UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Celá a necelá část reálného čísla

Bakalářská práce

Autor: Vladimír Bílek

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s výhradním použitím literatury, jež je uvedená v seznamu použité literatury a jejíž texty jsou řádně citovány.

V Praze dne 12. 4. 2012 ……..……..…..………………………

Vladimír Bílek

Poděkování

Děkuji Prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za čas, který věnovala vedení mé bakalářské práce.

Název:

Celá a necelá část reálného čísla

Abstrakt:

Cílem mé bakalářské práce je seznámit čtenáře s funkcemi celá, necelá, dolní celá a horní celá část reálného čísla a ukázat řešitelnost vybraných rovnic jedné neznámé obsahující funkci dolní celá část reálného čísla. V úvodu práce jsou vymezeny potřebné pojmy, značení a definice těchto funkcí. Hlavní část práce je věnována popisu strategií pro hledání řešení čtyř typů rovnic, $a\lfloor x \rfloor + bx + c = 0$, $ax\lfloor x \rfloor + bx + c = 0$, $\lfloor ax + b \rfloor = cx + d$ a $\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor cx + d \rfloor$. Odvozený obecný postup pro řešení první rovnice a popis strategie řešení zbývajících tří rovnic považuji za největší přínos práce. Postupy řešení jsou v každé kapitole demonstrovány na příkladech. V závěrečné části jsou uvedeny některé typy neřešených úloh s touto tematikou z různých oblastí matematiky.

Klíčová slova:

Celá část čísla, necelá část čísla, dolní celá část čísla, horní celá část čísla, algebraická rovnice

Title:

Floor function and fractional part of the real number

Abstract:

The aim of my bachelor thesis is to acquaint the reader with the floor function, ceiling functions and with fractional part of the real number, and show the feasibility of selected equations of one unknown that contains the floor functions of the real number. In the introductory part of my thesis, necessary concepts, notations and definitions of these functions are defined. The main part of the work is devoted to a description of strategies for finding solutions to following four types of equations: $a\lfloor x\rfloor + bx + c = 0$, $ax\lfloor x\rfloor + bx + c = 0$, $\lfloor ax + b\rfloor = cx + d$ and $\lfloor ax + b\rfloor = \lfloor cx + d\rfloor$. Derived general procedure for solving the first equation and a description of the strategy for finding solutions to the remaining three equations are the greatest benefits of my thesis. The procedures are demonstrated by examples in each chapter. The final section covers some types of unsolved problems from different areas of mathematics concerning this topic.

Key words:

Floor and ceiling functions, fractional part, algebraic equation

OBSAH

ÚVOD

Poprvé jsem se s pojmem celá část reálného čísla setkal v hodině matematické analýzy na vysoké škole, jako s jednou z mnoha nespojitých funkcí. Ovšem jen zcela okrajově, neboť jsme ji již dále nepoužívali. Až po pročtení tenké knížky Rovnice ve škole neřešené (Calda, 1995) mne zaujala problematika a způsoby řešení rovnic v kapitole věnované této funkci.

Studium základních vlastností funkcí celá a necelá část není příliš obtížné. Změna ovšem nastává, jestliže některou z funkcí použijeme v rovnicích či soustavách rovnic. Když porovnáme například strategie řešení nebo počet řešení takové rovnice s rovnicemi algebraickými, zjistíme řadu zajímavých rozdílů.

Celá část reálného čísla a s ní spojené úlohy se na druhém či třetím stupni probírají jen velmi okrajově. Z tohoto důvodu je cílem mé bakalářské práce nejprve představit značení, definice a základní vlastnosti funkcí celá a necelá část čísla a poté, v hlavní části práce, postupně ukázat čtenáři, jak řešit některé typy rovnic s dolní celou částí reálného čísla.

Pro studenty druhého či třetího stupně škol vidím téma celé části čísla jako příjemnou změnu od standardního průběhu výuky matematiky a jako pokus, jak získat jejich větší zájem o obor. Jelikož se funkce dolní celá část objevuje i v úlohách matematických olympiád, mohou řešitelé využít nových znalostí a uspět tak při řešení těchto úloh. Případný úspěch pak může změnit jejich celkový náhled na matematiku jako takovou.

1 Vymezení pojmu celá a necelá část reálného čísla

V odborné literatuře se uvádí různá značení a způsoby definice celé i necelé části reálného čísla. Tato kapitola je věnována ujasnění si základních pojmů a vytvoření jednotného náhledu na danou problematiku, na kterou následně naváží další kapitoly.

Úmluva. V následujícím textu budeme místo pojmů „Celá, necelá, horní celá, dolní celá a zlomková část reálného čísla“ používat zkráceně pojmy „Celá, necelá, horní celá, dolní celá a zlomková část čísla“, neboť v celé práci budeme pracovat v oboru $\mathbb{R}$. Kde bude nutné nezkrácený název pojmu zachovat, vzhledem k definicím či možným nesrovnalostem, učiníme tak.

1.1 Celá část reálného čísla

Celá část reálného čísla x je nespojitá funkce, která přiřazuje číslu x největší celé číslo m, které je menší nebo rovno číslu x. Funkci lze definovat například takto:

$$f(x) = m \;\Leftrightarrow (m \leq x < m + 1), \qquad \text{kde } m \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.1}$$

Jednodušeji řečeno, jedná se o zaokrouhlení dolů na nejbližší celé číslo, které je menší nebo rovno číslu x. Pro značení celé části čísla se nejčastěji používá symbol hranatých závorek [ ]. Tedy $[x]$ je celá část čísla x. Toto značení používá ve své knize i Emil Calda (1995), který celou část čísla definuje pomocí dvou konjunkcí. Snadno zapamatovatelnou definici funkce nalezneme také ve skriptech (Herman, Kučera, Šimša, 1996).

„Celá část $[x]$ reálného čísla x je definována těmito vlastnostmi:

$$[x] \in \mathbb{Z} \wedge [x] \leqq x \wedge [x] + 1 > x \tag{1.1.2}$$

Jinak řečeno: Celou částí reálného čísla x je největší celé číslo, které je nejvýše rovno číslu x.“ (Calda, 1995, s. 9)

*„**Definice.** Největší celé číslo nepřevyšující reálné číslo x se nazývá celá část čísla x a značí se $[x]$. Znamená to, že $[x]$ je to (jediné) celé číslo splňující nerovnosti*

$$[x] \leq x < [x] + 1.\text{“} \tag{1.1.3}$$

(Herman a kol., 1996, s. 229)

V odborné literatuře, a to nejen v matematice, ale i v informatice či elektrotechnice, narazíme ještě na další dva pojmy související s celou částí. Prvním z nich je „horní celá část“ a druhým „dolní celá část“. Označme si tyto funkce ve stejném pořadí $g(x)$ a $h(x)$, které definujeme

$$g(x) = n \;\Leftrightarrow (n - 1 < x \leq n), \qquad \text{kde } n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1.4}$$

$$h(x) = m \;\Leftrightarrow (m \leq x < m + 1), \qquad \text{kde } m \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.5}$$

Horní celá část čísla x se značí $\lceil x \rceil$, dolní celá část čísla x se značí $\lfloor x \rfloor$. Pravé strany ekvivalencí (1.1.1) a (1.1.5) jsou si rovny. Z toho plyne závěr, že pod pojmem celá část čísla, se ve většině případů rozumí dolní celá část čísla. Pro nás tedy $f(x) = h(x)$. Tento fakt není často z jedné knihy zřejmý, neboť většina autorů buď pracuje pouze s celou částí čísla, či s horní a dolní celou částí čísla. Například v (Calda, 1995) a v (Herman a kol., 1996) se pracuje pouze s funkcí celá část. Zahraniční literatura skutečnost shody celé části s dolní celou částí vysvětluje takto:

„Until recently, people had most often been writing $'[x]'$ *for the greatest integer* $\leq x$*, without good equivalent for the least integer function. Some authors had even tried to use* $'\,]x[\,'$ *- with a predictable lack of success.”*

(Graham, Knuth, Patashinik, 2003, s. 67)

„Do nedávné doby lidé nejčastěji psali $'[x]'$ *pro největší celé číslo* $\leq x$*, aniž by měli ekvivalentní symbol pro funkci nejmenší větší celé číslo. Někteří autoři se dokonce pokusili použít symbol* $'\,]x[\,'$ *i přes předvídatelný neúspěch.* “[1]

Autoři knihy, po výše zmíněném logickém zdůvodnění, použili v kapitole Integer functions (celočíselné funkce)[1] a podkapitole Floors and Ceilings (Dolní a Horní)[1] právě funkce horní celá část a dolní celá část čísla.

„We start by covering the floor (greatest integer) and ceiling (least integer) functions, which are defined for all real x *as follows:*

$$\lfloor x \rfloor = \textit{the greatest integer less than or equal to } x; \tag{1.1.6}$$

[1] z angličtiny přeložil autor

$$\lceil x \rceil = \textit{the least integer greater than or equal to } x.\text{“} \qquad (1.1.7)$$

(Graham a kol., 2003, s. 67)

„Začneme vymezením dolní meze (největší celé číslo) a horní meze (nejmenší celé číslo) funkcí, které jsou definovány pro všechna reálná x takto:

$$\lfloor x \rfloor = \textit{největší celé číslo menší nebo rovno } x;$$

$$\lceil x \rceil = \textit{nejmenší celé číslo větší nebo rovno } x.\text{“}$$[2]

Definice (1.1.6) a (1.1.7) převzal Graham a kol. (2003) od Kennetha E. Iversona (1962), který představil značení $\lceil\ \rceil$ a $\lfloor\ \rfloor$ již před rokem 1960.

„A number represented in a positional notation (e.g., in a base ten or a base two number system) must, in practice, employ only a finite number of digits. It is therefore often desirable to approximate a number x by an integer. For this purpose two functions are defined:

1. the floor of x (or integral part of x), denoted by $\lfloor x \rfloor$ and defined as the largest integer not exceeding x,

2. the ceiling of x, denoted by $\lceil x \rceil$ and defined as the smallest integer not exceeded by x.“

(Iverson, 1962, s. 12)

„Zápis čísla v poziční číselné soustavě (např. o základu deset nebo o *základu dvě) je často v* praxi *nahrazován jen zápisem s konečným počtem číslic. Proto je žádoucí,* aby *číslo x bylo aproximováno celým číslem.* K tomuto *účelu jsou definovány dvě funkce:*

1. dolní část x (nebo *celá část x), označována $\lfloor x \rfloor$ a definována jako největší celé číslo nepřevyšující x.*

2. horní část x, označována $\lceil x \rceil$ a definována jako nejmenší celé číslo větší nebo rovno x.“[2]

[2] z angličtiny přeložil autor

Značení od K. E. Iversona používají i autoři úloh matematických olympiád v České republice. Úlohy s celou a necelou částí čísla, které lze najít v některých ročnících matematické olympiády, zároveň obsahují definice těchto funkcí. Autoři nejčastěji užívají slovní definice s použitím pouze nezbytných matematických symbolů. První z důvodů pro použití slovní definice může být nezkušenost studentů s definicemi psanými výhradně matematickou symbolikou. Funkce celá a necelá část čísla se totiž nejčastěji objevují v kategorii B, tj. v kategorii pro 2. ročník střední školy, ve kterém studenti ještě příliš s matematickou symbolikou nepracují. Druhým důvodem by mohlo být částečné nastínění postupu obsažené v použití matematických symbolů, neboť pomocí nerovnic, např. (1.1.3), se některé úlohy řeší, ale to jistě autoři nechtějí. Uveďme tři ukázky pouze samotného vysvětlení funkce, jež autoři úloh používají nejčastěji pod zadáním úlohy. Celé zadání vybraných úloh zde nebudeme psát a prozradíme je čtenáři až v následujících kapitolách, kde ukážeme i jejich řešení.

Pod zadáním konkrétních úloh nalezneme například vysvětlivky:

„kde $\lfloor x \rfloor$ znamená dolní celou část čísla x, tedy největší celé číslo k, pro něž platí $k \leq x$. (Například $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ a $\lfloor -3,1 \rfloor = -4$.)

(E. Kováč)“

(Horák, 2006a, s. 46)

„kde $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo, které nepřevyšuje číslo x.

(J. Šimša)“

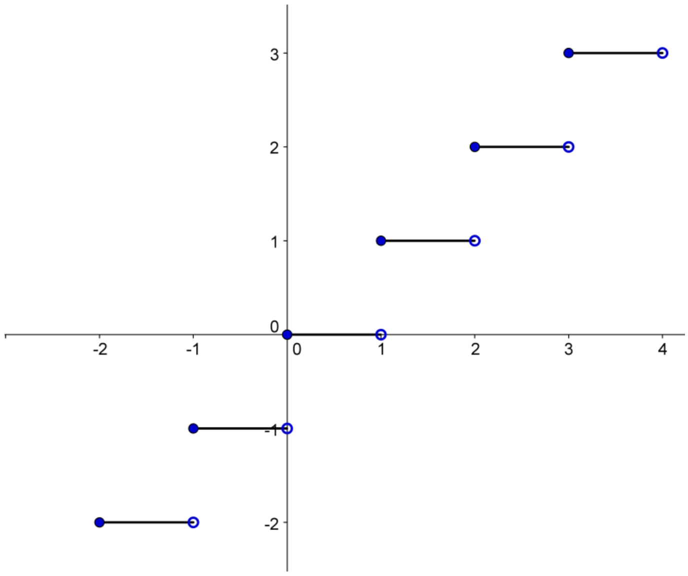
(Horák, 2006a, s. 47)

„kde $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo x (tzv. dolní celou část reálného čísla x).

(J. Šimša)“

(Horák, 2006b, s. 45)

Pro ilustraci uveďme na následující stránce ještě několik příkladů pro konkrétní reálná čísla a grafy funkcí.



