3. Středoškolská stereometrie v anaglyfech

V předchozích dvou kapitolách jsme zjistili, jak se zobrazují tělesa ve středovém promítání a hlavně v lineární perspektivě, a jak pomocí těchto promítání vytvořit anaglyfy. V třetí kapitole si probereme část úloh středoškolské stereometrie a při řešení těchto úloh využijeme právě anaglyfy.

Stereometrie se zabývá prostorovými objekty a vztahy mezi nimi. Zkoumají se například vzájemné polohy přímek a rovin nebo řezy těles nějakou rovinou. Při studiu stereometrie je proto nutné si situaci představit v prostoru. To ovšem bývá pro studenty středních škol obtížné. Na středních školách se tento problém ve valné většině případů řeší tak, že učitel přinese do hodiny model tělesa (většinou krychle), a mluví-li se o nějakých přímkách, modeluje je špejlemi. Nepraktické ovšem je to, že modelů bývá málo a nevystačí na každého.

Výhoda anaglyfů je, že modelují prostorovou situaci a navíc jsou skladné. Průměty tvořící anaglyf máme na papíře a těch můžeme natisknout tolik, kolik je do dané třídy střední školy potřeba. Pak už jen stačí, aby si žáci nasadili 3D brýle. Nejčastěji jsou z kartonu a dají se složit, takže ani ty nezabírají místo. V dnešní době se navíc dají na internetu pořídit levně, tudíž se není nutno obávat ani vysokých finančních nákladů. Použití anaglyfů při výuce stereometrie studentům pomáhá lépe pochopit probíranou látku.

V této kapitole tedy představíme základní problematiku středoškolské stereometrie s pomocí anaglyfů. Než se k tomuto tématu přesuneme, provedeme úmluvu. V tištěné verzi bakalářské práce použijeme v této kapitole anaglyfy, které vznikají promítnutím objektu na půdorysnu π. Na tyto anaglyfy by se čtenář měl dívat pod úhlem $\alpha = 45°$, vzdálenost očí od roviny papíru je 40 cm a vzdálenost obrázku od těla je taktéž 40 cm. Anaglyf tedy vzniká stejnými promítáními, jako uvádíme v druhé kapitole.

V elektronické verzi této bakalářské práce použijeme v třetí kapitole anaglyfy, které vznikají promítáním objektů na nárysnu ν. Čtenář se na tyto anaglyfy bude dívat kolmo ze vzdálenosti 50 cm, tedy stejným způsobem, jako je uvedeno v příslušné části druhé kapitoly.

Toto opatření děláme kvůli čtenářovu pohodlí. Je-li k dispozici tištěná verze práce, bude ji čtenář číst nejspíše u stolu. Tato situace odpovídá třetímu typu anaglyfu, jak je zmiňováno v druhé kapitole. Naopak čtenář s elektronickou verzí práce ji bude číst z obrazovky počítače, jemu tudíž bude vyhovovat, když použijeme anaglyfy na nárysnu ν.

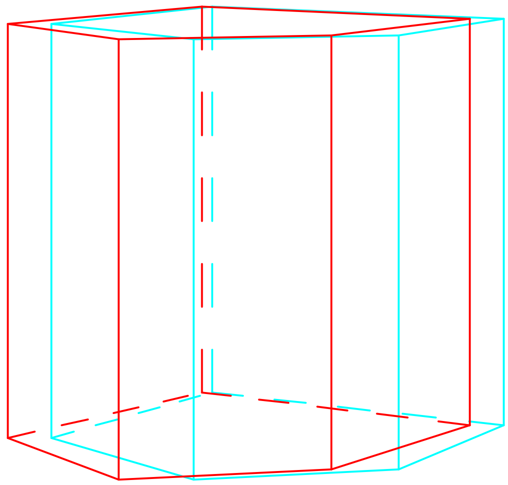
Nyní se již začneme věnovat samotné stereometrii. Struktura třetí kapitoly odpovídá středoškolské učebnici Stereometrie od Evy Pomykalové. Příklady odpovídají zadáním v učebnici a u každého je uvedeno, o který konkrétní příklad se jedná. Budeme-li mluvit o „učebnici stereometrie“, vždy budeme myslet toto vydání (Pomykalová, 1995).

3.1 Tělesa

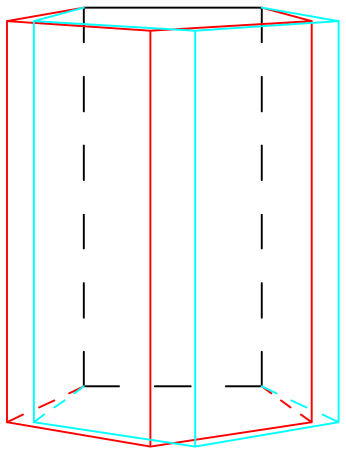
Stereometrie se zabývá studiem prostorových objektů a jejich vzájemných vztahů. Na začátku si uvedeme příklady těles, se kterými se při studiu setkáme nejčastěji.

- *Hranol* – těleso, jehož podstavy jsou shodné mnohoúhelníky a jeho boční stěny jsou rovnoběžníky (Obr. 3.1).
- *Pravidelný n-boký hranol* – hranol, jehož podstavami jsou pravidelné n-úhelníky a jeho boční stěny tvoří shodné obdélníky (Obr. 3.2).
- *Kvádr* – hranol, jehož protilehlé stěny jsou shodné obdélníky / čtverce (Obr. 3.3).

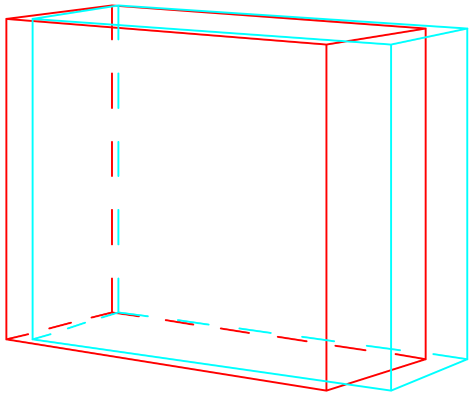
- *Krychle* – hranol, jehož všechny stěny jsou shodné čtverce (Obr. 3.4).
- *Jehlan* – těleso, jehož podstavou je mnohoúhelník a boční stěny jsou tvořeny trojúhelníky (Obr. 3.5).
- *Pravidelný n-boký jehlan* – jehlan, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník a jeho boční stěny jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky (Obr. 3.6).



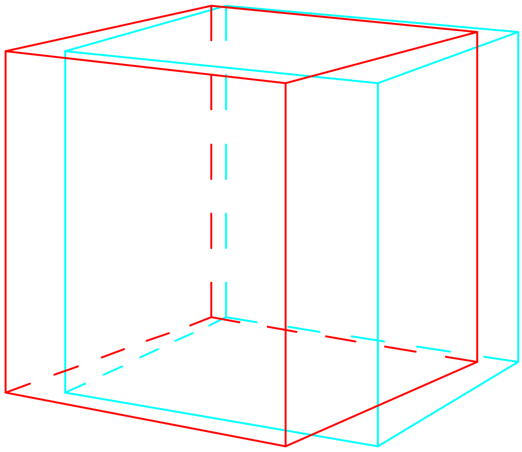
Obr. 3.1: Hranol



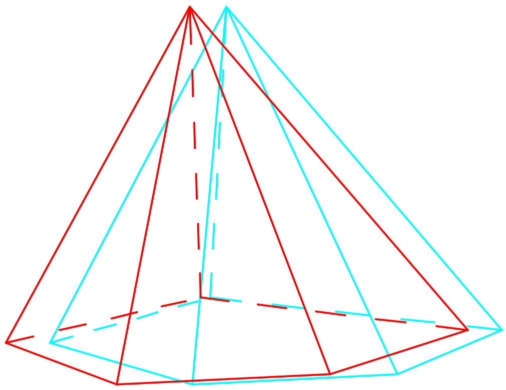
Obr. 3.2: Pravidelný pětiboký hranol



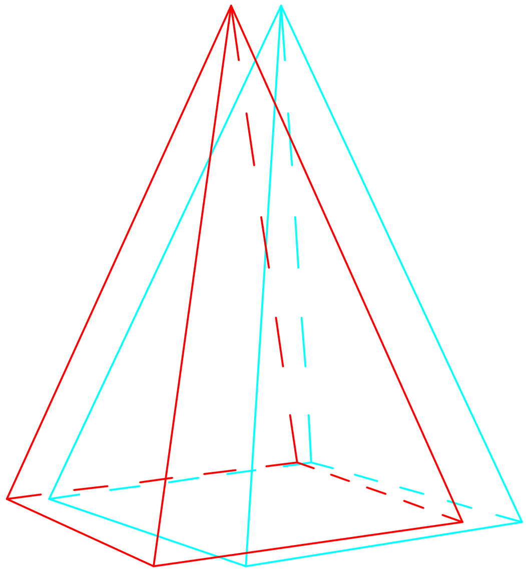
Obr. 3.3: Kvádr



Obr. 3.4: Krychle



Obr. 3.5: Jehlan

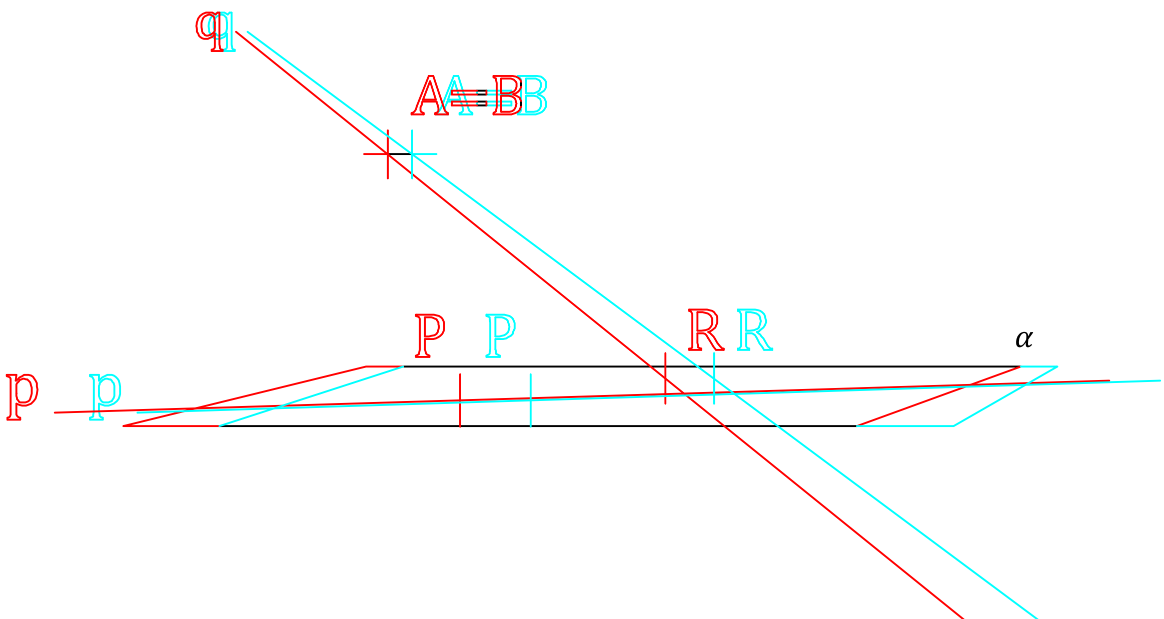


Obr. 3.6: Pravidelný čtyřboký jehlan

Na střední škole se stereometrické úlohy týkají většinou krychle a pravidelného čtyřbokého jehlanu.

