třetí kapitolu a s ní i celou práci. Podrobnější popis jednotlivých polopravidelných mnohostěňů nalezneme také na stránkách: <http://eusebeia.dyndns.org/4d>, odkud jsou také převzaté názvy.

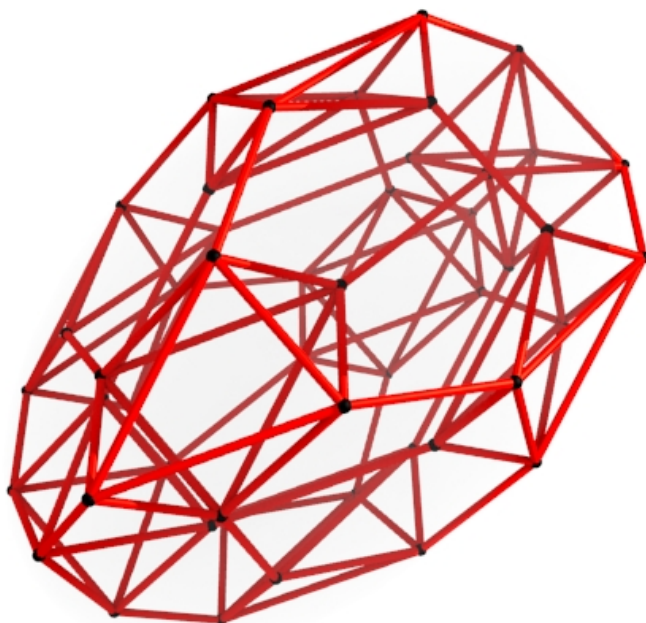
Mnohonadstěn	Vrcholy	Hrany	Stěny	Nadstěny
<b>Rectified 5-cell</b>	10	30	30	10
<b>Bitruncated 5-cell</b>	30	60	40	10
<b>Runcinated 5-cell</b>	20	60	70	30
<b>Cantellated 5-cell</b>	30	90	80	20
<b>Truncated 5-cell</b>	20	40	30	10
<b>Runcitruncated 5-cell</b>	60	150	120	30
<b>Cantitruncated 5-cell</b>	60	120	80	20
<b>Omnitruncated 5-cell</b>	120	240	150	30

*Tabulka 7: Polopravidelné mnohonadstěny odvozené z 5-nadstěnu*

Mnohonadstěn	Vrcholy	Hrany	Stěny	Nadstěny
<b>Truncated 16-cell</b>	48	120	96	24
<b>Rectified tesseract</b>	32	96	88	24
<b>Bitruncated tesseract</b>	96	192	120	24
<b>Runcinated tesseract</b>	80	192	208	80
<b>Cantellated tesseract</b>	96	288	248	56
<b>Runcitruncated 16-cell</b>	192	480	368	80
<b>Truncated tesseract</b>	64	128	88	24
<b>Runcitruncated tesseract</b>	192	480	368	80
<b>Cantitruncated tesseract</b>	192	384	248	56
<b>Omnitruncated tesseract</b>	384	768	464	80