Příklady:

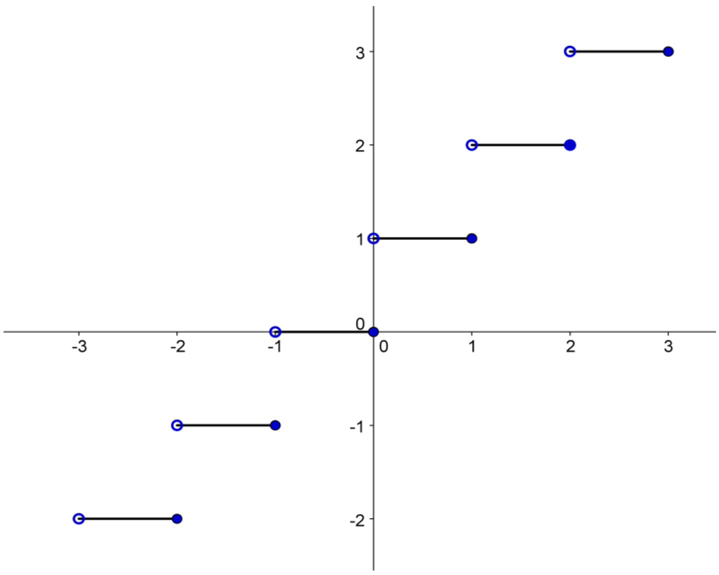
1. $[\pi] = \lfloor \pi \rfloor = 3$

2. $\left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 0$

3. $\left\lfloor -\frac{11}{4} \right\rfloor = -3$

4. $\left\lfloor -\sqrt{3} \right\rfloor = -2$

Graf 1: Dolní celá část a celá část reálného čísla



Příklady:

1. $\lceil \pi \rceil = 4$

2. $\left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil = 1$

3. $\lceil -e \rceil = -2$

4. $\lceil -0,7 \rceil = 0$

Graf 2: Horní celá část reálného čísla

1.2 Necelá část reálného čísla

Necelá část reálného čísla x, někdy také zlomková část reálného čísla x, je nespojitá funkce. Číslu x přiřazuje právě jedno číslo m, které je definováno takto:

$$f(x) = m \ \Leftrightarrow m = x - [x],\ \text{kde}\ m \in \langle 0, 1),\ m \in \mathbb{R}. \tag{1.2.1}$$

Značí se pomocí úhlových závorek $\langle\ \rangle$ nebo složených závorek $\{\ \}$. Tedy $\langle x\rangle$ je necelá část čísla x. V dalším textu budeme užívat pojem necelá část a budeme ji značit $\langle\ \rangle$. Totéž značení používají i Herman, Kučera, Šimša (1996).

„Rozdíl $x - [x]$ se nazývá necelá část čísla x a značí se $\langle x\rangle$. Poznamenejme, že oba symboly jsme mohli definovat i jiným způsobem, například podmínkami

$$[x] + \langle x\rangle = x,\ [x] \in \mathbb{Z},\ 0 \leq \langle x\rangle < 1 \tag{1.2.2}$$

které jsou ekvivalentní s podanou definicí."

(Herman a kol., 1996, s. 229)

Autoři se odkazují na definici, kterou jsme již uvedli v kapitole 1.1. Ekvivalentní definici pro necelou část čísla lze najít i v (Graham a kol., 2003).

„The difference between x and $\lfloor x\rfloor$ is called the fractional part of x, and it arises often enough in applications to deserve its own notation:"

$$\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$$

(Graham, Knuth, Patashinik, 2003, s. 67)

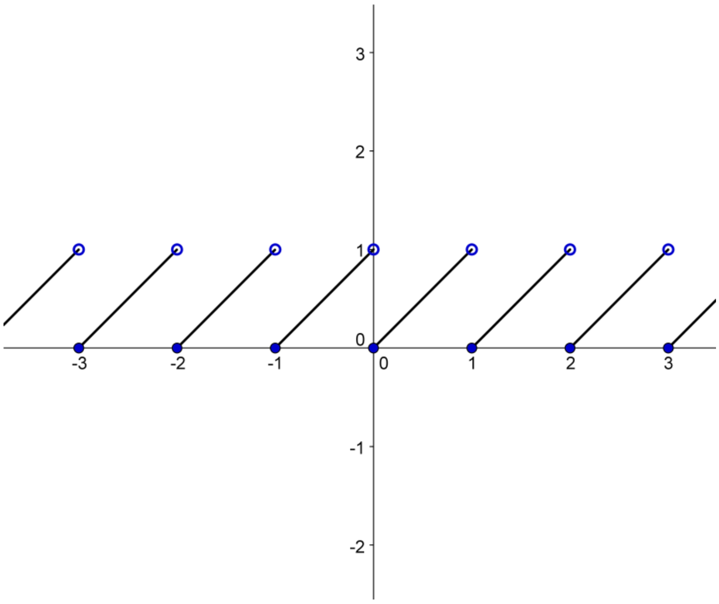
„Rozdíl mezi x a $\lfloor x\rfloor$ se nazývá zlomková část čísla x; tato funkce se objevuje v mnoha aplikacích, a proto si zaslouží své vlastní značení:"[3]

$$\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$$

Všimněme si v názvu funkce slova „fraction", v překladu „zlomek". Termín „zlomková část reálného čísla" má tudíž blíže k zahraničnímu termínu oproti českému ekvivalentu „necelá část reálného čísla". V dalším textu se budeme držet termínu, který je používán v (Herman a kol., 1996), tedy „necelá část reálného čísla" či zkráceně dle

[3] z angličtiny přeložil autor

úmluvy v kapitole 1, tedy „necelá část čísla". Pro ilustraci uveďme několik příkladů a graf funkce (1.2.1), zejména příklady pro záporné reálné číslo, kde je nutné si uvědomit, že necelá část není vždy „zbylé" záporné číslo za desetinou čárkou.



Graf 3: Necelá část reálného čísla

Příklady:

1. $\langle\sqrt{2}\rangle = \sqrt{2} - 1 \cong 0,414$

2. $\langle -2,7\rangle = -2,7 - [-3] = 0,3$

3. $\langle \pi\rangle = \pi - [\pi] = \pi - 3 \cong 0,141$

1.3 Základní vlastnosti funkce dolní celá část a shrnutí poznatků

Pro lepší pochopení následujících kapitol uvedeme několik základních vlastností funkce dolní celá část čísla.

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n, \qquad \text{kde } n \in \mathbb{Z}$$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor, \qquad \text{kde } x \geq 0$$

$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor, \qquad \text{kde } m,n \in \mathbb{Z} \ \wedge n \neq 0$$

Zopakujme ještě hlavní poznatky z kapitoly 1.

Dolní celou část $\lfloor\ \rfloor$ reálného čísla x definujeme: $\quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad$ (1.3.1)

Horní celou $\lceil\ \rceil$ část reálného čísla x definujeme: $\quad x \leq \lceil x \rceil < x + 1 \quad$ (1.3.2)

Necelou část $\langle\ \rangle$ reálného čísla x definujeme: $\quad \langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor \quad$ (1.3.3)

2 Řešitelnost rovnice o jedné neznámé obsahující celou část reálného čísla

V celé práci budeme pracovat s rovnicemi o jedné neznámé, které budeme řešit v číselném oboru $\mathbb{R}$. Pro zopakování uveďme některé základní definice a vlastnosti výrazů a rovnic.

„Algebraický výraz je výraz (zápis) skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování, popř. obsahuje též závorky, které určují pořadí provádění naznačených operací.“

(Polák, 2008, s. 120)

„Definice. Buď V, W dva výrazy, z nichž alespoň jeden obsahuje proměnnou. Jsou-li $x_1, x_2, \dots, x_n$ všechny proměnné, které jsou obsaženy buď ve V, nebo W, nazýváme zápis $V = W$ rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$. Výraz V je levá strana, výraz W pravá strana rovnice. Speciálně zápis tvaru $V = 0$, kde V obsahuje alespoň jednu proměnnou, je rovnice v základním tvaru.“

(Novotná, Trch, 2004, s. 49)

Definičním oborem výrazu $V(x)$ rozumíme množinu všech hodnot proměnné x, kde $x \in \mathbb{R}$, pro kterou má výraz $V(x)$ smysl.

Řešením rovnice $V(x) = W(x)$ o jedné neznámé x v definičním oboru $D = D(V) \cap D(W)$ rozumíme každé číslo $m \in D$ takové, že platí rovnost

$$V(m) = W(m).$$

2.1 Řešitelnost rovnice typu $a\lfloor x\rfloor + bx + c = 0$

2.1.1 Obecné hledání řešení rovnice typu $a\lfloor x\rfloor + bx + c = 0$

V podkapitole ukážeme, jak řešit v oboru $\mathbb{R}$ rovnici typu:

$$a\lfloor x\rfloor + bx + c = 0, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{2.1.1}$$

Nejprve se věnujme koeficientům a, b, c. Rovnici (2.1.1) rozdělíme na několik případů:

1. Je-li $\boldsymbol{a, b, c = 0}$, pak řešením rovnice jsou všechna $x \in \mathbb{R}$.

2. Je-li $\boldsymbol{a, b = 0 \ \wedge c \neq 0}$, rovnice nemá řešení.

2. Je-li $\boldsymbol{a = 0 \wedge b \neq 0 \ \wedge c \in \mathbb{R}}$, jedná se o lineární rovnici, jejíž řešení je jednoduché.

3. Je-li $\boldsymbol{a \neq 0 \wedge b = 0 \ \wedge c \in \mathbb{R}}$, řešíme rovnici tvaru:

$$a\lfloor x\rfloor + c = 0, \tag{2.1.2}$$

$$\lfloor x\rfloor = -\frac{c}{a}. \tag{2.1.3}$$

Podle definice dolní celé části to znamená, že podíl $\frac{c}{a}$ musí být celočíselný. Rovnice má tedy smysl, pokud pro koeficienty a, c platí, že a dělí c $(a|c)$. Řešením rovnice (2.1.2) jsou všechna x z intervalu:

$$x \in \left\langle -\frac{c}{a}, -\frac{c}{a} + 1 \right), \qquad \text{kde } a \neq 0 \ \wedge \frac{c}{a} \in \mathbb{Z}.$$

4. Je-li $\boldsymbol{a, b \neq 0 \wedge c \in \mathbb{R}}$, pak rovnici (2.1.1) algebraickými úpravami převedeme na tvar, kde na levé straně rovnice zůstane pouze dolní celá část x,

$$\lfloor x\rfloor = -\frac{bx + c}{a}. \tag{2.1.4}$$

Z definice dolní celé části plyne, že pravá strana rovnice (2.1.4) musí být z oboru $\mathbb{Z}$. Označme ji písmenem m

$$m = -\frac{bx + c}{a}, \qquad \text{kde } m \in \mathbb{Z}. \tag{2.1.5}$$

Z (2.1.5) vyjádříme x

$$x = -\frac{am + c}{b}. \tag{2.1.6}$$

Dosazením celých čísel za m dostaneme jednotlivá řešení rovnice (2.1.1), x ale zároveň musí splňovat podmínku pro dolní celou část. Podle (1.1.1) tedy

$$m \leq -\frac{am + c}{b} < m + 1. \tag{2.1.7}$$

Vyjádřením m z obou nerovnic (2.1.7) dostaneme krajní body intervalu, ze kterého m vybíráme

$$m \leq -\frac{am + c}{b}, \qquad -\frac{am + c}{b} < m + 1,$$

$$m + \frac{am}{b} \leq -\frac{c}{b}, \qquad -\frac{c}{b} - 1 < m + \frac{am}{b},$$

$$m\left(1 + \frac{a}{b}\right) \leq -\frac{c}{b}, \qquad -\frac{c}{b} - 1 < m\left(1 + \frac{a}{b}\right). \tag{2.1.8}$$

Řešení nerovnic (2.1.8) se nyní rozděluje na tři případy podle podílu koeficientů a a b. A) podíl je větší než mínus jedna, B) podíl je menší než mínus jedna, C) podíl je roven mínus jedné.

A) Podíl $\frac{a}{b} > -1$,

$$m \leq \frac{-c}{a + b}, \qquad -\frac{b + c}{a + b} < m.$$

Řešení rovnice (2.1.1) lze zapsat:

$$x = -\frac{am + c}{b}, \qquad m \in \left(-\frac{b+c}{a+b}, -\frac{c}{a+b} \right\rangle \wedge m \in \mathbb{Z},$$

$$\text{kde } a, b \neq 0, \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad \frac{a}{b} > -1.$$

B) Podíl $\frac{a}{b} < -1$,

$$m \geq \frac{-c}{a + b}, \qquad -\frac{b + c}{a + b} > m.$$

Řešení rovnice (2.1.1) pro podmínku B):

$$x = -\frac{am + c}{b}, \qquad m \in \left\langle -\frac{c}{a+b}, -\frac{b+c}{a+b} \right) \wedge m \in \mathbb{Z},$$

$$\text{kde } a, b \neq 0, \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad \frac{a}{b} < -1.$$

C) Podíl $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = -1$,

$$0 \leq -\frac{c}{b}, \qquad -\frac{c}{b} - 1 < 0,$$

$$-1 < \frac{c}{b} \leq 0.$$

Parametr m zde nehraje již roli, řešením rovnice (2.1.1) jsou všechna x taková:

$$x = m - \frac{c}{b}, \qquad m \in \mathbb{Z} \ \wedge \ \frac{c}{b} \in (-1, 0\rangle,$$

$$\text{kde } a, b \neq 0, \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad \frac{a}{b} = -1.$$

Pokud ovšem $\frac{c}{b} \notin (-1, 0\rangle \wedge \frac{a}{b} = -1,$ kde $c \in \mathbb{R} \ \wedge a, b \neq 0,$ rovnice (2.1.1) nemá řešení. To lze snadno dokázat sporem.

Důkaz: Předpokládejme, že rovnice $a\lfloor x \rfloor + bx + c = 0$, kde $\frac{c}{b} \notin (-1, 0\rangle$, $\frac{a}{b} = -1$, $c \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ má řešení x. Postupnými úpravami získáme:

$$\frac{a}{b}\lfloor x \rfloor + x + \frac{c}{b} = 0,$$

$$-\lfloor x \rfloor + x = -\frac{c}{b},$$

$$x - \lfloor x \rfloor = -\frac{c}{b}.$$

Levá strana rovnice je definicí necelé části čísla x, viz (1.3.3). Tedy

$$\langle x \rangle = -\frac{c}{b}.$$

Funkce necelá část čísla nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 1)$, což je spor s předpokladem, kde $\frac{c}{b} \notin (-1, 0\rangle$. Proto rovnice nemá řešení pro kterékoli x.

2.1.2 Řešené příklady

Autorem prvního příkladu je Jaromír Šimša v (Horák, 2006a). Vyřešíme jej obecným postupem z kapitoly 2.1.1 a poté dosazením do odvozených vzorců z kapitoly 2.1.1.

Příklad 1. *„Zjistěte, kolik řešení má v oboru reálných čísel rovnice*

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{x}{2\,004}, \tag{2.1.9}$$

kde $\lfloor x \rfloor$ *označuje největší celé číslo, které nepřevyšuje číslo* x.

(J. Šimša)"

(Horák, 2006a, s. 47)

Řešení:

Rovnici upravíme na tvar, kde levá strana rovnice se rovná $\lfloor x \rfloor$, tedy

$$\lfloor x \rfloor = \frac{2\,003}{2004} x.$$

Dolní celou část čísla x označíme m a z rovnice vyjádříme neznámou x

$$m = \frac{2\,003}{2\,004} x,$$

$$x = \frac{2\,004}{2\,003} m. \tag{2.1.10}$$

Rovnice (2.1.10) je již řešením. Ovšem ještě musíme vypočítat, z jakého intervalu můžeme m vybírat, neboť jsme jím označili dolní celou část x. Proto musí pro m platit nerovnost (1.1.1):

$$m \leq \frac{2\,004}{2\,003} m < m + 1,$$

$$m \leq \frac{2\,004}{2\,003}m, \qquad \frac{2\,004}{2\,003}m < m + 1.$$

Vyřešením nerovnic získáváme podmínky $m \geq 0$ a $m < 2\,003$, což jsou krajní body intervalu, ze kterého m vybíráme. Nezapomeňme, že $m \in \mathbb{Z}$.