3.2 Vztahy mezi body, přímkami a rovinami

Jedna ze základních dovedností, kterou je potřeba si osvojit, je umět pracovat se základními prostorovými objekty – s bodem, přímkou a rovinou. Také je nutné poznat, jaké vztahy mezi sebou tyto objekty mají. Nyní si společně projdeme možné situace, které mohou v prostoru nastat (Obr. 3.7).



Obr. 3.7: Případ vzájemné polohy bodů, přímek a roviny

Dva body mohou buď splynout, tj. $A \equiv B$, nebo mohou být různé, $P \not\equiv R$. Zkoumáme-li vztah bodu a přímky, zajímá nás, jestli bod leží na přímce, $P \in p$, nebo na dané přímce neleží, $B \notin p$. Analogicky je tomu tak ve vztahu bodu a roviny – bod v prostoru buď leží v rovině, $P \in \alpha$, nebo v ní neleží, $B \notin \alpha$. V geometrii se pro tento jev zavedl pojem *incidence*. Leží-li bod P na přímce p, říkáme, že je bod P incidentní s přímkou p. Neleží-li bod A na přímce p, říkáme, že bod A není incidentní s přímkou p. Stejně tak tento pojem můžeme použít, mluvíme-li o vztahu mezi bodem a rovinou.

Než budeme hovořit o vztahu mezi přímkou a rovinou, připomeneme si, čím tyto dva útvary v prostoru zadáváme.

- Dva různé body v prostoru určují právě jednu přímku.
- Tři různé body, které neleží na téže přímce, určují v prostoru právě jednu rovinu.

Přímku určenou body A a B značíme $\leftrightarrow AB$ a říkáme jí přímka AB. Podobným způsobem značíme rovinu určenou body A, B a C, tj. $\leftrightarrow ABC$, a nazýváme ji rovinou ABC.

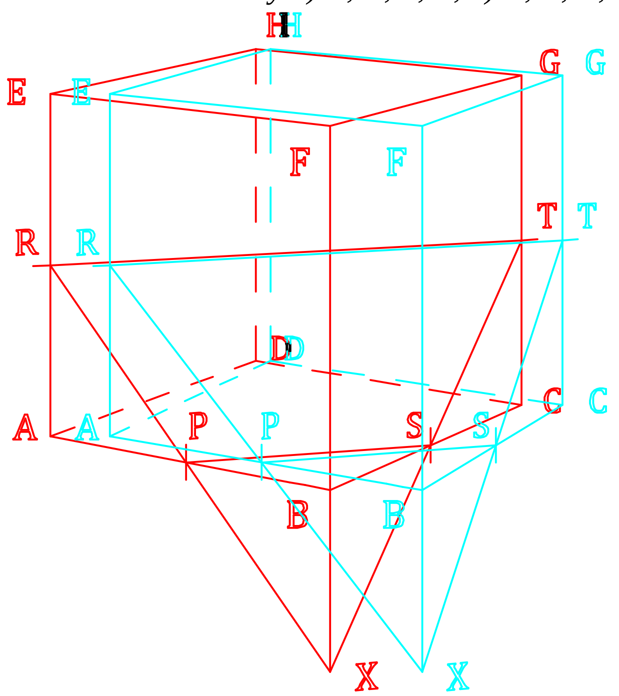
Máme-li v prostoru zadanou přímku a rovinu, musíme umět rozhodnout, jestli přímka v rovině leží, $p \in \alpha$, nebo v ní neleží, $q \notin \alpha$. Přímka leží v rovině, pokud v dané rovině leží každý bod dané přímky. Tento případ nastává, leží-li v rovině alespoň dva různé body dané přímky. (V části 3.4 se dozvíme ještě další možné polohy přímky a roviny.)

Dozvěděli jsme se, že rovinu lze zadat třemi různými body, které neleží na téže přímce. To ovšem není jediný způsob, jak v prostoru lze zadat rovinu. Zmíníme si další z nich. Rovinu lze také jednoznačně určit:

- přímkou a bodem, který na dané přímce neleží;
- dvěma různoběžnými přímkami;
- dvěma různými rovnoběžnými přímkami.

Podívejme se teď na příklad 2 na straně 20 v učebnici stereometrie.

Body P, R, S, T jsou po řadě středy hran AB, AE, BC, CG krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda leží v téže rovině body a) P, R, S, T, b) A, C, E, F.



Obr. 3.8: Příklad 2 na str. 20 v učebnici

Začneme úlohou a), ve které máme zjistit, zdali zadané body P, R, S, T leží v téže rovině. Jak již víme, rovinu můžeme zadat například dvěma různoběžnými přímkami. Dokážeme-li, že přímky $\leftrightarrow PR$ a $\leftrightarrow ST$ jsou různoběžné, pak je těmito přímkami určena právě jedna rovina, která obsahuje zadané body. Na anaglyfu na Obr. 3.8 vidíme, že přímka $\leftrightarrow PR$ leží v přední stěně krychle a protíná přímku $\leftrightarrow BF$ v bodě X. Přímka $\leftrightarrow ST$ leží v boční stěně krychle a taktéž protíná přímku $\leftrightarrow BF$. Nyní je potřeba ukázat, že průsečík těchto dvou přímek je rovněž bod X.

Ze zadání víme, že se rovnají délky úseček AP, AR, BP, BS, CS a CT. V trojúhelnících PRA a PXB jsou u vrcholů A a B pravé úhly. Body P, R a X leží na jedné přímce, tedy úhel v obou trojúhelnících u vrcholu P je shodný. Z toho již vyplývá, že trojúhelníky PRA a PXB jsou shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky.

Obdobným způsobem lze ukázat, že to stejné platí pro trojúhelníky CST a BSX. Přímky $\leftrightarrow PR$ a $\leftrightarrow ST$ proto protínají přímku $\leftrightarrow BF$ ve stejném bodě X, jsou tudíž různoběžné, z čehož vyplývá, že body P, R, S, T leží v téže rovině.

V úloze b) máme rozhodnout, jestli leží v téže rovině body A, C, E, F. Jak vidíme na anaglyfu (Obr. 3.8), body A, E, F leží v přední stěně krychle, na rozdíl od bodu C, jenž je incidentní se zadní stěnou krychle. Protější stěny krychle vždy leží v rovnoběžných rovinách. Zadané čtyři body tedy neleží v jedné rovině.

3.3 Vzájemná poloha dvou přímek

V této části si probereme vzájemné polohy dvou přímek v prostoru. V prostoru rozlišujeme čtyři vzájemné polohy dvou přímek. Dvě přímky v prostoru mohou být totožné, rovnoběžné, různoběžné a mimoběžné.

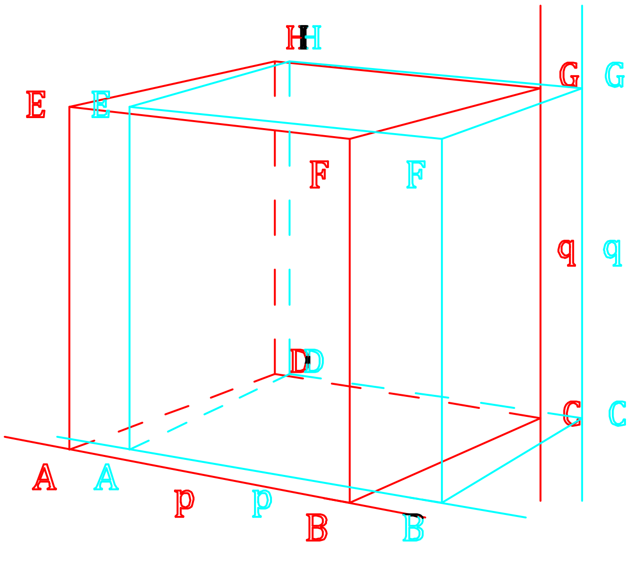
Dvě přímky jsou:

- *totožné* (splývající), mají-li všechny body společné;
- *rovnoběžné*, nemají-li žádný společný bod a leží-li v téže rovině;
- *různoběžné*, mají-li právě jeden společný bod, kterému říkáme *průsečík*;
- *mimoběžné*, pokud nemají žádný společný bod a neleží v téže rovině.

V příkladech, které budeme v této části rozebírat, se budeme věnovat vzájemné poloze dvou přímek, které určíme pomocí konkrétních bodů na krychli. Naším úkolem bude rozhodnout, jakou polohu zadané přímky mají. Pravděpodobně nejtěžším úkolem pro studenty bývá poznat, že jsou přímky mimoběžné. V rovinném průmětu, který je k dispozici v učebnici, se průměty mimoběžných přímek protnou, ačkoli v prostoru tomu tak není.

V těchto úlohách je nutné si uvědomit, co pro obě přímky platí. Mají nějaké společné body? Pokud ano, budou totožné, nebo různoběžné. Leží v téže rovině? Pokud ne, pak jsou určitě mimoběžné. Jestliže leží v téže rovině, mohou být totožné, rovnoběžné, nebo různoběžné.

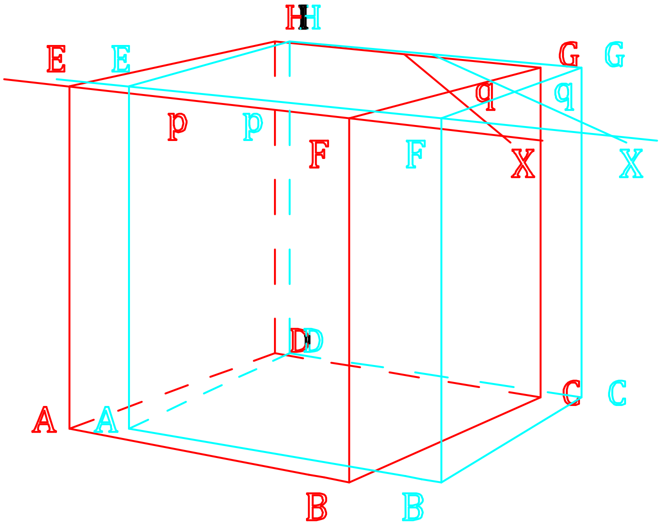
Jsme-li schopni rozhodnout, mají-li přímky nějaké společné body a leží-li v téže rovině, dovedeme rozlišit všechny čtyři výše uvedené polohy dvou přímek v prostoru. Ukážeme si to na následujících příkladech, které můžeme najít v učebnici stereometrie na straně 23-24 na obrázcích Obr. 21a-f.



Obr. 3.9: Poloha přímek $p = \leftrightarrow AB$ a $q = \leftrightarrow CG$

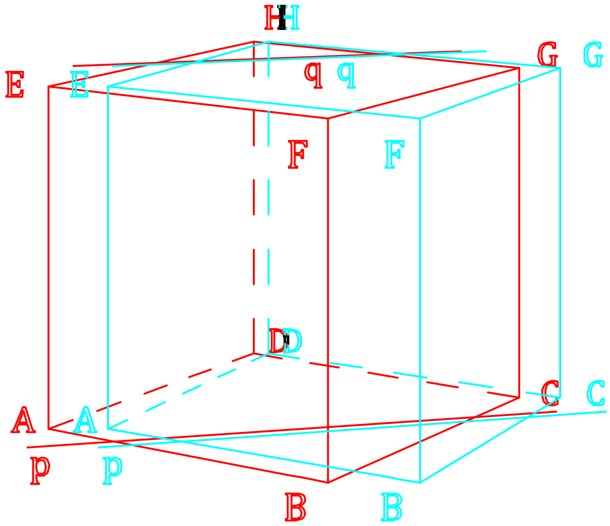
Máme dánu krychli $ABCDEFGH$ a přímky p, q, které protínají její hrany. Určete vzájemnou polohu přímek p a q na obrázcích 3.9-3.14.