*Tabulka 8: Polopravidelné mnohonadstěny odvozené z tesseractu a 16-nadstěnu*

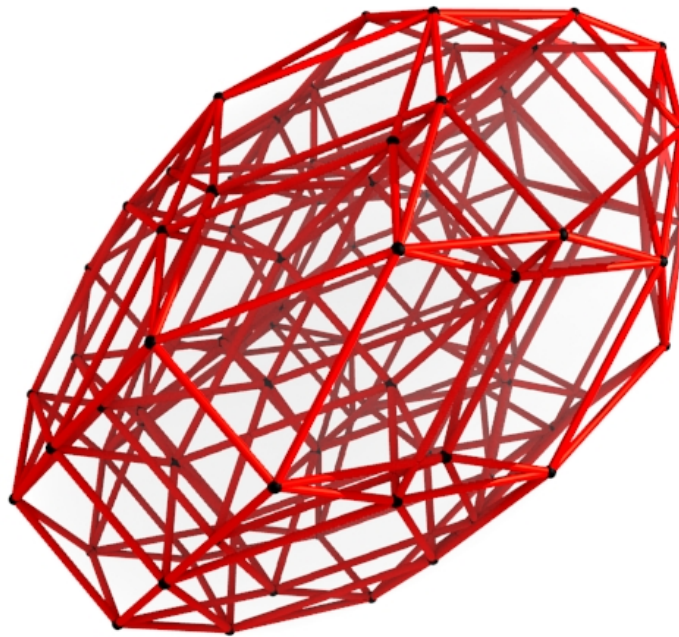




Obr. 37: *Truncated 16-cell v kosoúhlém promítání*

Mnohonadstěn	Vrcholy	Hrany	Stěny	Nadstěny
<b>Rectified 24-cell</b>	96	288	240	48
<b>Bitruncated 24-cell</b>	288	576	336	48
<b>Runcinated 24-cell</b>	144	576	672	240
<b>Cantellated 24-cell</b>	288	864	720	144
<b>Truncated 24-cell</b>	192	384	240	48
<b>Runcitruncated 24-cell</b>	576	1440	1104	240
<b>Cantitruncated 24-cell</b>	576	1152	720	144
<b>Omnitruncated 24-cell</b>	1152	2304	1392	240
<b>Snub 24-cell</b>	96	432	480	144

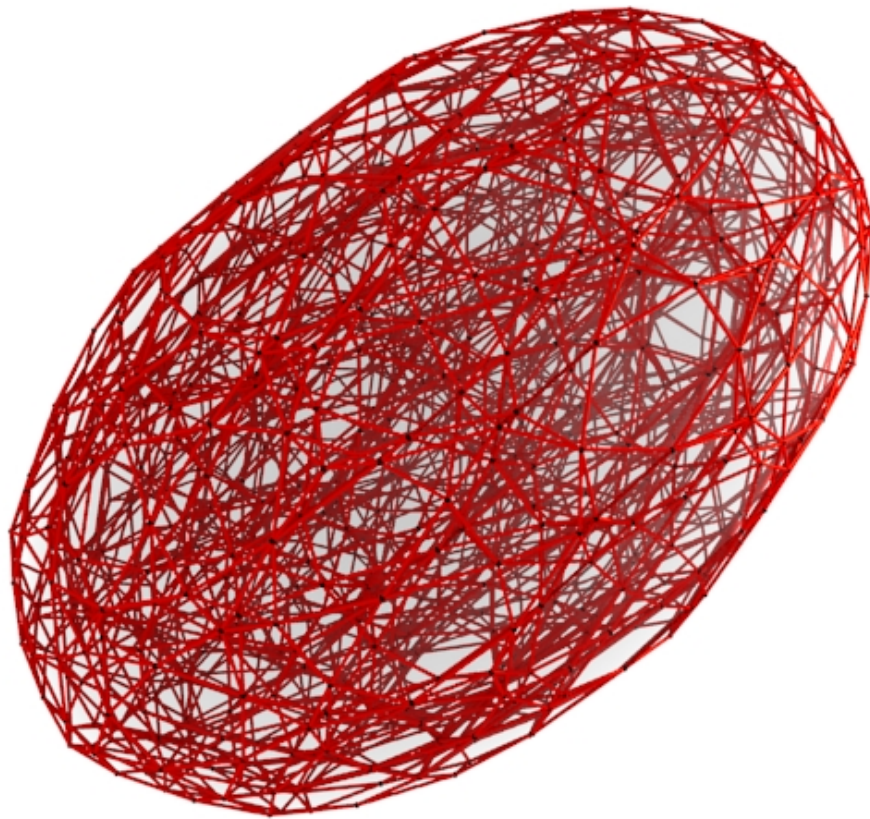
Tabulka 9: *Polopravidelné mnohonadstěny odvozené z 24-nadstěny*