Výsledek: Rovnice má 2 003 řešení,

$$x = \frac{2\,004}{2\,003}m, \qquad \text{kde } m \in \langle 0, 2\,003) \wedge m \in \mathbb{Z}.$$

Výsledek ověříme pro odvozený vzorec z kapitoly (2.1.1). V příkladu 1 se

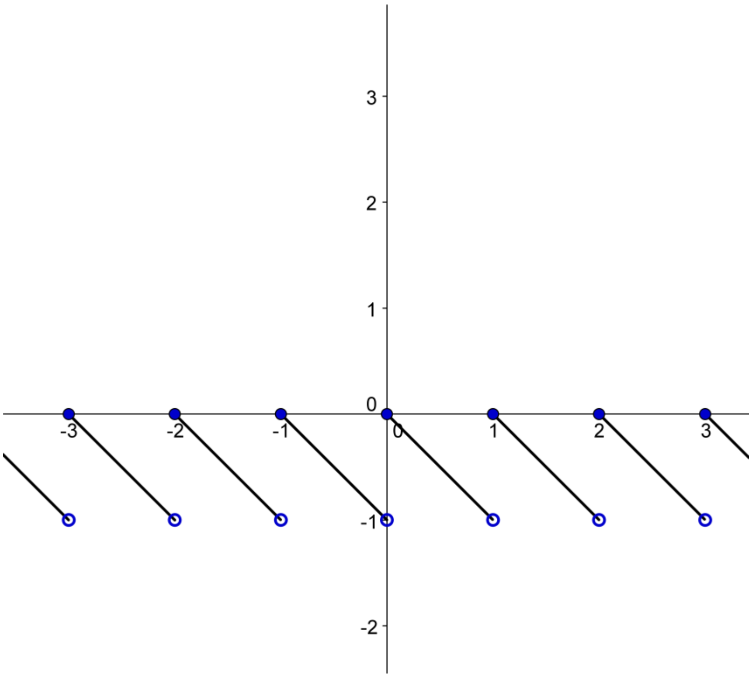
$$a = 1, \qquad b = -\frac{2\,003}{2\,004}, \qquad c = 0, \qquad \frac{a}{b} < -1.$$

Použijeme vzorec pro případ 4B a dosadíme

$$x = -\frac{am + c}{b}, \qquad m \in \left\langle -\frac{c}{a+b}, -\frac{b+c}{a+b} \right) \wedge m \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{2\,004}{2\,003}m, \qquad m \in \langle 0, 2\,003) \wedge m \in \mathbb{Z}.$$

Pro zajímavost ukažme graf funkce z příkladu 1, $y = \lfloor x \rfloor - \frac{2\,003}{2\,004}x$.



Graf 4: $f: y = \lfloor x \rfloor - \frac{2\,003}{2\,004}x$

V druhém příkladu volíme koeficienty a, b, c úmyslně takové, aby bylo lépe vidět řešení rovnice z grafu funkce $f(x) = a\lfloor x \rfloor + bx + c$. Příklad vyřešíme opět obecným postupem z kapitoly 2.1.1 a ukážeme graf funkce f, na který naváže další kapitola.

Příklad 2. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$4\lfloor x \rfloor - 5x = -11.$$

Řešení:

$$\lfloor x \rfloor = \frac{-11 + 5x}{4}.$$

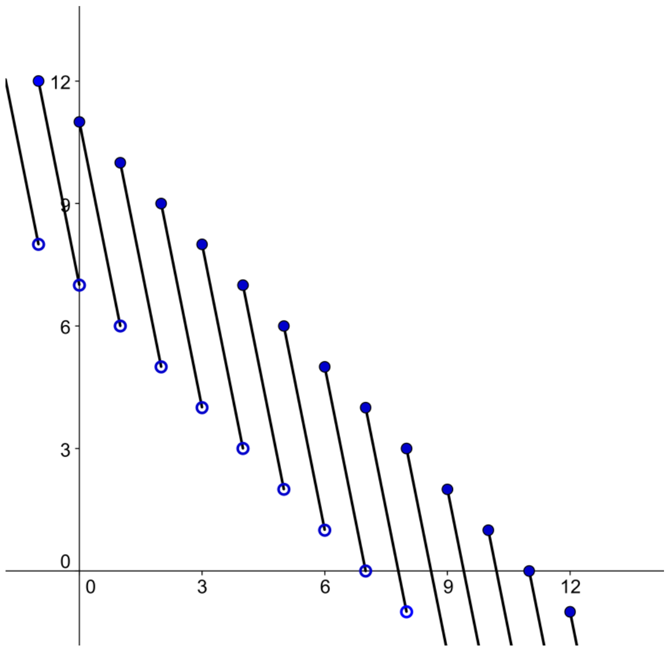
Označíme $\lfloor x \rfloor = k$ a vyjádříme x,

$$x = \frac{11 + 4k}{5}.$$

Podmínka pro k je

$$k \leq \frac{11 + 4k}{5} < k + 1, \qquad \text{tedy } 6 < k \leq 11.$$

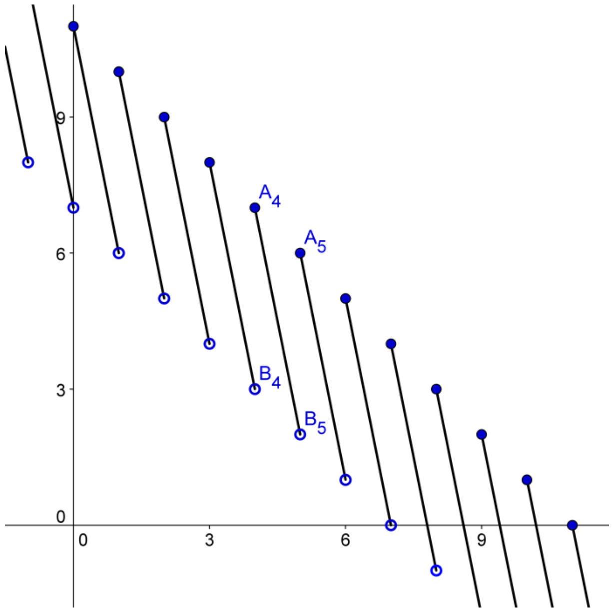
Výsledek: $x \in \left\{\frac{39}{5}, \frac{43}{5}, \frac{47}{5}, \frac{51}{5}, 11\right\}$.



Graf 5: $f: y = 4\lfloor x \rfloor - 5x + 11$

2.1.3 Průběh funkce $f(x) = a\lfloor x \rfloor + bx + c$

Vraťme se ještě ke kapitole (2.1.1) a (2.1.2). Zamysleme se nyní nad grafem funkce z příkladu 2. Doplnili jsme graf 5 body A_4, A_5 a B_4, B_5, jak je vidět na grafu 6.



Graf 6

Pro funkci z příkladu 2,

$$g(x) = 4\lfloor x \rfloor - 5x + 11,$$

má bod A_4 souřadnice $[4, 7]$ a bod A_5 souřadnice $[5, 6]$. Hodnoty souřadnic bodů A_4 i A_5 jsou řešením rovnice $y = 4\lfloor x \rfloor - 5x + 11$. Tedy A_4, A_5 leží na grafu funkce g. Body B_4 se souřadnicemi $[4, 3]$ a B_5 se souřadnicemi $[5, 2]$ na grafu g neleží, neboť

$$3 \neq 4\lfloor 4 \rfloor - 20 + 11 \;\wedge\; 2 \neq 4\lfloor 5 \rfloor - 25 + 11.$$

Z grafu 6 je patrné, že funkce g je nespojitá v bodech, jejichž x-ové souřadnice jsou celočíselné. Ptáme se tedy, zda funkce $f(x) = a\lfloor x \rfloor + bx + c$, kde $a \neq 0$, je nespojitá ve všech bodech x, kde x je celé číslo.

Tvrzení. Funkce

$$f(x) = a\lfloor x \rfloor + bx + c, \text{ kde } a \neq 0,$$

je nespojitá v $x \in \mathbb{Z}$ a spojitá ve všech intervalech $(t, t+1)$, kde $t \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Pro dolní celou část čísla zřejmě platí

$$\lim_{x \to t^+} \lfloor x \rfloor = t, \qquad \lim_{x \to t^-} \lfloor x \rfloor = t - 1, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{Z}.$$

A pro funkci $f(x) = a\lfloor x \rfloor + bx + c,$ kde $a \neq 0$, platí

$$f(t) = a\lfloor t \rfloor + bt + c = at + bt + c, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{Z}.$$

Předpokládejme, že funkce f je spojitá v celočíselném bodě t, pak musí platit

$$\lim_{x \to t}(a\lfloor x \rfloor + bx + c) = f(t), \qquad \text{kde } t \in \mathbb{Z},$$

a $t \in D(f)$.

To znamená, že musí platit i

$$\lim_{x \to t^+}(a\lfloor x \rfloor + bx + c) = \lim_{x \to t^-}(a\lfloor x \rfloor + bx + c) = f(t), \qquad \text{kde } t \in \mathbb{Z}.$$

Pro limitu zprava a zleva dostáváme

$$\lim_{x \to t^+}(a\lfloor x \rfloor + bx + c) = bt + c + a \lim_{x \to t^+} \lfloor x \rfloor = bt + c + at,$$

$$\lim_{x \to t^-}(a\lfloor x \rfloor + bx + c) = bt + c + a \lim_{x \to t^-} \lfloor x \rfloor = bt + c + a(t - 1), \qquad \text{kde } t \in \mathbb{Z}.$$

Hodnoty limity zprava a limity zleva funkce f v bodě t jsou různé, což je spor s předpokladem, tedy

$$\lim_{x \to t^+}(a\lfloor x \rfloor + bx + c) \neq \lim_{x \to t^-}(a\lfloor x \rfloor + bx + c), \qquad \text{kde } t \in \mathbb{Z}.$$

Dokázali jsme, že funkce $f(x) = a\lfloor x \rfloor + bx + c$ je nespojitá v bodě $x \in \mathbb{Z}$. A jelikož

$$\lim_{x \to t^+}(a\lfloor x \rfloor + bx + c) = at + bt + c = f(t),$$

pak všechny body A_t se souřadnicemi $[t, f(t)]$, kde $t \in \mathbb{Z}$, leží na grafu funkce f. Jedním z těchto bodů pro funkci $g(x) = 4\lfloor x \rfloor - 5x + 11$ je například bod $A_4[4, 7]$ z grafu 6. Souřadnice bodu B_4 lze určit pomocí limity, kdy $x \to 4^-$, neboť platí rovnost

$$\lim_{x \to t^-}(a\lfloor x \rfloor + bx + c) = bt + c + a(t - 1) = f(t) - a.$$

Pro y-ovou souřadnici bodu B_4 dostáváme hodnotu

$$\lim_{x \to 4^-} (4\lfloor x \rfloor - 5x + 11) = -20 + 11 + \lim_{x \to 4^-} 4\lfloor x \rfloor = -20 + 11 + 4(4 - 1) = 3.$$

Bod B_4 má souřadnice $[4, 3]$. Obecný bod B_t o souřadnicích $[t, f(t) - a]$, kde $t \in \mathbb{Z}$, neleží na grafu funkce $f(x) = a\lfloor x \rfloor + bx + c$. Dalo by se říci, že „graf funkce se k němu z levé strany nekonečně přibližuje“.

Teď dokážeme, že funkce f je spojitá v intervalu $(t, t + 1)$, kde $t \in \mathbb{Z}$. Funkce f je spojitá v intervalu $(t, t + 1)$, kde $t \in \mathbb{Z}$, pokud je spojitá v každém bodě $m \in (t, t + 1)$. Každý bod m lze zapsat

$$m = t + u, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{R} \wedge u \in (0, 1).$$

Vypočteme hodnoty limit zprava a zleva funkce f a funkční hodnotu v bodě m:

$$\lim_{x \to (t+u)^+} (a\lfloor x \rfloor + bx + c) = b(t + u) + c + a \lim_{x \to (t+u)^+} \lfloor x \rfloor = b(t + u) + c + at,$$

$$\lim_{x \to (t+u)^-} (a\lfloor x \rfloor + bx + c) = b(t + u) + c + a \lim_{x \to (t+u)^-} \lfloor x \rfloor = b(t + u) + c + at,$$

$$f(m) = a\lfloor t + u \rfloor + b(t + u) + c = at + b(t + u) + c, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{Z}, u \in (0,1).$$

Získáváme rovnost

$$\lim_{x \to (t+u)^+} (a\lfloor x \rfloor + bx + c) = \lim_{x \to (t+u)^-} (a\lfloor x \rfloor + bx + c) = f(m).$$

Dokázali jsme, že f je spojitá v každém intervalu $(t, t + 1)$, kde $t \in \mathbb{Z}$, neboť hodnoty limit pro $x \to m^{\pm}$ jsou si rovny a rovnají se funkční hodnotě v bodě m. Bod m zároveň splňuje podmínku spojitosti v bodě, tedy $m \in D(f)$.

O bodech $A_t[t, f(t)]$ a $B_t[t,\ f(t) - a]$, kde $t \in \mathbb{Z}$, můžeme říci obecně mnohem více.

Tvrzení. Množina všech bodů $A_t[t, f(t)]$, kde $t \in \mathbb{Z}$, leží na jedné přímce, označme ji w. Taktéž body $B_t[t,\ f(t) - a]$ leží na jedné přímce, označme ji v. Přímky v a w mají stejnou směrnici, označme ji k.

Tvrzení dokážeme a rovnice obou přímek zapíšeme ve směrnicovém tvaru.

Důkaz. Pokud jsou x-ové souřadnice bodů $A_t[t, f(t)]$, kde $t \in \mathbb{Z}$, celočíselné, pak dolní celá část x je rovna t. Řešená rovnice má pro tato t tvar

$$f(t) = (a + b)t + c,$$

což je rovnice hledané přímky w. Přímku w, na které leží všechny body $A_t[t, f(t)]$, kde $t \in \mathbb{Z}$, zapíšeme ve směrnicovém tvaru

$$w: y = (a + b)x + c.$$

Rovnice $y = (a + b)x + c$ je rovnicí přímky w, na níž leží všechny body $A_t[x, y]$, kde $x \in \mathbb{Z}$, se směrnicí $k = (a + b)$. Pro úhel φ, který svírá přímka w s osou x, platí: $\varphi = \tan^{-1}|a + b|$.