Na obrázku 3.9 máme zadány přímky $p = \leftrightarrow AB$ a $q = \leftrightarrow CG$. Přímka $p = \leftrightarrow AB$ leží ve přední stěně ABE a $q = \leftrightarrow CG$ v zadní stěně CGH, což jsou stěny v rovnoběžných rovinách. Zadané přímky proto nemohou mít společný žádný bod. Tím vyloučíme možnosti, že jsou přímky totožné nebo různoběžné. Přímky dále nemohou být rovnoběžné, jelikož nedokážeme najít rovinu, která by obě zadané přímky obsahovala. Přímky p a q jsou proto mimoběžné.



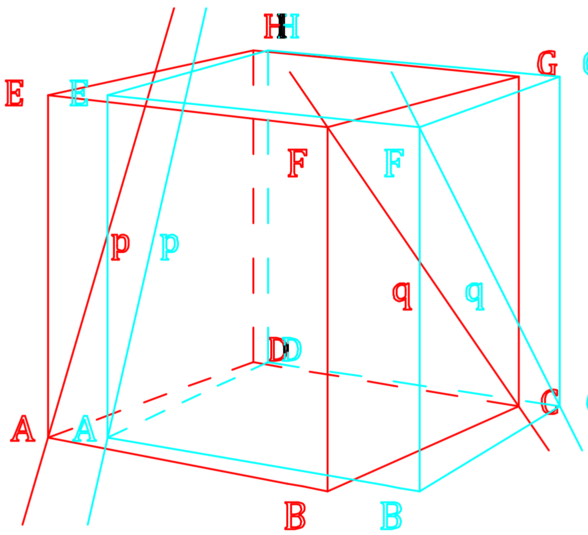
Obr. 3.10: Poloha přímek $p = \leftrightarrow EF$ a q

Na obrázku 3.10 máme dány přímku $p = \leftrightarrow EF$ a přímku q protínající hrany FG a GH krychle. Obě zadané přímky leží v horní podstavě $EFGH$. Hrany krychle EF a GH leží na rovnoběžných přímkách. Přímka p je tedy rovnoběžná s hranou GH. Oproti tomu přímka q hranu GH protíná. Jak je patrné, přímky p a q nemohou být rovnoběžné. Víme, že leží v téže rovině a nejsou rovnoběžné, zbývají tedy možnosti, že jsou přímky totožné nebo různoběžné. Na obrázku 3.10 můžeme nahlédnout, že přímky jsou různoběžné a jejich průsečík je bod $X \in p \cap q$.



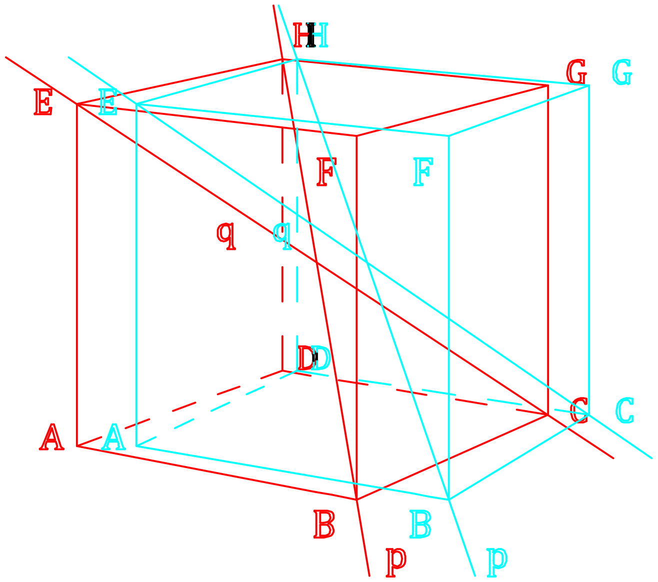
Obr. 3.11: Poloha přímek p a q

Na obrázku 3.11 máme ukázku přímek p a q, které nejsou zadané pomocí vrcholů krychle, pouze protínají její hrany. Přímky p a q jsou rovnoběžné.



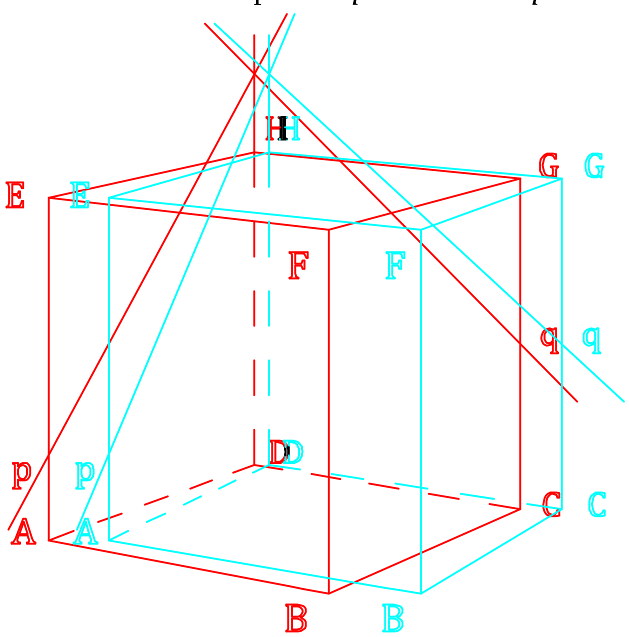
Obr. 3.12: Poloha přímek p a $q = \leftrightarrow CF$

Na obrázku 3.12 vidíme přímku p, na které leží vrchol krychle A a která protíná hranu EH, a přímku $q = \leftrightarrow CF$. Přímka p leží v boční stěně ADE. Přímka q leží v boční stěně BCF, která je rovnoběžná se stěnou ADE. Přímky nemají žádný společný bod, proto budou buď rovnoběžné, nebo mimoběžné. Zadané přímky p a q neleží v téže rovině. Můžeme prohlásit, že přímky p a q jsou mimoběžné.



Obr. 3.13: Poloha přímek $p = \leftrightarrow BH$ a $q = \leftrightarrow EC$

Na obrázku 3.13 máme zadány přímky $p = \leftrightarrow BH$ a $q = \leftrightarrow CE$. Hrany krychle EH a BC leží na rovnoběžných přímkách, leží tedy v jedné rovině – v rovině $\leftrightarrow BCE = \leftrightarrow BCH$. V této rovině leží i přímky $p = \leftrightarrow BH$ a $q = \leftrightarrow CE$, nemohou být proto mimoběžné. Jak vidíme na obrázku 3.13, zadané přímky nejsou ani totožné, ani rovnoběžné, nýbrž jsou různoběžné.



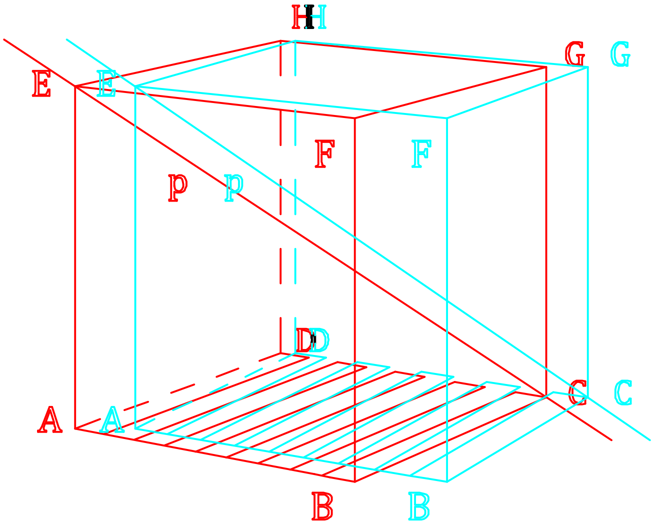
Obr. 3.14: Poloha přímek p a q

Na obrázku 3.14 vidíme přímky p a q, které nejsou zadány pomocí vrcholů krychle $ABCDEFGH$. O přímce p ovšem víme, že protíná hrany AE a EH, a přímka q protíná hrany CG a GH. Evidentně nejsou totožné ani rovnoběžné. Na anaglyfu na obrázku 3.14 si můžeme všimnout, že jsou přímky p a q různoběžné a protínají se na prodloužení hrany DH.

3.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

V části 3.2 jsme uvedli, že můžeme rozlišit, zda přímka leží či neleží v dané rovině. To samozřejmě platí, nicméně lze rozlišit více možných poloh přímky a roviny. Stejně jako v případě vzájemné polohy dvou přímek nás bude zajímat, kolik společných bodů přímka a rovina má.

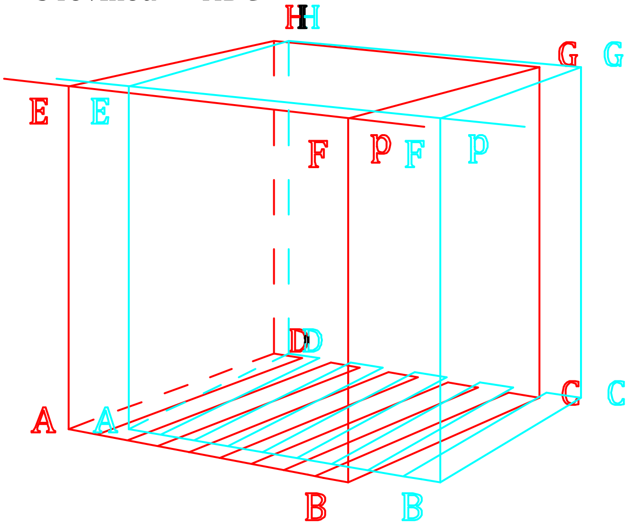
- Přímka *leží v rovině* (je s ní incidentní), leží-li každý její bod v dané rovině.
- Má-li přímka s rovinou společný pouze jeden bod, říkáme, že je s danou rovinou *různoběžná*. Jejich společnému bodu říkáme průsečík.
- Nemá-li přímka s rovinou žádný společný bod, pak je s danou rovinou *rovnoběžná*.



Obr. 3.15: Přímka $p = \leftrightarrow EC$ různoběžná s rovinou $\leftrightarrow ABC$

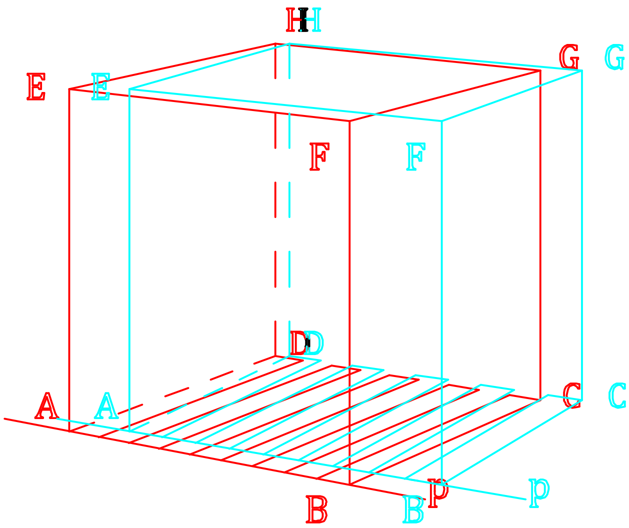
V prostoru tedy rozlišujeme tři případy vzájemné polohy přímky a roviny – přímka je s rovinou incidentní, různoběžná nebo rovnoběžná. Na následujících obrázcích si ukážeme zmiňované případy polohy přímky a roviny. Anaglyfy odpovídají obrázkům Obr. 24a-c v učebnici stereometrie na straně 25. Přímku a rovinu zadáme pomocí bodů krychle $ABCDEFGH$.