Obr. 38: Rectified 24-cell v kosouhlém promítání

Mnohonadstěn	Vrcholy	Hrany	Stěny	Nadstěny
<b>Rectified 600-cell</b>	720	3600	3600	720
<b>Truncated 600-cell</b>	1440	4320	3600	720
<b>Rectified 120-cell</b>	1200	3600	3120	720
<b>Cantellated 600-cell</b>	3600	10800	8640	1440
<b>Bitruncated 120-cell</b>	3600	7200	3420	720
<b>Cantitruncated 600-cell</b>	7200	14400	8640	1440
<b>Runcinated 120-cell</b>	2400	7200	7440	2640
<b>Cantellated 120-cell</b>	3600	10800	9120	1920
<b>Runcitruncated 120-cell</b>	7200	18000	13440	2640
<b>Truncated 120-cell</b>	2400	4800	3120	720
<b>Runcitruncated 600-cell</b>	7200	18000	13440	2640
<b>Cantitruncated 120-cell</b>	7200	14400	9120	1920
<b>Omnitruncated 120-cell</b>	14400	28800	17040	2640
<b>Grand antiprism</b>	100	500	720	320

*Tabulka 10: Polopřavidelné mnohonadstěny odvozené z 120-nadstěny a 600-nadstěny*



*Obr. 39: Rectified 120-cell v kosouhlém promítání*

## Závěr

Nalezení poloprávdelných mnohonadstěňů mějme za vrcholný výsledek našeho snažení. Samozřejmostí je to, že téma lze šířit i do jiných směrů. Pokud pomíneme podmínku konvexnosti, můžeme rozšířit Kepler-poisonova tělesa do více rozměrů nebo například uvést složeniny Platónských těles, které mají rovněž s látkou pozoruhodnou spojitost.

Množství nových poznatků také získáme studiem mnohonadstěňů z pohledu více algebraického. Lze hovořit kupříkladu o grupách symetrií nebo o výpočtu metrických vlastností. Také nemusíme zůstat pouze v prostorech euklidovských, téma má vztah i k prostoru hyperbolickému či sférickému. Můžeme i úplně pomínout vzdálenosti vrcholů a na pravidelná tělesa nahlížet jako na kombinatorický graf.

Existují i taková rozšíření, jejichž užitek je záležitost diskutabilní. Vždy to ale můžeme brát aspoň jako logickou hříčku pro značné procvičení prostorové představivosti, nebo téma bádát jen z čisté zvědavosti. O tělesech spjatých s pravidelnými se dá poznamenat mnohem více faktů, než je v této práci zahrnuto, není ovšem v našich schopnostech sepsat je na konečný počet stránek.

## Seznam příloh

Na přiloženém CD se nachází materiály, které mají napomoci k pochopení látky. Jejich seznam nalezneme zde:

- hyperkrychle.avi – animace odvození hyperkrychle z krychlí dimenze nižší; výsledný tesseract je zobrazen v kosoúhlém promítání.
- síť tesseractu.avi – animace zabalení a následné rozbalení tesseractu v kosoúhlém a pravoúhlém promítání.
- 5 platónských těles.avi – animace poukazující na počet Platónských těles.
- 120 nadstěn.py – program psaný v jazyce Python, který zjistí souřadnice vrcholů 120-nadstěny; pro náhled lze otevřít i v textovém editoru.

## Literatura

- [1] Cromwel, P.: Polyhedra, Cambridge University Press, Cambridge, 1997
- [2] Coxeter, H. S. M: Regular polytopes, Dover publications, New York, 1973
- [3] Kadeřávek, F., Klíma J., Kounovský J.: Deskriptivní geometrie II, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1945

## Použité internetové stránky

<http://eusebeia.dyndns.org/4d>

<http://mathworld.wolfram.com>

<http://www.dimensions-math.org>