Pro body $B_t[t, f(t) - a]$, kde $t \in \mathbb{Z}$, zvolíme jiný postup než pro body A_t, jelikož body $B_t \notin f$. Předpokládejme, že všechny body B_t určují přímku v. Odvodíme její rovnici postupem z analytické geometrie. Dvojice bodů

$$B_t[t, f(t) - a] \text{ a } B_t{}'[u, f(u) - a], \qquad kde\ t, u \in \mathbb{Z} \wedge u \neq t,$$

určuje vektor $\vec{s}$.

$$\vec{s} = (u - t, au + bu + c - a - at - bt - c + a) = \big(u - t, (u - t)(a + b)\big),$$

$$\vec{s} = (1, a + b).$$

Přímka, procházející bodem B_t se směrovým vektorem $\vec{s}$, je hledaná přímka v. Její obecná rovnice je

$$v: dx + ey + f = 0.$$

Dosazením za $d = a + b,\ e = -1$ a souřadnic například bodu B_t do obecné rovnice přímky v dopočítáme koeficient f, tedy

$$(a + b)t - (at + bt + c - a) + f = 0,$$

$$f = c - a.$$

Rovnice přímky v, na níž leží všechny body

$$B_t[t, f(t) - a] \text{ a } B_t{}'[u, f(u) - a], \qquad \text{kde } t, u \in \mathbb{Z} \wedge u \neq t,$$

má směrnicový tvar

$$v: y = (a + b)x + c - a.$$

Rovnice přímky v má směrnici $k = (a + b)$. Pro úhel φ, který svírá přímka v s osou x, platí $\varphi = \tan^{-1}|a + b|$. Směrnice obou přímek v i w jsou si rovny. Přímky jsou rovnoběžné různé.

V poslední části dokážeme, že všechny body, jejichž x-ová souřadnice je z intervalu $\langle t, t + 1)$, kde $t \in \mathbb{Z}$, a zároveň jsou řešením rovnice $y = a\lfloor x \rfloor + bx + c$, kde $a \neq 0$, leží na přímce, nazvěme ji q. Nechť bod A_t má souřadnice $[t, f(t)]$ a bod B_{t+1} má souřadnice $[t + 1,\ f(t + 1) - a]$. Přitom bod B_{t+1} není řešením rovnice $y = a\lfloor x \rfloor + bx + c$, kde $a \neq 0$. (Z předchozího důkazu víme, že graf funkce f se k B_{t+1}, dalo by se říci, „nekonečně přibližuje“, tudíž bod B_{t+1} použijeme v dalším postupu.) Pro souřadnice bodů A_t a B_{t+1} platí

$$A_t\ [t,\ (a + b)t + c] \wedge B_{t+1}[t + 1,\ (a + b)t + a + b + c - a].$$

Body A_t a B_{t+1} určují vektor $\vec{s}$,

$$\vec{s} = (t + 1 - t, at + bt + a + b + c - a - at - bt - c) = (1, b).$$

Kolmý vektor k vektoru $\vec{s}$ označme $\vec{n}$. Pak pro $\vec{n}$ platí

$$\vec{n} = (b, -1).$$

Přímka, procházející bodem A_t s normálovým vektorem $\vec{n}$, je hledaná přímka q. Její obecná rovnice je

$$q: dx + ey + f = 0.$$

Koeficient f dopočítáme dosazením bodu $A_t \in q$,

$$bt - at - bt - c + f = 0 \text{ pak } f = at + c.$$

Rovnice přímky q má tvar

$$q: y = bx + at + c, \qquad \text{kde } t \text{ je parametr}, t \in \mathbb{Z} \wedge a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Rovnice přímky q s parametrem t má směrnici $k = b$. Svírá s osou x úhel φ, pro který platí $\varphi = \tan^{-1}|b|$. Vyjádřili jsme rovnici přímky q, kterou určuje dvojice bodů

A_t a B_{t+1}. Musíme ještě dokázat, že všechny body, jejichž x-ová souřadnice je z intervalu $\langle t, t+1)$, kde $t \in \mathbb{Z}$, a zároveň jsou řešením rovnice $y = a\lfloor x \rfloor + bx + c$, kde $a \neq 0$, leží na přímce q. Nechť bod C_t má souřadnice $[x, f(x)]$, kde $x = t + u$, $t \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{R}$ a $u \in (0, 1)$. Ukažme, že C_t leží na přímce q: $y = bx + at + c$ a zároveň leží na grafu funkce $f: y = a\lfloor x \rfloor + bx + c$. Pak by mělo platit, nezávisle na parametrech t a u,

$$bx + at + c = a\lfloor x \rfloor + bx + c,$$

$$bt + bu + at + c = a\lfloor t + u \rfloor + b(t + u) + c,$$

$$bt + bu + at + c = at + bt + bu + c.$$

$$0 = 0.$$

Vzhledem k tomu, že všechny úpravy byly ekvivalentní, je dokázáno, že všechny body C_t o souřadnicích $[x,\ f(x)]$, kde $x = t + u, t \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{R}$ a $u \in (0, 1)$, skutečně leží na přímce $q: y = bx + at + c$ i na grafu funkce $f: y = a\lfloor x \rfloor + bx + c$.

Dokázaná tvrzení ilustrujme na funkci z příkladu 2, $f: y = 4\lfloor x \rfloor - 5x + 11$, viz graf 7 na následující straně.

Popis grafu 7:

$$f: y = 4\lfloor x \rfloor - 5x + 11, \text{kde } a = 4, b = -5, c = 11.$$

Bod $A_0[t, (a + b)t + c]$, kde volíme parametr $t = 0$, má souřadnice $[0, 11]$.

Bod $B_1[t + 1, (a + b)t + b + c]$, kde volíme parametr $t = 0$, má souřadnice $[1, 6]$.

Bod $A_1[s, (a + b)s + c]$, kde volíme parametr $s = 1$, má souřadnice $[1, 10]$.

Přímka w (červená čárkovaná čára), na níž leží body A_0 a A_1, má rovnici

$$w: y = (a + b)x + c, \text{ v našem případě } w: y = -x + 11,$$

velikost úhlu, jenž svírá s osou x, je rovna

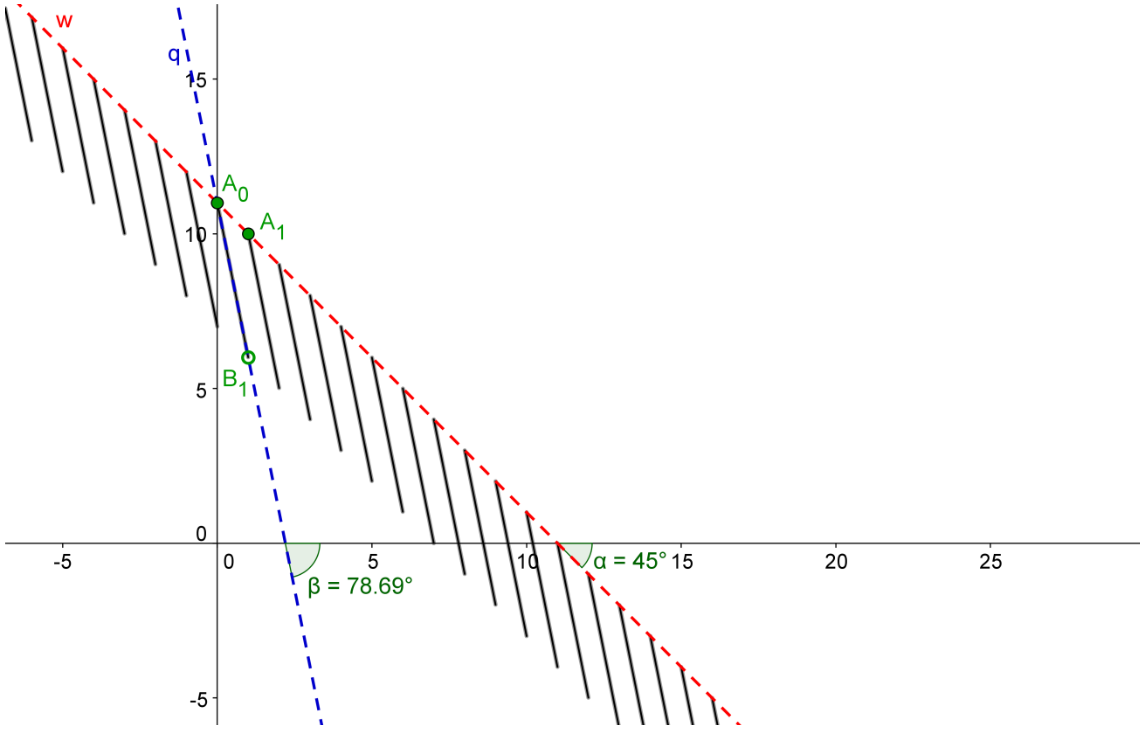
$$\alpha_w = \tan^{-1}|a + b|, \text{ tj. } \alpha_w = \tan^{-1}|4 - 5| = \frac{\pi}{4}.$$

Přímka q (modrá čárkovaná čára), na níž leží body A_0 a B_1, má rovnici

$$q: y = -5x + 11,$$

velikost úhlu sevření přímky q s osou x je rovna

$$\beta_q = \tan^{-1}|-5| \cong 78{,}69°.$$



Graf 7

2.2 Řešitelnost rovnice typu $\boldsymbol{ax\lfloor x\rfloor + bx + c = 0}$

2.2.1 Obecné hledání řešení rovnice typu $\boldsymbol{ax\lfloor x\rfloor + bx + c = 0}$

Stejným způsobem jako v kapitole (2.1) zde ukážeme, jak řešit v oboru $\mathbb{R}$ rovnici typu

$$ax\lfloor x\rfloor + bx + c = 0,\ \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{2.2.1}$$

Věnujme pozornost koeficientům a, b, c. Rovnici (2.2.1) rozdělíme opět na několik případů:

1. Je-li $\boldsymbol{a, b, c = 0}$, pak řešením rovnice jsou všechna $x \in \mathbb{R}$.

2. Je-li $\boldsymbol{a, b = 0\ \wedge c \neq 0}$, rovnice nemá řešení.

3. Je-li $\boldsymbol{a = 0 \wedge b \neq 0\ \wedge c \in \mathbb{R}}$, jedná se o lineární rovnici, jejíž řešení je jednoduché.

4. Je-li $\boldsymbol{a \neq 0 \wedge b = 0\ \wedge c = 0}$, řešíme rovnici tvaru

$$ax\lfloor x\rfloor = 0. \tag{2.2.2}$$

Koeficientem a můžeme vydělit rovnici (2.2.2), jelikož je nenulový. Pak buď $x = 0$ nebo $\lfloor x\rfloor = 0$. Rovnice (2.2.2) má řešení pro $x \in \langle 0, 1)$.

5. Je-li $\boldsymbol{a, c \lesseqgtr 0 \wedge b = 0}$, řešíme rovnici tvaru

$$ax\lfloor x\rfloor + c = 0, \tag{2.2.3}$$

$$x\lfloor x\rfloor = -\frac{c}{a}. \tag{2.2.4}$$

Pravá strana rovnice (2.2.4) je vždy záporná vzhledem k podmínkám pro koeficienty a, c. Ptáme se tedy, kdy je výraz $x\lfloor x\rfloor$ menší než nula. Jde o součin dvou funkcí $f(x) = x$ a $g(x) = \lfloor x\rfloor$. Pro záporná x nabývají obě funkce záporných hodnot, tudíž součin je vždy kladný. Pro nezáporná x nabývají obě funkce hodnot nezáporných. Součin obou funkcí je opět kladný. Rovnice (2.2.3) nemá řešení pokud $a, c \lesseqgtr 0$.

6. Je-li $\boldsymbol{a \gtreqless 0 \wedge b = 0\ \wedge c \lesseqgtr 0}$, řešíme rovnici tvaru

$$ax\lfloor x\rfloor + c = 0. \tag{2.2.5}$$

Písmenem m označme $\lfloor x \rfloor$. Jelikož $c \neq 0$, pak není žádné $x \in \langle 0, 1)$ řešením rovnice (2.2.5). Můžeme tedy obě strany rovnice dělit m a vyjádřit x. Dostáváme rovnici

$$x = -\frac{c}{am}, \qquad \text{kde } m \in \mathbb{Z} - 0. \tag{2.2.6}$$

Dosazením celých nenulových čísel, za m do rovnice (2.2.6) dostáváme řešení rovnice (2.2.5). Musíme ovšem m vybírat z intervalu, ve kterém x splňují podmínky pro celou část,

$$m \leq -\frac{c}{am} < m + 1,$$

$$m \leq -\frac{c}{am}, \quad -\frac{c}{am} < m + 1. \tag{2.2.7}$$

Řešení nerovnic (2.2.7) rozdělíme na dva případy: 1) $m > 0$, 2) $m < 0$.

1) $\boldsymbol{m} > 0$

$$m^2 \leq -\frac{c}{a}, \quad -\frac{c}{a} < m(m + 1), \tag{2.2.8}$$

$$m \leq \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, \quad 0 < m^2 + m + \frac{c}{a}. \tag{2.2.9}$$

Z předpokladů pro koeficienty a, c je zřejmé, že výraz pod odmocninou v první nerovnici (2.2.9) je vždy kladný. A jelikož $m > 0$, pak první nerovnost z (2.2.9) splňují všechna

$$m \in I_1, \qquad \text{kde } I_1 = \left(0, \sqrt{\frac{-c}{a}}\right\rangle.$$

Druhou nerovnici z (2.2.9) vyřešíme například takto:

$$0 = m^2 + m + \frac{c}{a},$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c}{a}}}{2}.$$

Výraz pod odmocninou je vždy větší než jedna. Interval pro m z druhé nerovnosti (2.2.9) je

$$m \in I_2, \qquad \text{kde } I_2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4c}{a}}}{2}, \infty \right).$$

Ověříme, zdali průnik intervalů I_1 a I_2, z něhož m budeme dosazovat do (2.2.6), není prázdný. Porovnáme výrazy $\sqrt{\frac{-c}{a}}$ a $\frac{-1+\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2}$. Přepokládejme, že první výraz je větší než druhý. Pomocí ekvivalentních úprav řešíme nerovnici

$$\sqrt{\frac{-c}{a}} > \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4c}{a}}}{2},$$

$$\frac{-4c}{a} > 1 - \frac{4c}{a} - 2\sqrt{1 - \frac{4c}{a}} + 1,$$

$$0 > 1 - \sqrt{1 - \frac{4c}{a}},$$

$$1 < 1 - \frac{4c}{a},$$

$$\frac{c}{a} < 0.$$

Vzhledem k podmínkám pro a, c je poslední nerovnost vždy splněna. Původní předpoklad je pravdivý. Průnik intervalů I_1 a I_2 označme I,

$$I = I_1 \cap I_2 = \left(\frac{-1+\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2}, \sqrt{\frac{-c}{a}} \right\rangle, \qquad m \in I, \qquad \text{kde } m \in \mathbb{Z} \wedge m > 0.$$

2) $\boldsymbol{m} < 0$

$$m^2 \geq -\frac{c}{a}, \quad -\frac{c}{a} > m(m+1),$$

$$m \geq \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, \quad 0 > m^2 + m + \frac{c}{a}.$$

První nerovnost splňují všechna

$$m \in I_3, \qquad \text{kde } I_3 = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\rangle.$$

Druhou nerovnici, ovšem s opačným znaménkem nerovnosti, jsme již řešili pro podmínku $m > 0$. Využijeme těchto poznatků a získáváme

$$m \in I_4, \qquad \text{kde } I_4 = \left(\frac{-1-\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2}, 0\right).$$