Na obrázku 3.15 máme zadanou přímku $p = \leftrightarrow EC$ a rovinu $\leftrightarrow ABC$ spodní podstavy krychle. Bod E v podstavě $ABCD$ neleží, leží v horní podstavě $EFGH$. Bod C je naopak společným bodem přímky p a roviny $\leftrightarrow ABC$. Přímka p je různoběžná s rovinou $\leftrightarrow ABC$ a bod C je jejich průsečíkem.



Obr. 3.16: Přímka $p = \leftrightarrow EF$ rovnoběžná s rovinou $\leftrightarrow ABC$

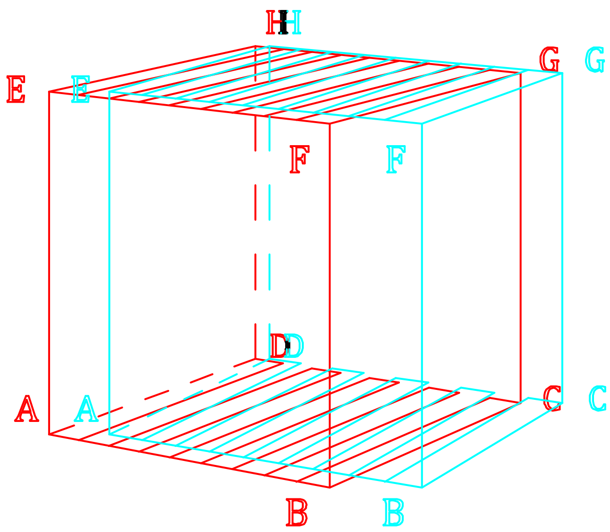
Na obrázku 3.16 je zadána přímka $p = \leftrightarrow EF$ a rovina $\leftrightarrow ABC$ dolní podstavy krychle. Přímka $p = \leftrightarrow EF$ leží v horní podstavě krychle, tedy v rovině rovnoběžné se zadanou rovinou $\leftrightarrow ABC$. Přímka $p = \leftrightarrow EF$ je s rovinou $\leftrightarrow ABC$ rovnoběžná.



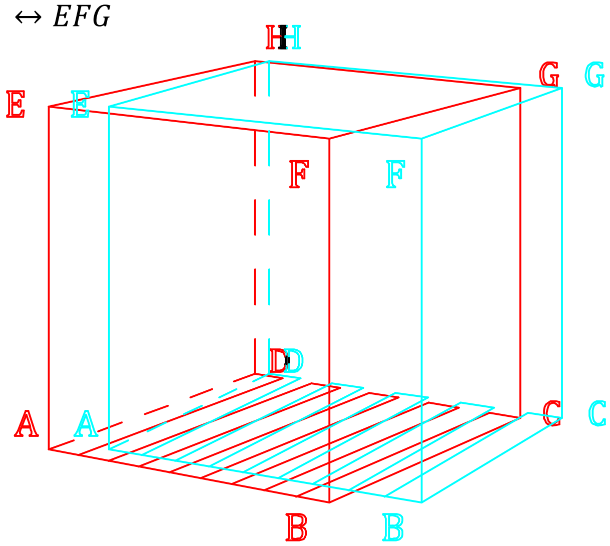
Obr. 3.17: Přímka $p = \leftrightarrow AB$ incidentní s rovinou $\leftrightarrow ABC$

Na obrázku 3.17 vidíme přímku $p = \leftrightarrow AB$ a rovinu $\leftrightarrow ABC$. Body A a B přímky $p = \leftrightarrow AB$ leží v rovině $\leftrightarrow ABC$. Jak víme z části 3.2, přímka je incidentní se zadanou rovinou, leží-li v ní alespoň dva různé body dané přímky. Body A a B jsou různé a leží v rovině $\leftrightarrow ABC$. Přímka $p = \leftrightarrow AB$ je proto incidentní s rovinou $\leftrightarrow ABC$.

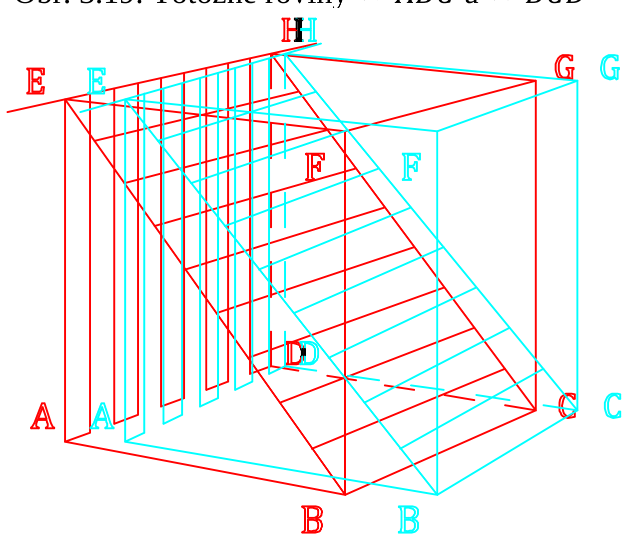
3.5 Vzájemná poloha dvou rovin



Obr. 3.18: Rovnoběžné roviny $\leftrightarrow ABC$ a $\leftrightarrow EFG$



Obr. 3.19: Totožné roviny $\leftrightarrow ABC$ a $\leftrightarrow BCD$



Obr. 3.20: Různoběžné roviny $\leftrightarrow ADH$ a $\leftrightarrow BCE$

Již jsme prošli možné polohy dvou přímek a přímky a roviny, teď bude následovat vzájemná poloha dvou rovin. Stejně jako v předchozích případech budeme hledět na to, kolik mají společných bodů, jaký je jejich průnik.

Dvě roviny jsou:

- *totožné* (splývající), mají-li všechny body společné;
- *různoběžné*, pokud mají společnou pouze jednu přímku, které říkáme *průsečnice*;
- *rovnoběžné*, pokud nemají žádný společný bod.

Nyní se podíváme na příklad 1 z učebnice stereometrie na straně 28. Konkrétní úlohy můžeme vidět vlevo na obrázcích 3.18-20.

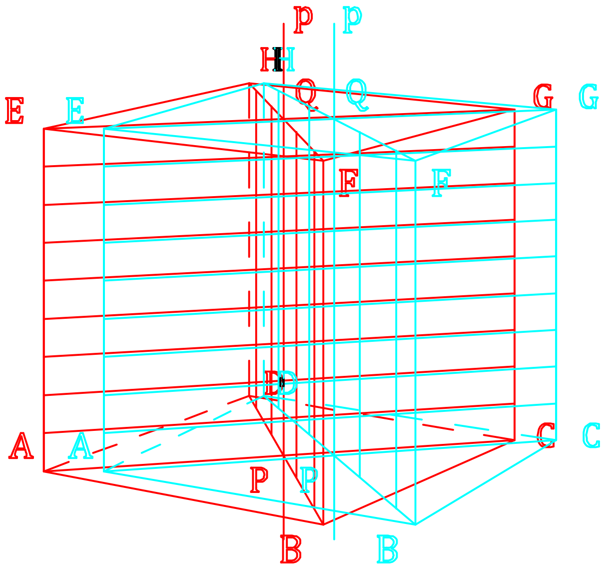
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin a) $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow EFH$, b) $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow BCD$, c) $\leftrightarrow ADH$, $\leftrightarrow BCE$.

a) Roviny $\leftrightarrow ABC$ a $\leftrightarrow EFH$ (Obr. 3.18) obsahují po řadě dolní a horní podstavu krychle. Nemají žádný společný bod. Roviny $\leftrightarrow ABC$ a $\leftrightarrow EFH$ jsou rovnoběžné.

b) Roviny $\leftrightarrow ABC$ a $\leftrightarrow BCD$ (Obr. 3.19) jsou roviny dolní podstavy zadané krychle. Mají všechny body společné, jsou proto totožné.

c) Roviny $\leftrightarrow ADH$ a $\leftrightarrow BCE$ (Obr. 3.20) rozhodně nejsou totožné, jelikož dva z bodů, kterými je zadána rovina $\leftrightarrow BCE$, tj. body B, C, neleží v rovině $\leftrightarrow ADH$. Jak vidíme na obrázku 3.20, roviny mají společnou přímku $\leftrightarrow EH$. Roviny $\leftrightarrow ADH$ a $\leftrightarrow BCE$ jsou různoběžné a jejich průsečnicí je přímka $\leftrightarrow EH$.

Jednou z úloh, se kterou se ve stereometrii setkáváme, je najít průsečnici různoběžných rovin. Tuto dovednost pak budeme dále využívat při sestrojování řezů těles. Nyní si projdeme příklad 2 na straně 28 v učebnici stereometrie.



Obr. 3.21: Různoběžné roviny $\leftrightarrow ACE$ a $\leftrightarrow BDF$ s průsečnicí $p = \leftrightarrow PQ$

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečnici rovin $\leftrightarrow ACE$ a $\leftrightarrow BDF$.

Na obrázku 3.21 máme vyznačené roviny $\leftrightarrow ACE$ a $\leftrightarrow BDF$. Dolní podstava krychle obsahuje přímky $\leftrightarrow AC$ a $\leftrightarrow BD$, které po řadě náleží rovinám $\leftrightarrow ACE$ a $\leftrightarrow BDF$. Tyto přímky jsou různoběžné a protínají se v bodě P (viz obr. 3.21). Obdobně přímky $\leftrightarrow EG$ a $\leftrightarrow FH$, náležící po řadě rovinám $\leftrightarrow ACE$ a $\leftrightarrow BDF$, leží v horní podstavě krychle a jsou různoběžné. Jejich průsečík jsme na Obr. 3.21 označili jako bod Q. Našli jsme již dva různé body P a Q, které oba leží v zadaných rovinách. (Určili jsme je jako průsečíky přímek, které jsou incidentní se zadanými rovinami.) Dva různé body v prostoru určují právě jednu přímku a leží-li dva různé body přímky v jedné rovině, leží v této rovině celá tato přímka (viz část 3.2). Přímka $p = \leftrightarrow PQ$ je proto hledanou průsečnicí rovin $\leftrightarrow ACE$ a $\leftrightarrow BDF$.

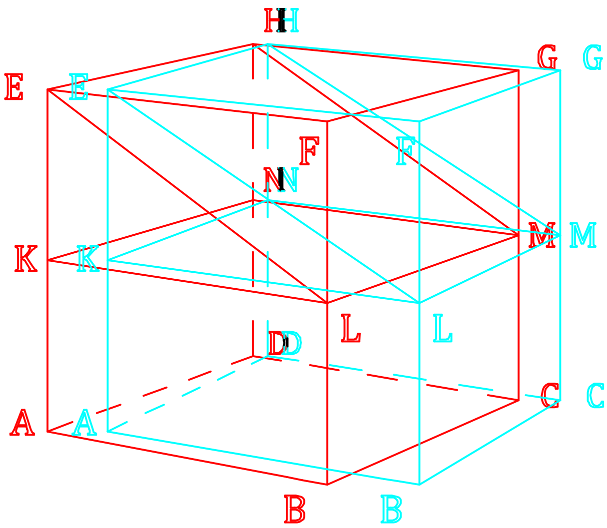
3.6 Vzájemná poloha tří rovin

V předchozím textu jsme se zabývali vzájemnou polohou dvou rovin. Při řešení stereometrických úloh je však také potřeba znát možné vzájemné polohy tří rovin. V této části bakalářské práce si tedy projdeme vzájemnou polohu tří rovin. Budeme předpokládat, že žádné dvě zadané roviny nejsou totožné. Případem, kdy dvě ze tří zadaných rovin splývají, se zabývat nebudeme, protože tím získáme vzájemnou polohu dvou rovin, kterou jsme právě probrali.