Ověříme, že průnik intervalů I_3 a I_4 je neprázdný. Porovnáme výrazy $-\sqrt{\frac{-c}{a}}$ a $\frac{-1-\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2}$. Přepokládejme, že první výraz je větší než druhý, ekvivalentními úpravami řešíme nerovnici

$$-\sqrt{\frac{-c}{a}} > \frac{-1-\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2},$$

$$-\frac{4c}{a} < 1 + 2\sqrt{1-\frac{4c}{a}} + 1 - \frac{4c}{a},$$

$$1 < 1 - \frac{4c}{a},$$

$$\frac{c}{a} < 0.$$

Vzhledem k podmínkám pro a, c je náš předpoklad pravdivý, tudíž první výraz je větší, než druhý. Průnik intervalů I_3 a I_4 označme I', pak

$$I' = I_3 \cap I_4 = \left\langle \frac{-1-\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2}, -\sqrt{\frac{-c}{a}} \right\rangle, \qquad m \in I', \qquad \text{kde } m \in \mathbb{Z} \wedge m < 0$$

Řešením rovnice (2.2.5) za podmínek $a \gtrless 0 \wedge b = 0 \wedge c \lessgtr 0$ jsou všechna

$$x = -\frac{c}{am}, \qquad m \in \left\langle \frac{-1-\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2}, -\sqrt{\frac{-c}{a}} \right\rangle \cup \left\langle \frac{-1+\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2}, \sqrt{\frac{-c}{a}} \right\rangle, \qquad \text{kde } m \in \mathbb{Z}.$$

7. Je-li $\boldsymbol{a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c = 0}$, řešíme rovnici tvaru

$$ax\lfloor x \rfloor + bx = 0. \tag{2.2.10}$$

Rovnici upravíme na tvar

$$x(a\lfloor x \rfloor + b) = 0,$$

jejíž řešení jsou $x = 0$ nebo $a\lfloor x \rfloor + b = 0$. Pro celou část musí platit

$$-\frac{b}{a} \leq x < -\frac{b}{a} + 1.$$

Řešení rovnice (2.2.10) splňují všechna

$$x = 0 \cup x \in \left\langle -\frac{b}{a}, -\frac{b}{a}+1 \right), \qquad \text{kde } a \neq 0 \wedge \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}.$$

8. Je-li $\boldsymbol{a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0}$, řešíme rovnici tvaru

$$ax\lfloor x \rfloor + bx + c = 0.$$

Vyjádřit obecné řešení této rovnice pro libovolné koeficienty a, b, c je již obtížnější, a proto ho zde podrobně neuvádíme, pouze ho ilustrujeme na příkladu 4 v následující kapitole (2.2.2). Postup vychází ze stejných principů jako u případů, které jsou podrobně zpracovány v předchozí kapitole (2.1). Hlavní myšlenkou kapitol (2.1) a (2.2) bylo postupně ukázat vlastnosti funkce dolní celá část v rovnicích a způsob řešení těchto dvou typů rovnic. V kapitole (2.3) zopakujeme obecný postup pro řešení rovnic z kapitol (2.1) a (2.2).

2.2.2 Řešené příklady

Příklad 3. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$4x\lfloor x\rfloor - 9 = 0.$$

Řešení:

Označíme $\lfloor x\rfloor = m$ a vyjádříme x. Snadno zjistíme, že pro $x \in \langle 0, 1)$ nemá rovnice řešení, proto můžeme m dělit,

$$x = \frac{9}{4m}. \tag{2.2.11}$$

Podmínka pro m je

$$m \leq \frac{9}{4m} < m + 1.$$

Postup rozdělíme na dva případy: 1) $m > 0$, 2) $m < 0$.

1) $\boldsymbol{m > 0}$

$$4m^2 - 9 \leq 0 < 4m^2 + 4m - 9.$$

Pro první nerovnost je řešením $m \in \langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$, druhou nerovnost splňují všechna $m \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$. Konečný interval je průnikem těchto intervalů a také $m > 0$, tedy $m \in \left(\frac{-1+\sqrt{10}}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$. Nerovnice nemá řešení, neboť v tomto intervalu neleží žádné celočíselné m.

2) $\boldsymbol{m < 0}$

$$4m^2 - 9 \geq 0 > 4m^2 + 4m - 9.$$

Řešení nerovnic splňují m z intervalu $\left(\frac{-1-\sqrt{10}}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$, tedy $m = -2$.

Dosazením m do (2.2.11) získáme **výsledek $\boldsymbol{x = -\frac{9}{8}}$.**

Výsledek pro ukázku vypočítáme dosazením do odvozeného vzorce z kapitoly (2.2.1) pro podmínku 6,

$$x = -\frac{c}{am}, \qquad \text{kde } m \in \left(\frac{-1-\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2}, -\sqrt{\frac{-c}{a}} \right\rangle \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-\frac{4c}{a}}}{2}, \sqrt{\frac{-c}{a}} \right\rangle, \ m \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\frac{-9}{4m}, \qquad \text{kde } m \in \left(\frac{-1-\sqrt{1+\frac{36}{4}}}{2}, -\sqrt{\frac{9}{4}} \right\rangle \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1+\frac{36}{4}}}{2}, \sqrt{\frac{9}{4}} \right\rangle, \ m \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\frac{-9}{4m}, \qquad \text{kde } m \in \left(\frac{-1-\sqrt{10}}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{-1+\sqrt{10}}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle, \ m \in \mathbb{Z}.$$

Skutečně $\boldsymbol{m = -2, x = -\frac{9}{8}}$.

Příklad 4. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$2x\lfloor x \rfloor - 5x = 3.$$

Řešení:

Označíme $\lfloor x \rfloor = m$ a vyjádříme x.

$$x = \frac{3}{2m-5} \tag{2.2.12}$$

Podmínka pro m je

$$m \leq \frac{3}{2m-5} < m + 1.$$

Rozdělíme postup na dva případy, kdy jmenovatel $2m - 5$ nabývá kladných a kdy záporných hodnot. Nulový být nemůže, neboť $m \in \mathbb{Z}$.

1) $\boldsymbol{m} > 2$

$$2m^2 - 5m - 3 \leq 0 < 2m^2 - 3m - 8.$$

První nerovnost řeší všechna $m \in \langle -\frac{1}{2}, 3\rangle$, druhou nerovnost splňují všechna $m \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{73}}{4}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{73}}{4}, \infty\right)$. Výsledný interval je průnikem těchto intervalů při dodržení $m > 2$, tedy $m \in \left(\frac{3+\sqrt{73}}{4}, 3\right\rangle$, to splňuje pouze $m = 3$.

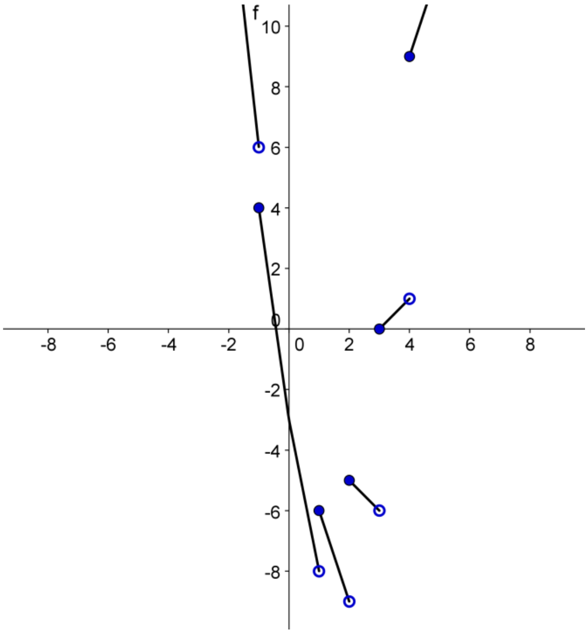
2) $\boldsymbol{m \leq 2}$

$$2m^2 - 5m - 3 \geq 0 > 2m^2 - 3m - 8.$$

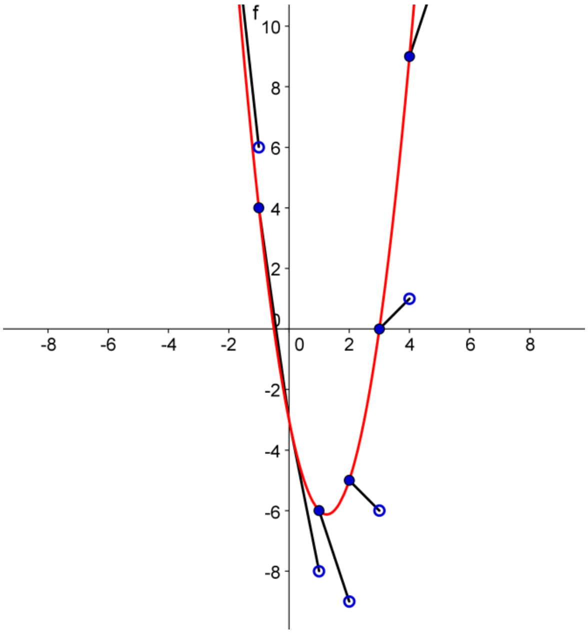
Nerovnice řeší všechna celočíselná m z intervalu $\left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}, -\frac{1}{2}\right\rangle$, to splňuje pouze $m = -1$. Dosazením m do rovnice (2.2.12) získáme řešení příkladu 4,

$$\boldsymbol{x = -\frac{3}{7}} \text{ a } \boldsymbol{x = 3}.$$

Graf 8 a graf 9 zobrazuje průběh funkce $f(x) = 2x\lfloor x\rfloor - 5x - 3$. Pro zajímavost je na grafu 9 červeně zobrazen průběh funkce $g(x) = 2x^2 - 5x - 3$.



Graf 8



Graf 9

2.3 Shrnutí strategie řešení úloh z předchozích kapitol

Pro řešení rovnic z kapitol (2.1) a (2.2) jsme využívali jednotného postupu. V rovnicích se funkce dolní celá část objevovala maximálně jednou a obsahovala pouze samostatnou neznámou. Postup byl následující.

1. Rovnici upravíme pomocí algebraických úprav na vhodný tvar.

2. Proměnnou m označíme $\lfloor x \rfloor$.

3. Z rovnice vyjádříme neznámou x, pokud to je možné. Výraz, jenž je roven x, označme například $V_{(m)}$.

4. Řešíme dvojici nerovnic $m \leq V_{(m)} < m + 1$.

5. Vyřešením nerovnic získáme pro m interval I, z něhož m, kde $m \in \mathbb{Z}$, vybíráme.

6. Hodnoty m z intervalu I dosadíme do $V_{(m)}$ a tím získáme všechna řešení pro neznámou x.

2.4 Řešitelnost funkce celá část složené s polynomickou funkcí

Z předešlých kapitol již umíme řešit rovnice $a\lfloor x \rfloor + bx + c = 0$ a $ax\lfloor x \rfloor + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Poznatků využijeme pro řešení některých dalších typů rovnic obsahujících funkci celá část čísla.

Na začátku připomeňme funkční definici polynomu.

„Funkci P s definičním oborem $\mathbb{R}$ nazveme polynom, jestliže existují reálná čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, že pro každé reálné číslo x platí

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

což budeme též stručně psát jako

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

(Demlová, Pondělíček, 2000, s. 5)

Funkce dolní celá část se v předchozích příkladech vyskytovala v rovnici pouze jednou. V kapitole (2.2.1) jsme k lineární funkci $v(x) = bx + c$, kde $b, c \in \mathbb{R}$, přičetli funkci $w(x) = a\lfloor x \rfloor$, kde $a \in \mathbb{R}$, čímž vznikla funkce $f(x) = a\lfloor x \rfloor + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že v je polynomická funkce. Variant, jak „zakomponovat" funkci w do obecné polynomické funkce P, je nespočet. Odvozovat obecná řešení by bylo velmi zdlouhavé a neefektivní, proto ukažme na konkrétním příkladu jeden ze způsobů možného řešení těchto rovnic.

Příklad 5. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x^2\lfloor x \rfloor - x\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor - 2 = 0.$$

Řešení:

Označíme $\lfloor x \rfloor = m$,

$$x^2 m - xm + m - 2 = 0. \tag{2.4.1}$$

Rovnici s polynomickou funkcí, jejíž koeficienty jsou

$$a_0 = m - 2, a_1 = -m, a_2 = m,$$

vyřešíme postupem z kapitoly (2.2.1), kdy vyjádříme x. Kořeny kvadratické rovnice (2.4.1) jsou

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{(-m)^2 - 4m(m-2)}}{2m} = \frac{m \pm \sqrt{-3m^2 + 8m}}{2m}. \tag{2.4.2}$$

Ve jmenovateli rovnice (2.4.2) je m. Musíme ověřit, že v rovnici (2.4.2) nedělíme nulou. Pokud by $m = 0$ pak $\lfloor x \rfloor = m$ a $x \in \langle 0, 1)$. Snadno se přesvědčíme, že $x \in \langle 0, 1)$ neřeší původní rovnici. Úprava na rovnici (2.4.2) je korektní. Dalším krokem je vyřešit nerovnice

$$m \leq \frac{m \pm \sqrt{-3m^2 + 8m}}{2m} < m + 1. \tag{2.4.3}$$

Řešit nerovnice (2.4.3) postupem z předchozích kapitol by zabralo mnoho času. Pro jejich jednodušší a rychlejší řešení využijme třech podmínek vyplývajících z těchto nerovnic: 1) $m \in \mathbb{Z}$, 2) výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, tedy $-3m^2 + 8m \geq 0$ a 3) jmenovatel v (2.4.2) je různý od nuly. Z druhé podmínky plyne

$$m(8-3m) \leq 0, \text{ pak } m \in \left\langle 0, \frac{8}{3} \right\rangle.$$

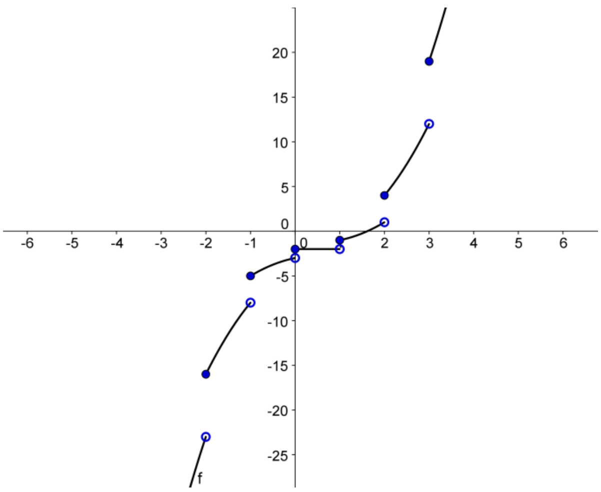
Trojici předchozích podmínek splňují pouze $m = 1$ a $m = 2$ ($m = 0$ jsme již vyloučili). Dosazením m do (2.4.2) získáme čtveřici hodnot pro x

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 0.$$

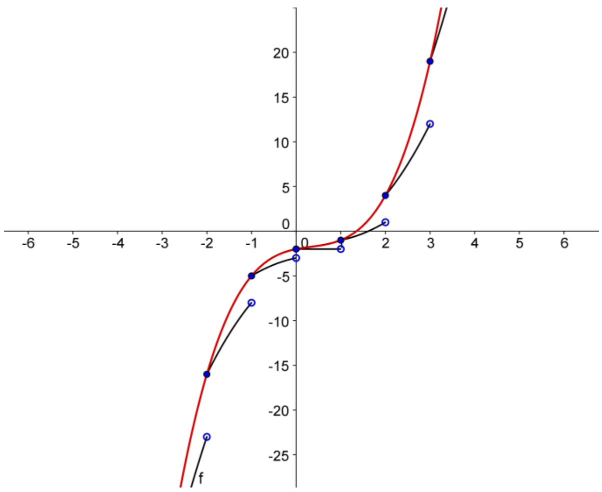
Zdálo by se, že řešení již máme, ovšem neověřili jsme, která m skutečně řeší nerovnice (2.4.3). Provedeme zkoušku. Výsledkem zkoušky je, že rovnici splňuje pouze jediné x, konkrétně x_1.