Nyní si uveďme, jaké možné vzájemné polohy tří navzájem různých rovin v prostoru mohou roviny mezi sebou mít:

- Každé dvě roviny jsou rovnoběžné.
- Dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná v rovnoběžných přímkách.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné a všechny tři průsečnice jsou totožné přímky.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné a jejich průsečnicemi jsou přímky navzájem rovnoběžné a různé.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné a jejich průsečnicemi jsou navzájem různé různoběžné přímky, které mají společný právě jeden bod. Tento bod je jediným společným bodem daných rovin.

Ukážeme si všech pět uvedených případů na následujícím příkladě, který se v učebnici stereometrie nachází na straně 35.



Obr. 3.22: Vzájemné polohy tří rovin

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Body K, L, M, N jsou po řadě středy hran AE, BF, CG, DH (Obr. 3.22). Určete průnik každých dvou z dané trojice rovin a potom průnik všech tří rovin:

a) $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow EFG$,
b) $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow EFG$, $\leftrightarrow EHL$,
c) $\leftrightarrow BCG$, $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow EHL$,
d) $\leftrightarrow ADH$, $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow EHL$,
e) $\leftrightarrow ADH$, $\leftrightarrow DCG$, $\leftrightarrow EHL$.

a) V tomto případě jsou každé dvě roviny rovnoběžné a průnikem daných rovin je prázdná množina – nemají společný žádný bod.

b) Zadané roviny $\leftrightarrow KLM$ a $\leftrightarrow EFG$ nemají žádný společný bod, jsou rovnoběžné. Ze zadání vidíme, že roviny $\leftrightarrow KLM$ a $\leftrightarrow EHL$ obsahují bod L. Navíc v obou rovinách leží i bod M, jak je patrné z obrázku 3.22. Z toho vyplývá, že roviny $\leftrightarrow KLM$ a $\leftrightarrow EHL$ jsou různoběžné a jejich průsečnicí je přímka $\leftrightarrow LM$. Podobně roviny $\leftrightarrow EFG$ a $\leftrightarrow EHL$ mají společné různé body E a H, jsou různoběžné a jejich průsečnicí je přímka $\leftrightarrow EH$. Přímky $\leftrightarrow LM$ a $\leftrightarrow EH$ jsou rovnoběžné. Vidíme tedy případ, kdy dvě roviny jsou rovnoběžné ($\leftrightarrow KLM$ a $\leftrightarrow EFG$) a třetí rovina $\leftrightarrow EHL$ je s oběma rovinami různoběžná a protíná je v rovnoběžných přímkách.

c) V úloze b) jsme již zjistili, že roviny $\leftrightarrow KLM$ a $\leftrightarrow EHL$ jsou různoběžné a jejich průsečnicí je přímka $\leftrightarrow LM$. Roviny $\leftrightarrow KLM$ a $\leftrightarrow BCG$ jsou taktéž různoběžné s průsečnicí $\leftrightarrow LM$. Všechny tři roviny $\leftrightarrow BCG$, $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow EHL$ jsou tedy navzájem různoběžné a jejich průnikem je společná přímka $\leftrightarrow LM$.

d) O rovinách $\leftrightarrow KLM$ a $\leftrightarrow EHL$ jsme v předchozích úlohách již zjistili, že se protínají v přímce $\leftrightarrow LM$. Roviny $\leftrightarrow ADH$ a $\leftrightarrow KLM$ jsou různoběžné a jejich průnikem je přímka $\leftrightarrow KN$. Poslední dvojice rovin, tj. $\leftrightarrow ADH$ a $\leftrightarrow EHL$, má společnou hranu krychle EH. Roviny jsou různoběžné a jejich průsečnicí je přímka $\leftrightarrow EH$. Zadané roviny $\leftrightarrow ADH$, $\leftrightarrow KLM$ a $\leftrightarrow EHL$ jsou každé dvě různoběžné a jejich průsečnicemi jsou rovnoběžné přímky $\leftrightarrow LM$, $\leftrightarrow KN$ a $\leftrightarrow EH$, jak si můžeme všimnout na obrázku 3.22.

e) Máme zadány roviny $\leftrightarrow ADH$ (levá boční stěna krychle), $\leftrightarrow DCG$ (zadní stěna krychle) a $\leftrightarrow EHL$. Body E a H jsou incidentní s rovinou $\leftrightarrow ADH$. Roviny $\leftrightarrow ADH$ a $\leftrightarrow EHL$ jsou proto různoběžné a jejich průsečnicí je přímka $\leftrightarrow EH$. Rovina $\leftrightarrow DCG$ obsahuje bod H a bod M, který je středem hrany CG. Body H a M leží i v rovině $\leftrightarrow EHL$, z čehož vyplývá, že zmiňované roviny jsou různoběžné a jejich průnikem je přímka $\leftrightarrow HM$. Roviny $\leftrightarrow ADH$ a $\leftrightarrow DCG$ mají společnou hranu krychle DH. I tyto dvě roviny jsou různoběžné a mají společnou přímku $\leftrightarrow DH$. Všechny tři zadané roviny jsou navzájem různoběžné. Jejich průsečnicemi jsou přímky $\leftrightarrow EH$, $\leftrightarrow HM$ a $\leftrightarrow DH$, které se protínají v bodě H. Bod H je společný všem třem zadaným rovinám.

Tímto jsme probrali vzájemné polohy bodů, přímek a rovin, které v prostoru nastávají. V následující části nabyté vědomosti využijeme při řešení konstrukčních úloh, u kterých je nutné znát pouze tvar tělesa, kterého se úloha týká, jeho rozměry znát nepotřebujeme.

3.7 Polohové konstrukční úlohy a jejich řešení

V této části bakalářské práce rozebereme polohové konstrukční úlohy. Polohové se jim říká proto, že se v nich využívají znalosti o vzájemných polohách bodů, přímek a rovin. Při řešení příkladů nám stačí vědět, s jakými objekty pracujeme a jaké jsou jejich vlastnosti.

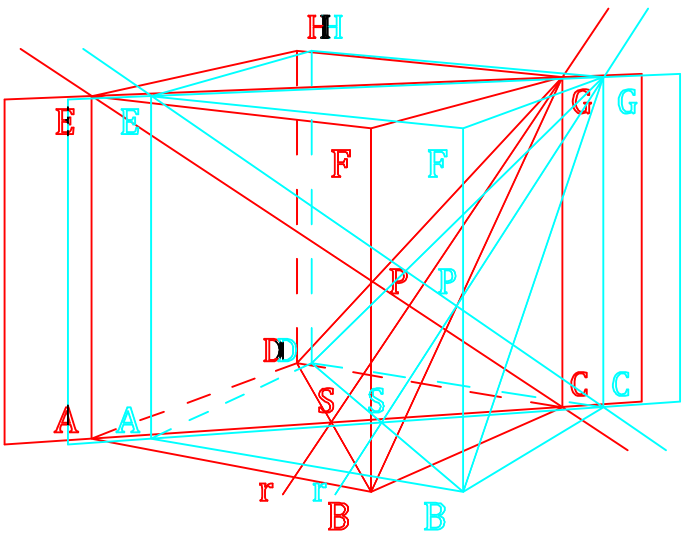
Ukážeme si příklad na průnik přímky s rovinou a dále příklady na řez tělesa rovinou. Průnik přímky s rovinou se určuje po té, co zjistíme jejich vzájemnou polohu. Je-li přímka různoběžná se zadanou rovinou, má s ní společný právě jeden bod, který chceme najít. V případech rovnoběžnosti a incidence není zapotřebí průnik hledat – v prvním případě je průnikem prázdná množina (přímka a rovina nemají žádný společný bod), v druhém případě celá přímka leží v rovině, tudíž každý bod dané přímky leží v zadané rovině a průnikem je proto zadaná přímka.

Dalším typem polohové konstrukční úlohy je řez tělesa rovinou. Máme-li najít řez tělesa rovinou (*rovina řezu*), zajímá nás průnik daného tělesa a dané roviny. Průnikem tělesa a roviny řezu je nějaká část zadané roviny a my chceme najít hranici této části. Musíme tedy hledat průnik roviny a hranice tělesa. Hranici tělesa tvoří nějaké mnohoúhelníky, což jsou rovinné útvary. (V této práci se nebudeme zabývat tělesy, jejichž hranice není tvořena mnohoúhelníky.) Musíme tedy určit průsečnice stěn tělesa a roviny řezu.

V učebnici se vše rýsuje ve volném rovnoběžném promítání (Pomykalová, 1995). Naše přiložené obrázky jsou anaglyfy, ovšem všechny konstrukce budeme popisovat tak, jako bychom daný problém řešili v průmětu. Anaglyfy nám slouží k tomu, abychom ukázali, jak situace vypadá v prostoru.

Nyní se podíváme na problém hledání průniku přímky s rovinou, konkrétně na příklad 1 v učebnici stereometrie na straně 39.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky $\leftrightarrow CE$ a roviny $\leftrightarrow BDG$. (obr. 3.23)



Obr. 3.23: Průsečík přímky $\leftrightarrow CE$ s rovinou $\leftrightarrow BDG$

Máme zadanou krychli $ABCDEFGH$ a pomocí jejích vrcholů přímku $\leftrightarrow CE$ a rovinu $\leftrightarrow BDG$. Spojíme body C a E a dále dvojice bodů BD, BG a DG, abychom vyznačili zadané prvky. Vidíme, že přímka $\leftrightarrow CE$ je různoběžná s rovinou $\leftrightarrow BDG$. Nyní se pustíme do hledání průsečíku.

Zvolíme si nějakou rovinu obsahující přímku $\leftrightarrow CE$, např. rovinu $\leftrightarrow ACE$. V této rovině bude ležet i hledaný průsečík P přímky a roviny. Průsečík P je společným bodem přímky a roviny, a protože přímka $\leftrightarrow CE$ leží v pomocné rovině $\leftrightarrow ACE$, je průsečík P i společným bodem roviny $\leftrightarrow ACE$ a roviny $\leftrightarrow BDG$. Průnikem různoběžných rovin $\leftrightarrow ACE$ a $\leftrightarrow BDG$ je nějaká přímka r, na které určitě bude ležet hledaný průsečík P. Průsečnici zmíněných rovin tedy najdeme. V dolní podstavě krychle spojíme body A a C. Tato spojnice leží v rovině $\leftrightarrow ACE$ a protíná přímku $\leftrightarrow BD$ ležící v rovině $\leftrightarrow BDG$. Průsečík $S \in \leftrightarrow AC \cap \leftrightarrow BD$ je incidentní s oběma rovinami a bude ležet na hledané průsečnici. Dále vidíme, že obě roviny mají společný bod G. Průsečnice r je tedy určena body

$\leftrightarrow SG$, které spojíme. Průsečnice r leží v rovině $\leftrightarrow ACE$ a určitě protíná přímku $\leftrightarrow CE$. Průsečík P přímek $r = \leftrightarrow SG$ a $\leftrightarrow CE$ je hledaný průsečík přímky $\leftrightarrow CE$ a roviny $\leftrightarrow BDG$.

Víme tedy, jak se sestrojuje průsečík přímky a roviny. Obecný postup je vždy stejný:

- Zvolíme pomocnou rovinu, která obsahuje zadanou přímku.
- Najdeme průsečnici pomocné roviny a zadané roviny.
- Průsečík této průsečnice a zadané přímky je hledaný průsečík přímky a roviny.

Přesuňme se již k příkladům, které se týkají řezu tělesa rovinou. My si probereme celkem šest příkladů, z nichž čtyři se budou týkat řezu krychle rovinou a zbylé dva řezu pravidelného čtyřbokého jehlanu rovinou. Než přejdeme k jednotlivým zadáním, uvedeme si tři důležité věty, které při sestrojování řezu budeme využívat. Najdeme je také v učebnici stereometrie na straně 39.

- Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.

Tento poznatek jsme zmínili již v části 3.2. Při konstrukci řezů těles ho používáme tehdy, leží-li dva různé body roviny řezu v některé ze stěn tělesa (nebo alespoň v rovině nějaké stěny tělesa). Tyto body spojíme přímkou, která je průsečnicí roviny řezu a dané stěny tělesa. V dalším textu budeme na tento poznatek odkazovat zkratkou D1.

- Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí roviny ve dvou rovnoběžných přímkách.

S uvedenou větou jsme se setkali v části 3.6, která pojednávala o vzájemné poloze tří rovin. Jedna z možností, které jsme popisovali (viz Obr. 3.22), byla právě poloha, kdy dvě roviny jsou rovnoběžné, třetí je s oběma z nich různoběžná a protíná je v rovnoběžných přímkách.

Během konstrukce řezu tělesa můžeme toto využít, má-li těleso alespoň nějaké stěny ležící v rovnoběžných rovinách (např. krychle). Známe-li průsečnici jedné stěny (př. dolní podstava krychle) tělesa s rovinou řezu, průsečnice řezu stěny rovnoběžné (horní podstava krychle) s první stěnou (dolní podstava krychle) bude rovnoběžná s již nalezenou průsečnicí. Až budeme rýsovat, stačí nám vést rovnoběžku s nalezenou průsečnicí bodem roviny řezu, který v dané stěně (horní podstava krychle) leží.

Zmíněný postup označíme v souladu s učebnicí stereometrie zkratkou D2.

- Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice.

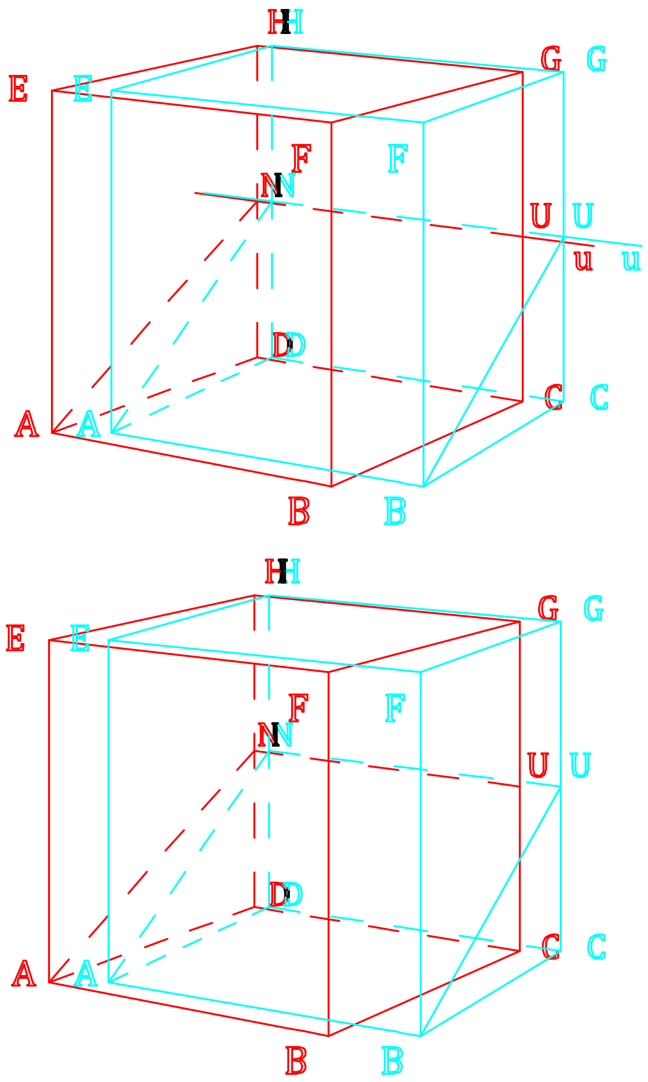
V části 3.6 popisující vzájemné polohy tří roviny jsme se dozvěděli, že tři po dvou různoběžné roviny se mohou protínat v navzájem různoběžných přímkách, které mají společný právě jeden bod. Tento bod je společným bodem všech tří rovin.

Vezmeme-li dvě sousední stěny tělesa (stěny, které mají společnou hranu tělesa) a rovinu řezu, pak přímky, které jsou průsečnicemi těchto rovin, se protínají v jednom bodě. Konkrétní použití si uvedeme později na příkladech a odkážeme na tento odstavec zkratkou D3.

Popsali jsme si základní postupy při konstrukci řezů tělesa, můžeme tedy začít řešit následující zadání. Příklady jsou ze strany 40-44 z učebnice stereometrie.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body:

a) A, B, U, kde U je středem hrany CG.



Obr. 3.24: Řez krychle rovinou $\leftrightarrow ABU$; nahoře i s pomocnými čarami, dole pouze výsledný řez

Máme narýsovanou krychli $ABCDEFGH$ a našli jsme si bod U, jenž je středem úsečky CG (Obr. 3.24 nahoře). Nyní najdeme průnik tělesa s rovinou řezu $\leftrightarrow ABU$.

Úsečka AB je hranou krychle a navíc leží v rovině řezu. Úsečka AB tvoří hranici řezu, je průnikem roviny řezu a dvou stěn krychle – dolní podstavy $ABCD$ a přední stěny $ABFE$.

Vidíme, že body B a U leží v boční stěně $BCGF$ krychle. Zároveň to jsou dva různé body roviny řezu, podle poznatku D1 je proto spojíme a dostaneme část hranice řezu.

Dále využijeme pravidla D2. Krychle je těleso, které má protější stěny v rovnoběžných rovinách. My známe průsečnici AB roviny řezu s přední stěnou. Průsečnice roviny řezu se zadní stěnou $DCGH$ bude s přímkou $\leftrightarrow AB$ rovnoběžná. Ze zadání víme, že bod U leží ve stěně $DCGH$. Podle D2 tedy vedeme bodem U rovnoběžku u s přímkou $\leftrightarrow AB$. Průsečík narýsované rovnoběžky u s hranou DH označíme N.

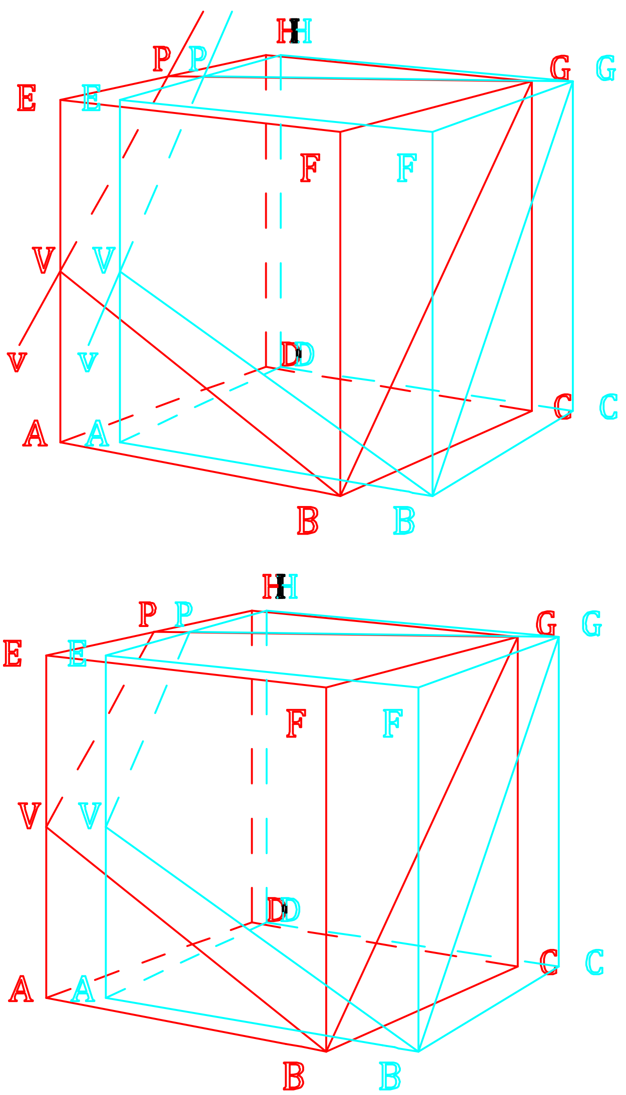
Bod N leží v rovině řezu a také v rovině stěny $ADHE$. Podle D1 ho můžeme spojit s bodem A a dostaneme zbývající průsečnici roviny řezu, která ohraničuje řez krychle rovinou $\leftrightarrow ABU$.

Přímka $\leftrightarrow AN$ musí být rovnoběžná s přímkou $\leftrightarrow BU$, protože leží v rovnoběžných rovinách a v rovině řezu $\leftrightarrow ABU$. Nevyjde-li rovnoběžně, je to zaviněno nepřesností rýsování. Teoreticky však musí vyjít rovnoběžně. Je dobré si to uvědomit, protože si takto můžeme kontrolovat správnost konstrukcí. Uděláme-li někde při rýsování chybu, výsledek vyjde jinak, než má, čehož si můžeme všimnout a chybu zpětně odhalit.

Na obrázku 3.24 je nahoře vyznačen postup i s pomocnou přímkou u, dole je pouze výsledný řez krychle – obdélník $ABUN$.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body:

b) B, G, V, kde V je středem hrany AE.



Obr. 3.25: Řez krychle rovinou $\leftrightarrow BGV$; nahoře i s pomocnými čarami, dole pouze výsledný řez

Máme narýsovanou krychli $ABCDEFGH$ a našli jsme si bod V, jenž je středem úsečky AE (Obr. 3.25 nahoře), a nyní budeme hledat průsečnice roviny řezu $\leftrightarrow BGV$ se stěnami krychle.

Přední stěna $ABEF$ krychle obsahuje zadané body B a V roviny řezu. Podle D1 je spojíme a dostaneme tak první úsečku, která ohraničuje řez krychle rovinou $\leftrightarrow BGV$.