Výsledek $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Funkce z příkladu 5, $f(x) = x^2\lfloor x \rfloor - x\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor - 2$, je zobrazena na grafu 10 a 11. Červenou křivku v grafu 11 reprezentuje funkce $g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.



Graf 10



Graf 11

Jiný druh rovnice můžeme získat složením, přičtením či vynásobením rozdílných výrazů ve funkci celá část čísla s funkcí polynomickou. Nechť v je funkce dána předpisem $v(x) = x + k$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Složme ji s funkcí $w(x) = \lfloor x \rfloor$. Výslednou funkci zapišme ve tvaru

$$w(v(x)) = \lfloor x + k \rfloor.$$

Jelikož k je celé číslo, můžeme funkci zapsat takto:

$$w(v(x)) = \lfloor x \rfloor + k.$$

Tím jsme rozdělili složenou funkci na součet funkce celá část a konstanty. Konkrétní úpravy rovnic a postup řešení ukážeme v příkladu 6. Postup řešení rovnice $\lfloor ax + b \rfloor = cx + d$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$, popíšeme podrobně v kapitole (2.5)

Příklad 6. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{x\lfloor x-3 \rfloor}{3} - \frac{x\lfloor x+4 \rfloor}{4} - 12 = 0. \tag{2.4.4}$$

Řešení:

Postupnými úpravami pro dolní celou část a algebraickými úpravami získáváme

$$\frac{x(\lfloor x \rfloor - 3)}{3} - \frac{x(\lfloor x \rfloor + 4)}{4} - 12 = 0,$$

$$\frac{x\lfloor x \rfloor - 3x}{3} - \frac{x\lfloor x \rfloor + 4x}{4} - 12 = 0,$$

$$x\lfloor x \rfloor + 18x + 72 = 0.$$

Označíme $\lfloor x \rfloor = m$.

$$xm + 18x + 72 = 0$$

$$x = \frac{-72}{m+18} \tag{2.4.5}$$

Stejným postupem jako v předchozích příkladech vyřešíme nerovnice pro m.

$$m \leq \frac{-72}{m+18} < m + 1$$

1) $\boldsymbol{m} > -18$

$$m^2 + 18m + 72 \leq 0 < m^2 + 19m + 90,$$

$$m \in \langle -12, -10) \cup (-9, -6\rangle.$$

2) $\boldsymbol{m} < -18$

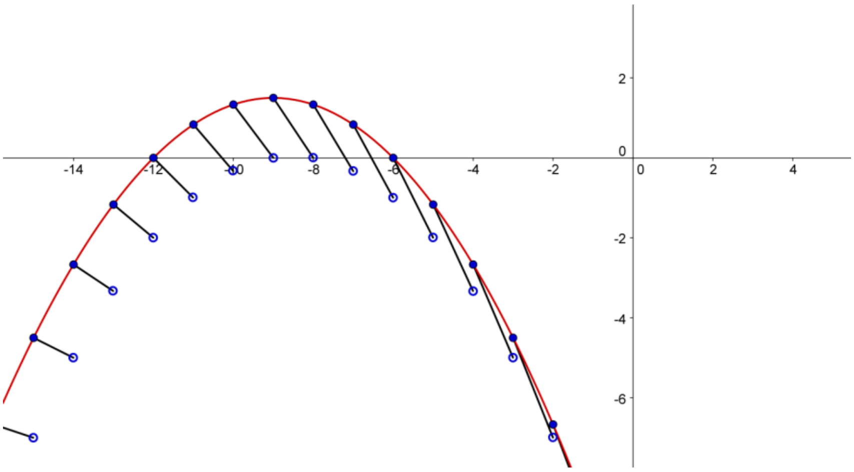
$$m^2 + 18m + 72 \geq 0 > m^2 + 19m + 90,$$

$$m \in \emptyset.$$

Pro neznámou m dostáváme celkem pět řešení $m \in \{-12, -11, -8, -7, -6\}$. Dosadíme m do rovnice (2.4.5). Řešení rovnice (2.4.4) splňují

$$\boldsymbol{x \in \left\{-12, -\frac{72}{7}, -\frac{36}{5}, -\frac{72}{11}, -6\right\}}.$$

Funkce z příkladu 6, $f(x) = \frac{x\lfloor x-3 \rfloor}{3} - \frac{x\lfloor x+4 \rfloor}{4} - 12$, je zobrazena na grafu 12 černou barvou s modrými body nespojitosti. Červená křivka je grafem funkce $g(x) = x^2 + 18x + 72$, na níž zároveň leží body, které leží i na grafu funkce $f(x)$.



Graf 12

2.5 Řešitelnost rovnice $\lfloor ax+b \rfloor = cx+d$

2.5.1 Obecné hledání řešení rovnice typu $\lfloor ax+b \rfloor = cx+d$

Řešitelností rovnice typu $\lfloor ax+b \rfloor = cx+d,$ kde $a,b,c,d \in \mathbb{R} \wedge a,c \neq 0,$ se zabývá i E. Calda v (Calda, 1995). Postup řešení představuje na konkrétním příkladu a poté jej shrnuje do několika řádků. Po vyřešení příkladu popisuje postup takto:

„Z řešení tohoto příkladu je vidět, že řešit rovnici typu $[ax+b] = cx+d$ *znamená řešit soustavu dvou lineárních nerovnic a ze všech jejích řešení vybrat ta* x, *která splňují podmínku* $[cx+d] \in \mathbb{Z}$.*"*

(Calda, 1995, s. 10)

V této kapitole popíšeme postup řešení poněkud podrobněji. Jedním z důvodů je, aby i čtenář, který nemá s řešením rovnic s dolní celou částí příliš zkušeností, snáze pronikl do řešitelských postupů z této oblasti. Dalším důvodem je ukázat možné počty řešení těchto rovnic. Výsledky ilustrujeme na dvou příkladech.

Úkolem je řešit rovnici

$$\lfloor ax+b \rfloor = cx+d, \qquad \text{kde } a,b,c,d \in \mathbb{R}. \tag{2.5.1}$$

Dále předpokládejme, že $a,b,c,d \neq 0$. Postup rozdělme do tří etap.

1. Z vlastností dolní celé části je zřejmé, že

$$cx+d \in \mathbb{Z},$$

aby mohla mít rovnice (2.5.1) vůbec nějaké řešení pro $x \in \mathbb{R}$.

Jinak řečeno, máme řešit rovnici

$$cx+d = k, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Vyjádříme z rovnice neznámou x, čímž získáme první podmínku pro výsledné řešení původní rovnice (2.5.1).

$$x = \frac{k-d}{c}, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Z kapitoly 2.1.1 umíme řešit rovnici

$$\lfloor x \rfloor - n = 0, \qquad \text{kde } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.5.2}$$

Rovnice má řešení pro všechna x, která splňují podmínku

$$n \leq x < n + 1, \tag{2.5.3}$$

$$\text{tedy } x \in \langle n, n + 1).$$

Upravíme-li rovnici (2.5.2) na tvar $\lfloor x \rfloor = n$ a porovnáme-li levé, resp. pravé strany této rovnice a rovnice (2.5.1), tj. $\lfloor ax + b \rfloor = cx + d$, vidíme, že v první rovnici se vyskytuje dolní celá část z x a ve druhé rovnici dolní celá část z $ax + b$. Na pravé straně je v první rovnici n, ve druhé rovnici výraz $cx + d$. Této skutečnosti využijeme v postupu řešení rovnice (2.5.1). V nerovnici (2.5.3) nahradíme n výrazem $cx + d$ a x výrazem $ax + b$, čímž získáváme dvojici nerovností

$$cx + d \leq ax + b < cx + d + 1, \tag{2.5.4}$$

které upravíme na tvar

$$d - b \leq x(a - c) < d - b + 1.$$

Řešení nerovnice (2.5.4) se rozděluje na tři případy: a) $a - c > 0$, b) $a - c < 0$ a c) $a - c = 0$.

a) $\boldsymbol{a - c > 0}$

$$\frac{d - b}{a - c} \leq x < \frac{d - b + 1}{a - c}, \qquad x \in I_a, \qquad \text{kde } I_a = \left\langle \frac{d - b}{a - c}, \frac{d - b + 1}{a - c} \right).$$

b) $\boldsymbol{a - c < 0}$

$$\frac{d - b}{a - c} \geq x > \frac{d - b + 1}{a - c}, \qquad x \in I_b, \qquad \text{kde } I_b = \left(\frac{d - b + 1}{a - c}, \frac{d - b}{a - c} \right\rangle.$$

c) $\boldsymbol{a - c = 0}$

$$d - b \leq 0 < d - b + 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3. Všechna x z intervalu I_a, I_b či z $\mathbb{R}$, jež splňují nerovnosti (2.5.4), nejsou ovšem řešením původní rovnice (2.5.1). Nesmíme zapomenout, že x musí splňovat podmínku z první etapy řešení, kterou je

$$x = \frac{k-d}{c}, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z}$$

Výsledné řešení rovnice $\lfloor ax+b \rfloor = cx+d$ splňují všechna x, pro něž platí podmínka z první etapy a zároveň leží v intervalu, jež jsme odvodili v druhé etapě, tedy:

a) Pokud $\boldsymbol{a-c>0}$, pak

$$x = \frac{k-d}{c} \wedge x \in \left\langle \frac{d-b}{a-c}, \frac{d-b+1}{a-c} \right), \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Analogicky pokud $\boldsymbol{a-c<0}$, pak

$$x = \frac{k-d}{c} \wedge x \in \left(\frac{d-b+1}{a-c}, \frac{d-b}{a-c} \right\rangle, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

c) Jestliže $\boldsymbol{a=c}$, pak: Pokud je splněna nerovnost $d \leq b < d+1$, má původní rovnice (2.5.1) nekonečně mnoho řešení, kterými jsou všechna

$$x = \frac{k-d}{c}, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z},$$

pokud nerovnost $d \leq b < d+1$ splněná není, původní rovnice (2.5.1) nemá řešení.

Pro lepší porozumění aplikujeme novou teorii na příkladu 7 a příkladu 8. V kapitole (2.5.3) ukážeme, s využitím geometrie pro dvojici nerovností (2.5.4), možný počet řešení původní rovnice (2.5.1). Ukážeme čtenářovi, co nerovnosti (2.5.4) popisují.

2.5.2 Řešené příklady

Příklad 7. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\lfloor 8x-3 \rfloor - 7x + 2 = 0.$$

Řešení:

Rovnici upravíme na tvar

$$\lfloor 8x - 3 \rfloor = 7x - 2. \qquad (2.5.5)$$

Z podmínek pro dolní celou část vyplývá, že

$$7x - 2 \leq 8x - 3 < 7x - 2 + 1,$$

$$1 \leq x < 2.$$

Vybíráme taková x z intervalu $\langle 1, 2)$, která splňují podmínku

$$7x - 2 \in \mathbb{Z}.$$

Podmínku vyřešíme jako rovnici $7x - 2 = k$, kde $k \in \mathbb{Z}$,

$$x = \frac{k+2}{7}. \qquad (2.5.6)$$

Již víme, že x musí být z intervalu $\langle 1, 2)$. Pro usnadnění řešení zapišme krajní hodnoty intervalu $\langle 1, 2)$, tedy hodnotu 1 a hodnotu 2, ve tvaru zlomku, kde jmenovatel bude stejný jako jmenovatel pravé strany rovnice (2.5.6). Upravili jsme zápis intervalu na $\left\langle \frac{7}{7}, \frac{14}{7} \right)$. Dále se zabýváme pouze čitateli, neboť jmenovatele hodnot v intervalu jsou stejné jako jmenovatel v rovnici (2.5.6). Vyřešíme, kdy čitatel $k + 2 = 7$ a kdy $k + 2 = 14$. Hodnoty 7 nabývá pro $k = 5$ a hodnoty 14 pro $k = 12$. Výsledná řešení obdržíme dosazením do rovnice (2.5.6), za $k \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Řešením rovnice (2.5.5) jsou

$$\boldsymbol{x \in \left\{1, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}, \frac{11}{7}, \frac{12}{7}, \frac{13}{7}\right\}}.$$

Příklad 8. Určete počet řešení rovnice

$$\left\lfloor \frac{12x - 5}{6} \right\rfloor = 2x - 1. \qquad (2.5.7)$$

Řešení:

Analogickým postupem jako v příkladu 7 nejprve vyřešíme dvojici nerovnic vyplývajících z nerovnic (2.5.3), tedy $n \leq x < n + 1$, kde $\lfloor x \rfloor = n$:

$$2x - 1 \leq \frac{12x - 5}{6} < 2x - 1 + 1,$$

$$12x - 6 \leq 12x - 5 < 12x,$$

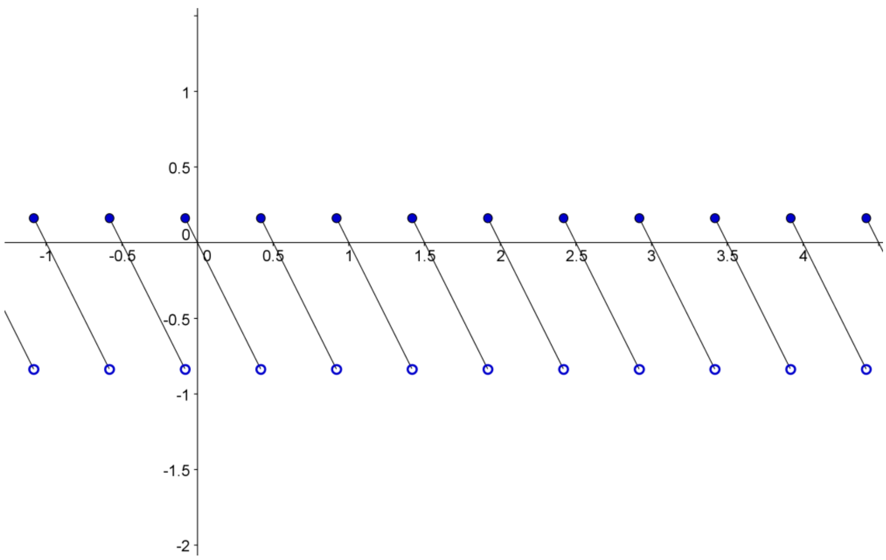
$$-6 \leq -5 < 0.$$

Nerovnice splňují všechna $x \in \mathbb{R}$. V této fázi můžeme konstatovat, že rovnice (2.5.7) má nekonečně mnoho řešení, viz kapitola 2.5.1, kdy $a = c$. Ovšem všechna $x \in \mathbb{R}$ nejsou řešením rovnice (2.5.7). Pokud chceme najít všechna x, jež jsou řešením rovnice (2.5.7), musíme ještě splnit podmínku $2x - 1 \in \mathbb{Z}$. Tu splňují všechna

$$x = \frac{k+1}{2}, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Odpověď: Rovnice (2.5.7) má nekonečně mnoho řešení. Jednotlivá řešení lze zapsat

$$\boldsymbol{x = \frac{k+1}{2}}, \qquad \textbf{kde } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}.$$



Graf 13: $f(x) = \left\lfloor \frac{12x-5}{6} \right\rfloor - 2x + 1$

2.5.3 Grafické znázornění počtu řešení

Tvrzení. Pro rovnici

$$\lfloor ax + b \rfloor = cx + d, \qquad \text{kde } b, d \in \mathbb{R} \wedge a, c \in \mathbb{R} - \{0\}, \tag{2.5.8}$$

platí: Pokud $a = c$ a $b \in \langle d, d+1)$, pak má rovnice nekonečně mnoho řešení.

Důkaz. Postupem z úvodu této kapitoly získáváme pro řešení rovnice dvojici podmínek pro x,

$$cx + d \in \mathbb{Z}, \tag{2.5.9}$$

$$cx + d \leq ax + b < cx + d + 1. \tag{2.5.4}$$

Nerovnice (2.5.4) za podmínek $a = c$ upravíme na tvar

$$d \leq b < d + 1.$$

Podmínku (2.5.4) splňují všechna x. Řešení rovnice (2.5.8) určuje pouze podmínka (2.5.9). Výraz $cx + d$ položme roven k, kde $k \in \mathbb{Z}$ a z rovnice vyjádřeme x,

$$cx + d = k, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k - d}{c}. \tag{2.5.10}$$

Jelikož $k \in \mathbb{Z}$, pravá strana rovnice (2.5.10) nabývá nekonečně mnoha hodnot. Tvrzení je dokázáno.

Ještě ukážeme geometrickou interpretaci nerovnic (2.5.4). Jednotlivé části nerovnic si lze představit jako rovnice přímek, označme je postupně p, q, r. Tedy

$$p\colon y_p = cx + d, \qquad q\colon y_q = ax + b, \qquad r\colon y_r = cx + d + 1.$$

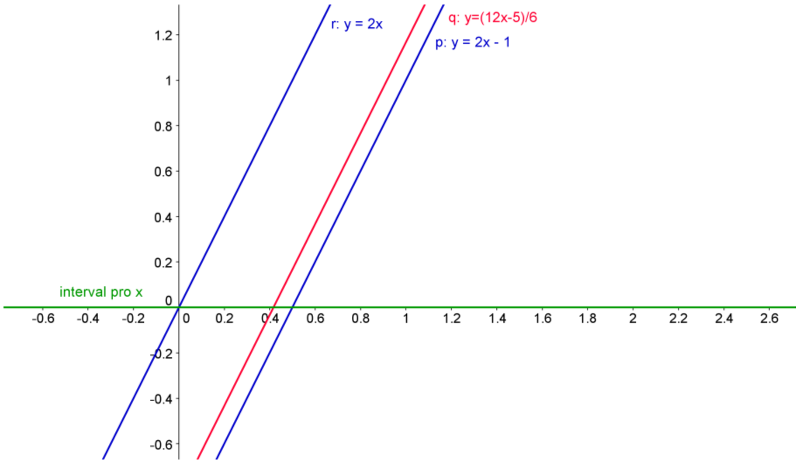
Pokud $a = c$, pak přímky p, q, r mají stejnou směrnici $k, k = a = c$. Přímky jsou rovnoběžné, a pokud platí $b \in (d,\ d + 1)$ a $b \neq 0$, jsou p, q, r rovnoběžné různé a přímka q leží mezi přímkami p a r. To znamená, že pro každé x je hodnota y_q vždy větší, resp. menší než hodnota y_p, resp. y_r. Pokud $b = d$, jsou přímky q a p totožné. Pro každé x je hodnota y_q vždy rovna hodnotě y_p a menší než hodnota y_r. Získáváme, že pokud $b \in \langle d,\ d + 1)$, $b \neq 0$ a $a = c$, platí $y_p \leq y_q < y_r$. Nerovnice (2.5.4) má proto řešení pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Stejný případ nastal v příkladu 8, ukažme jej na grafu 14. Připomeňme nerovnice z tohoto příkladu:

$$2x - 1 \leq \frac{12x - 5}{6} < 2x - 1 + 1. \tag{2.5.11}$$

Graf 14 zobrazuje jednotlivé přímky

$$p: y_p = 2x - 1, \qquad q: y_q = \frac{12x - 5}{6}, \qquad r: y_r = 2x.$$



Graf 14

Přímky p, q, r mají stejnou směrnici $k = 2$ a přímka q leží mezi přímkami p, r, neboť $-1 < -\frac{5}{6}$ a $-\frac{5}{6} < 0$. Pak všechna $x \in \mathbb{R}$ (zelená přímka) jsou řešením nerovnic (2.5.11). Druhou podmínkou $x = \frac{k+1}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$, pouze vybereme ta x, která řeší původní rovnici $\left\lfloor \frac{12x-5}{6} \right\rfloor = 2x - 1$. Těch je nekonečně mnoho, neboť $k \in \mathbb{Z}$.

Tvrzení. Pro rovnici

$$\lfloor ax + b \rfloor = cx + d, \qquad \text{kde } b, d \in \mathbb{R} \wedge a, c \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{2.5.12}$$

platí: Pokud $a = c$ a $b \notin \langle d, d + 1)$, pak rovnice nemá řešení.

Důkaz. Podmínku $cx + d \leq ax + b < cx + d + 1$ (2.5.4) upravíme do tvaru

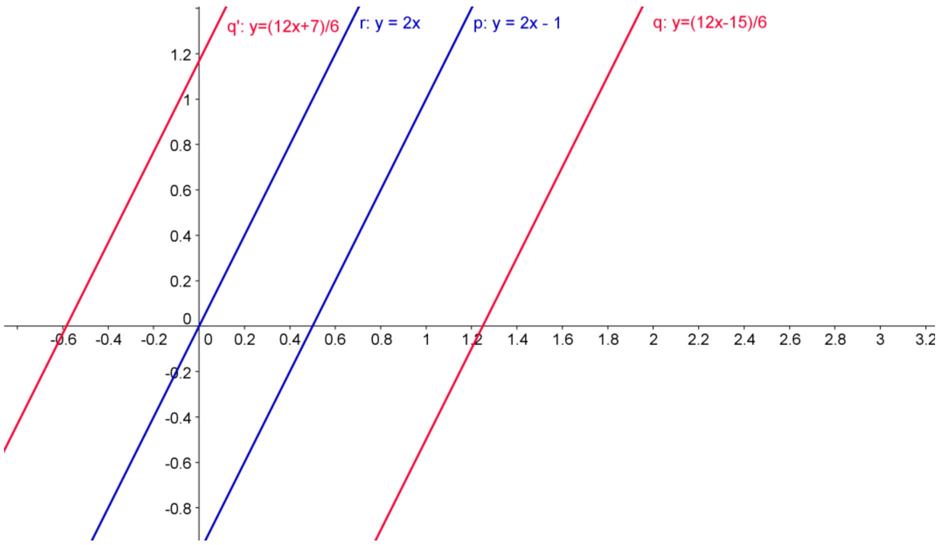
$$d \leq b < d + 1. \tag{2.5.13}$$

Jelikož $b \in (-\infty, d) \cup \langle d + 1, \infty)$ a $b \neq 0$ nemá nerovnice (2.5.13) smysl a neřeší ji žádné x. Rovnice (2.5.12) nemá řešení. Tvrzení je dokázáno.

Geometrická interpretace. Části nerovnic, jež vyjadřují rovnice přímek, označme p, q, r

$$p: y_p = cx + d, \qquad q: y_q = ax + b, \qquad r: y_r = cx + d + 1.$$

Pokud $a = c$, pak přímky p, q, r mají stejnou směrnici $k, k = a = c$. Přímky jsou rovnoběžné, a pokud platí $b < d$ nebo $b > d + 1$, jsou p, q, r rovnoběžné různé a přímka q neleží mezi přímkami p a r. To znamená, že pro každé x, kdy $b < d$, je hodnota y_q vždy menší než hodnota y_p a y_r. Pro každé x, kdy $b > d + 1$, je hodnota y_q vždy větší než hodnota y_p a y_r. Pokud $b = d + 1$, jsou přímky q a r totožné. Pro každé x je hodnota y_q vždy větší než hodnota y_p a rovna hodnotě y_r. Získáváme, že pokud $b \in (-\infty, d) \cup \langle d + 1, \infty)$, $b \neq 0$ a $a = c$, neplatí $y_p \leq y_q < y_r$; nerovnice (2.5.4) nejsou splněny pro žádné x, a proto nemá soustava nerovnic (2.5.4) řešení. Situace je znázorněna na grafu 15 pro konkrétní případy, viz popis grafu 15.



Graf 15

Popis grafu 15.

1. Rovnice $\left\lfloor \frac{12x+7}{6} \right\rfloor = 2x - 1$ má podmínku $2x - 1 \leq \frac{12x+7}{6} < 2x$, která nemá řešení pro žádné x. Koeficient $a = 2 = c, b = \frac{7}{6}, d = -1$, tedy $b > d$. Trojici přímek z podmínky jsme označili v grafu písmeny p, q', r.

2. Rovnice $\left\lfloor \frac{12x-15}{6} \right\rfloor = 2x - 1$ má podmínku $2x - 1 \leq \frac{12x-15}{6} < 2x$, která nemá řešení pro žádné x. Koeficient $a = 2 = c, b = -\frac{15}{6}, d = -1$, tedy $b < d$. Trojici přímek z podmínky jsme označili v grafu písmeny p, q, r.

Tvrzení. Pro rovnici

$$\lfloor ax + b \rfloor = cx + d, \qquad \text{kde } b, d \in \mathbb{R} \wedge a, c \in \mathbb{R} - \{0\}, \tag{2.5.14}$$

platí: Pokud $a \neq c$, pak má rovnice konečný počet řešení.

Důkaz. Pro řešení rovnice získáváme dvě podmínky,

$$cx + d \leq ax + b < cx + d + 1, \tag{2.5.15}$$

$$cx + d \in \mathbb{Z}. \tag{2.5.16}$$

Začneme podmínkou (2.5.15), jejíž řešení rozdělíme na dva případy, $a - c > 0$ a $a - c < 0$. Oba případy zapisujeme vedle sebe a jednotlivě řešíme pod sebou.

$$a - c > 0, \qquad a - c < 0,$$

$$\frac{d-b}{a-c} \leq x < \frac{d-b+1}{a-c}, \qquad \frac{d-b}{a-c} \geq x > \frac{d-b+1}{a-c}. \tag{2.5.17}$$

Podmínku (2.5.16) přepíšeme do tvaru $cx + d = k$, kde $k \in \mathbb{Z}$, a vyjádříme neznámou x,

$$x = \frac{k-d}{c}. \tag{2.5.18}$$

Pokud dosadíme pravou stranu rovnice (2.5.18) za neznámou x do nerovnic (2.5.17), získáváme nerovnice

$$\frac{d-b}{a-c} \leq \frac{k-d}{c} < \frac{d-b+1}{a-c}, \qquad \frac{d-b}{a-c} \geq \frac{k-d}{c} > \frac{d-b+1}{a-c}. \tag{2.5.19}$$

Vyřešením nerovnic (2.5.19) získáme interval I, resp. I' pro k a pokud veškerá $k \in \mathbb{Z}$ z tohoto intervalu dosadíme do (2.5.18), obdržíme jednotlivá řešení rovnice (2.5.14). Intervaly pro k jsou:

1. Pokud $(a - c > 0 \wedge c > 0) \vee (a - c < 0 \wedge c < 0)$ pak

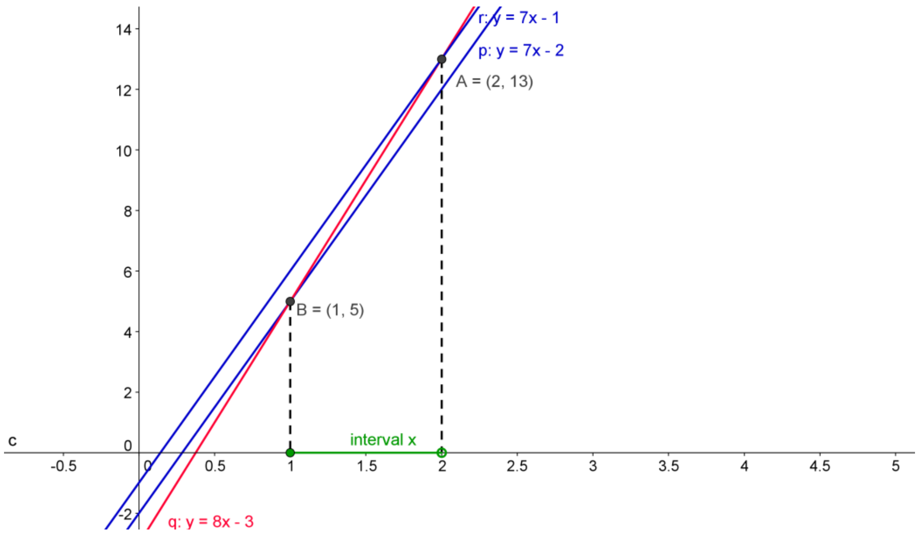
$$k \in I, \qquad \text{kde } I = \left\langle d + \frac{c(d-b)}{a-c}, \frac{c(d-b+1)}{a-c} + d \right). \tag{2.5.20}$$

2. Pokud $(a - c < 0 \wedge c > 0) \vee (a - c > 0 \wedge c < 0)$ pak

$$k \in I', \qquad \text{kde } I' = \left(d + \frac{c(d-b+1)}{a-c}, \frac{c(d-b)}{a-c} + d \right\rangle. \tag{2.5.21}$$

Tím jsme dokázali, že k je z omezeného intervalu I, resp. I'. Pokud všechny $k \in \mathbb{Z}$ z intervalu I, resp. I' dosadíme do rovnice $x = \frac{k-d}{c}$, získáme jednotlivá řešení rovnice (2.5.14), kterých je konečný počet. Tím je tvrzení dokázáno.

Geometrickou interpretaci příkladu 7, kde nastal stejný případ, popisuje následující graf.



Graf 16

Popis grafu 16.