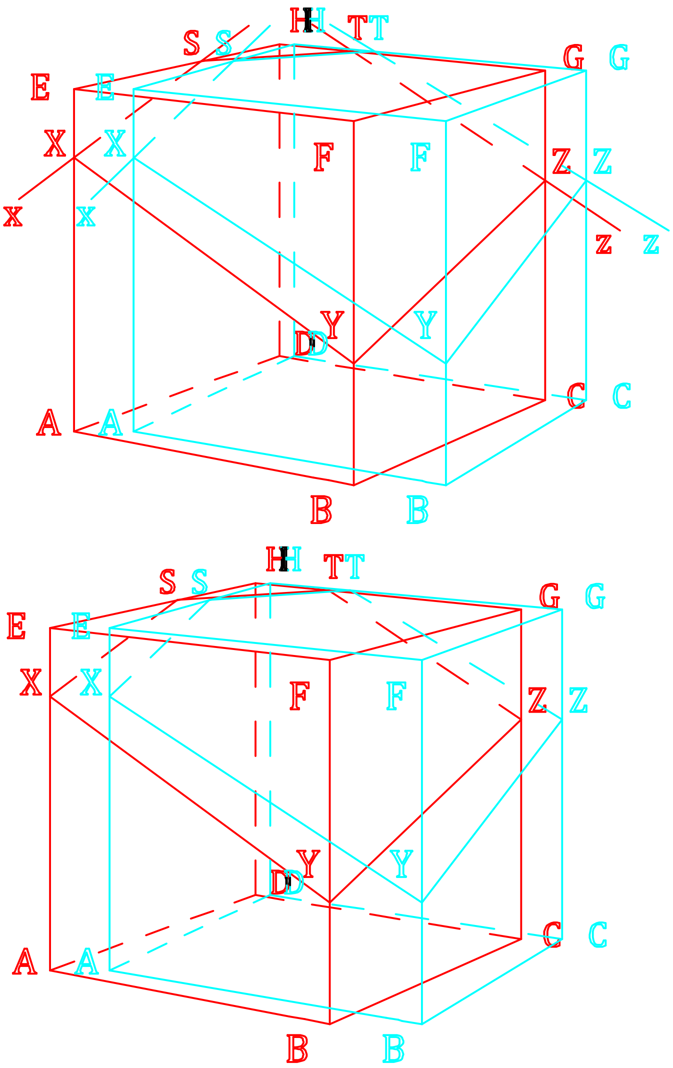
Body B a G jsou incidentní s boční stěnou $BCGF$ krychle. Leží v jedné rovině a můžeme je v souladu s pravidlem D1 spojit, abychom dostali hranici řezu v rovině boční stěny krychle.

Nyní využijeme postupu D2. Boční stěny krychle $BCGF$ a $ADHE$ leží v rovnoběžných rovinách, jejich průsečnice s rovinou řezu proto budou rovnoběžné přímky. Průsečnici stěny $BCGF$ jsme již našli. Dále víme, že ve stěně $ADHE$ leží zadaný bod V roviny řezu. Bodem V tedy vedeme přímku v rovnoběžnou s přímkou $\leftrightarrow BG$.

Přímka v protne hranu EH krychle v bodě P. Tento bod leží v horní podstavě $EFGH$. Bod G je vrcholem horní podstavy, leží tedy v její rovině stejně jako bod P. Podle D1 tyto dva body spojíme a určíme hranici řezu.

Řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou $\leftrightarrow BGV$ tedy tvoří lichoběžník $BGPV$.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body:
c) X, Y, Z, kde X je bodem hrany AE tak, že $|AX| : |XE| = 4 : 1$, Y je bodem hrany BF tak, že $|BY| : |YF| = 1 : 2$, Z je bodem hrany CG tak, že $|CZ| : |ZG| = 2 : 1$.



Obr. 3.26: Řez krychle rovinou $\leftrightarrow XYZ$; nahoře i s pomocnými čarami, dole pouze výsledný řez

Máme narýsovanou krychli $ABCDEFGH$ a našli jsme si i body X, Y a Z tak, aby platily zadané poměry délek úseček. Hledáme řez krychle rovinou $\leftrightarrow XYZ$.

Body X a Y leží v přední stěně $ABFE$ krychle. Přímka jimi určená je podle D1 průsečnicí stěny $ABFE$ krychle s rovinou řezu $\leftrightarrow XYZ$. Body X a Y spojíme a dostaneme první hranici řezu tělesa.

Obdobným způsobem najdeme další část řezu krychle. Body Y a Z jsou incidentní s boční stěnou $BCGF$. Spojíme je (poznatek D1) a získáme další část hranice hledaného řezu.

Nyní využijeme, že protější stěny krychle leží v rovnoběžných rovinách.

V přední stěně $ABFE$ jsme narýsovali průsečnici $\leftrightarrow XY$ s rovinou řezu. S přímkou $\leftrightarrow XY$ bude rovnoběžná průsečnice incidentní se zadní stěnou $CGHD$. V této stěně leží zadaný bod Z. Bodem Z vedeme rovnoběžku z s přímkou $\leftrightarrow XY$. Přímka z protne hranu GH v bodě T, jenž je bodem roviny řezu současně v zadní stěně krychle i v její horní podstavě $EFGH$.

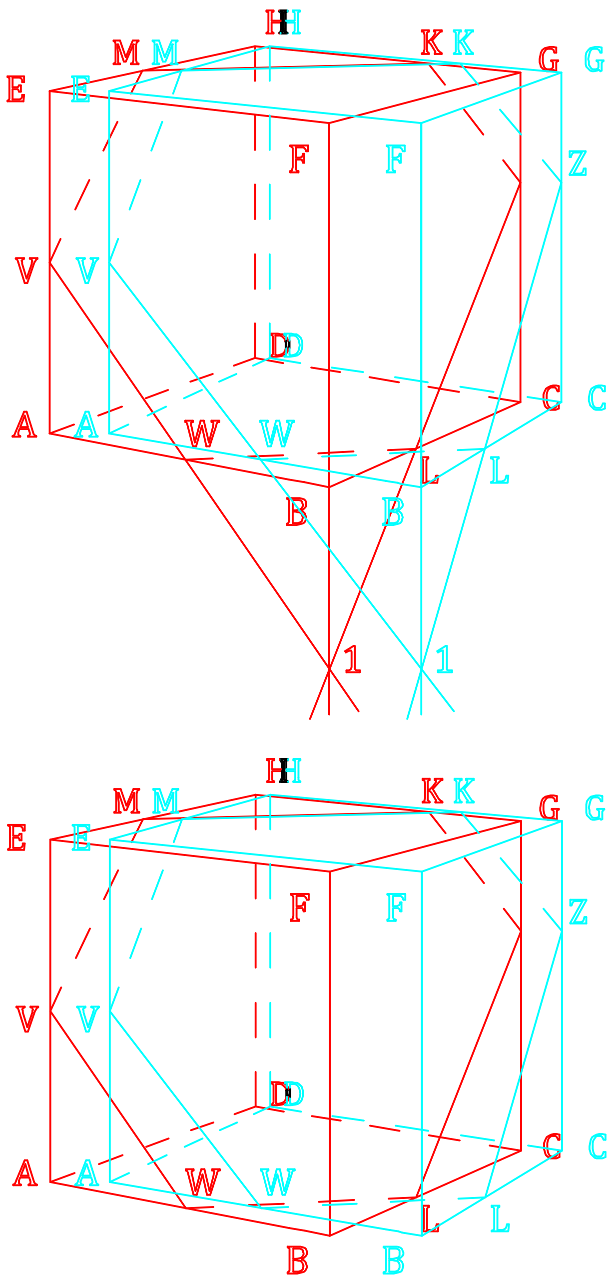
V boční stěně $BCGF$ je průsečnicí s rovinou řezu $\leftrightarrow XYZ$ přímka $\leftrightarrow YZ$. V protější boční stěně $ADHE$ leží bod X roviny řezu. Podle D2 povedeme bodem X rovnoběžku x s přímkou $\leftrightarrow YZ$. Přímka x protíná horní podstavu $EFGH$ na hraně EH v bodě, který označíme písmenem S.

Body T a S jsou incidentní s horní podstavou krychle a zároveň leží v rovině řezu $\leftrightarrow XYZ$. Podle D1 je spojíme přímkou a získáme zbývající část hranice řezu krychle rovinou $\leftrightarrow XYZ$.

Na obrázku 3.26 nahoře si můžeme prohlédnout postup konstrukce tohoto příkladu, dole je pouze výsledný řez – pětiúhelník $XYZTS$ – krychle rovinou $\leftrightarrow XYZ$.

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body:

c) V, W, Z, *kde V je středem hrany AE,*
W je středem hrany AB,
Z je bodem hrany CG tak, že $|CZ| : |ZG| = 2 : 1$.



Obr. 3.27: Řez krychle rovinou $\leftrightarrow VWZ$; nahoře i s pomocnými čarami, dole pouze výsledný řez

Máme narýsovanou krychli $ABCDEFGH$, vyznačili jsme si i body V, W a Z (Obr. 3.27 nahoře) a můžeme začít konstruovat řez krychle rovinou $\leftrightarrow VWZ$.

Body V a W leží v přední stěně $ABFE$, podle D1 je spojíme přímkou a máme průsečnici roviny řezu a přední stěny krychle.

Bod Z je incidentní se zadní stěnou $DCGH$ krychle, která je rovnoběžná s přední stěnou, jejíž průsečnici s rovinou řezu $\leftrightarrow VWZ$ již známe. Podle postupu D2 povedeme bodem Z rovnoběžku s přímkou $\leftrightarrow VW$, která protne hranu GH v bodě K.

Nyní využijeme poznatku D3. V boční stěně $BCGF$ chceme najít průsečnici s rovinou řezu $\leftrightarrow VWZ$. Jako třetí rovinu použijeme přední stěnu $ABFE$, jejíž průsečnici s rovinou řezu známe.

Stěny krychle $BCGF$ a $ABFE$ mají společnou hranu BF. Přímka $\leftrightarrow VW$ protne přímku $\leftrightarrow BF$ v bodě, který označíme číslem 1. Bodem 1 musí podle D3 procházet i průsečnice roviny řezu $\leftrightarrow VWZ$ s boční stěnou $BCGF$. V této stěně leží bod Z. Spojíme ho podle D1 s bodem 1 a určíme část hranice řezu LZ, kde bod L je průsečíkem přímky $\leftrightarrow 1Z$ a hrany krychle BC.

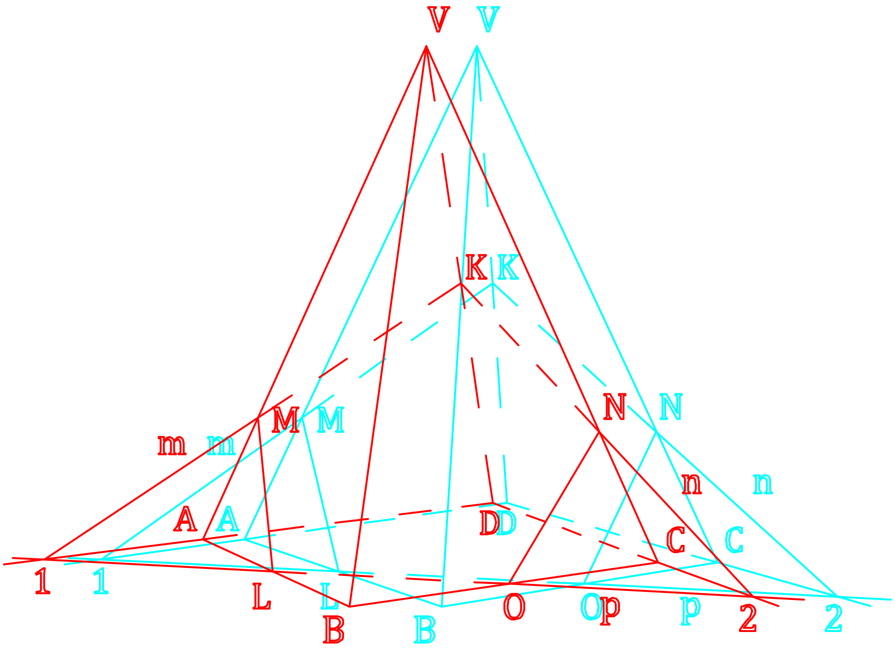
Dále nám postačí používat pravidla D1 a D2. Spojíme body W a L incidentní s dolní podstavou $ABCD$ krychle. Dále vedeme rovnoběžku bodem V s přímkou $\leftrightarrow LZ$, získáme tak na hraně EH bod M. Bod M spojíme s bodem K a uzavřeme šestiúhelník $VWLZKM$, jenž je řezem krychle rovinou $\leftrightarrow VWZ$.

Na obrázku 3.27 nahoře vidíme postup konstrukce, dole potom pouze krychli a výsledný řez zadanou rovinou.

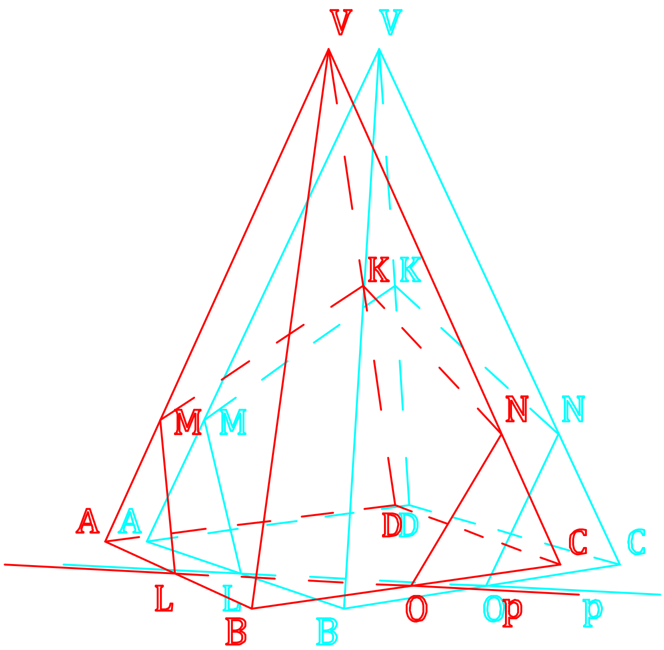
Tímto ukončíme sadu příkladů na řez krychle rovinou a přejdeme k příkladům na řez jehlanu zadanou rovinou. Ukončíme tak kapitolu o polohových konstrukčních úlohách.

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou, která je určena:

a) *přímkou p a bodem K, kde bod K je středem hrany DV a přímka p je rovnoběžná s přímkou $\leftrightarrow AC$ a prochází bodem L, který je středem hrany AB.*



Obr. 3.28: Řez jehlanu rovinou $\leftrightarrow Kp$ – i s pomocnými čarami



Obr. 3.29 Řez jehlanu rovinou $\leftrightarrow Kp$ - výsledek

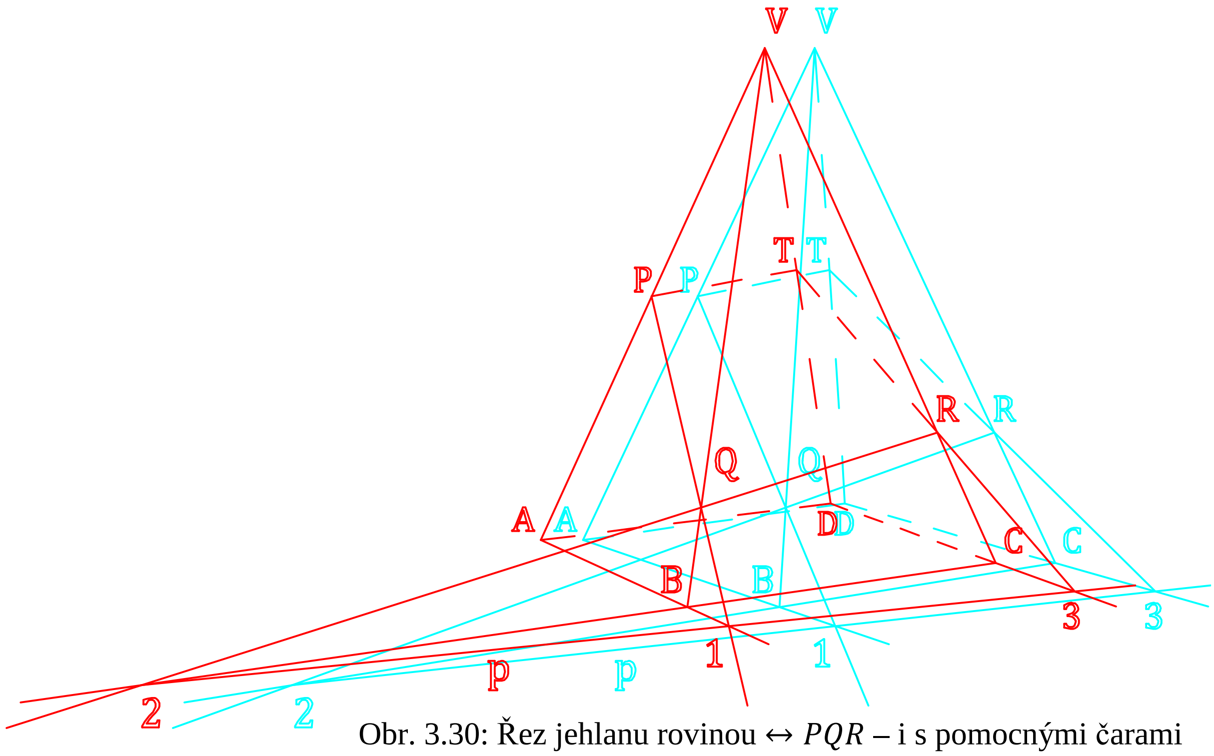
Narýsujeme pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ a zadané prvky – bod K a přímku p (viz Obr. 3.28). Naším úkolem je sestrojit řez jehlanu rovinou $\leftrightarrow Kp$.

Přímka p leží v podstavě $ABCD$ jehlanu a postupně protíná hrany AB a BC v bodech L a O. K sestrojení dalších částí hranice řezu budeme využívat pravidlo D3. Nejdříve se podíváme na průsečnice roviny podstavy, boční stěny ADV, která obsahuje bod K, a roviny řezu. Podstava jehlanu a boční stěna mají společnou přímku $\leftrightarrow AD$. Průsečnice všech tří rovin tedy prochází nějakým bodem přímky $\leftrightarrow AD$. Přímka p roviny řezu leží v podstavě jehlanu, musí proto protnout přímku $\leftrightarrow AD$. Průsečík přímek p a $\leftrightarrow AD$ označíme číslem 1. Bodem 1 podle D3 prochází průsečnice boční stěny ADV. Spojíme bod 1 s bodem K přímkou m, která protne hranu AV v bodě M. Podle D1 spojíme body L a M.

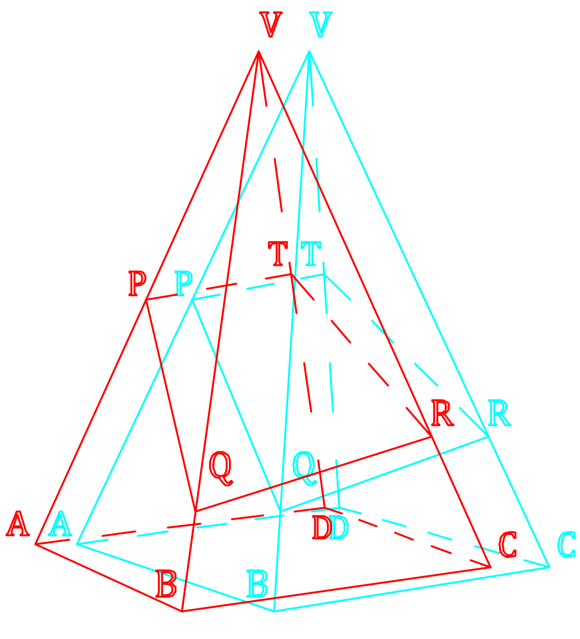
Podobně přímka p protíná přímku $\leftrightarrow CD$ v bodě 2. Bod 2 a bod K leží v boční stěně jehlanu i v rovině řezu $\leftrightarrow Kp$. Spojíme je přímkou n, která protne hranu CV v bodě N. Podle D1 narýsujeme spojnici bodů N a O, čímž jsme nalezli chybějící část hranice řezu jehlanu rovinou $\leftrightarrow Kp$. Řez jehlanu rovinou $\leftrightarrow Kp$ je pětiúhelník $LONKM$ (Obr. 3.29).

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou, která je určena:

b) body P, Q, R, kde P je střed hrany AV; Q je bodem hrany BV tak, že $|BQ| : |QV| = 1 : 5$; R je bodem hrany CV tak, že $|CR| : |RV| = 1 : 3$.



Obr. 3.30: Řez jehlanu rovinou $\leftrightarrow PQR$ – i s pomocnými čarami



Obr. 3.31: Řez jehlanu rovinou $\leftrightarrow PQR$ - výsledek

Nejdřív narýsujeme zadání – jehlan $ABCDV$ a body P, Q, R, které určují rovinu řezu $\leftrightarrow PQR$ (Obr. 3.30). Body P, Q a Q, R leží po řadě ve stěnách ABV a BCV, takže je podle D1 spojíme a dostaneme části hranice řezu jehlanu. Nyní podle pravidla D3 sestrojíme průsečnici roviny podstavy jehlanu s rovinou řezu, kterou pak dále využijeme při konstrukci průsečnice stěny CDV a roviny řezu $\leftrightarrow PQR$.

Přímka $\leftrightarrow PQ$ protne přímku $\leftrightarrow AB$ v bodě 1. Podobně přímka $\leftrightarrow QR$ protíná přímku $\leftrightarrow BC$ v bodě 2. Oba body leží v rovině řezu i v rovině podstavy jehlanu. Spojíme je tedy přímkou p. Přímky p i $\leftrightarrow CD$ leží v rovině podstavy jehlanu a protínají se v bodě 3. Bod 3 je společným bodem roviny řezu $\leftrightarrow PQR$, roviny $\leftrightarrow ABC$ a roviny $\leftrightarrow CDV$. Bod 3 můžeme spojit s bodem R a dostaneme tak průsečnici roviny řezu a boční stěny CDV. Tato průsečnice protíná hranu DV v bodě T. Bod T nakonec spojíme s bodem P a získáme tak kompletní hranici řezu jehlanu rovinou $\leftrightarrow PQR$. Řezem jehlanu rovinou $\leftrightarrow PQR$ je čtyřúhelník s vrcholy $PQRT$ (Obr. 3.31).

3.8 Závěr třetí kapitoly

V třetí kapitole jsme se věnovali středoškolským příkladům ze stereometrie, které jsme zpracovávali s pomocí anaglyfů, jež jsme se naučili vytvářet v kapitole druhé. Anaglyfy pomáhají čtenáři vytvořit si lepší představu o prostorové situaci, která je v textu rozebírána.

Celá třetí kapitola může být použita jako doplněk k učebnici stereometrie Evy Pomykalové (Pomykalová, 1995). Příklady řešené v této práci jsou převzaty právě z této učebnice.