Graf popisuje velikost intervalu (zelená barva), ze kterého x může být řešením rovnice z příkladu 7

$$\lfloor 8x - 3 \rfloor - 7x + 2 = 0.$$

Koeficient $a = 8, b = -3, c = 7, d = -2$. Podle předchozích postupů máme řešit nerovnice

$$7x - 2 \leq 8x - 3 < 7x - 1. \tag{2.5.22}$$

Jednotlivé strany nerovnic jsou lineární funkce, v grafu červená přímka a modré přímky, které jsme označili: $p: y = 7x - 2$, $q: y = 8x - 3$ a $r: y = 7x - 1$. Bod $A[2, 13]$, resp. $B[1, 5]$ je průsečík přímek q a r resp. q a p. Nerovnici (2.5.22) splňují všechna $x \in \langle 1, 2)$ (označeno zeleně).

O nerovnici $cx + d \leq ax + b < cx + d + 1$, kde $b, d \in \mathbb{R}$, $a, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ a $a \neq c$, můžeme z předchozího tvrzení vyvodit, že čím více se poměr $\frac{a}{c}$, kde $a, c \lesseqgtr 0$, blíží jedné, tím získáváme pro neznámou x větší interval. To znamená, že mohou přibýt další řešení původní rovnice $\lfloor ax + b \rfloor = cx + d$.

2.6 Řešitelnost rovnice $\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor cx + d \rfloor$

2.6.1 Obecné hledání řešení rovnice typu $\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor cx + d \rfloor$

Řešitelnost rovnice typu $\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor cx + d \rfloor$ je podrobně popsána na příkladu v (Calda, 1995). Příklad zde uvádět nebudeme, postup řešení a hlavní myšlenku vysvětlíme obecně pro koeficienty a, b, c, d.

Postup řešení obecně. Rovnici

$$\lfloor ax + b \rfloor = \lfloor cx + d \rfloor, \qquad \text{kde } a, b, c, d \in \mathbb{R} - 0, \tag{2.6.1}$$

nahradíme soustavou rovnic

$$\lfloor ax + b \rfloor = k, \qquad \lfloor cx + d \rfloor = k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}. \tag{2.6.2}$$

Pro funkci dolní celá část platí podmínky

$$k \leq ax + b < k + 1, \qquad k \leq cx + d < k + 1. \tag{2.6.3}$$

Řešení dvojice nerovnic se rozděluje na čtyři případy 1) $a, c > 0$, 2) $a, c < 0$, 3) $a > 0$ a $c < 0$, 4) $a < 0$ a $c > 0$. Začneme případem 1) $a, c > 0$. První nerovnici z (2.6.3) splňují všechny $x \in I_1$, kde

$$I_1 = \left\langle \frac{k-b}{a}, \frac{k-b+1}{a} \right), \tag{2.6.4}$$

druhou nerovnici z (2.6.3) splňují všechna $x \in I_2$, kde

$$I_2 = \left\langle \frac{k-d}{c}, \frac{k-d+1}{c} \right). \tag{2.6.5}$$

Pro dvojici intervalů I_1 a I_2 s parametrem $k \in \mathbb{Z}$ hledáme takové k, pro které je $I_1 \cap I_2$ neprázdný. Průnik intervalů I_1 a I_2 nazvěme I. Řešení původní rovnice (2.6.1) musí ležet v I. Průnik intervalů I_1 a I_2 bude neprázdný pro všechny hodnoty k, které splňují

$$\frac{k-b}{a} < \frac{k-d+1}{c} \wedge \frac{k-b+1}{a} > \frac{k-d}{c}. \tag{2.6.6}$$

Poznámka: Podmínky (2.6.6) přiblížíme čtenáři jednoduchým příkladem s cyklisty. Představme si dvojici cyklistů jedoucích proti sobě při západu slunce. Každý z cyklistů vrhá na zem stín. Jakmile se na cyklostezce potkají, jejich stíny se od předních kol začnou slévat do jednoho společného stínu, který se zvětšuje až do nějakého maximálního společného stínu. Jedou-li stále dál, přední kolo jednoho cyklisty se dostane za zadní kolo druhého a společný stín se začne zmenšovat, až se v jistém okamžiku společný stín, který cyklisté doposud vrhají, rozdělí na dva. Každý cyklista nyní na zem vrhá opět svůj stín jako na začátku, ale cyklisté se od sebe již vzdalují. V našem případě cyklisty představují intervaly I_1 a I_2 a fotografii cyklistů, např. každou vteřinu, představuje parametr k (k ve skutečnosti představuje i měnící se délku jízdního kola, což je v reálném světě zatím nemožné). Zajímá nás, pro jaké k mají cyklisté na fotografii alespoň nějaký společný stín.

Vyřešením nerovnice (2.6.6) získáme všechna celočíselná k, pro něž je interval I neprázdný. Pro jednotlivá k spočítáme hodnoty intervalů I_1 a I_2, jejich průnik je řešením původní rovnice (2.6.1).

Analogicky bychom řešili podmínky kdy 2) $a, c < 0$, 3) $a > 0$ a $c < 0$, 4) $a < 0$ a $c > 0$. Ukažme situaci 1) $a, c > 0$ na konkrétním příkladu.

2.6.2 Řešené příklady

Příklad 9. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\left\lfloor \frac{x-3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2x+7}{3} \right\rfloor. \tag{2.6.7}$$

Řešení:

Rovnici nahradíme soustavou rovnic

$$\left\lfloor \frac{x-3}{2} \right\rfloor = k, \qquad \left\lfloor \frac{2x+7}{3} \right\rfloor = k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}. \tag{2.6.8}$$

Pro funkci dolní celá část musí platit podmínky

$$k \leq \frac{x-3}{2} < k+1, \qquad k \leq \frac{2x+7}{3} < k+1. \tag{2.6.3}$$

Vyřešením nerovnic (2.6.3) získáme dvojici intervalů I_1 a I_2,

$$x \in I_1, \qquad \text{kde } I_1 = \langle 2k+3, 2k+5),$$

$$x \in I_2, \qquad \text{kde } I_2 = \left\langle \frac{3k-7}{2}, \frac{3k-4}{2} \right).$$

V dalším kroku vyřešíme dvojici nerovnic

$$2k+5 > \frac{3k-7}{2} \text{ a } 2k+3 < \frac{3k-4}{2},$$

$$k > -17 \text{ a } k < -10,$$

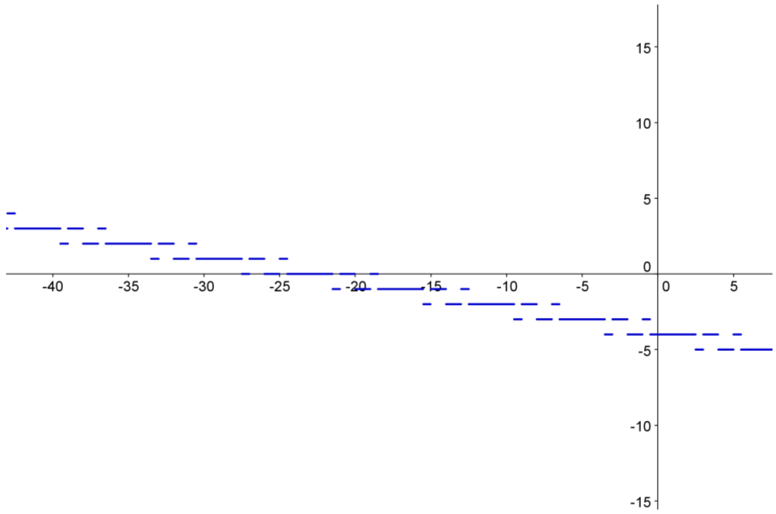
$$k \in \{-11, -12, -13, -14, -15, -16\}.$$

Dosazením jednotlivých k do intervalů I_1 a I_2 vypočítáme $I_1 \cap I_2$, odkud získáme řešení původní rovnice (2.6.7). Pro

$$k = -11 \text{ je } I_1 = \langle -19, -17), I_2 = \left\langle -20, -\frac{37}{2} \right), \text{ pak } x_1 \in \left\langle -19, -\frac{37}{2} \right).$$

Obdobným způsobem dopočítáme zbylá řešení.

Výsledek: $x \in \left\langle -\frac{55}{2}, -27 \right) \cup \langle -26, -25) \cup \left\langle -\frac{49}{2}, -\frac{43}{2} \right) \cup \langle -21, -20) \cup \left\langle -19, -\frac{37}{2} \right)$



Graf 17

Průběh funkce $f: y = \left\lfloor \frac{x-3}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2x+7}{3} \right\rfloor$ je zobrazen na grafu 17, body nespojitosti jsme v grafu nezobrazovali, graf by s nimi byl příliš nepřehledný.

2.7 Různé úlohy obsahující celou či necelou část čísla

Funkce celá a necelá část čísla se vyskytuje nejen v matematické oblasti, kterou je teorie čísel, ale i v oblastech, jako je například matematická analýza. Uvedeme zde dva příklady ze skript fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské (Pošta, Pošta, 2010). Pomocí celé části můžeme řešit i některé slovní úlohy, jak představuje E. Calda v (Calda, 1995). Příklady ukazujeme pouze jako „ochutnávku“, jejich řešení čtenář nalezne v odpovídající literatuře, proto je zde uvádět nebudeme.

Zadání příkladů.

1. *„Vypočtěte určitý Reimannův integrál*

$$\int_0^2 [e^x]\,dx,$$

hranaté závorky označují celou část.“ (Pošta, Pošta, 2010, s. 65)

2. *„Vypočtěte určitý Reimannův integrál*

$$\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,dx,$$

hranaté závorky označují celou část.“ (Pošta, Pošta, 2010, s. 66)

3. *„V oboru přirozených čísel řešte rovnici*

$$\left[\frac{1}{10}\right]+\left[\frac{2}{10}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{10}\right]+\left[\frac{n}{10}\right]=217."$$

(Herman a kol., 1996, s. 233)

4. *„Pro dané přirozené číslo* n *řešte v oboru kladných reálných čísel rovnici*

$$\left\lfloor x\sqrt{n^2-1}\right\rfloor = nx-1.$$

(Symbol $\lfloor r\rfloor$ *označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo* r*.)* *(J. Šimša)“*

(Horák, 2006a, s. 48)

5. *„Cyklista vyjel na svou trasu v 6 hodin ráno průměrnou rychlostí* $15\ Km\cdot h^{-1}$ *a vždy po ujetí dvaceti kilometrů odpočíval. Každý odpočinek trval třicet minut s výjimkou*

čtvrté zastávky, která trvala hodinu. Určete, jakou vzdálenost ujel, jestliže do cíle své cesty přijel v 16.30 hodin téhož dne.“

(Calda, 1995, s. 11)

6. *„Show that the* n*th element of the sequence*

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots$$

is $\left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$. *(The sequence contains exactly* m *occurrences of* m*.)“*

(Graham, Knuth, Patashinik, 2003, s. 97)

„Ukažte, že n*-tý prvek posloupnosti*

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots$$

je $\left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$. *(Posloupnost obsahuje právě* m *výskytů* m*.)“*[4]

2.8 Shrnutí poznatků druhé kapitoly

Ve druhé kapitole jsme ukázali strategie řešení několika typů rovnic s funkcí dolní celá část čísla. Prvním předpokladem pro jejich úspěšné řešení je vhodná algebraická úprava do některého tvaru rovnice z druhé kapitoly. Hlavním stavebním prvkem v postupu řešení je podmínka (1.1.3) pro dolní celou část čísla $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ či její modifikace (1.3.1) v podobě $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. Další postup je u každého typu rovnic již odlišný a jednotlivé kroky lze najít v příslušných kapitolách. Rovnice řešené ve druhé kapitole ověří především schopnost řešit lineární nerovnice či jejich soustavy a schopnost sjednotit více podmínek pro nalezení výsledného řešení.

Analogických postupů, které jsme odvodili pro rovnice s funkcí dolní celá část čísla, lze využít i pro řešení rovnic s horní celou částí čísla, samozřejmě s použitím podmínky (1.1.4).

[4] z angličtiny přeložil autor

ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s funkcemi celá a necelá část reálného čísla a ukázat řešitelnost některých typů rovnic obsahující funkci dolní celá část čísla. Stanovené cíle byly v práci splněny. Výklad jsem strukturoval od jednoduché látky po látku obtížnější. Odvozenou obecnou strategii řešení typové rovnice jsem pro lepší pochopení doplnil řešenými příklady s grafy a snažil se tak o co nejlepší porozumění problematiky funkce dolní celá část v rovnicích. Čtenář může využít nových znalostí při řešení podobných úloh v matematických olympiádách nebo v oborech, jako je elektrotechnika či informatika.

Za největší vlastní přínos bakalářské práce považuji odvození několika obecných řešení různých typů rovnic obsahující funkci dolní celá část. Práci je možno v budoucnu rozšířit o řešitelnost rovnic obsahující více proměnných či soustav rovnic obsahujících právě funkce celá či necelá část čísla. Problematiku celé a necelé části v rovnicích lze v budoucnu zpracovat didakticky.

Seznam použité literatury

BRATSCH, H.J. *Matematické vzorce.* 2. oprav. vyd. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1965.

CALDA, E. *Rovnice ve škole neřešené*. Praha : Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-88-7.

DEMLOVÁ, M.; PONDĚLÍČEK, B. *Úvod do algebry*. 2. vyd. Praha : ČVUT, 2000. ISBN 80-01-02144-0.

GRAHAM, R.L.; KNUTH, D.E.; PATASHNIK, O. *Concrete mathematics : A foundation for computer science*. 2nd ed. Reading (Mass.) : Addison-Wesley, 1994. ISBN 0-201-55802-5.

HERMAN, J.; KUČERA, R.; ŠIMŠA, J. *Metody řešení matematických úloh I.* 2. přeprac. vyd. Brno : Masarykova univerzita v Brně, 1996. ISBN 80-210-1202-1.

HORÁK, K., aj. 2006a. *53. ročník matematické olympiády na středních školách*. Praha : Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. ISBN 80-7015-025-4.

HORÁK, K., aj. 2006b. *54. ročník matematické olympiády na středních školách*. Praha : Jednota českých matematiků a fyziků, 2006. ISBN 80-7015-109-9.

IVERSON, K.E. *A programming language*. New York : Wiley, 1962.

NOVOTNÁ, J.; TRCH, M. *Algebra a teoretická aritmetika : Sbírka příkladů : 2. část – Polynomická algebra.* 2. dopl. vyd. Praha : Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-007-2.

NOVOTNÁ, J.; TRCH, M. *Algebra a teoretická aritmetika : Sbírka příkladů : 3. část – Základy algebry.* 2. oprav. vyd. Praha : Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-190-7.

ODVÁRKO, O. Matematika pro gymnázia – Funkce. 4. vyd. Praha : Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-357-8.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 9.přeprac. vyd. Praha : Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

POŠTA, S.; POŠTA, P. *Analýza v příkladech 2.* Praha : České vysoké učení technické v Praze, 2010. ISBN 978-80-01-04556-5.

VESELÝ, J. *Základy matematické analýzy : První díl*. Praha : Matfyzpress, 2004. ISBN 80-86732-29-0.